ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ3
2η ΟΣΣ
Παραδείγματα - Σχόλια

16/12/2012

Ν.Δημητρίου

Σχόλια για τη ΓΕ2

- **Θέμα 1**: Σχετίζεται με υπολογισμούς διαμορφώσεων γωνίας. Να δείτε και το παράδειγμα στη διαφάνεια 3 όπου γίνονται υπολογισμοί υποθέτοντας σήμα πληροφορίας αποτελούμενο από ένα συνημίτονο (τόνο)
- **Θέμα 2**: Υποθέτει διαμόρφωση PCM με ομοιόμορφη κβάντιση. Να δείτε και το παράδειγμα στη διαφάνεια 7 και συγκεκριμένα τους υπολογισμούς για το σήμα $x_4(t)$.
- **Θέμα 3**: Συνδυασμός διαμόρφωσης DSB και υπολογισμών ιδανικών φίλτρων. Να δείτε και το παράδειγμα στη διαφάνεια 12.
- **Θέμα 4**: Συνδυασμός θεωρίας δειγματοληψίας και διαμόρφωσης DSB με την επιλογή μιας πλευρικής ζώνης. Το παράδειγμα στη διαφάνεια 21 έχει παρόμοιο αντικείμενο. Να προσέξετε ότι στο θέμα 4 ζητείται η χρήση ζωνοπερατού φίλτρου.
- **Θέμα 5**: Σχετίζεται με υπολογισμούς για διαμορφωμένο DSB σήμα. Για τον υπολογισμό της μέσης ισχύος, εφόσον το σήμα μηνύματος είναι περιοδικό, μπορεί να εφαρμοστεί η ταυτότητα Parseval. Να δείτε στο παράδειγμα της διαφάνειας 18 τον υπολογισμό της μέσης ισχύος στο ερώτημα (iv).
- **Θέμα 6**: Άσκηση με υπολογισμούς για τη διαμόρφωση FM. Να δείτε και το παράδειγμα στη διαφάνεια 35.
- **Θέμα 7-α**: Μελέτη της αντιστοιχίας των αποτελεσμάτων της διαμόρφωσης DSB και της δειγματοληψίας με κάποιο φίλτρο. Να δείτε και τα παραδείγματα στις διαφάνειες 26, 31.
- **Θέμα 7-β**: Υπολογισμοί εύρους ζώνης υποθέτοντας διάφορα κριτήρια χαρακτηρισμού της φασματικής απόκρισης ενός σήματος. Να βασιστείτε στους ορισμούς που αναφέρει το θέμα και προέρχονται από το κείμενο με τους βασικούς ορισμούς που σχετίζονται με τη Χρονική-Φασματική Απόκριση Σημάτων – Συστημάτων (διαθέσιμο στο site της ΠΛΗ-22)

ΘΕΜΑ 2 ΓΕ2/0910

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τη χρήση διαμορφωμένων κατά γωνία σημάτων. Σχετικές ασκήσεις:ΓΕ2/0708/Θ3, ΕΞ2008Β/Θ2(β)*

Αν για διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα ο δείκτης διαμόρφωσης β απλού συνημιτονικού σήματος (τόνου) είναι ίσος με 5, η συχνότητα του απλού τόνου είναι f_m=10Hz και η σταθερά απόκλισης φάσης k_p ισούται με τη σταθερά απόκλισης συχνότητας k_f (και οι δύο παίρνουν την τιμή 10) να βρεθεί το εύρος ζώνης και το σήμα πληροφορίας m(t) θεωρώντας ότι το σήμα είναι διαμορφωμένο κατά:

(α) Φάση (PM), (β) Συχνότητα (FM)

Ενδεικτική Μεθοδολογία: Να χρησιμοποιήσετε τις εκφράσεις για τα αντίστοιχα διαμορφωμένα κατά γωνία σήματα.

PM

$$m(t) = A_0 \cos(2\pi f_m t)$$

$$\phi(t) = K_p\, m(t)$$

$$D = \frac{\max\left|\frac{d\phi}{dt}\right|}{2\pi f_m} = \frac{\max\left|K_p \frac{d}{dt}\left[A_0 \cos(2\pi f_m t)\right]\right|}{2\pi f_m} =$$

$$= \frac{A_0 K_p \left|-\sin(2\pi f_m t)\cdot 2\pi f_m\right|}{2\pi f_m} = A_0 K_p \frac{2\pi f_m}{2\pi f_m} = A_0 K_p$$

$$D = 5 = A_0 k_p \Rightarrow A_0 = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

$$m(t) = 0{,}5\cdot\cos(2\pi\ 10\,t)$$

$$W = 2\,(D+1)\,f_m = 120\,Hz$$

FM

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = k_f\, m(t) \Rightarrow \left[\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda \Rightarrow \phi(t) = k_f \int_{-\infty}^{t} A_0 \cos(2\pi f_m \lambda)\, d\lambda\right.$$

$$\left.\Rightarrow \phi(t) = k_f \left[A_0 \frac{\sin(2\pi f_m \lambda)}{2\pi f_m} \right]_{-\infty}^{t} = \frac{A_0 k_f}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t)\right]$$

Σημείωση: Ο παραπάνω υπολογισμός αφορά τη στιγμιαία απόκλιση φάσης φ(t) , που όμως δεν είναι απαραίτητος για τον προσδιορισμό του λόγου απόκλισης, που εξαρτάται από το dφ(t)/dt, δείτε στην επόμενη διαφάνεια.

$$D = \frac{\max\left|\frac{d\phi}{dt}\right|}{2\pi f_m} = \frac{\max\left|k_f A_0 \cos(2\pi f_m t)\right|}{2\pi f_m} = \frac{k_f A_0}{2\pi f_m} = 5 \Rightarrow A_0 = \frac{10\pi \cdot \cancel{10}}{\cancel{10}} = 10\pi$$

$$\Rightarrow m(t) = 10\pi \cos(2\pi\, 10 t) \qquad W = 2(5+1)\cdot f_m = 120\,Hz$$

ΘΕΜΑ 7 / ΓΕ2/1011

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις τεχνικές πολυπλεξίας σημάτων, με τις αναλογικές διαμορφώσεις πλάτους και φάσης, καθώς και με την παλμοκωδική διαμόρφωση PCM. Σχετικές ασκήσεις: . Θ7/ΓΕ2/0910*

Έστω ένα ασύρματο κανάλι με συνολικό διαθέσιμο εύρος ζώνης 1MHz. Από αυτό το κανάλι πρέπει να μεταδοθούν με μέθοδο πολυπλεξίας διαίρεσης συχνότητας (FDMA) τα εξής σήματα (η παράμετρος ***α*** είναι πραγματικός θετικός αριθμός):

- Σήμα πληροφορίας $x_1(t)$ εύρους ζώνης $W_1 = 100a\ KHz$ που θα διαμορφώσει κατά πλάτος (DSB) κατάλληλο φέρον μοναδιαίου πλάτους.
- Σήμα πληροφορίας $x_2(t)$ εύρους ζώνης $W_2 = 150\ KHz$ που θα διαμορφώσει κατά συχνότητα (FM) κατάλληλο φέρον μοναδιαίου πλάτους με λόγο απόκλισης D=*α*.
- Σήμα πληροφορίας (βασικής ζώνης) $x_3(t)$ με εύρος ζώνης $W_3 = 50a\ KHz$ που υπόκειται σε παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM). Για τη μετάδοση του ψηφιακού PCM σήματος απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 30dB.
- Σήμα πληροφορίας $x_4(t)$ εύρους ζώνης $W_4 = 50a\ KHz$ που υπόκειται σε παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM). Το στιγμιαίο σφάλμα μεταξύ της πραγματικής τιμής του σήματος $x_4(t)$ και της κβαντισμένης τιμής του σήματος PCM πρέπει να είναι το πολύ 0,5% του *peak-to-peak* πλάτους του $x_4(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση καθενός από τα παραπάνω σήματα.

(β) Να υπολογιστεί η παράμετρος ***α*** ώστε κατά τη μετάδοση των σημάτων να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού.

(α)

Για το σήμα $x_1(t)$ το απαιτούμενο έυρος ζώνης είναι $W_{DSB,1} = 2\times 100kHz = 200a\ kHz$

Για το σήμα $x_2(t)$ το απαιτούμενο έυρος ζώνης είναι

$W_{FM,2} = 2\times(D+1)150kHz = 300(a+1)\ kHz$

Για το σήμα $x_3(t)$:

Προκειμένου να μεταδοθεί PCM με SNR≥30dB θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε: $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log L$.

Συνεπώς ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών ομοιόμορφης κβαντοποίησης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $20\log_{10} L \geq 30 \Rightarrow L \geq 10^{\frac{3}{2}} = 31.609$ άρα κατ'ελάχιστον απαιτούνται L=31.609 στάθμες και επειδή θα πρέπει να είναι δύναμη του 2 τελικά θα έχουμε 32 στάθμες κβάντισης.

Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για το PCM είναι $B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L$.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 50αkHz οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα ισούται με: $f_s = 100akHz$

Συνεπώς, $W_{PCM,3} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} 100a\ kHz \log_2 32 = 250a\ kHz$

Για το σήμα $x_4(t)$ γνωρίζουμε ότι σε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή το μέγιστο στιγμιαίο σφάλμα μεταξύ πραγματικής και κβαντισμένης τιμής ενός σήματος είναι ίσο με το μισό του βήματος κβαντισμού, δηλαδή Δ/2 και από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε

$$\frac{\Delta}{2} \leq \frac{0.5}{100} V_{pp} \quad (1)$$

Ο αριθμός επιπέδων κβαντισμού ισούται με $L = \frac{V_{pp}}{\Delta}$. (2)

Από τις σχέσεις (1) & (2), προκύπτει ότι L≥100.

Συνεπώς απαιτούνται τουλάχιστον $n = \lceil \log_2 L \rceil = 6.64$ bits δηλ. 7 bits,

Αφού το σήμα $x_4(t)$ έχει εύρος ζωνης 50α kHz η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 100a\ kHz$ (100α ksamples/sec). Συνεπώς το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι

$$W_{PCM,4} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} 100akHz \cdot 7 = 350a\ kHz$$

(β) Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο το διαθέσιμο εύρος ζώνης του καναλιού κατά τη μετάδοση των σημάτων θα πρέπει να ισχύει:

$$W_{DSB,1} + W_{FM,2} + W_{PCM,3} + W_{PCM,4} = 1MHz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200a + 300(a+1) + 250a + 350a = 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200a + 300a + 300 + 250a + 350a = 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1100a = 700 \Rightarrow a = \frac{70}{110} = 0.634$$

ΘΕΜΑ 5/ΓΕ5/1112

Στόχος της άσκησης *είναι η επανάληψη σε θέματα που σχετίζονται με την επεξεργασία σημάτων από ιδανικά φίλτρα, τη χρήση του κριτηρίου δειγματοληψίας και τη διερεύνηση περιοδικότητας σημάτων. Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/1112/Θ5,6,7 , ΓΕ2/1112/Θ4*

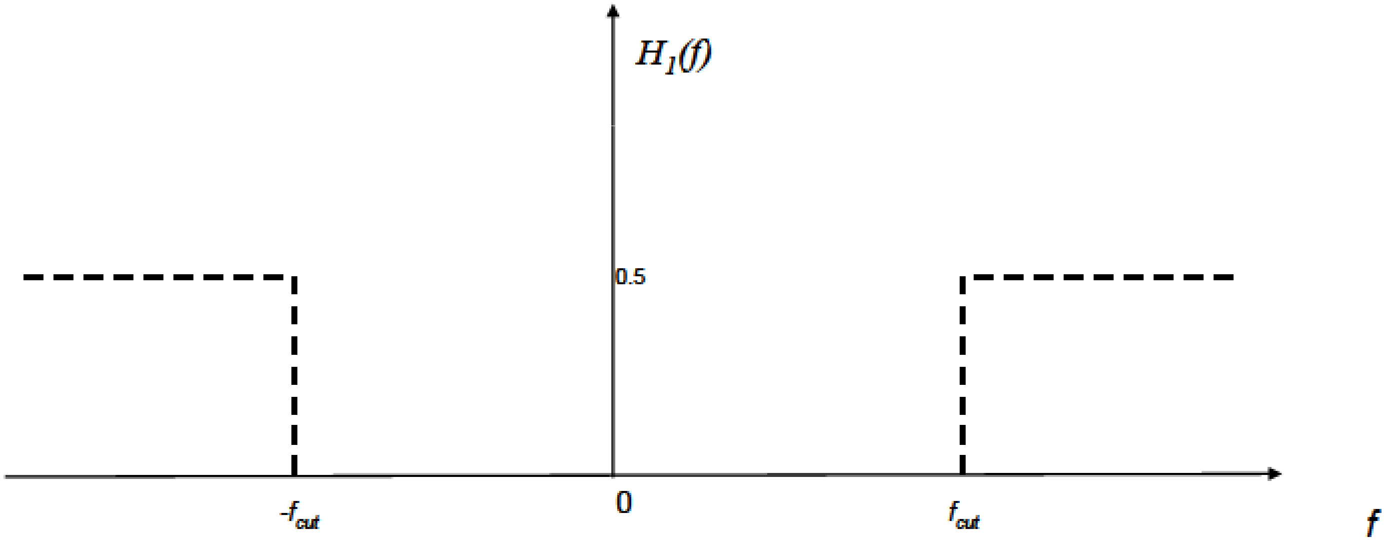
Ένα σήμα εισόδου αποτελείται από άθροισμα τριών ημιτονικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους έκαστο. Το σήμα αυτό περνά από ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση $h_1(t) = 0.5\left[\delta(t) - 2f_{cut}\sin c(2f_{cut}t)\right]$ στη συνέχεια η έξοδος περνά από ένα ιδανικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H_2(f) = 2\left[u(f+\beta)+u(f+a)-u(f-\beta)-u(f-a)\right]$, με α=3KHz και β=8KHz, και επίσης 3KHz<f_{cu}t<8KHz.

Να σχεδιάσετε το ισοδύναμο φίλτρο και να υπολογίσετε τη συχνότητα αποκοπής με δεδομένα ότι:

- Η διπλάσια της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας του σήματος εισόδου είναι 28KHz.
- Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θεωρώντας τα 2 από τα 3 ημιτονικά σήματα εισόδου είναι 12KHz.
- Ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη συχνότητα είναι 1.75.
- Το σήμα εξόδου είναι άθροισμα 2 ημιτονικών σημάτων με περίοδο 1ms.

Το πρώτο φίλτρο έχει κρουστική συνάρτηση $h_1(t) = 0.5\left[\delta(t) - 2f_{cut}\sin c(2f_{cut}t)\right]$ και επομένως η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του φίλτρου είναι

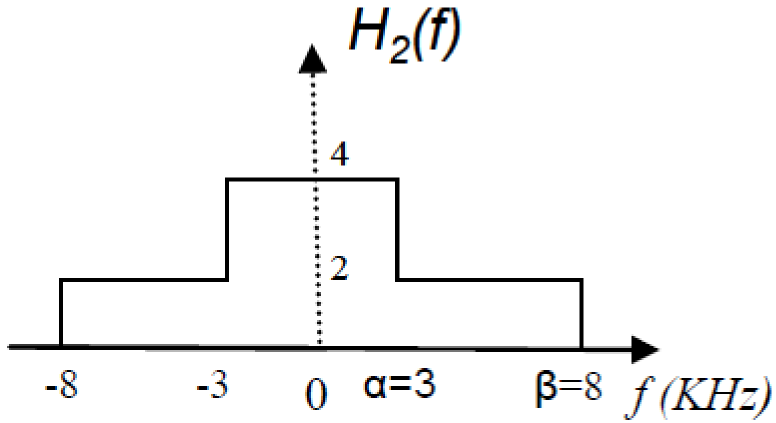
$H_1(f) = 0.5\left[1 - rect\dfrac{f}{2f_{cut}}\right]$, (υψιπερατό φίλτρο)



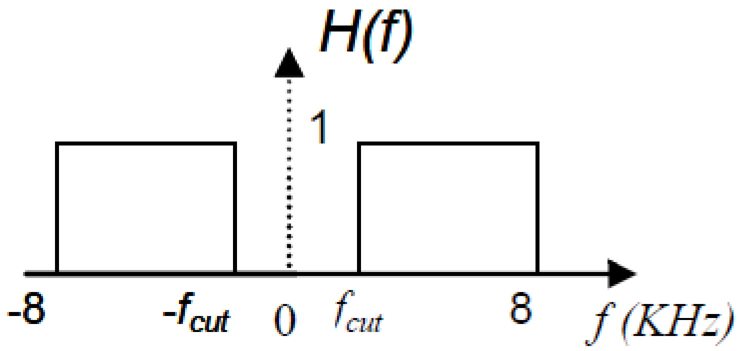
Δίνεται ότι $H_2(f) = 2\left[u(f+\beta)+u(f+a)-u(f-\beta)-u(f-a)\right]$

$-oo \quad -\beta \quad -\alpha \quad \alpha \quad \beta \quad +oo$

$u(f+b)$	0	1	1	1	1
$u(f+a)$	0	0	1	1	1
$-u(f-b)$	0	0	0	0	-1
$-u(f-a)$	0	0	0	-1	-1
$H_2(f)$	0	2	4	2	0



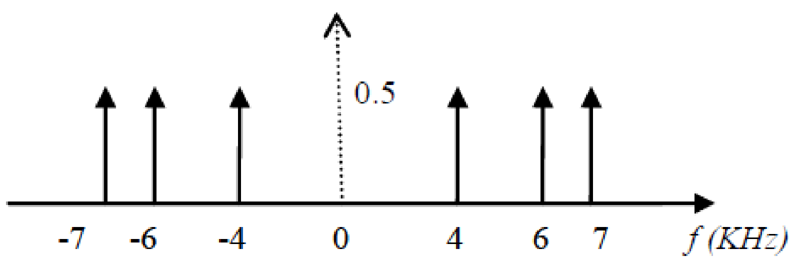
Ο συνδυασμός των 2 φίλτρων δίνει ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:



Από τα δεδομένα της άσκησης:

- Το σήμα εισόδου αποτελείται από άθροισμα τριών ημιτονικών σημάτων μοναδιαίου πλάτους έκαστο
- Η διπλάσια της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας του σήματος εισόδου είναι 28KHz. Επομένως η συχνότητα Niquist είναι $f_{Niquist}$=14 KHz και συνεπώς η μέγιστη συχνότητα των σημάτων είναι fmax=7KHz
- Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θεωρώντας τα 2 από τα 3 ημιτονικά σήματα εισόδου είναι 12KHz. Επομενως, μια άλλη συχνότητα είναι η f_2 = 6KHz
- Ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη συχνότητα είναι 1.75. Επομένως η τρίτη συχνότητα (η μικρότερη) είναι f_1=(7/1.75)=4KHz
- Ώστε οι συχνότητες είναι
    - f_1= 4 KHz
    - f_2= 6 KHz
    - f_3= 7 KHz

Οπότε το σήμα εισόδου έχει φάσμα :



- Δεδομένου ότι το σήμα εξόδου είναι άθροισμα 2 ημιτονικών σημάτων με περίοδο 1ms, θα εξετάσουμε τους πιθανούς συνδυασμούς :
    - (f_1, f_3) =(4 KHz, 7 KHz). Ο λόγος των περιόδων είναι $T_1/T_3=7/4$ ρητός και επομένως το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο
        - $T_{ολ}=4T_1=7T_2=1$
        - Για να επιτρέπονται οι συχνότητες (f_1, f_3) θα πρέπει το f_{cut} να είναι στο διάστημα $3< f_{cut}\leq 4$. Όμως τότε το συνιστάμενο σήμα θα έχει τρεις συνιστώσες στην έξοδο
    - (f_1, f_2) =(4 KHz, 6 KHz). Ο λόγος των περιόδων είναι $T_1/T_2=6/4$ ρητός και επομένως το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_{ολ}=4T_1=7T_2=1$. Όμως το ζευγάρι αυτό δεν είναι αποδεκτό αφού οποιαδήποτε τιμή του f_{cut} είτε θα αποκλείει τουλάχιστον τη μία από τις δύο συχνότητες είτε το σήμα θα έχει τρεις συνιστώσες στην έξοδο.
    - (f_2, f_3) =(6 KHz, 7 KHz). Ο λόγος των περιόδων είναι $T_2/T_3=6/4$ ρητός και επομένως το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_{ολ}=4T_1=7T_2=1$.Το ζευγάρι αυτό είναι η αποδεκτή λύση αφού υπάρχει τιμή στο $f_{cut,}$ $4< f_{cut}\leq 6$, που ικανοποιεί τον περιορισμό της άσκησης.

Επομένως η συχνότητα αποκοπής του υψιπερατού φίλτρου θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 4KHz και μικρότερη από 6KHz.

ΕΞ 2005 Β

[Θ.4] Δίνεται το σήμα βασικής ζώνης $x(t) = 2\cos^2\left(6\pi 10^3 t - \pi\right) - \sin\left(5\pi 10^3 t\right)$.

(i) Να σχεδιαστεί το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του x(t).

(ii) Να βρεθεί η συχνότητα του x(t) και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του.

(iii) Το σήμα x(t) πρόκειται να μεταδοθεί ψηφιακά με δυαδικό σύστημα με παλμοκωδική διαμόρφωση PCM και με ρυθμό μετάδοσης στο κανάλι R=36 kbps. Να βρεθεί ο απαιτούμενος αριθμός των σταθμών κβάντισης.

(iv) Να βρεθεί η μέση ισχύς του σήματος x(t).

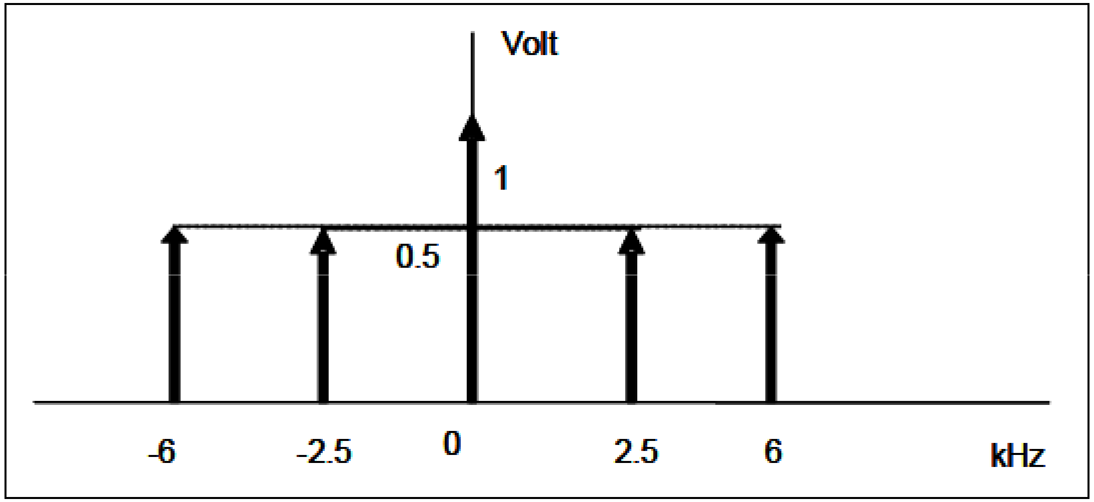
Λύση

(i)

$$x(t) = 2\cos^2\left(6\pi 10^3 t - \pi\right) - \sin\left(5\pi 10^3 t\right) = 1 + \cos\left(12\pi 10^3 t - 2\pi\right) - \sin\left(5\pi 10^3 t\right) =$$

$$= 1 + \cos\left(12\pi 10^3 t\right) - \sin\left(5\pi 10^3 t\right)$$

Το αμφίπλευρο φάσμα πλάτους είναι το ακόλουθο:



(ii) Το σήμα αποτελείται από ένα σταθερό όρο και το άθροισμα 2 περιοδικών. Ο λόγος των περιόδων τους είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{5}{12}$, άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T=12T_1=5T_2=2ms$ και συχνότητα $f=1/T=500$ Hz.
Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 6kHz, οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι $f_{s,min}=12kHz$

(iii) Ισχύει ότι $R_{PCM} = f_s \log_2 L \Rightarrow \log_2 L \leq \frac{36 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^3} = 3 \Rightarrow L = 8$

(iv) Από το φάσμα πλάτους έχουμε $P = \sum |a_k|^2 = 0.25 + 0.25 + 1 + 0.25 + 0.25 = 2W$

** Γενικός κανόνας: Για κάθε σήμα της μορφής *Acos(2πft+φ) η μέση ισχύς ισούται με* $\frac{A^2}{2}$

ΓΕ2/1011

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

<u>Στόχος της άσκησης</u> *είναι η εξοικείωση με τη δειγματοληψία και τους ΜΣ Fourier.*
Σχετικές ασκήσεις: Θ2/ΕΞ2007Α, Θ4/ΓΕ5/0708, Θ5/ΓΕ1/0910

Έστω το σήμα *x(t)* με φάσμα $X(f) = \cos(2\pi f t_o)\left[u\left(f + \frac{1}{4t_o}\right) - u\left(f - \frac{1}{4t_o}\right)\right]$, $(t_o = 1/16)$

(α) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας καθώς και την έκφραση στο πεδίο του χρόνου για το σήμα *x(t)*.

(β) Το σήμα *x(t)* διαμορφώνει συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 100KHz με διαμόρφωση DSB και στη συνέχεια με χρήση κατάλληλου ιδανικού υψιπερατού φίλτρου δημιουργείται σήμα SSB άνω πλευρικής ζώνης. Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση και τη συνάρτηση μεταφοράς του υψιπερατού φίλτρου.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους του σήματος x(t) καθώς και του διαμορφωμένου σήματος ώστε να προσδιορίσετε τα ζητούμενα της άσκησης.*

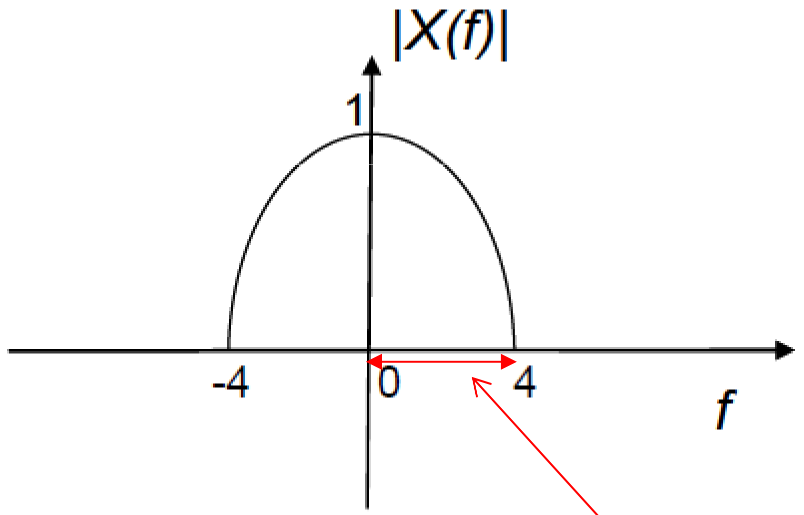
(α) / Με $t_o=1/16$.

$$X(f)=\cos\left(\frac{\pi f}{8}\right)\left[u(f+4)-u(f-4)\right]$$

Ή αλλιώς

$$X(f)=\cos\left(\frac{\pi f}{8}\right)rect\left(\frac{f}{8}\right)$$

Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σε τετραγωνικό παλμό με εύρος 8Hz, (δηλαδή από -4Hz ως 4Hz), συμμετρικά τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων, επομένως το φάσμα του *X(f)* είναι:



Εύρος ζώνης σήματος πληροφορίας: 4Hz

Υπολογισμοί σημείων κοντά στην αρχή των αξόνων

$$\cos\left(\frac{\pi f}{8}\right)=0\Rightarrow\frac{\pi f}{8}=\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow f=\pm 4$$

$$\cos\left(\frac{\pi f}{8}\right)=1\Rightarrow\frac{\pi f}{8}=0\Rightarrow f=0$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι f_{max}=4Hz, επομένως $F_{s,min}$=8Hz.

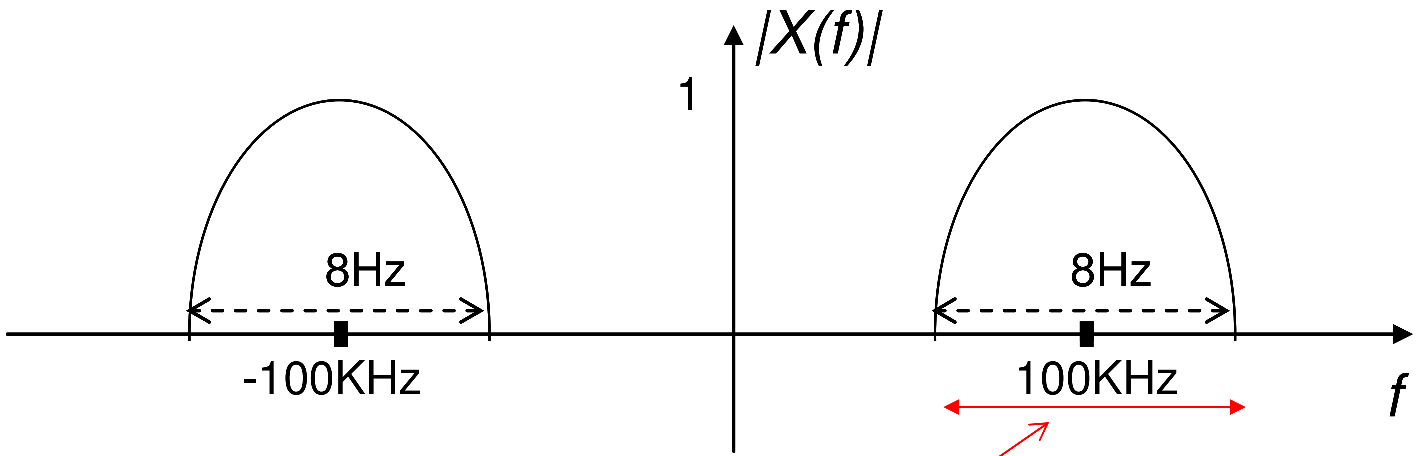
Γνωρίζουμε ότι:

$$\cos\left(2\pi f t_o\right) rect\left(\frac{f}{8}\right) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta\left(t-t_o\right)+\delta\left(t+t_o\right)\right] * 8\sin c(8t) =$$

$$= 4\left[\sin c\left(8\left(t-t_o\right)\right)+\sin c\left(8\left(t+t_o\right)\right)\right]$$

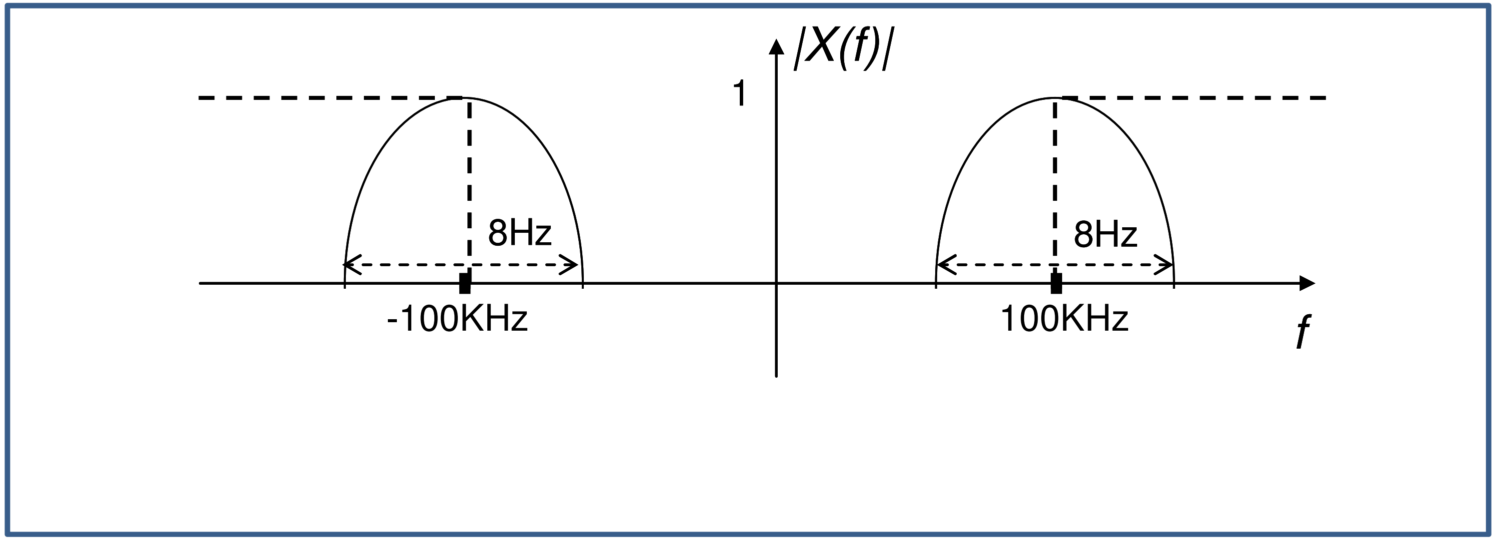
και με t_o*=1/16*, έχουμε:

$$x(t) = 4\left[\sin c\left(8t-0.5\right)+\sin c(8t+0.5)\right]$$



Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος: 8Hz

Για να πάρουμε το SSB, UB χρησιμοποιούμε ιδανικό υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής f_{cut}=100KHz, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η συνάρτηση μεταφοράς του ιδανικού υψιπερατού φίλτρου είναι:

$$H(f) = 1 - rect\frac{f}{2f_{cut}}$$

Και επομένως

$$h(t) = \delta(t) - 2f_{cut}\sin c(2f_{cut}t)$$

<u>ΕΞ 2009Β</u>

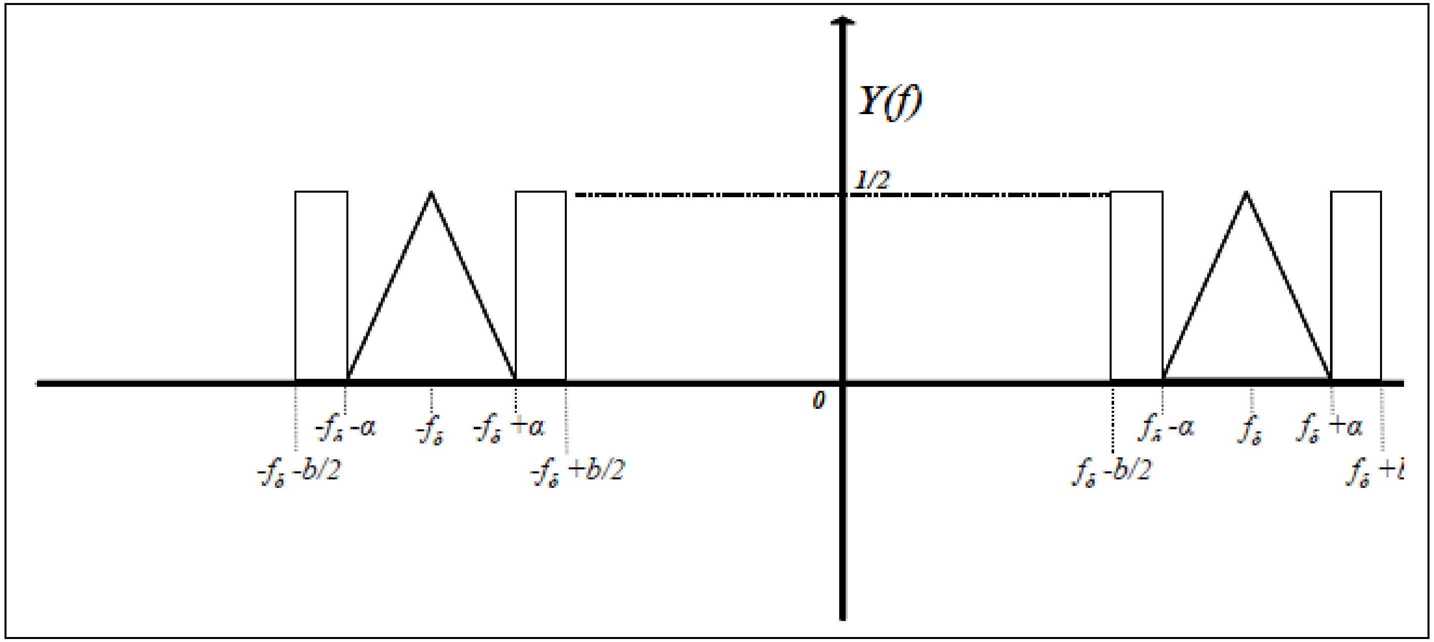
<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Δίνεται το σήμα $x(t) = a\operatorname{sinc}^2(at) + b\operatorname{sinc}(bt) - 2a \cdot \operatorname{sinc}(2at)$, όπου a,b πραγματικοί και $b > 2a > 0$.

(α) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του $x(t)$.

(β) Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του $x(t)$ και να δοθούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων.

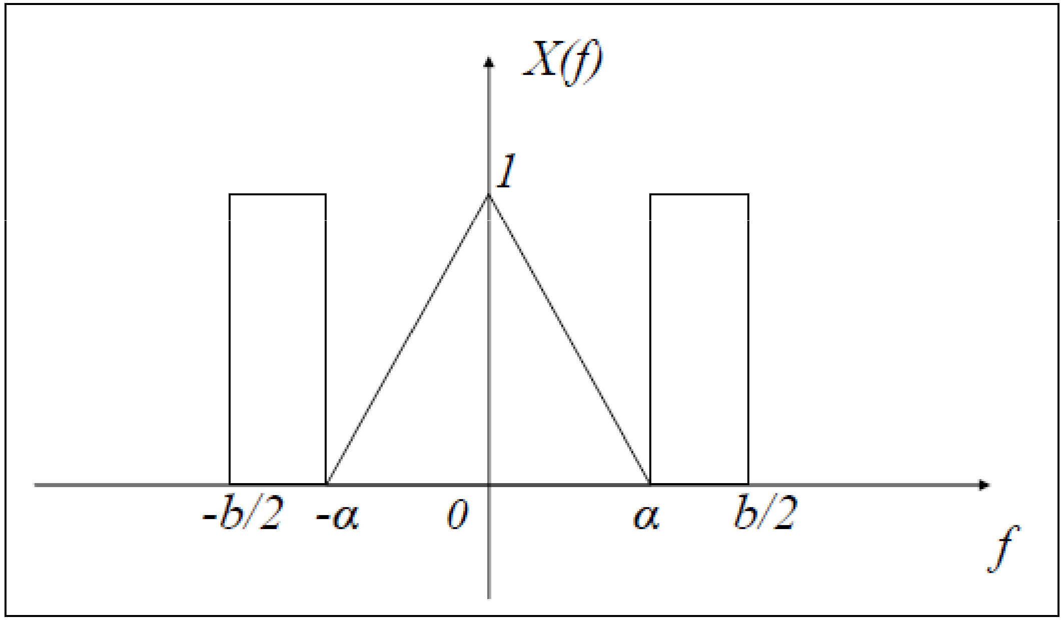
(γ) Το σήμα $x(t)$ δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας f_δ δεκαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας που υπολογίστηκε στο ερώτημα (β), και στη συνέχεια διέρχεται από ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο ώστε να προκύψει σήμα με φάσμα πλάτους που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Να καθορίσετε το εύρος της ζώνης διέλευσης και το πλάτος του ιδανικού φίλτρου.



Το φάσμα πλάτους είναι

$$X(f) = tri(\frac{f}{a}) + rect\left(\frac{f}{b}\right) - rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

και απεικονίζεται παρακάτω:



(β) Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι $f_{\max} = \frac{b}{2}$, οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,\min} = b$ και η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_{s,\max} = \frac{1}{b}$

Είναι

Συνεπώς, στο πεδίο του χρόνου το δειγματισμένο σήμα θα εκφράζεται ως:

$$x_s(n) = x(t)\Big|_{t=nT_s} = a\,\mathrm{sinc}^2\left(a \cdot n \cdot \frac{1}{b}\right) + b\,\mathrm{sinc}\left(b \cdot n \cdot \frac{1}{b}\right) - 2a \cdot \mathrm{sinc}\left(2a \cdot n \cdot \frac{1}{b}\right),$$ όπου n ακέραιος

Επίσης, η έκφραση του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων θα ισούται με:

$$X_s(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[X(f - mf_s)\right] =$$

$$= b \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[tri\left(\frac{f - mf_s}{a}\right) + rect\left(\frac{f - mf_s}{b}\right) - rect\left(\frac{f - mf_s}{2a}\right) \right]$$

(γ) Το σήμα στην έξοδο του φίλτρου αντιστοιχεί σε διαμόρφωση DSB φέροντος μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας f_δ και είναι της μορφής:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[X(f - f_\delta) + X(f + f_\delta)\right]$$

Δειγματίζοντας το σήμα με συχνότητα $f_\delta = 10 f_{s,\min} = 10b$, προκύπτει σήμα με φάσμα πλάτους

$$X_\delta(f) = f_\delta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[X(f - m f_\delta)\right]$$

Η δειγματοληψία δημιουργεί στο πεδίο των συχνοτήτων άπειρα (υπό κλίμακα) αντίγραφα του φάσματος πλάτος του αναλογικού σήματος, που είναι συμμετρικά κεντραρισμένα στις συχνότητες $0, \pm fs, \pm 2fs, \ldots, , \pm nfs, \ldots$ οπότε με κατάλληλο φιλτράρισμα (αποκοπή ζωνών και ενίσχυση πλάτους) μπορεί να προκύψει φάσμα διαμορφωμένου σήματος DSB

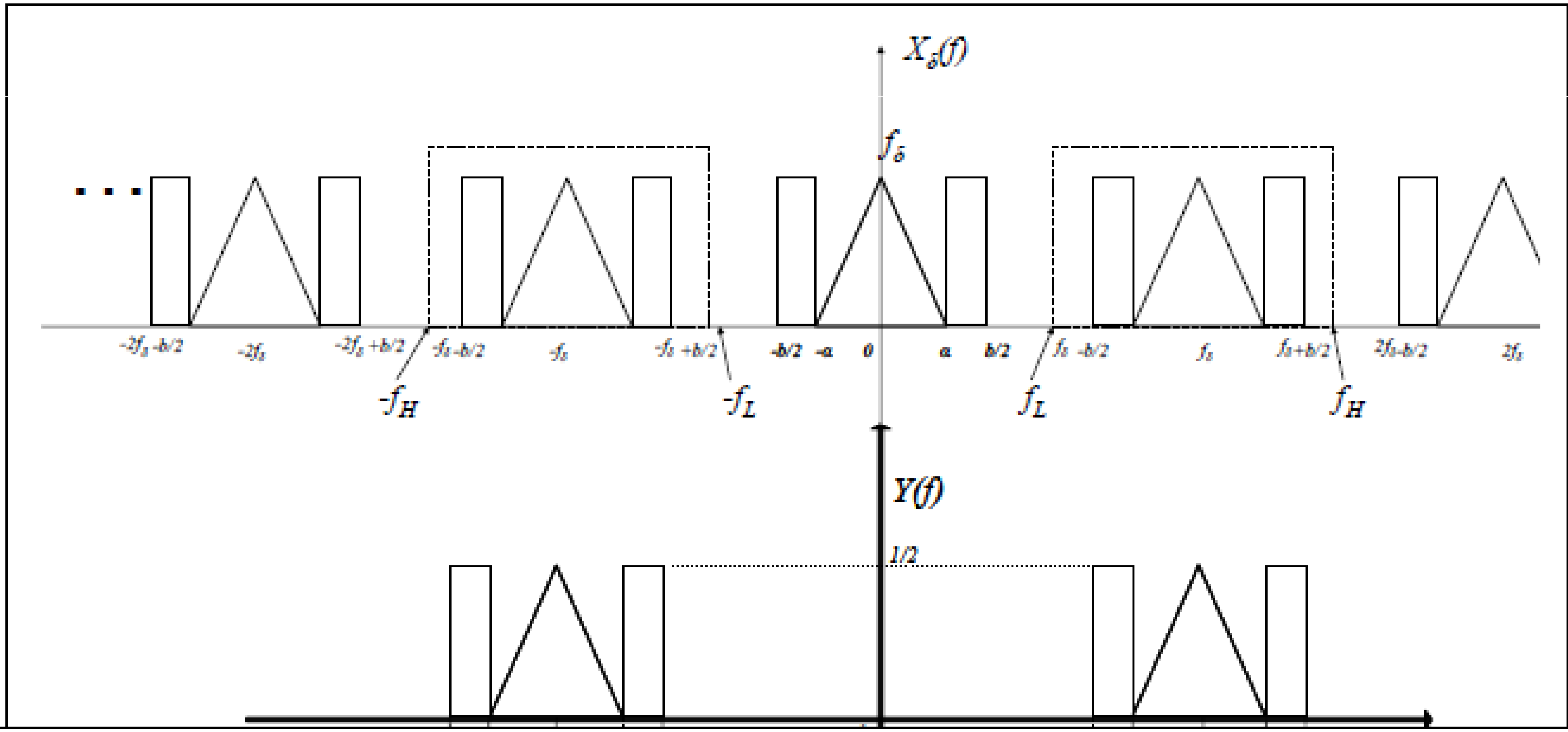
Για να ληφθεί το $Y(f)$ με τη διέλευση του $X_\delta(f)$ από το ζωνοπερατό φίλτρο, θα πρέπει αυτό να αποκόψει όλους τους όρους του $X_\delta(f)$ εκτός των όρων που αντιστοιχούν στα m=-1 και m=1 και να έχει πλάτος ίσο με $\frac{1}{2f_\delta}=\frac{1}{20b}$.

Συνεπώς η ζώνη διέλευσης του φίλτρου θα πρέπει να είναι η $[f_L, f_H]$, όπου

$$\frac{b}{2}<f_L<f_\delta-\frac{b}{2}\Leftrightarrow\frac{b}{2}<f_L<10b-\frac{b}{2}$$

και

$$f_\delta+\frac{b}{2}<f_H<2f_\delta-\frac{b}{2}\Leftrightarrow 10b+\frac{b}{2}<f_H<20b-\frac{b}{2}$$



ΕΞ2007Α/Θ2

ΘΕΜΑ 2 - Δίνεται το σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης $x(t) = a \cdot \text{sinc}(at), (\text{όπου } a > 1)$. Το σήμα δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας 10πλάσια της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας Nyquist. Στη συνέχεια το δειγματισμένο σήμα διέρχεται από κατάλληλο φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(t) = b \cdot \text{sinc}(bt), (\text{όπου } b > 1)$, προκειμένου να ληφθεί το αρχικό σήμα .

Ζητούνται τα εξής:

(α) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$, η μέγιστη συχνότητά του και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist.

(β) Η έκφραση στο πεδίο του χρόνου του δειγματισμένου σήματος $x(n)$, $n = 1,2,3,\ldots$.

(γ) Η έκφραση στο πεδίο των συχνοτήτων του φάσματος του δειγματισμένου σήματος $X_\delta(f)$

(δ) Να βρεθεί το πεδίο τιμών του b (συναρτήσει του α) για τις οποίες δεν υπάρχει παραμόρφωση του ανακτώμενου σήματος στην έξοδο του φίλτρου.

(Σημείωση: Δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f)$ *και υπενθυμίζεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος με φάσμα X(f) που δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας* f_s *ισούται με*

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{X}(f - mf_s) \right].$$

Επίσης, όπου χρειάζεστε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη τις ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier και τους μετασχηματισμούς Fourier χαρακτηριστικών σημάτων από πίνακες)

(α)

Από πίνακες ΜΣ Fourier,

$$\sin c(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin c(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} rect\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \sin c(at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

Μέγιστη συχνότητα του σήματος: $f_{\max} = \dfrac{a}{2}\,\mathrm{Hz}$.

Άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,\min} = a\,\mathrm{Hz}$.

και η συχνότητα δειγματοληψίας της άσκησης είναι $f_s = 10 \cdot f_{s,\min} = 10a\,\mathrm{Hz}$.

(β)

Η περίοδος δειγματοληψίας της άσκησης είναι $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{10a}$ sec.

Άρα, το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου θα γράφεται:

$$x(n) \overset{t \to nT_s}{=} a \cdot \mathrm{sinc}(a \cdot nT_s) = a \cdot \mathrm{sinc}\left(a \cdot n \frac{1}{10a}\right) = a \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{10}\right), n = 0,1,2,...$$

(γ)

Το ζητούμενο φάσμα του δειγματισμένου σήματος θα ισούται με:

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{X}(f - mf_s) \right] = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[rect\left(\frac{f - mf_s}{a} \right) \right] =$$

$$= 10a \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[rect\left(\frac{f - m \cdot 10a}{a} \right) \right]$$

(δ)

Ο ΜΣ Fourier της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου είναι:

$$\operatorname{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sinc}(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b} rect\left(\frac{f}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b\operatorname{sinc}(bt) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{b}\right)$$

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{b}\right)$$

δηλ. το φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $f_{cutoff} = \frac{b}{2}$ Hz.

Για να μην έχουμε παραμόρφωση (δηλ. το αρχικό σήμα να ανακτάται πλήρως) θα πρέπει η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου να βρίσκεται μεταξύ της μέγιστης συχνότητας του σήματος και της ελάχιστης συχνότητας των όρων για $m = \pm 1$, δηλαδή:

$$f_{\max} \le f_{cutoff} \le f_s - f_{\max} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \le \frac{b}{2} \le 10a - \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \le b \le 20a - a \Leftrightarrow a \le b \le 19a$$

ΘΕΜΑ 6/ΓΕ20910

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με βασικές έννοιες συνέλιξης, δειγματοληψίας και διαμόρφωσης σημάτων. Σχετικές ασκήσεις:ΕΞ2008Β/Θ2*

Δίνεται το σήμα $x(t)$ που προκύπτει ως συνέλιξη δύο επιμέρους σημάτων:

$x(t)=\left[b\cdot \mathrm{sinc}(bt)\right]*\left[a\cdot \mathrm{sinc}^2(at)+c\cdot \sin c(ct)\right]$ όπου οι a,b,c είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί με $b>2a>c>0$

και $\mathrm{sinc}(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.

(α) Να βρεθεί το φάσμα του σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων $X(f)$ και να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του.

(β) Να προσδιοριστεί μια έκφραση του σήματος $x(t)$ στην οποία δεν περιλαμβάνεται η συνέλιξη και να προσδιοριστεί η έκφραση στο πεδίο του χρόνου του δειγματισμένου σήματος $x_\delta(n)$ (όπου n ακέραιος) , που προκύπτει μετά από δειγματοληψία του $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας πενταπλάσια της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας κατά Nyquist.

(γ) Το σήμα $x(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) ένα συνημιτονικό φέρον με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f=100\pi$. Να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος ως συνάρτηση των a και c. *(Υπόδειξη: Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας για διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από τυχαίο σήμα πληροφορίας y(t) δίνεται από τη σχέση:* $\Delta f_{\max}=\dfrac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|y(t)\right|\right)$*)*

(α)

Δίνεται το σήμα $x(t)=\left[b\cdot\mathrm{sinc}(bt)\right]*\left[a\cdot\mathrm{sinc}^2(at)+c\cdot\sin c(ct)\right]$

, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$ και $b>2a>c>0$.

Το σήμα αυτό αποτελείται από τη συνέλιξη δύο επιμέρους σημάτων, του

$$x_1(t)=b\cdot\mathrm{sinc}(bt)$$

και του

$$x(t)=a\cdot\mathrm{sinc}^2(at)+c\cdot\sin c(ct)$$

Υπολογίζουμε τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Fourier:

Για το $x_1(t)=b\cdot\mathrm{sinc}(bt)$, αναλυτικά έχουμε:

$$\mathrm{sinc}(t)\xleftrightarrow{F} rect(f)\Rightarrow(\text{Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας})$$

$$\Rightarrow\mathrm{sinc}(b\cdot t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{b}rect\left(\frac{f}{b}\right)\Rightarrow(\text{Πολλαπλασιασμός κατά μέλη με } b)$$

$$\Rightarrow x_1(t)=b\cdot\mathrm{sinc}(b\cdot t)\xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{b}\right)=X_1(f)$$

Για το $x(t) = a \cdot \mathrm{sinc}^2(at) + c \cdot \sin c(ct)$, αναλυτικά έχουμε:

$\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Rightarrow$ (ιδιότητα αλλαγής κλίμακας)

$\Rightarrow \mathrm{sinc}^2(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{\alpha} tri\left(\dfrac{f}{\alpha}\right) \Rightarrow$ (πολλαπλασιασμός με α και στα 2 μέλη)

$\Rightarrow a \cdot \mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\dfrac{f}{\alpha}\right)$

Και

$c \cdot \mathrm{sinc}(c \cdot t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\dfrac{f}{c}\right)$

Άρα

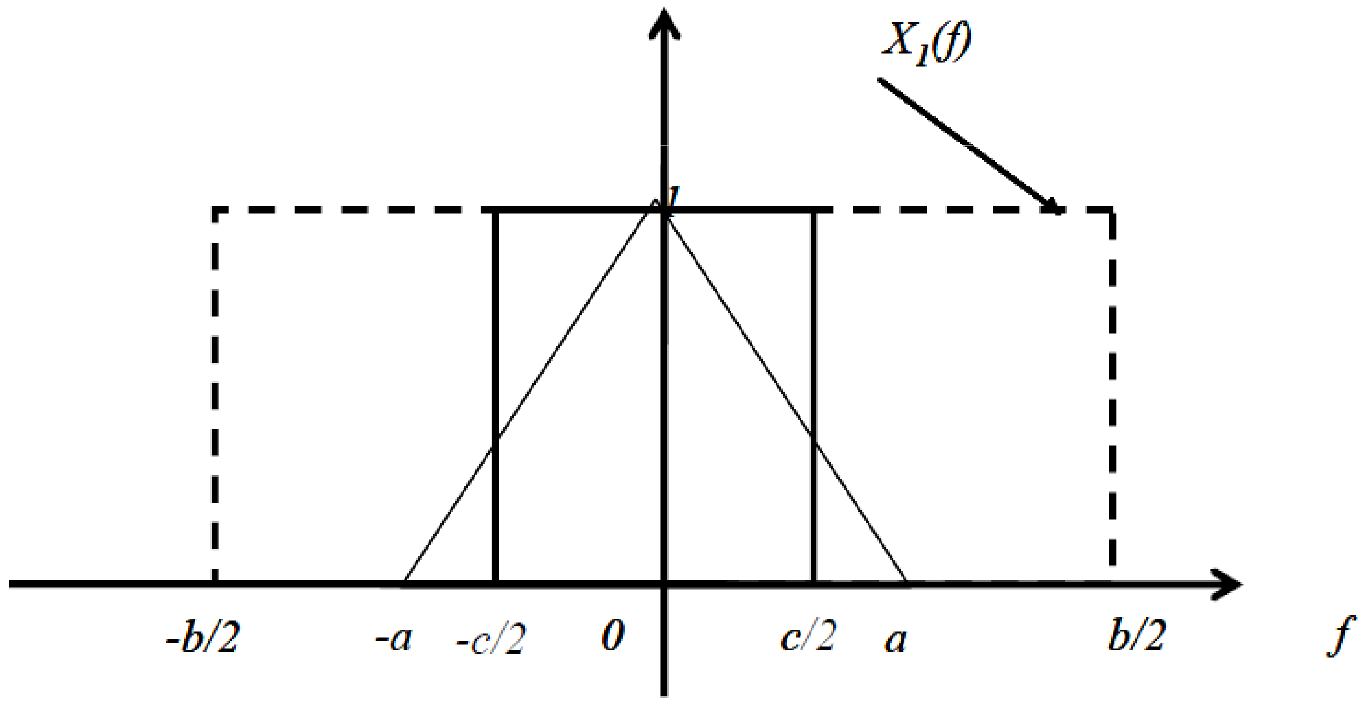
$x_2(t) = a \cdot \mathrm{sinc}^2(at) + c \cdot \sin c(ct) \xleftrightarrow{F} tri\left(\dfrac{f}{\alpha}\right) + rect\left(\dfrac{f}{b}\right) = X_2(f)$

Κι επειδή, η συνέλιξη των σημάτων $x_1(t), x_2(t)$ στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων στο πεδίο των συχνοτήτων, θα έχουμε:

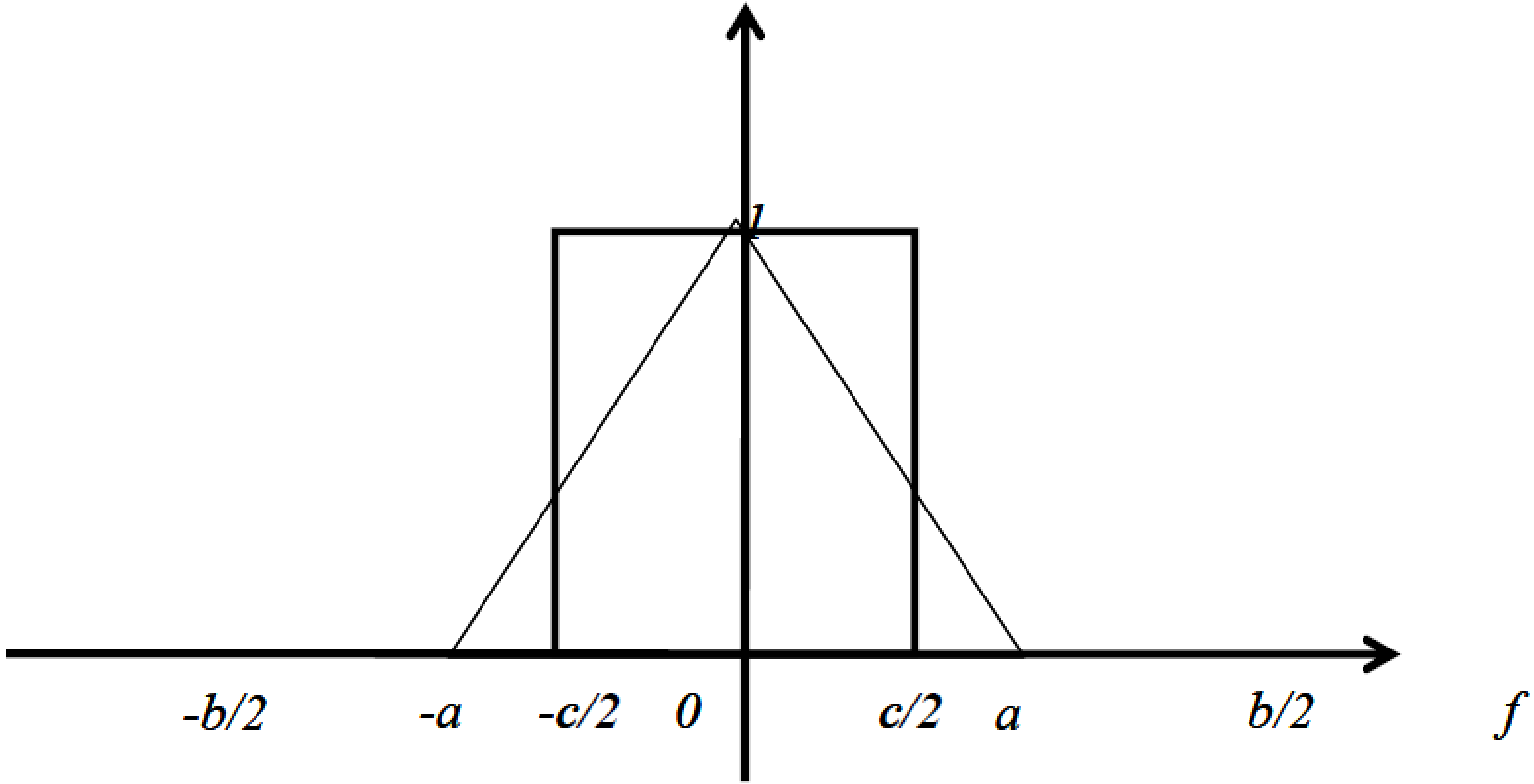
$$x(t) = \left[b \cdot \operatorname{sinc}(bt)\right] * \left[a \cdot \operatorname{sinc}^2(at) + c \cdot \sin c(ct)\right] = x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F} X_1(f) \cdot X_2(f) = rect\left(\frac{f}{b}\right) \cdot \left\{tri\left(\frac{f}{\alpha}\right) + rect\left(\frac{f}{c}\right)\right\} = X(f)$$

Τα επιμέρους φάσματα των σημάτων $x_1(t), x_2(t)$ απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα (όπου έχει ληφθεί υπόψη η σχέση $b > 2a > c > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2} > a > \frac{c}{2} > 0$:



Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα του γινομένου των 2 φασμάτων είναι αυτούσιο το φάσμα $X_2(f)$:



Συνεπώς, εφόσον η μέγιστη συχνότητα του φάσματτος που προέκυψε ισούται με $f_{\max} = a$, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα ισούται με:
(κριτήριο Nyquist) ισούται με: $f_{s,\min} = 2f_{\max} = 2a$

(β) Από την απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος προέκυψε ότι το αποτέλεσμα του γινομένου των 2 φασμάτων είναι αυτούσιο το φάσμα $X_2(f)$, δηλ. $X(f)=X_2(f)$, οπότε και το σήμα $x(t)$ απλούστερα γράφεται: $x(t)=a\cdot \mathrm{sinc}^2(at)+c\cdot \sin c(ct)$

Το σήμα δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας ίση με:

$$f_\delta = 5f_{s,\min} = 5\cdot 2a = 10\alpha$$

Οπότε η αντίστοιχη περίοδος δειγματοληψίας θα είναι:

$$T_\delta = \frac{1}{f_\delta} = \frac{1}{10\alpha}\mathrm{sec}$$

Συνεπώς, το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου θα ισούται με:

$$x_\delta(n) = x(t)\Big|_{t=nT_\delta} = a\cdot \mathrm{sinc}^2(anT_\delta)+c\cdot \sin c(cnT_\delta) = a\cdot \mathrm{sinc}^2\left(a\frac{n}{10a}\right)+c\cdot \sin c\left(c\frac{n}{10a}\right)$$

(γ)

Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W = 2(D+1) f_y$$

όπου $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_y}$

Το σήμα πληροφορίας $x(t)$ έχει εύρος ζώνης ίσο με $f_y = f_{\max} = aHz$

Επίσης, επειδή

$x(t) = a \cdot \mathrm{sinc}^2(at) + c \cdot \sin c(ct)$ ισχύει ότι $\max|x(t)| = \max|a \cdot \mathrm{sinc}^2(at) + c \cdot \sin c(ct)| = a + c$ (η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $a \cdot \mathrm{sinc}^2(at)$ λαμβάνεται για $t = 0$ και είναι ίση με α. Την ίδια χρονική στιγμή και το πλάτος του $c \cdot \sin c(ct)$ είναι μέγιστο και ίσο με c).

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|y(t)\right|\right) = \frac{100\pi}{2\pi}\left(a+c\right) = 50\left(a+c\right) Hz$$

οπότε, $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_y} = \dfrac{50\left(a+c\right)}{a}$

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:

$$W = 2\left(\frac{50\left(a+c\right)}{a}+1\right)a \ Hz$$