έκτακτη ΟΣΣ 2013
01/06/2013

ΠΛΗ22/ΑΘΗ-3

Ν.Δημητρίου

Σημείωση

Σκοπός της έκτακτης ΟΣΣ είναι να δοθεί ένα κίνητρο για μια πρώτη επανάληψη και να αναπτυχθεί το σχετικό σκεπτικό στην επίλυση των θεμάτων παλαιοτέρων εργασιών και εξετάσεων (χωρίς σε καμία περίπτωση να περιορίζεται με τον τρόπο αυτό η εξεταστέα ύλη).

<u>ΘΕΜΑ 1</u> ΕΞ2012Β

Δίνεται το σήμα $x_1(t)=\sin(2\pi\cdot 10\cdot t)$. και το σήμα $x_2(t)=\cos(20t)$.

Για καθένα από τα παρακάτω σήματα να υπολογίσετε (αν υπάρχουν/ορίζονται): (i) την περίοδο του και (ii) την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του.

(α) $x_a(t)=1+x_1(t)+x_2(t)$

(β) $x_\beta(t)=\left[x_1\left(\dfrac{t}{\pi}\right)\right]^2+\left[x_2(2t)\right]^2$

(γ) $x_\gamma(t)=\left[1+x_2(t)\right]*\left[\dfrac{40}{\pi}\sin c\left(\dfrac{40}{\pi}t\right)\right]$

(δ) $x_\delta(t)=x_1(t)+\left[\delta(t)+5\sin c^2(5t)\right]$

(α)

$$x_a(t) = 1 + x_1(t) + x_2(t) = 1 + \sin(2\pi 10 t) + \cos\left(2\pi \frac{10}{\pi} t\right)$$

$\sin(2\pi 10t)$: Περιοδικό με περίοδο $T_1 = \frac{1}{10}$sec

$\cos\left(2\pi \frac{10}{\pi} t\right)$: Περιοδικό με περίοδο $T_2 = \frac{\pi}{10}$sec

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{\pi}$ άρρητος, άρα το σήμα είναι απεριοδικό

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 10Hz ;άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 20Hz.

(β)

$$x_\beta(t)=\left[x_1\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]^2+\left[x_2(2t)\right]^2$$

$$x_\beta(t)=\left[x_1\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]^2+\left[x_2(2t)\right]^2=\sin^2\left(2\pi\frac{10}{\pi}t\right)+\cos^2\left(2\pi\frac{20}{\pi}t\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(2\pi\frac{20}{\pi}t\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2\pi\frac{40}{\pi}t\right)}{2}=1-\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{20}{\pi}t\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{40}{\pi}t\right)$$

$\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{20}{\pi}t\right)$: Περιοδικό με περίοδο $T_1=\frac{\pi}{20}\sec$

$\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\frac{40}{\pi}t\right)$: Περιοδικό με περίοδο $T_2=\frac{\pi}{40}\sec$

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{40}}=2$ ρητός, άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο

$$T_\beta=T_1=2T_2=\frac{\pi}{20}\sec$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 40/π Hz ;άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 80/π Hz.

(γ)

$$x_\gamma(t)=\left[1+x_2(t)\right]*\left[\frac{40}{\pi}\sin c\left(\frac{40}{\pi}t\right)\right]$$

$$x_\gamma(t)=\left[1+x_2(t)\right]*\left[\frac{40}{\pi}\sin c\left(\frac{40}{\pi}t\right)\right]\xleftrightarrow{F}\left\{\delta(f)+\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{\pi}\right)\right]\right\}\cdot rect\left(\frac{f}{40/\pi}\right)=$$

$$=\delta(f)+\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{\pi}\right)\right]$$

το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο π/10 sec.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 10/π Hz ;άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 20/π Hz.

(δ)

$$x_\delta(t) = x_1(t) + \left[\delta(t) + 5\sin c^2(5t)\right].$$

$$x_\delta(t) = x_1(t) + \left[\delta(t) + 5\sin c^2(5t)\right] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-10) - \delta(f+10)\right] + tri\left(\frac{f}{5}\right) + 1$$

Το σήμα έχει συνεχές φάσμα πλάτους συνεπώς δεν είναι περιοδικό. Επίσης δεν έχει περιορισμένο εύρος ζώνης, συνεπώς δεν ορίζεται ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας

Σημείωση: για περισσότερες από 2 περιόδους, έστω T_1, T_2,…, T_N ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Θέτουμε $\kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \ldots = \kappa_N T_N$

2. Απλοποιούμε την παρακάτω έκφραση με απαλοιφή κοινών παραγόντων και τη φέρνουμε στη μορφή $\kappa_1/A_1 = \kappa_2/A_2 = \ldots = \kappa_N/A_N$ δηλ. τα κλάσματα να έχουν ως αριθμητές μόνο τα κ_1, κ_2,…,κ_N

3. Από την παραπάνω σχέση θα ισχύει ότι $\kappa_1=A_1$, $\kappa_2=A_2$,…,$\kappa_N=A_N$, κι εφόσον τα A_1,A_2, … , A_N είναι ακέραιοι το σήμα θα είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_{ολ}=\kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \ldots = \kappa_N T_N$

Παραδείγματα στις επόμενες διαφάνειες:

$$\mathrm{T}_1 = \frac{3}{4}, \mathrm{T}_2 = \frac{5}{14},\ \mathrm{T}_3 = \frac{1}{2}$$

Θέτουμε

$$\kappa_1 \mathrm{T}_1 = \kappa_2 \mathrm{T}_2 = \kappa_3 \mathrm{T}_3 \Rightarrow \kappa_1 \frac{3}{4} = \kappa_2 \frac{5}{14} = \kappa_3 \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa_1 \frac{3}{2} = \kappa_2 \frac{5}{7} = \kappa_3 \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 3}{\Rightarrow} \frac{\kappa_1}{2} = \kappa_2 \frac{5}{21} = \frac{\kappa_3}{3} \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 5}{\Rightarrow} \frac{\kappa_1}{10} = \frac{\kappa_2}{21} = \frac{\kappa_3}{15} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 10 \\ \kappa_2 = 21 \\ \kappa_3 = 15 \end{cases}$$

$$\mathrm{T}_{o\lambda} = \kappa_1 \mathrm{T}_1 = \kappa_2 \mathrm{T}_2 = \kappa_3 \mathrm{T}_3 = 10\frac{3}{4} = 21\frac{5}{14} = 15\frac{1}{2} = 7.5$$

$$\mathrm{T}_1 = 2\sqrt{2}, \mathrm{T}_2 = \frac{\sqrt{2}}{3},\ \mathrm{T}_3 = \sqrt{2}$$

Θέτουμε

$$\kappa_1 \mathrm{T}_1 = \kappa_2 \mathrm{T}_2 = \kappa_3 \mathrm{T}_3 \Rightarrow \kappa_1 2\sqrt{2} = \kappa_2 \frac{\sqrt{2}}{3} = \kappa_3 \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa_1 2 = \kappa_2 \frac{1}{3} = \kappa_3 \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 2}{\Rightarrow} \kappa_1 = \frac{\kappa_2}{6} = \frac{\kappa_3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 1 \\ \kappa_2 = 6 \\ \kappa_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{T}_{o\lambda} = \kappa_1 \mathrm{T}_1 = \kappa_2 \mathrm{T}_2 = \kappa_3 \mathrm{T}_3 = 2\sqrt{2} = 6\frac{\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$\mathrm{T}_1 = 2\pi, \mathrm{T}_2 = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \mathrm{T}_3 = \sqrt{2}$$

Θέτουμε

$$\kappa_1 \mathrm{T}_1 = \kappa_2 \mathrm{T}_2 = \kappa_3 \mathrm{T}_3 \Rightarrow \kappa_1 2\pi = \kappa_2 \frac{\sqrt{5}}{3} = \kappa_3 \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 2\pi}{\Rightarrow} \kappa_1 = \kappa_2 \frac{\sqrt{5}}{6\pi} = \kappa_3 \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ \sqrt{5}}{\Rightarrow} \frac{\kappa_1}{\sqrt{5}} = \frac{\kappa_2}{6\pi} = \kappa_3 \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{5}} \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ \sqrt{2}}{\Rightarrow} \frac{\kappa_1}{\sqrt{10}} = \frac{\kappa_2}{6\pi\sqrt{2}} = \frac{\kappa_3}{2\pi\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \sqrt{10} \\ \kappa_2 = 6\pi\sqrt{2}, \\ \kappa_3 = 2\pi\sqrt{5} \end{cases}$$

Τα $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ δεν είναι φυσικοί αριθμοί (θετικοί ακέραιοι), άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

ΘΕΜΑ 2

ΕΞ2012Β

Δίνεται το σήμα $x_1(t) = a \cdot \mathrm{sinc}^2(a \cdot t)$, $a > 0$. και το σήμα $x_2(t) = 4a \cdot \mathrm{sinc}(4a \cdot t)$, $a > 0$. Τα δύο σήματα πρέπει να μεταδοθούν με πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM) ως εξής: Το αμφίπλευρο φάσμα του $x_1(t)$ θα τοποθετηθεί στην περιοχή συχνοτήτων [0, 2α Hz] ενώ το αμφίπλευρο φάσμα του $x_2(t)$ θα μετατοπιστεί στην περιοχή συχνοτήτων [2α Hz,6α Hz], χωρίς να μεταβληθούν τα πλάτη τους. Η μετατόπιση αυτή γίνεται με κατάλληλη διαμόρφωση DSB του καθενός από τα σήματα $x_1(t)$, $x_2(t)$ οπότε προκύπτει το σήμα $x_3(t)$.

Ζητούνται τα εξής:

(α) Να υπολογισθούν και να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους των αρχικών σημάτων $X_1(f), X_2(f)$ και να προσδιοριστεί για το καθένα αντίστοιχα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min,1}$, $f_{s,\min,2}$.

(β) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $X_3(f)$ του FDM σήματος. Επίσης να αποδειχθεί ότι η έκφρασή του στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$x_3(t) = 4a \sin c(4at)\left[e^{j2\pi 4at} + e^{-j2\pi 4at}\right] + a \sin c^2(at)\left[e^{j2\pi at} + e^{-j2\pi at}\right]$$

(γ) Να προσδιοριστεί το πλάτος και η συχνότητα του κάθε φέροντος που χρησιμοποιήθηκε για τις μετατοπίσεις φάσματος των $x_1(t)$, $x_2(t)$.

(δ) Να υποθέσετε ότι το σήμα $x_3(t)$ του ερωτήματος υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα 5πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 20dB. Να υπολογίσετε το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM, υποθέτοντας ότι η παράμετρος a ισούται με 40. *(Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση σήματος με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (σε μονάδες decibel) ισούται με* $SNR = 10 \cdot \log_{10}(L^2)$*)*

(α) Δίνεται ότι $x_1(t) = a \cdot \text{sinc}^2(a \cdot t),\ a > 0$

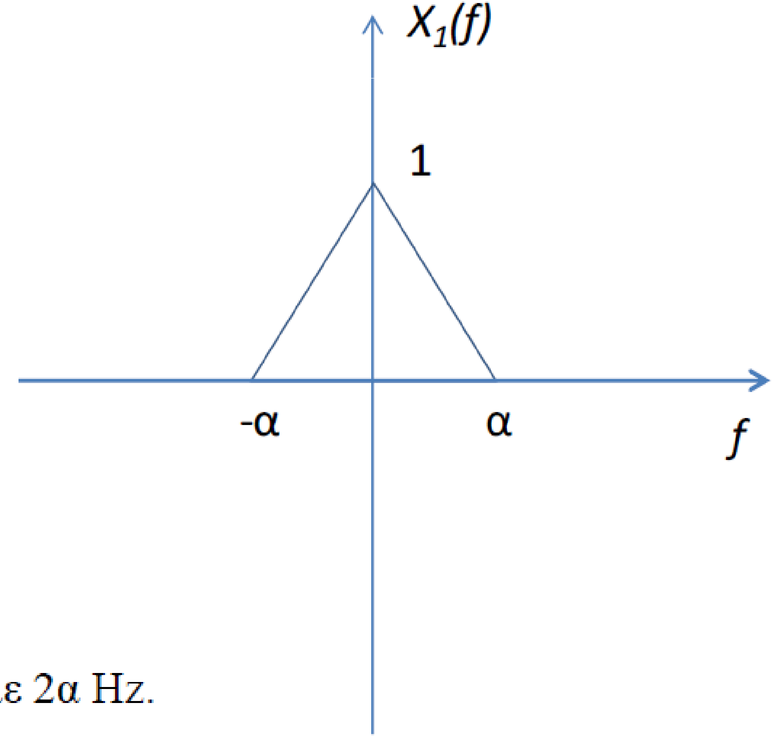
Έχουμε:

$$\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} tri\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = a\text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right) = X_1(f)$$



Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με 2α Hz.

Δίνεται ότι $x_2(t) = 4a \cdot \text{sinc}\ (4a \cdot t),\ a > 0$

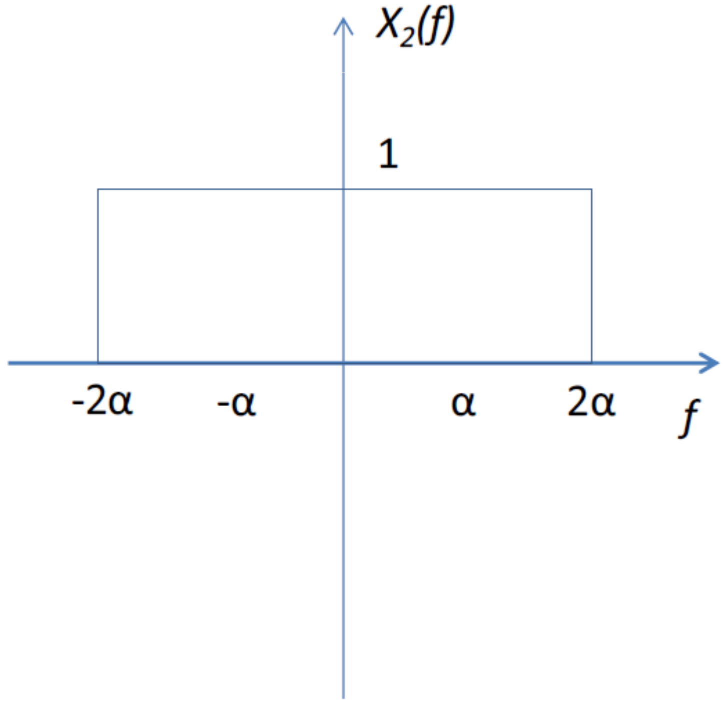
Έχουμε:

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sinc}(4at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{4a} rect\left(\frac{f}{4a}\right) \Leftrightarrow$$

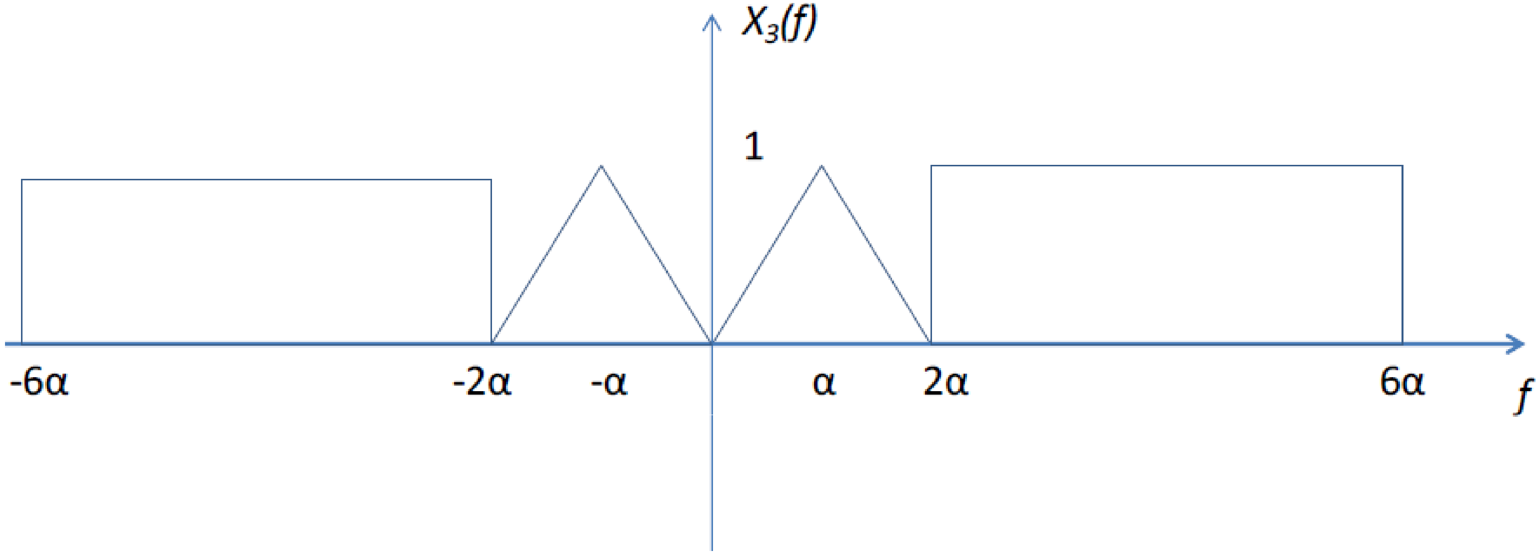
$$\Leftrightarrow 4a\text{sinc}(4at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 4a\text{sinc}(4at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{4a}\right) = X_2(f)$$



Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με 4α Hz.

(β) Το φάσμα πλάτους $X_3(f)$ του FDM σήματος απεικονίζεται ως εξής:



$$X_3(f) = rect\left(\frac{f+4a}{4a}\right) + tri\left(\frac{f+a}{a}\right) + tri\left(\frac{f-a}{a}\right) + rect\left(\frac{f-4a}{4a}\right)$$

και η έκφραση στο πεδίο του χρόνου είναι

$$x_3(t) = 4a\sin c(4at)\left[e^{j2\pi 4\alpha t} + e^{-j2\pi 4\alpha t}\right] + a\sin c^2(at)\left[e^{j2\pi\alpha t} + e^{-j2\pi\alpha t}\right]$$

(γ)

Για τη μετατόπιση του φάσματος $X_1(f) = tri\left(\frac{f}{a}\right)$

στο

$$X_{3,1}(f) = tri\left(\frac{f+a}{a}\right) + tri\left(\frac{f-a}{a}\right)$$

το απαιτούμενο φέρον είναι της μορφής

Για τη μετατόπιση του φάσματος $X_2(f) = rect\left(\frac{f}{4a}\right)$

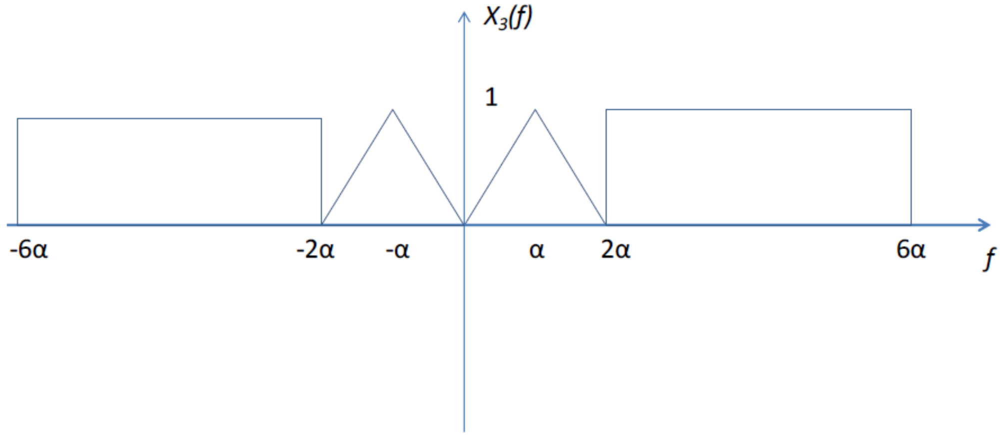
στο

$$X_{3,2}(f) = rect\left(\frac{f+4a}{4a}\right) + rect\left(\frac{f-4a}{4a}\right)$$

το απαιτούμενο φέρον είναι της μορφής

(δ)

Το σήμα $x_3(t)$ υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα 5πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 20dB.



Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι ίση με $f_{s,\min} = 2 f_{\max} = 2 \cdot 6aHz = 12aHz$, συνεπώς η συχνότητα δειγματοληψίας του ερωτήματος είναι $f_\delta = 5 f_{s,\min} = 5 \cdot 12aHz = 60aHz$.

Προκειμένου το $x_3(t)$ να μεταδοθεί με PCM και SNR≥20dB θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε: $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log L$.

Συνεπώς ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών ομοιόμορφης κβάντισης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $20\log_{10} L \geq 20 \Rightarrow L \geq 10^{\frac{20}{20}} = 10$ άρα κατ' ελάχιστον απαιτούνται L=10 στάθμες και επειδή θα πρέπει να είναι δύναμη του 2 τελικά θα έχουμε 16 στάθμες κβάντισης.

Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM είναι $B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_\delta \log_2 L = \frac{1}{2} 60\alpha \cdot 4 = 120\alpha\ Hz = 120 \cdot 40Hz = 4.8kHz$.

ΘΕΜΑ 2 ΕΞ2012Α

Δίνεται το σήμα $x_1(t)=100\cdot \text{sinc}^2(100\cdot t)$. Το σήμα δειγματίζεται με την ελάχιστη δυνατή συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min,1}$ και στη συνέχεια διέρχεται από κατάλληλο ιδανικό φίλτρο οπότε στην έξοδό του προκύπτει σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης $x_2(t)$, του οποίου το φάσμα $X_2(f)$ έχει μέγιστο πλάτος ίσο με τη μονάδα και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ίση με $f_{s,\min,2}=600\text{ Hz}$.
Ζητούνται τα εξής:

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του αρχικού σήματος $X_1(f)$ και να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min,1}$.

(β) Να προσδιοριστούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου $x_{1,\delta}(n)$ και στο πεδίο των συχνοτήτων $X_{1,\delta}(f)$.

(γ) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $X_2(f)$ του σήματος . Επίσης να αποδειχτεί ότι η έκφρασή του στο πεδίο του χρόνου είναι: $x_2(t)=\left[e^{j2\pi 200t}+1+e^{-j2\pi 200t}\right]100\sin c^2(100t)$

(δ) Να υποθέσετε ότι το σήμα $x_2(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f=40\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $A_0=10\ Volt$ και συχνότητας $f_0=30\ kHz$. Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος. *(Να λάβετε υπόψη ότι η μέγιστη απόκλιση συχνότητας για διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από τυχαίο σήμα πληροφορίας z(t) δίνεται από τη σχέση:* $\Delta f_{\max}=\dfrac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|z(t)\right|\right)$.*)*

α)

Δίνεται ότι $x_1(t) = 100 \cdot \mathrm{sinc}^2(100 \cdot t)$

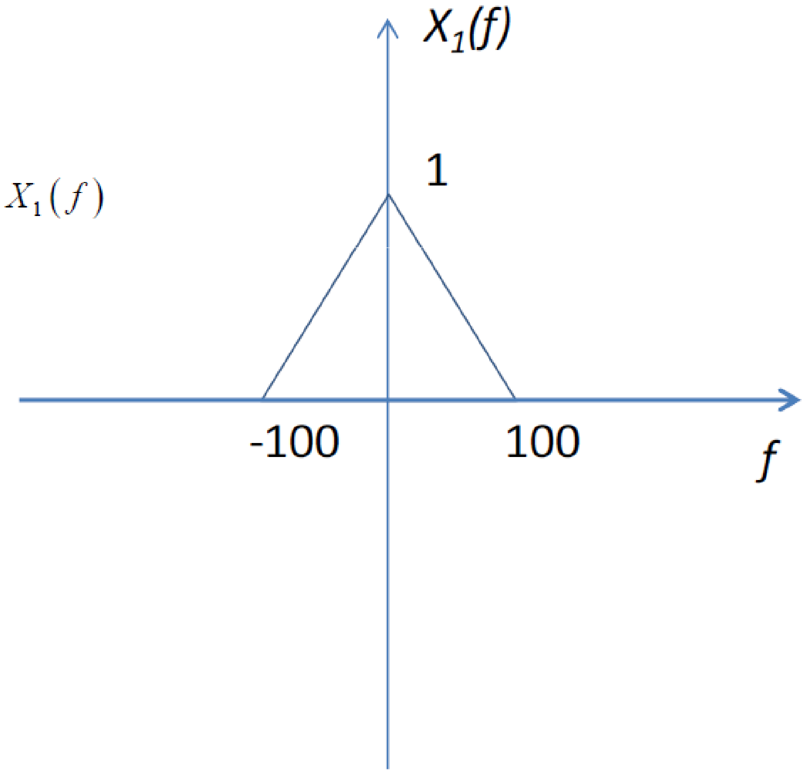
Έχουμε:

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{100} tri\left(\frac{f}{100}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100\mathrm{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 100\mathrm{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{100}\right) = X_1(f)$$



Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με

$f_{s,\min,1} = 200Hz$

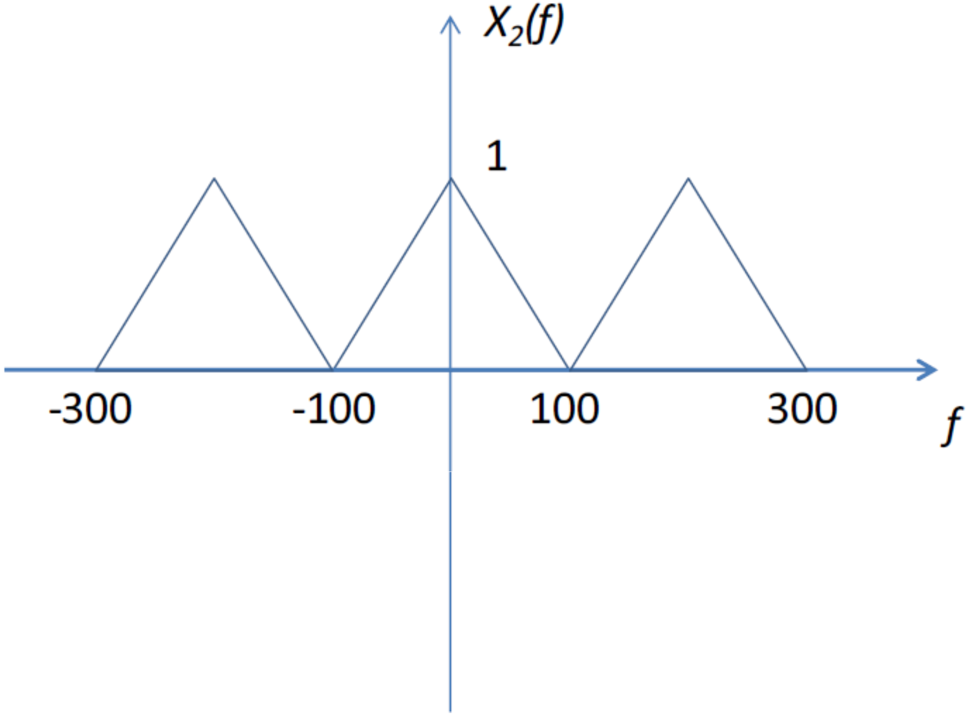
(β) Οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος είναι οι εξής:

Στο πεδίο του χρόνου $x_{1,\delta}(n) = \underset{t=nT_{s,1}}{x_1(t)} = 100\,\mathrm{sinc}^2\left(100 \cdot n \frac{1}{f_{s,\min,1}}\right) = 100\,\mathrm{sinc}^2\left(100 \cdot n \frac{1}{200}\right),\ n \in Z$

και στο πεδίο των συχνοτήτων

$$X_{1,\delta}(f) = f_{s,\min,1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_1\left(f - mf_{s,\min,1}\right) = 200 \sum_{m=-\infty}^{\infty} tri\left(\frac{f - m200}{100}\right),\ m \in Z\ .$$

(γ) Με βάση την περιγραφή το φάσμα εξόδου είναι το: $X_2(f) = tri\left(\frac{f+200}{100}\right) + tri\left(\frac{f}{100}\right) + tri\left(\frac{f-200}{100}\right)$



και η έκφραση του σήματος εξόδου στο πεδίο του χρόνου είναι:

$x_2(t) = \left[e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t}\right] 100 \sin c^2(100t)$

(δ)

Έχουμε ότι

$x_2(t) = \left[e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t}\right] 100 \sin c^2(100t)$

Το σήμα $x_2(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 10\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $A_0 = 10\ Volt$ και συχνότητας $f_0 = 30\ kHz$.

Το διαμορφωμένο σήμα FM γράφεται:

$$x_{FM}(t) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + k_f \int_{-\infty}^{t} x_2(\lambda)\, d\lambda\right) =$$

$$= 10\cos\left(2\pi 30000t + 40\pi \int_{-\infty}^{t} \left\{\left[e^{j2\pi 200\lambda} + 1 + e^{-j2\pi 200\lambda}\right] 100 \sin c^2(100\lambda)\right\} d\lambda\right)$$

Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W = 2(D+1)f_x$$

όπου $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_x}$ $\qquad \Delta f_{\max} = \dfrac{k_f}{2\pi}\max\left(|z(t)|\right)$

Το σήμα πληροφορίας $x_2(t)$ έχει εύρος ζώνης ίσο με $f_x = f_{\max} = 300Hz$

ισχύει ότι

$$\max\left|x_2(t)\right| = \max\left|\left[e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t}\right]100\sin c^2(100t)\right| = 3\cdot 100$$

επειδή

$$\max\left|\left[e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t}\right]\right| = \max\left|\left[2\cos(2\pi 200t)+1\right]\right| = 2+1=3,$$

$$\max\left|100\sin c^2(100t)\right| = 100, \text{ όταν } t=0$$

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(|x_2(t)|\right) = \frac{40\pi}{2\pi}(300) = 6000Hz$$

οπότε, $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_x} = \dfrac{6000}{300} = 20$

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:

$W = 2(20+1)\cdot 300\ Hz = 12600\ Hz = 12.6\ kHz$

ΕΞ2010Β

ΘΕΜΑ 3

Ένας μηχανικός δικτύου θέλει να δημιουργήσει μία ζεύξη μεταξύ 2 σημείων με οπτική ίνα στην οποία θα γίνεται χρήση του πρωτοκόλλου GBN. Έχει παρατηρηθεί ότι σε ζεύξεις με οπτική ίνα ο ρυθμός εσφαλμένων πακέτων (Packet Eror Rate, PER) σε κάθε κατεύθυνση της ζεύξης είναι σταθερός και ίσος με 0,001 και είναι ανεξάρτητος της απόστασης μεταξύ των κόμβων και του μεγέθους των πακέτων. Εάν θεωρήσουμε ότι για το πρωτόκολλο επανεκπομπής ο χρόνος προθεσμίας T να είναι ίσος με εκείνη την τιμή του χρόνου μετάβασης μετ' επιστροφής που δίδει τη μέγιστη απόδοση του 100% απουσία σφαλμάτων μεταφοράς, να βρεθούν:

(α) Η μέγιστη δυνατή ακέραια τιμή του παραθύρου W του πρωτοκόλλου GBN έτσι ώστε η απόδοση στην οπτική ζεύξη να μην πέσει κάτω από το 95%.

(β) Το μήκος L της οπτικής ίνας που συνδέει τα δύο σημεία αν είναι γνωστά ότι: i) TRANSP=TRANSA=10^{-6} sec, ii) το μέγεθος παραθύρου W=52 δίνει απόδοση 100% του πρωτοκόλλου GBN απουσία λαθών και iii) h ταχύτητα διάδοσης φωτός σε οπτική ίνα είναι C=200000 km/sec

(α) Γνωρίζουμε ότι η απόδοση του πρωτοκόλλου GBN δίνεται από τον τύπο και η οποία πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 95%

$$\eta_{GBN}(p) = \frac{1}{1 + W\frac{1-p}{p}} \geq 0.95$$

-

Λύνοντας ως προς W έχουμε ότι

$$W \leq \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{0.95} - 1\right)$$

Αντικαθιστώντας στη παραπάνω εξίσωση τις τιμές για p=(1-PER)(1-PER)=0,998 βρίσκουμε ότι τα παράθυρο πρέπει να είναι

$$W \leq 26.26$$

Άρα η μέγιστη ακέραια τιμή του παραθύρου πρέπει να είναι W=26 για να μην πέσει η απόδοση του πρωτοκόλλου κάτω από 95%

(β) Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση απόδοσης 100% του πρωτοκόλλου GBN απουσία λαθών ισχύει

$$\frac{W \times TRANSP}{S} = 1 \Leftrightarrow W \times TRANSP = S = TRANSP + TRANSA + 2PROP$$

Με δεδομένο ότι PROP=L/C και TRANSP=TRANSA=10^{-6} έχουμε ότι

$$W \times TRANSP = 2TRANSP + 2\frac{L}{C} \Rightarrow$$

$$(W-2)TRANSP = 2\frac{L}{C} \Rightarrow$$

$$L = C(W-2)\frac{TRANSP}{2}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις τιμές των TRANSP=10^{-6} sec, W=52 και C=200000 Km/sec βρίσκουμε ότι η απόσταση L της οπτικής ζεύξης είναι 5000 μέτρα

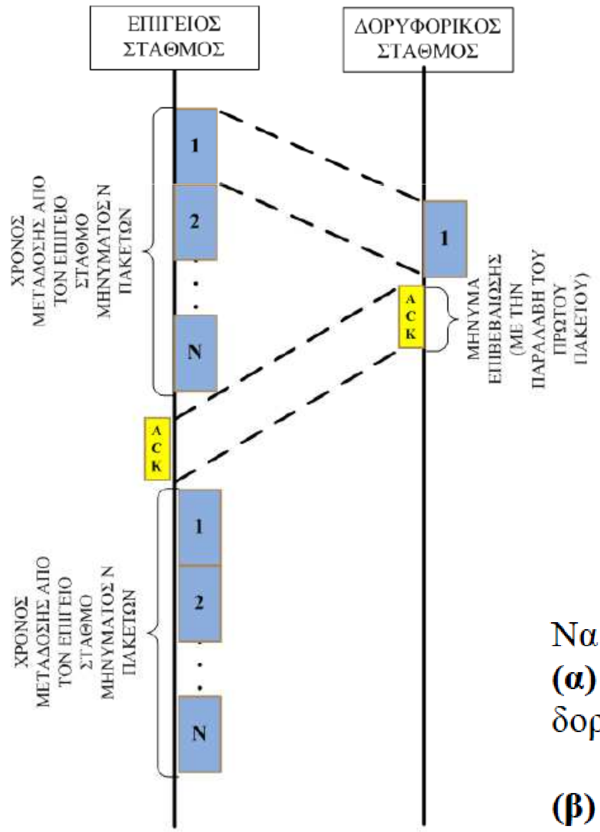
ΕΞ2007Β

ΘΕΜΑ 7 - Επίγειος σταθμός επικοινωνεί με δορυφόρο με σκοπό την μετάδοση δεδομένων. Ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων τόσο του επίγειου σταθμού όσο και του δορυφόρου είναι 96kbps (όπου 1kb=1000bits).

Τα μηνύματα που μεταδίδονται από τον επίγειο σταθμό στέλνονται σε ομάδες πακέτων (μεταβλητού αριθμού πακέτων ανά ομάδα). Κάθε πακέτο έχει μέγεθος 480bytes (1byte=8bit).

Ο χρόνος διάδοσης μεταξύ δορυφόρου και επίγειου σταθμού είναι 270 msec.

Όταν παραλαμβάνεται το πρώτο πακέτο ομάδας στέλνεται πίσω ένα μήνυμα επιβεβαίωσης 96 bytes για όλη την ομάδα (λειτουργώντας προληπτικά για να πετύχει καλύτερη επίδοση λόγω της μεγάλης απόστασης μεταξύ επίγειου σταθμού και δορυφόρου) και μπορεί άμεσα να ξεκινήσει η αποστολή της επόμενης ομάδας πακέτων (όπως στο ακόλουθο σχήμα).

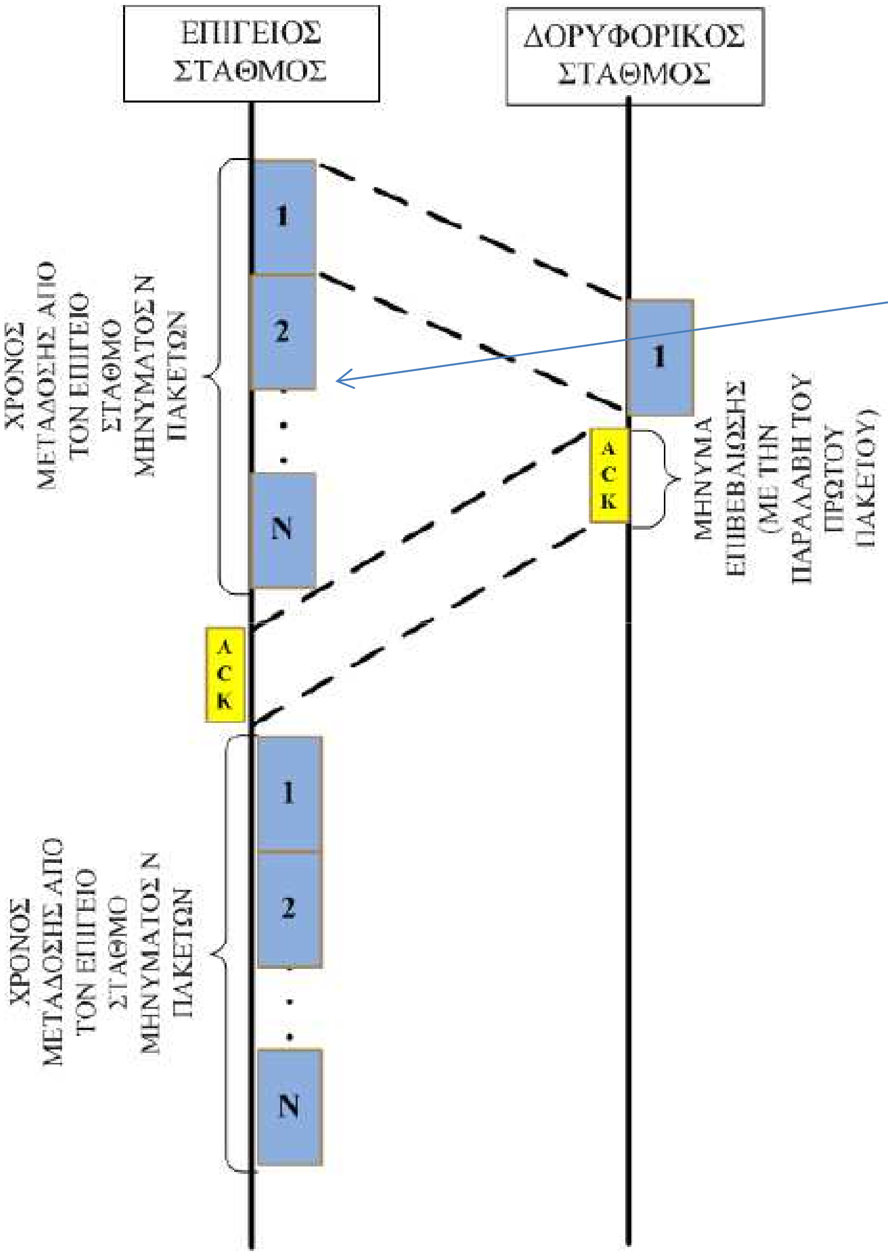


Να βρείτε:

(α) Να υπολογίσετε τη ρυθμαπόδοση (bps) της σύνδεσης επίγειου σταθμού – δορυφόρου για ομάδες με 6 πακέτα,

(β) Τον αριθμό πακέτων ανά ομάδα σύμφωνα με τον οποίο πετυχαίνουμε συνεχή μετάδοση δεδομένων από τον επίγειο σταθμό

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/ε-ΟΣΣ/01.06.2013/Ν.Δημητρίου



Ο σταθμός στέλνει
Ν πακέτα ανά χρόνο
TRANSP+PROP+TRANSA+PROPA

Για ομάδα με 6 πακέτα

Για ομάδα 6 πακέτων ο χρόνος μετάδοσης είναι t1 = 6*8*480/96000 sec=240 msec. Μετά ο επίγειος σταθμός σταματά να μεταδίδει και περιμένει το πρώτο μήνυμα επιβεβαίωσης. Αυτό το μήνυμα θα φτάσει μετά από τον χρόνο που χρειάζεται το πρώτο πακέτο της ομάδας να φτάσει στον δορυφόρο, να μεταδοθεί και να διαδοθεί το μήνυμα επιβεβαίωσης.

Το πρώτο πακέτο φτάνει στον δορυφόρο μετά από t2 = [χρόνος μετάδοσης από επίγειο σταθμό] + [χρόνος διάδοσης] = 8*480/96000 sec + 270 msec = 310 msec.

Μετά από t3 = t2 + 8*96/96000 msec = 318 msec μεταδίδεται και το τελευταίο bit μηνύματος επιβεβαίωσης από τον δορυφόρο.

Μετά από t4 = t3 +270 msec = 588 msec φτάνει στον επίγειο σταθμό η επιβεβαίωση οπότε μπορεί να ξεκινήσει η αποστολή της επόμενης ομάδας πακέτων.

Άρα έχουν μεταδοθεί 6*8*480 = 23040 bits σε χρόνο 588 msec, δηλαδή **39,18kbps**

(β)

Για συνεχή μετάδοση

Για συνεχή μετάδοση θα πρέπει ο επίγειος σταθμός να στέλνει πακέτα για χρονικό διάστημα μεγαλύτερο από τα 588 msec ώστε να μην μεσολαβεί καμία παύση μεταξύ μιας ομάδας πακέτων και της επόμενης. Άρα υπολογίζω το ελάχιστο αριθμό πακέτων n όπου n*8*480/96000 sec>=0,588sec➔**n>=14.7**

ΕΞ2007Α

ΘΕΜΑ 4 - Μια πηγή με αλφάβητο 6 συμβόλων, S = {s1, s2, s3, s4, s5, s6}, έχει τη δυνατότητα να επιλέξει την κωδικοποίησή της ανάμεσα από δύο κώδικες, το C1={1,010,011,001,0001,0000} είτε το C2 ={10, 00, 01, 1101, 111, 1100}. Η αντιστοίχιση του κάθε συμβόλου του αλφαβήτου της πηγής με κωδική λέξη είναι ένα προς ένα, π.χ. στην περίπτωση του κώδικα C1, το s1 αντιστοιχίζεται με το 1, το s2 με το 010 κοκ. Με δεδομένο ότι οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων του αλφαβήτου δίδονται από τον παρακάτω πίνακα

s1	s2	s3	s4	s5	s6
0.30	0.19	0.20	0.10	0.16	0.05

(α) Να βρείτε ποιο από τα δύο κωδικά αλφάβητα επιτυγχάνει καλύτερη συμπίεση.

(β) Υπάρχει κώδικας ο οποίος επιτυγχάνει ακόμα μικρότερη συμπίεση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ) Αν η πηγή έχει εκπέμψει 10^9 σύμβολα κάνοντας χρήση του κώδικα συμβόλων C2, να βρείτε τον αριθμό bits τα οποία έχει εκπέμψει ως πλεονασμό η πηγή και τα οποία οφείλονται στη χρήση του συγκεκριμένου κώδικα.

(α)

Για να βρούμε πιο από τα δύο κωδικά αλφάβητα επιτυγχάνει καλύτερη συμπίεση

αρκεί να βρούμε το μέσο μήκος κωδικής λέξης L, για κάθε ένα από αυτά.
Έτσι στην περίπτωση που επιλεγεί το C1 τότε το μέσο μήκος L1 της κωδικής λέξης είναι

$$L1 = 0,30*1+0,19*3+0,20*3+0,10*3+0,16*4+0,05*4 = 2,64 \text{ bits}$$

Ενώ στην περίπτωση του C2 το μέσο μήκος L2 της κωδικής λέξης είναι

$$L2 = 0,30*2+0,19*2+0,20*2+0,10*4+0,16*3+0,05*4 = 2,46 \text{ bits}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το κωδικό αλφάβητο C2 επιτυγχάνει καλύτερη συμπίεση

(β)

Γνωρίζουμε ότι τη βέλτιστη συμπίεση επιτυγχάνει ο αλγόριθμος

Αν η κωδικοποίηση κατά Huffman επιτύχει καλύτερο μέσο μήκος κωδικής λέξης τότε σημαίνει ότι υπάρχουν περιθώρια βελτίωσης. Αν το μέσο μήκος είναι ίσο με το L2 τότε σημαίνει ότι έχουμε πετύχει την βέλτιστη συμπίεση. Η εφαρμογή του αλγορίθμου δίνει

S1	10
S2	00
S3	01
S4	1101
S5	111
s6	1100

Παρατηρούμε ότι τα μήκη των κωδικών λέξεων είναι ίδια με αυτά του κώδικα C2 και άρα το μέσο μήκος είναι το ίδιο με αυτό του C2. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι και ο κώδικας C2 παράγει τη βέλτιστη συμπίεση οπότε δεν είναι δυνατή η βελτίωσή του κάτω από αυτό το όριο.

(γ)
Ο πλεονασμός είναι η διαφορά του μέσου μήκους της κωδικής λέξης με την εντροπία της πηγής αφού ισχύει $H(S) \leq L2 \leq H(S)+1$, δηλαδή $L2 - H(S)$. Επειδή η πηγή έχει εκπέμψει 10^9 σύμβολα τότε ο πλεονασμός είναι $10^9*[L2 - H(S)]$ bits.

Αρκεί να βρούμε την εντροπία της πηγής η οποία δίνεται από τη σχέση

$H(S) = -[0.3*\log0.3+0.19*\log0.19+0.2*\log0.2+0.1*\log0.1+0.16*\log0.16+0.05*\log0.05] = 2.412$ bits

Ο πλεονασμός είναι $(2.46-2.412)*10^9=$ **48 Mbits**

ΘΕΜΑ 4

ΕΞ2012Β

Μια ψηφιακή πηγή **3** συμβόλων $\{x_1, x_2, x_3\}$ εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο x_1 από την πηγή είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι πιθανότητες εκπομπής των άλλων δύο συμβόλων είναι ίσες. Να απαντηθούν τα ερωτήματα σε κάθε μία από τις παρακάτω 2 περιπτώσεις

α) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε κανάλι χωρίς θόρυβο. Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η χωρητικότητα του καναλιού **C** και η εντροπία της πηγής **H(X)**
- **ii)** Η εντροπία **H(X/Y)**

β) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε ενθόρυβο κανάλι με πίνακα μετάβασης,

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η εντροπία της πηγής **H(X)** και η **H(Y/X)**
- **ii)** Η αμοιβαία πληροφορία του ενθόρυβου καναλιού.

(Υπόδειξη: *Χρησιμοποιείστε τις παρακάτω τιμές των λογαρίθμων*

$$\log_2(3) \approx 1.58, \quad \log_2(0.4) \approx -1.322, \quad \log_2(0.3) \approx -1.737, \quad \log_2(0.75) \approx -0.415,$$

$$\log_2(0.35) \approx -1.515, \quad \log_2(0.275) \approx -1.862, \quad \log_2(0.375) \approx -1.415$$

)

α). Κανάλι χωρίς θόρυβο

i) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι υπόλοιπες είναι $p(x_2) = p(x_3) = 0.3$
Άρα η εντροπία της πηγής είναι:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2(p(x_i)) = -\left[0.4\cdot\log_2(0.4) + 0.3\cdot\log_2(0.3) + 0.3\cdot\log_2(0.3)\right] \approx 1.57\ bits$$

Γνωρίζω ότι η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς θόρυβο ισούται με τη μέγιστη τιμή του **H(X)** («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89) η οποία προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{3}$$

Η χωρητικότητα δίνεται από

$$C = \max(H(X)) = \log_2 q\Big|_{q=3} = \log_2(3) = 1.58 \text{ bits/symbol}$$

όπου q είναι ο αριθμός συμβόλων εισόδου

ii) Επιπλέον, η εντροπία H(X/Y) ισούται με 0 αφού X=Y κι όπως αποδεικνύεται και στο βιβλίο σελ. 90.

β) Ενθόρυβο Κανάλι

i) Αν στο κανάλι εισαγάγουμε θόρυβο δεν αναμένεται να αλλάξει η εντροπία της πηγής αλλά μόνο η χωρητικότητα του καναλιού η οποία αναμένεται να είναι μικρότερη από αυτή του ερωτήματος (α)
Επομένως η εντροπία της πηγής H(X) είναι ίδια με αυτή του ερωτήματος (α).

Δεδομένου ότι το κανάλι έχει πίνακα μετάβασης

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

H εντροπία H(Y/X) δίνεται από τον τύπο

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{3} p(x_i)H(Y/X=x_i)$$

Άρα για κάθε i=1,2,3 έχουμε

$$H(Y/X=x_i)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις πιθανότητες κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης έχουμε:

$$H(Y/X = x_1) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_1)\log p(y_j/x_1) = -0.5\log 0.5 - 0.5\log 0.5 - 0\log 0 = 1\ bits$$

$$H(Y/X = x_2) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_2)\log p(y_j/x_2) = -0\log 0 - 0.25\log 0.25 - 0.75\log 0.75 = 0{,}811\ bits$$

$$H(Y/X = x_3) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_3)\log p(y_j/x_3) = -0.5\log 0.5 - 0\log 0 - 0.5\log 0.5 = 1\ bits$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (1) έχουμε

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i) H(Y/X = x_i) = 0.4\cdot 1 + 0.3\cdot 0.811 + 0.3\cdot 1 \approx 0{,}943\ bits \qquad (2)$$

ii).

Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) θα κάνουμε χρήση του τύπου $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εξόδου $P(Y)=\{p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\}$ οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω

$$P[Y]=[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3,x_i)\right]$$

Γνωρίζω ότι ισχύει $p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)$ («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25) και επομένως θα έχουμε

$$P(Y,X)=\begin{bmatrix} p(y_1,x_1) & p(y_2,x_1) & p(y_3,x_1) \\ p(y_1,x_2) & p(y_2,x_2) & p(y_3,x_2) \\ p(y_1,x_3) & p(y_2,x_3) & p(y_3,x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p(x_1)\cdot p(y_1/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_2/x_1) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_1) \\ p(x_2)\cdot p(y_1/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_2/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_2) \\ p(x_3)\cdot p(y_1/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_2/x_3) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.4\cdot 0.5 & 0.4\cdot 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3\cdot 0.25 & 0.3\cdot 0.75 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0 & 0.3\cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0.225 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Οπότε το ζητούμενο δίνεται από

$$P[Y]=[p(y_1)\quad p(y_2)\quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3}p(y_1,x_i)\quad \sum_{i=1}^{3}p(y_2,x_i)\quad \sum_{i=1}^{3}p(y_3,x_i)\right]=$$

$$=[0.35\quad 0.275\quad 0.375]$$

$$p(y_1)=0.35$$

$$p(y_2)=0.275$$

$$p(y_3)=0.375$$

Συνεπώς

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{3}p(y_i)\log_2(p(y_i))=-\left[0,35\cdot\log_2(0,35)+0,275\cdot\log_2(0,275)+0,375\cdot\log_2(0,375)\right]=1.573\ bits$$

Από την παραπάνω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού είναι:

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=1.573-0.943\approx 0.63\ bits$$

<u>ΘΕΜΑ 5</u>

ΕΞ2012Β

Δίνονται οι συστηματικοί γραμμικοί κώδικες C1={00000, 10010, 01101, 11111} και C2={000000, 100101, 011010, 111111} και C3= {0000000, 1001011, 0110110, 1111101}. Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Ο ρυθμός πληροφορίας του κάθε κώδικα,
2. Μια βάση σε μορφή ΠΚΔΓ,
3. Τη διάσταση και την απόσταση καθενός από τους κώδικες C1, C2 και C3.
4. Ο αριθμός των σφαλμάτων που ανιχνεύει και διορθώνει καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.
5. Δείξτε από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν ανιχνεύει και από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν διορθώνει σωστά καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.

1. Αφού όλοι οι κώδικες έχουν 4 κωδικές λέξεις, δηλαδή τα διαφορετικά μηνύματα είναι 4, αρκούν 2 bits για την παράστασή τους. Επομένως, ο ρυθμός πληροφορίας για τον κώδικα C1 είναι 2/5, για τον κώδικα C2 είναι 2/6 και για τον κώδικα C3 είναι 2/7.

2. Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε τις βάσεις των δεδομένων κωδίκων: για τον C1 η βάση είναι {10010, 01101}, για τον C2 {100101, 011010} και για τον C3 {1001011, 0110110}

3. Η διάσταση όλων των κωδίκων είναι 2 και οι αποστάσεις τους 2, 3 και 4, αντίστοιχα διότι είναι οι λέξεις με το ελάχιστο βάρος.

4. Ο κώδικας C1 ανιχνεύει 1 και δεν διορθώνει κανένα σφάλμα, ο κώδικας, C2 ανιχνεύει 2 και διορθώνει 1 και C3 ανιχνεύει 3 και διορθώνει 1 σφάλματα.

5. Ο κώδικας C1 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος '10010' γιατί το βάρος του συμπίπτει με την απόσταση και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος '10000' γιατί το βάρος του είναι μικρότερο της απόστασης d-1/2. Ομοίως, ο κώδικας, C2 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος '100101' και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος '100001' , και ο C3 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος '1001011' και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος '1000001'.

ΘΕΜΑ 5 - Δίδεται ο ακόλουθος κώδικας (7,4,d), C={0000000, 0001111, 0010110, 0011001, 0100011, 0101100, 0110101, 0111010, 1000101, 1001010, 1010011, 1011100, 1100110, 1101001, 1110000, 1111111}. Ζητούνται

(α) ο γεννήτορας πίνακας του C σε τυπική μορφή (ΠΚΔΓ),

(β) να δειχθεί ότι ο C είναι κώδικας Hamming,

(γ) αν ο παραλήπτης έλαβε τη λέξη '1101101', της οποίας η ελάχιστη απόσταση από κωδική λέξη είναι ίση με 1, πως μπορεί να προσδιορίσει με τη βοήθεια του συνδρόμου της και του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H και μόνο σε ποια θέση έλαβε χώρα η εμφάνιση σφάλματος?

(α)

Ξεκινώντας από οποιεσδήποτε 4 γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κωδικές λέξεις (οποιουδήποτε συνδυασμού των οποίων το άθροισμα είναι διάφορο του μηδενός), μπορούμε να προσδιορίσουμε τον ζητούμενο γεννήτορα πίνακα. Ωστόσο, πιο απλά, μπορούμε να επιλέξουμε τις κατάλληλες κωδικές λέξεις, οι οποίες απαρτίζουν τον γεννήτορα πίνακα σε τυπική μορφή. Έτσι, επιλέγοντας την 9^{η}, την 5^{η} , την 3^{η} και τη 2^{η} κωδική λέξη σχηματίζουμε τον ζητούμενο γεννήτορα πίνακα.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(β)

Σύμφωνα με τον ορισμό (σελίδα 151 του βιβλίου), ένας κώδικας μήκους $n = 2^r - 1$ και πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, ο οποίος περιλαμβάνει όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r, λέγεται κώδικας Hamming. Ο κώδικας C είναι μήκους $n = 2^3 - 1 = 7$. Ακολούθως σχηματίζουμε τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας $H = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, ο οποίος πράγματι περιέχει όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους 3 και επομένως ο κώδικας C είναι κώδικας Hamming.

(γ)

Πολλαπλασιάζοντας τη ληφθείσα λέξη με τον H λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα 100, που αποτελεί την $5^{η}$ γραμμή του H, δηλαδή το σφάλμα βρίσκεται στη θέση 5. Επομένως, η κωδική λέξη που μεταδόθηκε είναι ίση με 1101101+0000100=1101001 (δείτε σελίδα 144 του βιβλίου, $3^{η}$ γραμμή από το τέλος).