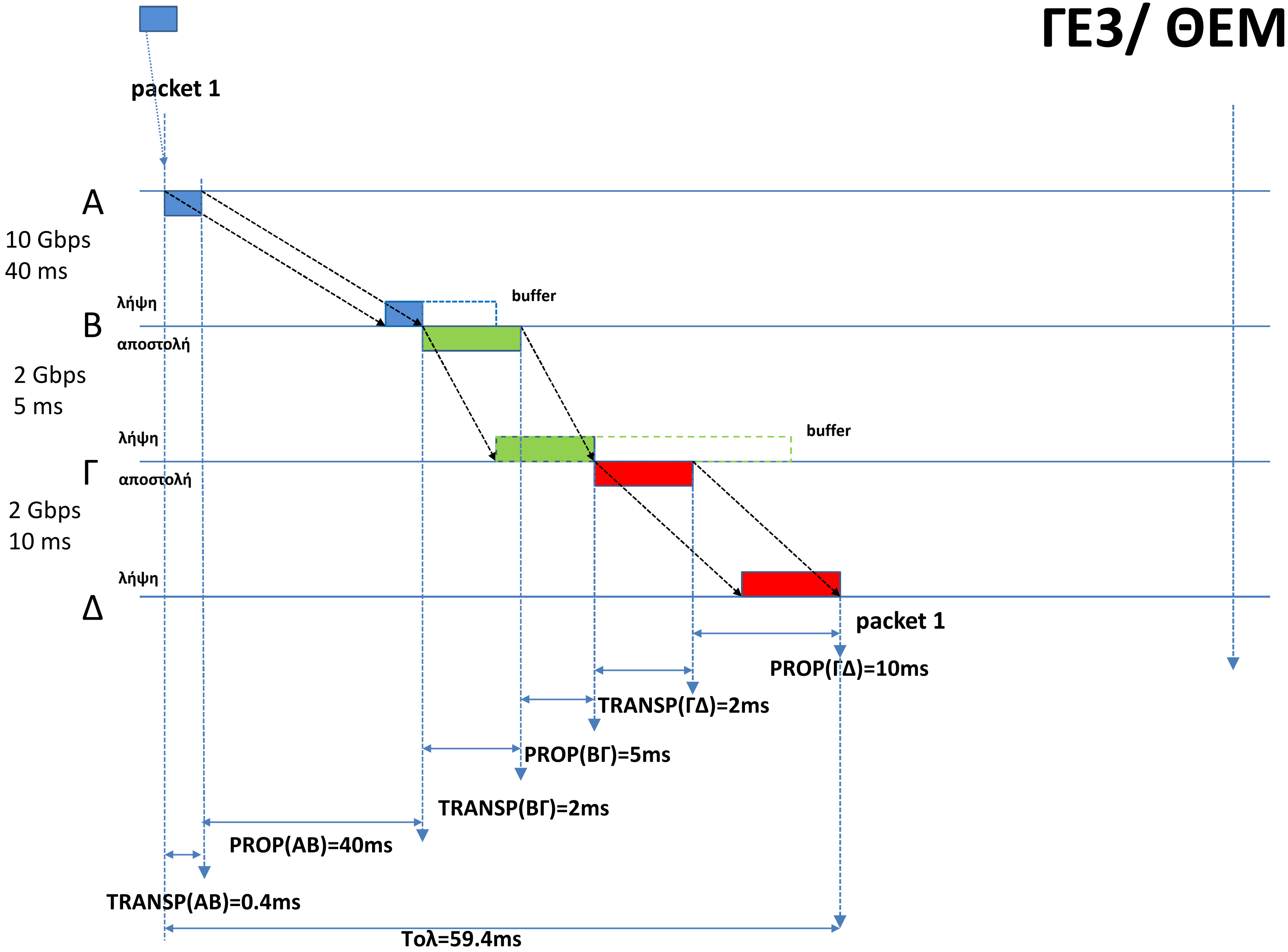
ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ-3

4η ΟΣΣ
09.03.2013
Ασκήσεις-Παραδείγματα

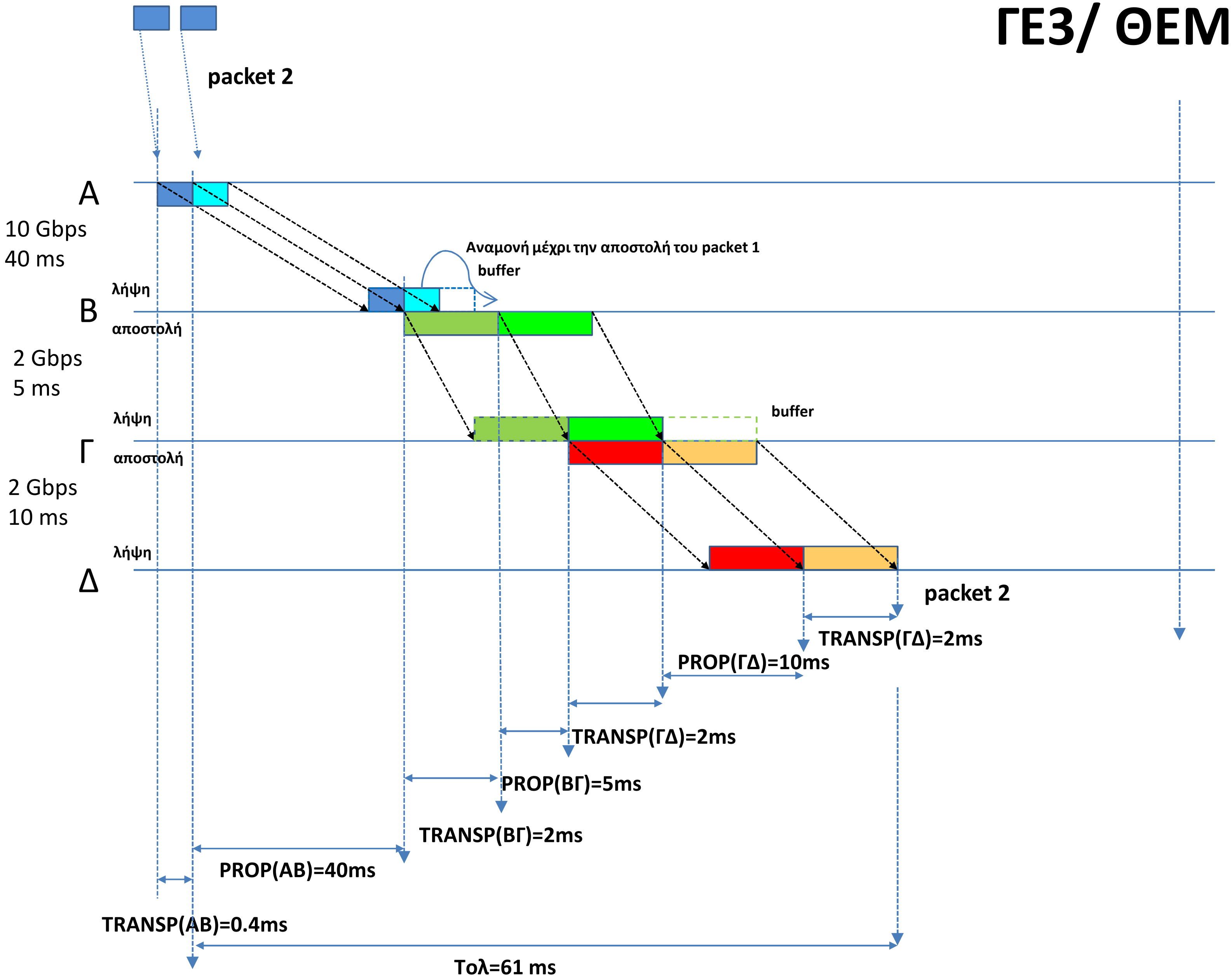
Ν.Δημητρίου

Λύση θέματος 7 / ΓΕ3

ΓΕ3/ ΘΕΜΑ 7/α

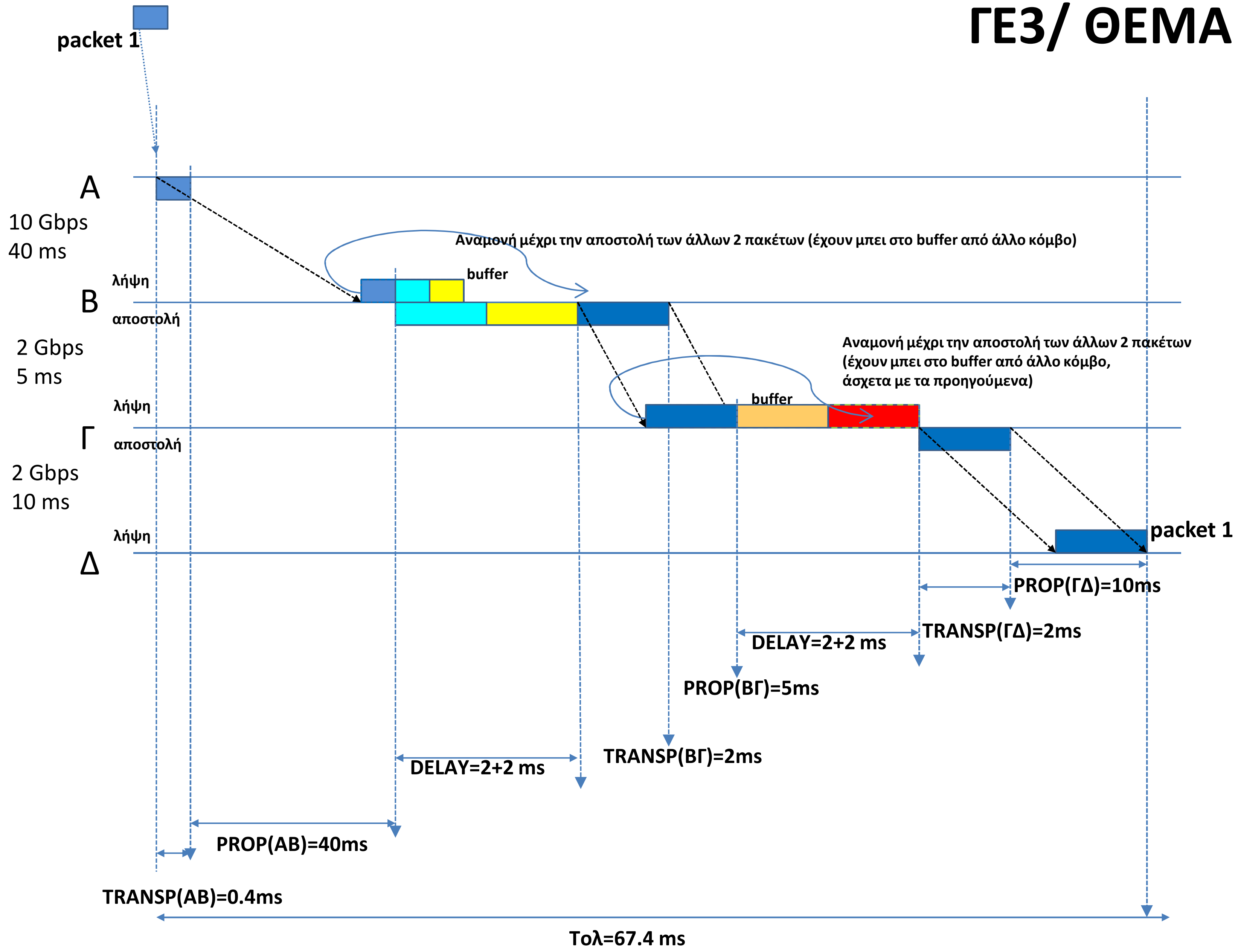

packet 1
A
10 Gbps
40 ms
λήψη
buffer
B
αποστολή
2 Gbps
5 ms
λήψη
buffer
Γ
αποστολή
2 Gbps
10 ms
λήψη
Δ
packet 1
PROP(ΓΔ)=10ms
TRANSP(ΓΔ)=2ms
PROP(ΒΓ)=5ms
TRANSP(ΒΓ)=2ms
PROP(AB)=40ms
TRANSP(AB)=0.4ms
Τολ=59.4ms

ΓΕ3/ ΘΕΜΑ 7/β



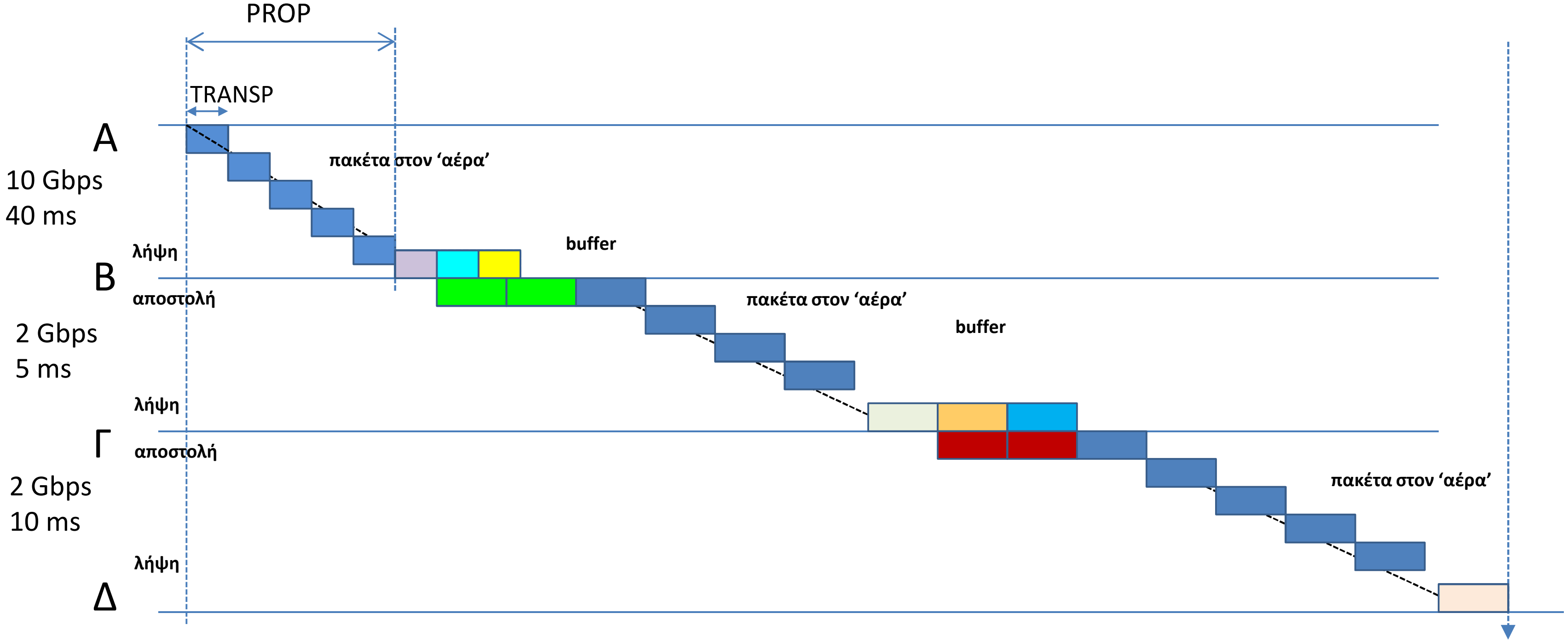
packet 2
A
10 Gbps
40 ms
Αναμονή μέχρι την αποστολή του packet 1
buffer
λήψη
B
αποστολή
2 Gbps
5 ms
λήψη
buffer
Γ
αποστολή
2 Gbps
10 ms
λήψη
Δ
packet 2
TRANSP(ΓΔ)=2ms
PROP(ΓΔ)=10ms
TRANSP(ΓΔ)=2ms
PROP(ΒΓ)=5ms
TRANSP(ΒΓ)=2ms
PROP(AB)=40ms
TRANSP(AB)=0.4ms
Τολ=61 ms

ΓΕ3/ ΘΕΜΑ 7/γ



packet 1
A
10 Gbps
40 ms
Αναμονή μέχρι την αποστολή των άλλων 2 πακέτων (έχουν μπει στο buffer από άλλο κόμβο)
λήψη
buffer
B
αποστολή
2 Gbps
5 ms
Αναμονή μέχρι την αποστολή των άλλων 2 πακέτων
(έχουν μπει στο buffer από άλλο κόμβο,
άσχετα με τα προηγούμενα)
λήψη
buffer
Γ
αποστολή
2 Gbps
10 ms
λήψη
packet 1
Δ
PROP(ΓΔ)=10ms
TRANSP(ΓΔ)=2ms
DELAY=2+2 ms
PROP(ΒΓ)=5ms
TRANSP(ΒΓ)=2ms
DELAY=2+2 ms
PROP(AB)=40ms
TRANSP(AB)=0.4ms
Τολ=67.4 ms

ΓΕ3/ ΘΕΜΑ 7/δ



Όσο διαδίδεται σε χρόνο PROP ένα πακέτο που μεταδόθηκε σε χρόνο TRANSP, μπορούν να μεταδοθούν άλλα PROP/TRANSP πακέτα

Σύνδεσμος ΑΒ: 40ms/0.4ms = 100 πακέτα

Σύνδεσμος ΒΓ: 5ms/2ms = 2.5 πακέτα

Σύνδεσμος ΓΔ: 10ms/2ms=5 πακέτα

Πακέτα σε buffers: 3+3=6 πακέτα

Συνολικά: 100+2.5+5+6=113.5 πακέτα = 113.5 x 500 bytes=56.75MB = 14.1875 MP3 αρχεία

Σχόλια για τη ΓΕ4

- Θέμα 1: Να δείτε το σκεπτικό του παραδείγματος στη διαφάνεια 8.
- Θέμα 2: Να ακολουθήσετε την υπόδειξη . Επίσης να δείτε το παράδειγμα στη διαφάνεια 39.
- Θέματα 3,4: Ασκήσεις στους αλγορίθμους κωδικοποίησης πηγής, να δείτε τα σχετικά παραδείγματα στις διαφάνειας της θεωρίας.
- Θέμα 5: Να δείτε το σχετικό παράδειγμα στη διαφάνεια 12.
- Θέμα 6: Να δείτε το παράδειγμα της πηγής Markov στις διαφάνειες της θεωρίας και τη σχετική άσκηση στη διαφάνεια 15.
- Θέμα 7: Να δείτε τα σχετικά παραδείγματα στις διαφάνειες 23,31.

ΘΕΜΑ 1 ΓΕ4/0506

Όπως γνωρίζουμε, το βόλεϊ είναι ένα παιχνίδι μεταξύ δύο ομάδων, το οποίο τερματίζεται όταν μία εξ΄ αυτών κερδίσει 3 sets. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X, η οποία υποδηλώνει τα δυνατά αποτελέσματα αγώνα βόλεϊ, τα οποία είναι α) 3-0 υπέρ της μίας ή της άλλης ομάδας (δεν διακρίνουμε μεταξύ 3-0 και 0-3, αλλά θεωρούμε και τα δύο αποτελέσματα ως 3-0), β) 3-1 υπέρ της μιας ή της άλλης ομάδας (δεν διακρίνουμε μεταξύ 3-1 και 1-3, αλλά θεωρούμε και τα δύο αποτελέσματα ως 3-1) και γ) 3-2 υπέρ της μιας ή της άλλης ομάδας (δεν διακρίνουμε μεταξύ 3-2 και 2-3, αλλά θεωρούμε και τα δύο αποτελέσματα ως 3-2). Η τυχαία μεταβλητή *Y* υποδηλώνει το πλήθος των sets, τα οποία παίζονται μέχρι να κερδίσει τον αγώνα η μία εκ των δύο ομάδων, με δυνατές τιμές τις 3, 4 και 5. Θεωρούμε ακόμα ίση την πιθανότητα για κάθε ομάδα να κερδίσει ένα set και ότι το αποτέλεσμα κάθε set είναι ανεξάρτητο από το αποτέλεσμα οποιουδήποτε άλλου. Ζητούνται

1. $H(X)$ και $H(Y)$,
2. $H(X/Y)$ και $H(Y/X)$,
3. $H(X, Y)$ *και* $I(X;Y)$,

(Υπόδειξη: συμβολίστε με Α τη μία και με Β την άλλη ομάδα και με ΑΑΑ ή ΒΒΒ την περίπτωση–γεγονός να κερδίσει τον αγώνα η ομάδα Α ή η ομάδα Β με 3-0 κ.λπ. Η πιθανότητα $p(x_1=3\text{-}0)=p(AAA \text{ ή } BBB)= 1/8 + 1/8=1/4$. Με ανάλογο τρόπο προσδιορίζονται και οι υπόλοιπες πιθανότητες.)

1. Πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε όλες τις πιθανότητες που μας ενδιαφέρουν. Ακολουθώντας την υπόδειξη, για να ολοκληρωθεί ένας αγώνας με 3-0 υπέρ της ομάδας Α ή Β, δηλαδή για να έχουμε το γεγονός ΑΑΑ ή ΒΒΒ, η πιθανότητα είναι $p(x_1=3\text{-}0)=p(AAA \acute{\eta} BBB)=1/8+1/8=1/4$, αφού $p(AAA)=p(BBB)=1/2*1/2*1/2=1/8$. Από την άλλη πλευρά, $p(x_2=3\text{-}1)=p(AABA$ ή $BBAB$ ή $ABAA$ ή $BABB$ ή $ABBB$ ή $BAAA)=1/16+1/16+1/16+1/16+1/16+1/16=6/16$. Τέλος, $p(x_3=3\text{-}2)=p(AABBA$ ή $BBAAB$ ή $AABBB$ ή $BBAAA$ ή $ABABA$ ή $BABAB$ ή $ABABB$ ή $BABAA$ ή $ABBAA$ ή $BAABB$ ή $ABBAB$ ή $BAABA)=12*(1/32)=12/32=6/16$. Παρατηρούμε ότι $p(x)+p(x_2)+p(x_3)=4/16+6/16+6/16=1$. Αφού η Y υποδηλώνει το πλήθος των sets που παίζονται μέχρι να κερδίσει το αγώνα η ομάδα Α ή η ομάδα Β, ισχύει $p(x_1=3\text{-}0)=p(y_1=3)=1/4$, $p(x_2=3\text{-}1)=p(y_2=4)=6/16$ και $p(x_3=3\text{-}2)=p(y_3=3)=6/16$.

$$\begin{aligned}H(X)=H(Y)&=-p(x_1)\log p(x_1)-p(x_2)\log p(x_2)-p(x_3)\log p(x_3)=\\&=-p(y_1)\log p(y_1)-p(y_2)\log p(y_2)-p(y_3)\log p(y_3)\\&=-\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}-\frac{6}{16}\log\frac{6}{16}-\frac{6}{16}\log\frac{6}{16}=0,5+0,53+0,53=1,5612 \text{ bits.}\end{aligned}$$

Σημείωση: Ο υπολογισμός των δυνατών συνδυασμών ανά σενάριο μπορεί να γίνει με την έκφραση

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, όπου $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ π.χ. για το σενάριο 3-1 έχουμε τη μορφή των set ***Α ή ***Β όπου στα πρώτα 3 αστέρια θα πρέπει να έχουμε 2 'Α' ή 2 'Β' αντίστοιχα, που αντιστοιχούν σε

$\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3$ συνδυασμούς με νικήτρια την ομάδα Α και άλλους 3 συνδυασμούς με νικήτρια την ομάδα Β

2. Από την εκφώνηση συνάγουμε τις ακόλουθες δεσμευμένες πιθανότητες: $p(y_1/x_1)=1$, $p(y_2/x_1)=0$ και $p(y_3/x_1)=0$, $p(y_1/x_2)=0$, $p(y_2/x_2)=1$ και $p(y_2/x_2)=0$, $p(y_1/x_3)=0$, $p(y_2/x_3)=0$ και $p(y_3/x_3)=1$.

Επίσης,

$p(x_1,y_1)=\frac{1}{4}$, $p(x_1,y_2)=0$, $p(x_1,y_3)=0$, $p(x_2,y_1)=0$, $p(x_2,y_2)=\frac{6}{16}$, $p(x_2,y_3)=0$ και

$p(x_3,y_1)=0$, $p(x_3,y_2)=0$, $p(x_3,y_3)=\frac{6}{16}$.

Ακόμα, $p\left(x_i/y_j\right)=\dfrac{p\left(x_i,y_j\right)}{p(y_j)}$ και επομένως

$p(x_1/y_1)=1$, $p(x_2/y_1)=0$ και $p(x_3/y_1)=0$, $p(x_1/y_2)=0$, $p(x_2/y_2)=1$ και $p(x_2/y_2)=0$, $p(x_1/y_3)=0$, $p(x_2/y_3)=0$ και $p(x_3/y_3)=1$.

Αφού έχουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες που χρειαζόμαστε μπορούμε να υπολογίσουμε

$$H(X/Y)=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}p(x_i,y_j)\log p(x_i/y_j)$$

$$=-\frac{1}{4}\log 1-0-0-\frac{6}{16}\log 1-0-0-\frac{6}{16}\log 1-0-0=0\,\text{bits.}$$

Επίσης, $H(Y/X)=0$.

3.

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i, y_j)\log p(x_i, y_j)$$

$$= -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - 0 - 0 - \frac{6}{16}\log\frac{6}{16} - 0 - 0 - \frac{6}{16}\log\frac{6}{16} - 0 - 0 = 1{,}5612 \text{ bits.}$$

I(X;Y)= H(X)-H(X/Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)= 1,5612bits,

(Παρατήρηση: αφού σύμφωνα με την εκφώνηση, οι X και Y είναι πλήρως εξαρτημένες η μία από την άλλη, γνωρίζουμε ότι ισχύει *H(X/Y)=H(Y/X)=0* και *I(X;Y)=H(X)=H(Y)=H(X,Y)*, που επιβεβαιώσαμε και με τα ανωτέρω αριθμητικά αποτελέσματα.)

ΘΕΜΑ 7 ΓΕ4/0607

Κάνουμε δειγματοληψία 2 φορές το ρυθμό Nyquist σε αναλογικό σήμα εύρους ζώνης 6KHz και κάθε δείγμα κβαντοποιείται σε μια από 512 ισοπίθανες τιμές. Υποθέτοντας ότι τα διαδοχικά δείγματα είναι στατιστικά ανεξάρτητα, να βρεθούν:

1. Ο ρυθμός πληροφορίας της πηγής,
2. Αν μπορεί η έξοδος της πηγής να μεταδοθεί χωρίς σφάλματα μέσα από κανάλι, στο οποίο επενεργεί μόνο αθροιστικός λευκός γκαουσσιανός θόρυβος (AWGN), με εύρος ζώνης 10KHz και SNR=30dB,
3. Το SNR που απαιτείται για μετάδοση χωρίς σφάλματα και
4. Το εύρος ζώνης που απαιτείται για μετάδοση χωρίς σφάλματα με SNR=30dB.

(Υπόδειξη: Ισχύει $C = W \times \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$, όπου C η χωρητικότητα του καναλιού, W το εύρος ζώνης και (S/N ή SNR) ο λόγος σήματος προς θόρυβο. Επίσης, σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα κωδικοποίησης (σελ. 94), αν ο ρυθμός πληροφορίας μιας πηγής είναι μικρότερος της χωρητικότητας ενός καναλιού, τότε είναι δυνατή η μετάδοση της πληροφορίας που παράγεται από την πηγή μέσω του καναλιού χωρίς σφάλματα.)

1. p_i=1/512 και αφού έχουμε ισοπίθανες τιμές η εντροπία είναι $H(X) = \log_2 512 = 9\ bit/symbol$

f_M=6KHz, Ρυθμός δειγματοληψίας: $f_s = 2x(2f_M)$=24KHz

Ρυθμός πληροφορίας: $R = fs \times H(X) = 24 \cdot 10^3 \cdot 9 = 216 Kbps$.

2. $C = W \log_2(1 + SNR) = 10 KHz \times \log_2(1 + 1000) = 99.67\ Kbps$

Επειδή είναι R>C, δεν μπορεί να μεταδοθεί η έξοδος της πηγής χωρίς σφάλματα μέσα από κανάλι AWGN με εύρος ζώνης 10KHz και SNR=30dB.

3.

Το SNR που απαιτείται για μετάδοση χωρίς σφάλματα είναι:

$$C = W\log_2(1+SNR) \geq 216 \cdot 10^3 \Rightarrow \log_2(1+SNR) \geq 21.6 \Rightarrow$$

$$SNR \geq 2^{21.6} - 1 \Rightarrow SNR \geq 65dB$$

4. Το εύρος ζώνης που απαιτείται για μετάδοση χωρίς σφάλματα με SNR=30dB είναι:

$$C = W\log_2(1+SNR) \geq 216 \cdot 10^3 \Rightarrow W \geq \frac{216 \cdot 10^3}{\log_2(1+1000)} = 21.67KHz\,.$$

ΘΕΜΑ 5 ΓΕ4/0708

Δίδεται ο πίνακας μετάβασης τριών καταστάσεων ***στατικής*** πηγής Markoff 1ης τάξης, η οποία παράγει τα σύμβολα φ, χ και ψ:

$\mathbf{U_n}$ \ $\mathbf{U_{n+1}}$	S_1	S_2	S_3
S_1	$P_{11} = 1/2$	$P_{12} = 1/4$	$P_{13} = 1/4$
S_2	$P_{21} = 1/4$	$P_{22} = 1/2$	$P_{23} = 1/4$
S_3	$P_{31} = 0$	$P_{32} = 1/2$	$P_{33} = 1/2$

Συμβολίζουμε με S_1, S_2, S_3, τις τρεις καταστάσεις της πηγής, με $\mathbf{U_n}$ την κατάσταση που βρίσκεται η πηγή τη χρονική στιγμή **n** = **1,2, …**, και με $[P_{ij}]$ τις στατικές πιθανότητες μετάβασης, για κάθε χρονική στιγμή **n,** από την κατάσταση S_i στη κατάσταση S_j. (Δείτε την κατωτέρω επεξήγηση!)

Σχεδιάζουμε τρεις δυαδικούς κώδικες $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ (ένα για κάθε μία από τις καταστάσεις S_1 , S_2 και S_3), αποτελούμενους από τρεις κωδικές λέξεις ο καθένας, όσες και τα σύμβολα της πηγής (δείτε και πάλι την κατωτέρω επεξήγηση). Έτσι, για κάθε σύμβολο της πηγής έχουμε σε κάθε έναν από τους τρεις κώδικες ενδεχομένως διαφορετική κωδική λέξη, η οποία και χρησιμοποιείται σύμφωνα με την εκάστοτε κατάσταση της πηγής. Με βάση αυτή τη μέθοδο κωδικοποίησης της ***στατικής*** πηγής Markoff, υιοθετούμε τις ακόλουθες αρχές:

- Για κάθε χρονική στιγμή **n** και παρούσα κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, επιλέγουμε το κώδικα $\mathbf{C_i}$ που αντιστοιχεί στη κατάσταση $S_\mathbf{i}$,
- Στέλνουμε την κωδική λέξη $\mathbf{c_{ij}}$ του κώδικα $\mathbf{C_i}$ που αντιστοιχεί στο j, εκτελώντας συγχρόνως μετάβαση στην κατάσταση $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathbf{j}$,
- Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα για το επόμενο σύμβολο, κοκ.

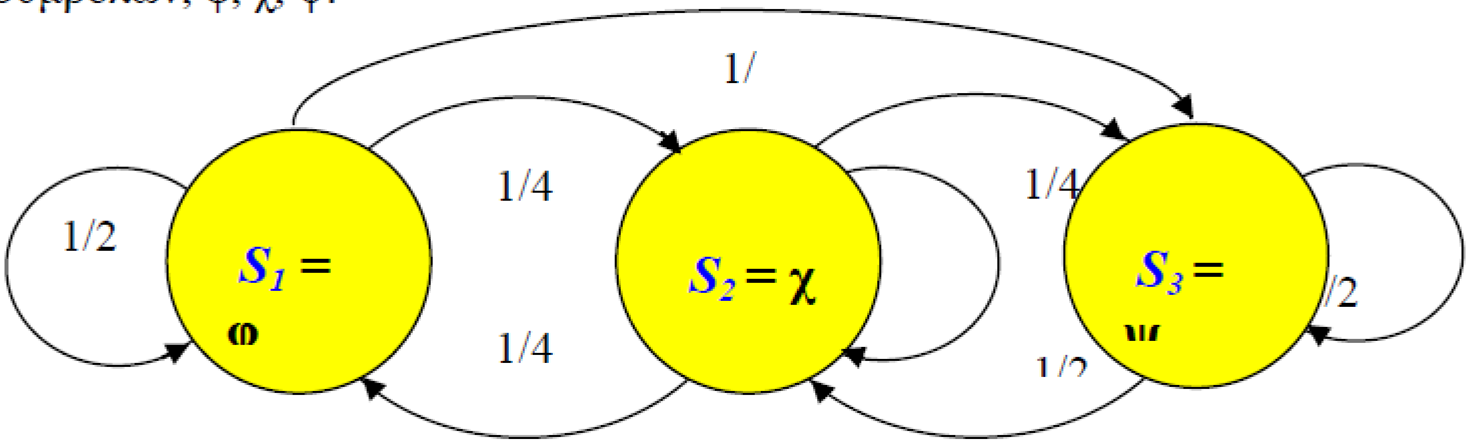
α) Σχεδιάστε κατά Huffman τους τρεις δυαδικούς κώδικες $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, και υπολογίστε το μέσο μήκος της κωδικής λέξης του επόμενου συμβόλου, υποθέτοντας ότι η κατάσταση προέλευσης είναι $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, i = 1,2,3.

β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός δυαδικών ψηφίων κωδικοποίησης για κάθε σύμβολο της πηγής?

γ) Πώς σχετίζεται το τελευταίο με την εντροπία H(U) της πηγής (αλυσίδας) Markoff?

δ) Ο πλεονασμός, ο πλεονασμός εξάρτησης και ο ολικός πλεονασμός της διακριτής πηγής.

(**Επεξήγηση:** Ο μηχανισμός εναλλαγής των τριών καταστάσεων εικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα. Σε κάθε χρονική στιγμή **n**, η μετάβαση από μία κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$ στην επόμενη $\mathbf{U_{n+1}}=S_\mathbf{j}$ συνοδεύεται από την εκπομπή ενός εκ των τριών συμβόλων, φ, χ, ψ.



Σύμφωνα και με τον πίνακα μετάβασης, όταν είναι γνωστή η κατάσταση προέλευσης $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, τα τρία σύμβολα φ, χ, ψ, που εκπέμπονται εν δυνάμει, εκπέμπονται με αντίστοιχες πιθανότητες P_{ij}, j = 1, 2, 3, και οδηγούν την επόμενη χρονική στιγμή **n+1** στην αντίστοιχη κατάσταση προορισμού $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathbf{j}$. Παρατηρείστε ότι, ανεξάρτητα από τη κατάσταση προέλευσης $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, το σύμβολο (**φ ή χ ή ψ**) που εκπέμπεται κατά τη μετάβαση, ορίζεται μόνον από την κατάσταση προορισμού $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathbf{j}$.

Οι πιθανότητες μετάβασης $[P_{ij}]$ παίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο ο μηχανισμός εναλλαγής των καταστάσεων αντανακλάται στη σειρά συμβόλων που παράγεται από την πηγή Markoff. Παρατηρείστε στο συγκεκριμένο παράδειγμα ότι επειδή η πιθανότητα μετάβασης $P_{31} = \Pr [S_1 / S_3]$ από την κατάσταση S_3, στην κατάσταση S_1 είναι μηδενική, το σύμβολο **φ** δεν εκπέμπεται ποτέ μετά το σύμβολο **ψ.** Άρα οι πιθανότητες μετάβασης $[P_{ij}]$ παίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο ο μηχανισμός εναλλαγής των καταστάσεων της πηγής Markoff πρέπει να κωδικοποιηθεί για να επιτύχουμε βέλτιστη *συμπύκνωση/συμπίεση*.

Για να επιτύχουμε βέλτιστη επίδοση, δηλαδή μεγιστοποίηση του επιπέδου συμπίεσης της πηγής, σχεδιάζουμε κατά κανόνα τρεις δυαδικούς κώδικες $\mathbf{C_1, C_2, C_3}$ (ένα για κάθε μία από τις καταστάσεις S_1, S_2 και S_3), έτσι ώστε ο συνολικός κώδικας να παράγει, αντίστοιχα με τη σειρά καταστάσεων της πηγής, δηλαδή αντίστοιχα με τη σειρά των παραγομένων συμβόλων φ, χ, ψ, μια σειρά δυαδικών ψηφίων. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο κώδικας $\mathbf{C_1} = [\mathbf{c_{11}}, \mathbf{c_{12}}, \mathbf{c_{13}}]$ ορίζεται από τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{1j}]$ της κατάστασης S_1, ο κώδικας $\mathbf{C_2} = [\mathbf{c_{21}}, \mathbf{c_{22}}, \mathbf{c_{23}}]$ από τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{2j}]$ της κατάστασης S_2, και ο κώδικας $\mathbf{C_3} = [\mathbf{c_{31}}, \mathbf{c_{32}}, \mathbf{c_{33}}]$ από τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{3j}]$ της κατάστασης S_3. Παρατηρείστε ότι τα σύμβολα φ, χ, ψ, κωδικοποιούνται ενδεχομένως με διαφορετικές κωδικές λέξεις ανάλογα με την κατάσταση προέλευσης S_1, S_2, S_3.)

(α) Για λόγους ευκολίας, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του Τόμου Α, του βιβλίου Θεωρίας της Πληροφορίας & Κωδικοποίησης, σελ. 69-76.

Από τον δεδομένο **πίνακα μετάβασης της στατικής πηγής**

$\mathbf{U_n}$ \ $\mathbf{U_{n+1}}$	S_1	S_2	S_3
S_1	$P_{11} = 1/2$	$P_{12} = 1/4$	$P_{13} = 1/4$
S_2	$P_{21} = 1/4$	$P_{22} = 1/2$	$P_{23} = 1/4$
S_3	$P_{31} = 0$	$P_{32} = 1/2$	$P_{33} = 1/2$

Markoff $1^{ης}$ τάξης, η οποία εκπέμπει τα τρία σύμβολα, φ, χ και ψ, μπορούμε να υπολογίσουμε τις [$\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$], οι οποίες συμβολίζουν τις πιθανότητες των τριών καταστάσεων της πηγής, S_1, S_2 *και* S_3 .

Από την περιγραφή της ***στατικής*** πηγής Markoff $1^{ης}$ τάξης, γνωρίζουμε ότι κάθε μετάβαση από μία κατάσταση $\mathbf{U_n}$ στην επόμενη $\mathbf{U_{n+1}}$, συνοδεύεται από την εκπομπή ενός εκ των τριών συμβόλων, φ, χ, ψ. Η παροούσα κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$ συνδέεται με την εκπομπή του τελευταίου παραχθέντος συμβόλου $\mathbf{X_n}$, ενώ η επόμενη κατάσταση $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathrm{j}$ χαρακτηρίζεται από την εκπομπή του επομένου συμβόλου $\mathbf{X_{n+1}}$.

Οι πιθανότητες εκπομπής των τριών συμβόλων εξαρτώνται από τη κατάσταση που βρίσκεται η πηγή σε δεδομένη χρονική στιγμή n. Δεδομένου ότι η πηγή Markoff που μας δίνεται είναι ***$1^{η\varsigma}$ τάξης***, καθώς επίσης και ***στατική***, ένας τρόπος κωδικοποίησης που αποδεικνύεται αποτελεσματικός είναι να σχεδιασθούν τρεις διαφορετικοί δυαδικοί κώδικες $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, και $\mathbf{C_3}$, ένας για κάθε μία από τις καταστάσεις S_1, S_2 και S_3.

Με βάση τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{ij}]$, και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Huffman για κάθε προηγούμενη (η παρούσα) κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$ (S_1, S_2, S_3) χωριστά, έχουμε:

S_1	Κώδικας Huffman $\mathbf{C_1}$			l_{ij}
$\mathbf{c_{11}}$	$P_{11} = ½$	½ (0)	0	1
$\mathbf{c_{12}}$	$P_{12} = ¼$ (0)	½ (1)	10	2
$\mathbf{c_{13}}$	$P_{13} = ¼$ (1)		11	2

S_2	Κώδικας Huffman $\mathbf{C_2}$			l_{ij}
$\mathbf{c_{21}}$	$P_{21} = ¼$ (0)	½ (1)	10	2
$\mathbf{c_{22}}$	$P_{22} = ½$	½ (0)	0	1
$\mathbf{c_{23}}$	$P_{23} = ¼$ (1)		11	2

S_3	Κώδικας Huffman $\mathbf{C_3}$		l_{ij}
$\mathbf{c_{31}}$	$P_{31} = 0$	--	--
$\mathbf{c_{32}}$	$P_{32} = ½$ (0)	0	1
$\mathbf{c_{33}}$	$P_{33} = ½$ (1)	1	1

Άρα, το κατά Huffman μέσο μήκος της κωδικής λέξης του επόμενου συμβόλου, για τις τρεις καταστάσεις S_1, S_2, και S_3, υποθέτοντας ότι η προηγούμενη κατάσταση είναι δεδομένη, είναι:

$$\mathbf{L_i} = \mathrm{E}[\mathbf{l_{ij}} / \mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}] = \sum_{\mathbf{j}=1}^{3} l_{ij} \mathbf{P_{ij}} = \begin{cases} 1{,}5 & , \mathbf{i} = 1 \\ 1{,}5 & , \mathbf{i} = 2 \\ 1{,}0 & , \mathbf{i} = 3 \end{cases} \text{ δυαδικά ψηφία για κάθε σύμβολο.}$$

β) Ο μέσος αριθμός δυαδικών ψηφίων κωδικοποίησης για κάθε σύμβολο της πηγής είναι ο μέσος όρος **L** του $\mathbf{L_i}$, με βάση τις στατικές πιθανότητες $[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}]$, των τριών καταστάσεων S_1 , S_2 , S_3:

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}[\mathbf{L_i}] = \sum_{i=1}^{3} p_i \, E[\mathbf{l_{ij}} / \mathbf{U_n} = S_i] \, .$$

Οι στατικές πιθανότητες $[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}]$, υπολογίζονται με βάση τη σχέση (σελ. 70 του βιβλίου):

$$[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}], \qquad \sum_{i=1}^{3} \mathbf{p_i} = \mathbf{1} \, ,$$

από όπου προκύπτει ότι: $[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}] = [2/9 \, , 4/9, 1/3]$.

Άρα: $\mathbf{L} = \mathbf{E}[\mathbf{L_i}] = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{p_i} \, E[\mathbf{l_{ij}} / \mathbf{U_n} = S_i] = \mathbf{p_1}\, 1{,}5 + \mathbf{p_2}\, 1{,}5 + \mathbf{p_3}\, 1{,}0 = 4/3$

$= 1{,}333$ bits/σύμβολο πηγής.

γ) Σύμφωνα με τη σχέση (2.13), σελ. 73 του βιβλίου, η εντροπία H(U) της πηγής (αλυσίδας) Markoff είναι:

$$H_{\mu\varepsilon\,\mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S}) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=3}} \mathrm{p_i H(S_i)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=3}} \mathrm{p_i} \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{j=3}} P_{ij} \log P_{ij} \;= \mathbf{1{,}333333\ bits/σύμβολο}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με τον ανωτέρω τρόπο κωδικοποίησης πετύχαμε άριστη κωδικοποίηση, αφού το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων είναι ίσο με την εντροπία της πηγής.

δ) Ο πλεονασμός της διακριτής πηγής μπορεί να υπολογισθεί, σύμφωνα με τη σχέση (2.3) στη σελ. 48 του βιβλίου:

$$red = 1 - \frac{H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(S)}{\log 3}\text{, όπου } H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(S) = -\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{3}} \mathbf{p_i \log p_i = 1{,}530493}.$$

Άρα, ο πλεονασμός χωρίς μνήμη της διακριτής πηγής είναι: ***red*** **= 0,034366**.

Παρόμοια, ο πλεονασμός εξάρτησης της διακριτής πηγής υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2.17) στη σελ. 74 του βιβλίου:

$$\boldsymbol{red_{\varepsilon\xi}} = 1 - \frac{H_{\mu\varepsilon\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(S)}{H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(S)} = 1 - \frac{H_{\mu\varepsilon\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(S)}{1{,}530493} = 1 - \frac{1{,}333333}{1{,}530493} = \mathbf{0{,}128821.}$$

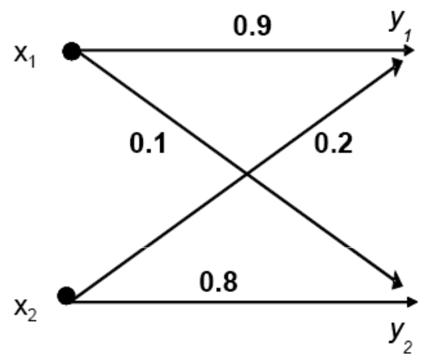
Τέλος, σύμφωνα με τη σχέση (2.18) του βιβλίου στη σελ. 74, ο ολικός πλεονασμός της διακριτής πηγής είναι:

$$\boldsymbol{red_{o\lambda}} = 1 - \frac{H_{\mu\varepsilon\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(S)}{max\, H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(S)} = 1 - \frac{1{,}333333}{\log 3} = \mathbf{0{,}15876.}$$

ΕΞ2008Α/Θ5

ΘΕΜΑ 5

Έστω ένα διακριτό κανάλι C_1 χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή $X=\{x_1,x_2\}$ με πιθανότητες εμφάνισης
$P(X=x_1)=P(X=x_2)=0.5$, ενώ ο πίνακας μετάβασης του καναλιού απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



(α) Ζητούνται τα εξής:

(α-i) Οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων $Y= \{y_1,y_2\}$ στην έξοδο του καναλιού καθώς και η $H(Y)$.

(α-ii) Να βρεθεί η $H(Y/X=x_1)$ και στη συνέχεια υπολογίστε την $H(Y/X)$ αν γνωρίζετε ότι η $H(Y/X=x_2)=0,722$ *bits*.

(α-iii) Η χωρητικότητα του καναλιού C_1.
(β) Στο προηγούμενο κανάλι C_1 συνδέουμε σε σειρά ένα δεύτερο <u>όμοιο</u> κανάλι C_2, έτσι ώστε οι έξοδοι $Y=\{y_1,y_2\}$του πρώτου να αποτελούν τις εισόδους του δευτέρου. Οι έξοδοι του καναλιού C_2 είναι οι $Z=\{ z_1,z_2\}$. Ζητούνται τα εξής:

(β-i) Θεωρώντας τη σύνδεση των καναλιών C_1 και C_2 ως το σύνθετο κανάλι C_{1+2}, το οποίο επομένως έχει εισόδους τις $X=\{x_1,x_2\}$. και εξόδους τις $Z=\{ z_1,z_2\}$, να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης του C_{1+2}.

(β-ii) Να προσδιοριστούν οι πιθανότητες των συμβόλων εξόδου $p(z_1)$ και $p(z_2)$.

(α-i) Γνωρίζω ότι ισχύει

$$P(Y) = P(X)P(Y/X)$$

όπου

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

και επομένως (Ασκηση Αυτοαξιολόγησης 3.2) θα έχουμε

$$P(Y) = P(X)P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(Y) = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \end{bmatrix}$$

Ώστε

$$P(Y_1) = 0.55$$

$$P(Y_2) = 0.45$$

Η εντροπία H(Y) δίνεται

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p(y_i)\log_2(p(y_i))$$

Οπότε εφαρμόζοντας τις τιμές θα έχω

$$H(Y) = -0.55\log_2(0.55) - 0.45\log_2(0.45) = 0.47 + 0.51 = 0.98\,\text{bits}$$

(α-ii) Η εντροπία H(Y/X=x1) δίνεται από

$$H(Y/X=1) = -\sum_{j=1}^{2} p\left(y_j/X=1\right)\log\left[p\left(y_j/X=1\right)\right] =$$

$$= -P\left(Y=1/X=1\right)\log\left[P\left(Y=1/X=1\right)\right] - P\left(Y=2/X=1\right)\log\left[P\left(Y=2/X=1\right)\right]$$

$$= -0.9\times\log 0.9 - 0.1\times\log 0.1 =$$

$$= 0.469\ bits$$

Γνωρίζουμε ότι H(Y/X=x2)=0,722 bits και ότι

$$H\left(Y/X\right) = H\left(Y/X=1\right)P\left(X=1\right) + H\left(Y/X=2\right)P\left(X=2\right) =$$

$$= 0.469\times\frac{1}{2} + 0.722\times\frac{1}{2} = 0.595\ bits$$

(α-iii) Η ροή πληροφορίας δίνεται από τη σχέση (υποθέτοντας τις δεδομένες πιθανότητες εισόδου):

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = 0.98 - 0.595 = 0.385$$

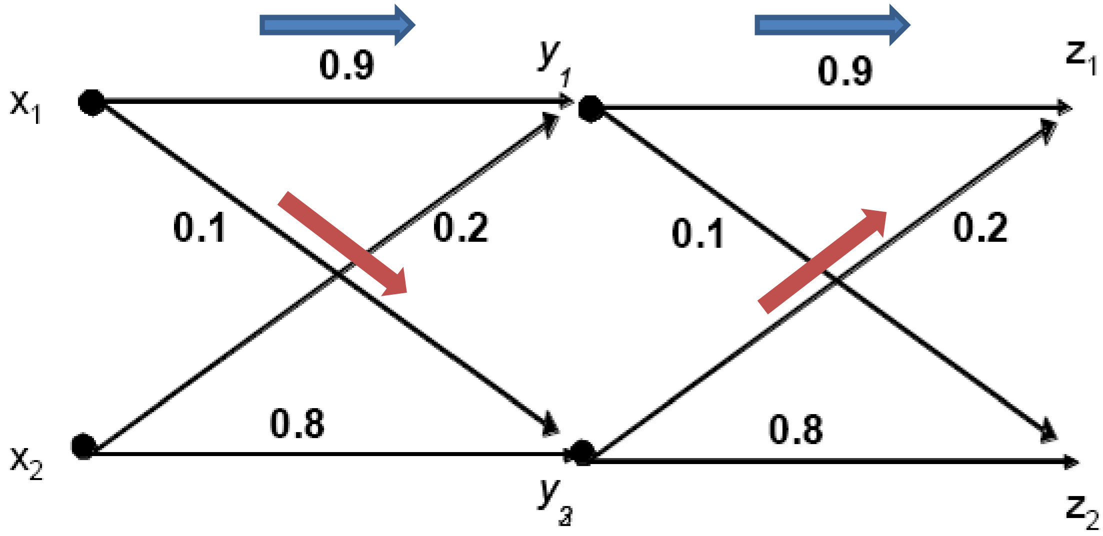
Για να προσδιοριστεί η χωρητικότητα πρέπει να *υποτεθεί παραμετρικά η κατανομή των πιθανοτήτων των συμβόλων εισόδου , $p(x_1)=a$, $p(x_2)=1-a$ και να υπολογιστεί για ποια τιμή του α θα ισχύει η μεγιστοποίηση της ροής πληροφορίας μέσα από το δεδομένο κανάλι:*

$$\max_{P(X)} I(X;Y) = \max_{P(X)} \left(H(Y) - H(Y/X) \right),$$

Όπου οι H(Y) και H(Y/X) θα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει του α.

Κάνοντας τη διαδικασία αυτή καταλήγουμε στις πιθανότητες εισόδου
P(x1)=α=0.428 και p(x2)=1-α=0.572
και στην τελική χωρητικότητα: C=max[I(X;Y)]=0.405

(β) Το σύστημα τώρα μετατρέπεται στο εξής



$$p\left(z_1/x_1\right) = p\left[\left(y_1/x_1 \; AND \; z_1/y_1\right) OR \left(y_2/x_1 \; AND \; z_1/y_2\right)\right] =$$

$$= p\left(y_1/x_1\right) p\left(z_1/y_1\right) + p\left(y_2/x_1\right) p\left(z_1/y_2\right)$$

(β-i). Ο συνολικός πίνακας μετάβασης $P(Z / X)$ βρίσκεται ως εξής:

Οι περιπτώσεις βάσει των οποίων η τιμή στην έξοδο του καναλιού C_{1+2} είναι δυνατόν να είναι Z=z1 με δεδομένο ότι το σύμβολο στην είσοδο ήταν το X=x1 είναι ότι το (Y=y1/X=x1 και στη συνέχεια Z=z1/Y=y1) είτε (Y=y2/X=x1 και Z=z1/Y=y2). Οπότε η πιθανότητα

P(Y=y1/X=x1 και στη συνέχεια Z=z1/Y=y1)=0.9*0.9=0.81

Ενώ η πιθανότητα

P(Y=y2/X=x1 και Z=z1/Y=y2)=0.1*0.2=0.03

Άρα

P(Z=z1/X=x1)=0.81+0.03=0.83

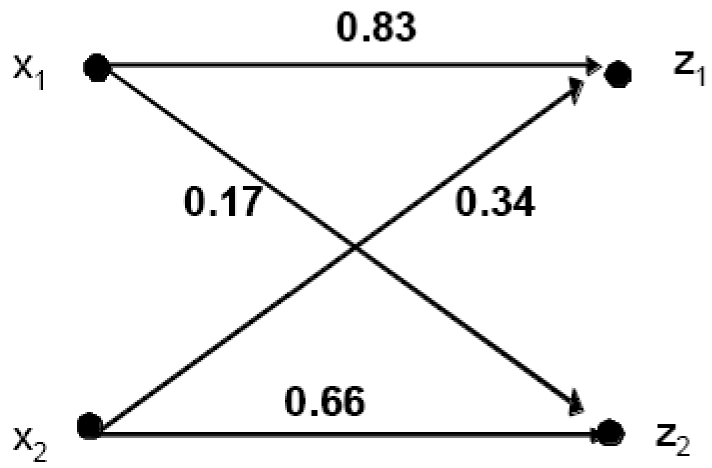
Ομοίως και για τις υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης έχουμε

P(Z=z1/X=x2)=P(Y=y1/X=x2)*P(Z=z1/Y=y1)+P(Y=y2/X=x2)*P(Z=z1/Y=y2)=0.2*
0.9+0.8*0.2=0.34
P(Z=z2/X=x1)=0.17
P(Z=z2/X=x2)=0.66

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι ο πίνακας μετάβασης του συνδυασμένου καναλιού ισούται με το γινόμενο των δύο επιμέρους πινάκων.

$$P(Z/X) = P(Y/X)P(Z/Y) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}$$

και το ισοδύναμο διάγραμμα είναι



(β-ii). Η έξοδος P(Z) είτε μπορεί να δοθεί ως συνάρτηση του P(Y) και P(Z/Y) είτε ώς συνάρτηση του ισοδύναμου πίνακα μετάβασης P(Z/X) και P(X)

<u>1η προσέγγιση</u>

Ως έκφραση του P(Y) και P(Z/Y) και

$$P(Z) = P(Y)P(Z/Y) = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(Z) = \begin{bmatrix} 0.585 & 0.415 \end{bmatrix}$$

<u>2η προσέγγιση</u>

Ως έκφραση του P(X) και P(Z/X)

$$P(Z) = P(X)P(Z/X) \Leftrightarrow$$

$$P(Z) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.585 & 0.415 \end{bmatrix}$$

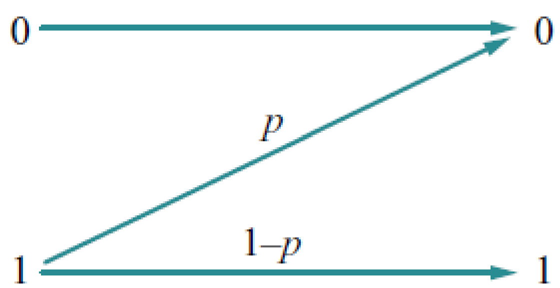
Ετσι

$P(z_1)=0.585$

$P(z_2)=0.415$

Άσκηση αυτοαξιολόγησης 3.2

Το δυαδικό κανάλι Z ονομάζεται έτσι γιατί μεταφέρει το ένα από τα δύο κωδικά σύμβολα χωρίς σφάλμα, δηλαδή με πιθανότητα 1. Έστω ένα δυαδικό κανάλι Z με πιθανότητες $p(x_1 = 0) = 1 - a$, $p(x_2 = 1) = a$ και $p(y_1|x_1) = p(0/0) = 1$, $p(y_2|x_2) = p(1|1) = 1 - p$ και $p(y_1|x_2) = p(0/1) = p$ (δείτε Σχήμα 3.5). Ζητούνται η ποσότητα πληροφορίας της εισόδου, η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου και η χωρητικότητα του καναλιού. Ο ρυθμός μετάδοσης συμβόλων είναι r = 1 symbol/sec.



Σχήμα 3.5

Το δυαδικό κανάλι Z

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p\left(y_j\right)\log\left[p\left(y_j\right)\right]$$

$$p\left(y_j\right) = \sum_{i=1}^{2} p\left(x_i, y_j\right) = \sum_{i=1}^{2} p\left(y_j / x_i\right)\cdot p\left(x_i\right) =$$

$$= p\left(y_j / x_1\right)\cdot p\left(x_1\right) + p\left(y_j / x_2\right)\cdot p\left(x_2\right)$$

$$\overset{j=1}{\Rightarrow} p\left(y_1\right) = p\left(y_1 / x_1\right)\cdot p\left(x_1\right) + p\left(y_1 / x_2\right)\cdot p\left(x_2\right) = 1\cdot\left(1-a\right) + \rho\cdot a$$

$$\overset{j=2}{\Rightarrow} p\left(y_2\right) = p\left(y_2 / x_1\right)\cdot p\left(x_1\right) + p\left(y_2 / x_2\right)\cdot p\left(x_2\right) = 0\cdot\left(1-a\right) + \left(1-\rho\right)\cdot a$$

$$H(Y) = -(1-a+ap)\log(1-a+ap) - a(1-p)\log a(1-p)$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i) H(Y/x_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{2} \left\{ p\left(y_j / x_i\right) \log\left[p\left(y_j / x_i\right)\right]\right\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left\{ p(x_i)\, p\left(y_j / x_i\right) \log\left[p\left(y_j / x_i\right)\right]\right\} =$$

$$= -p(x_1)\left\{ p(y_1/x_1)\log\left[p(y_1/x_1)\right] - p(y_2/x_1)\log\left[p(y_2/x_1)\right]\right\} -$$

$$-p(x_2)\left\{ p(y_1/x_2)\log\left[p(y_1/x_2)\right] - p(y_2/x_2)\log\left[p(y_2/x_2)\right]\right\} =$$

$$= -(1-a)\cdot\left\{1\cdot\log[1] - 0\cdot{}'\log[0]'\right\} - a\left\{\rho\log[\rho] - (1-\rho)\log[1-\rho]\right\} =$$

$$= -a\left\{\rho\log[\rho] - (1-\rho)\log[1-\rho]\right\}$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$
$$= -(1-a+ap)\log(1-a+ap) - a(1-p)\log a + ap\log p.$$

$$C_{bits/\sec} = \max_{p(x_i)}\left[I\left(X;Y\right)_{bits/symbol} \right]\cdot r_{symbol/\sec}$$

Μεθοδολογία: Βρίσκουμε για ποια τιμή των πιθανοτήτων των συμβόλων εισόδου (δηλ. τη παραμέτρου α) μεγιστοποιείται το I(X;Y). Για την τιμή αυτή του α υπολογίζουμε τη μέγιστη χωρητικότητα C είτε σε bits/symbol είτε σε bits/sec

$$\frac{d}{da}\log_c\left(f(x)\right)=\frac{\log_c e}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

$$\frac{d}{da}I(X;Y)=$$

$$=\frac{d}{da}\left[-(1-a+a\rho)\cdot\log(1-a+a\rho)-a(1-\rho)\log(a)+a\rho\log(\rho)\right]$$

$$=-(1-a+a\rho)^{'}\cdot\log(1-a+a\rho)-(1-a+a\rho)\cdot\left[\log(1-a+a\rho)\right]^{'}-$$

$$-(1-\rho)\left[a^{'}\log(a)+a\left[\log(a)\right]^{'}\right]+a^{'}\rho\log(\rho)=$$

$$=-(1+\rho)\cdot\log(1-a+a\rho)-(1-a+a\rho)\cdot\left[\frac{\log e}{(1-a+a\rho)}(1-a+a\rho)^{'}\right]-$$

$$-(1-\rho)\left[\log(a)+a\left[\frac{\log e}{a}(a)^{'}\right]\right]+\rho\log(\rho)=$$

$$=-(1+\rho)\cdot\log(1-a+a\rho)-(1-a+a\rho)\frac{\log e}{(1-a+a\rho)}(-1+\rho)-$$

$$-(1-\rho)\left[\log(a)+a\left[\frac{\log e}{a}\right]\right]+\rho\log(\rho)=$$

$$=-(1+\rho)\cdot\log(1-a+a\rho)-\log e(-1+\rho)-(1-\rho)\left[\log(a)+\log e\right]+\rho\log(\rho)=$$

$$=-(1+\rho)\cdot\log(1-a+a\rho)+\log e(1-\rho)-(1-\rho)\log(a)-(1-\rho)\log e+\rho\log(\rho)=$$

$$=-(1+\rho)\cdot\log(1-a+a\rho)-(1-\rho)\log(a)+\rho\log(\rho)$$

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ως προς a ίση με 0, λαμβάνουμε:

$$(1-p)\log(1-a+ap)-(1-p)\log a+p\log p=0$$

$$\log\frac{1-a+ap}{a}=-\frac{p}{1-p}\log p=-\log p^{\frac{p}{1-p}}$$

$$1-a+ap=ap^{\frac{p}{p-1}}\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{1-p+p^{\frac{p}{p-1}}}.}$$

Θέτοντας αυτή την τιμή της πιθανότητας a στην ανωτέρω έκφραση της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, λαμβάνουμε τη ζητούμενη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού Z ως προς p.

$$C=\max_{p(x)} I(X;Y)r=\left[-ap^{\frac{p}{p-1}}\log ap^{\frac{p}{p-1}}-a(1-p)\log a+ap\log p\right]1$$

$$=-a\frac{1-a+ap}{a}\log a-a\frac{1-a+ap}{a}\frac{p}{p-1}\log p-a\log a+ap\log a+ap\log p$$

$$=\frac{-p\log a+\log a-p\log p}{p-1}=-\log a-\frac{p}{p-1}\log p=-\log a-\log p^{\frac{p}{p-1}}$$

$$=\boxed{-\log\frac{p^{\frac{p}{p-1}}}{1-p+p^{\frac{p}{p-1}}}\ \text{bits / sec.}}$$

ΘΕΜΑ 5 ΕΞ2012Α

Θεωρούμε κανάλι επικοινωνίας με είσοδο την τυχαία μεταβλητή $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ και έξοδο την $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά υπό ποιές προϋποθέσεις μπορεί να είναι σωστές ή αν σε κάθε περίπτωση είναι εσφαλμένες οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $H(X) = 2$ bits,
2. $H(Y) = 4$ bits,
3. $H(X,Y) = 4{,}5$ bits,
4. $H(Y/X) = 2{,}1$ bits,
5. $H(X/Y) = 0$ bits,
6. $I(X;Y) = 0$ bits,
7. $I(X;Y) = -2$ bits,
8. $I(X;Y) = 2{,}1$ bits,
9. $C = H(X)$,
10. $C \geq I(X;Y)$.

1. $H(X) = 2$ bits, είναι σωστό για ισοπίθανες εισόδους,
2. $H(Y) = 4$ bits, είναι λάθος, αφού η μέγιστη δυνατή τιμή είναι 2 bits,
3. $H(X,Y) = 4{,}5$ bits, είναι λάθος, αφού η μέγιστη δυνατή τιμή είναι 4 bits,
4. $H(Y/X) = 2{,}1$ bits, είναι λάθος, αφού υπερβαίνει τη μέγιστη εντροπία της Y,
5. $H(X/Y) = 0$ bits, είναι σωστό για αθόρυβο κανάλι,
6. $I(X;Y) = 0$ bits, είναι σωστό για εξόδους ανεξάρτητες από τις εισόδους,
7. $I(X;Y) = -2$ bits, είναι λάθος, αφού η αμοιβαία πληροφορία είναι μη αρνητική,
8. $I(X;Y) = 2{,}1$ bits, είναι λάθος αφού η αμοιβαία πληροφορία δεν μπορεί να υπερβεί τη μέγιστη εντροπία των τυχαίων μεταβλητών,
9. $C = H(X)$, σωστό για αθόρυβο κανάλι και ισοπίθανες εισόδους,
10. $C \geq I(X;Y)$, σωστό, αφού η χωρητικότητα είναι ίση με τη μέγιστη αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού.

ΘΕΜΑ 3

ΓΕ4/0910

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον έλεγχο κωδίκων ως προς ως προς το αν είναι μη ιδιάζοντες (non-singular), μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι και άμεσοι (ή στιγμιαίοι) και αν μπορεί να προέρχονται από εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman.* Δείτε το παράδειγμα 2.4 του βιβλίου και Θ3/ΓΕ/2004-5, Θ3/ΓΕ4/2003-4 , Θ3/ΓΕ4/2006-7.

Ζητείται να εξεταστεί αν οι ακόλουθοι κώδικες είναι μη ιδιάζοντες, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι και άμεσοι και αν μπορεί να προέλθουν από εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης του Huffman για κάποια κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων της πηγής:

1. {01, 10, 11, 000, 001},
2. {001, 10, 110, 111},
3. {001, 011, 1001, 1100, 1110},
4. {110, 11, 100, 00, 10},
5. {0, 10, 110, 1110},
6. {10, 11, 010, 011, 000, 0010, 00110, 00111}.

Για τον κώδικα 6, αν απαντήσετε ότι μπορεί να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman, προτείνετε μια κατάλληλη γι’ αυτό κατανομή πιθανοτήτων των 8 συμβόλων της πηγής.

Ένας κώδικας ελεύθερος προθέματος, δηλαδή κώδικας του οποίου καμιά από τις κωδικές λέξεις δεν αποτελεί πρόθεμα άλλης κωδικής λέξης μπορεί να αποκωδικοποιηθεί αμέσως στον προορισμό, δηλαδή ο κώδικας είναι άμεσος ή στιγμιαίος. Παρατηρούμε επίσης ότι ένας κώδικας ελεύθερος προθέματος πληροί και τις δύο πρώτες ιδιότητες, αφού τότε δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν κωδικές λέξεις, αλλά ούτε και ακολουθίες κωδικών λέξεων (αντιστοιχούσες σε διαφορετικές ακολουθίες συμβόλων της πηγής) που ταυτίζονται. Επομένως, για τους δεδομένους κώδικες ισχύουν τα ακόλουθα:

1. ο κώδικας είναι ελεύθερος προθέματος και επομένως είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Ακόμα, παρατηρούμε ότι μπορεί να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman, π.χ. για κατανομή πιθανοτήτων των 5 συμβόλων της πηγής {0,25, 0,25, 0,25, 0,13, 0,12}.

2. Ο κώδικας έχει κωδικές λέξεις διάφορες μεταξύ τους και είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Όμως, δεν είναι Huffman, αφού η κωδική λέξη '001' δεν θα μπορούσε να προκύψει για οποιαδήποτε κατανομή πιθανοτήτων. Αντ' αυτής θα μπορούσε να προκύψει η κωδική λέξη ΄0΄ και τοτε ο κώδικας θα μπορούσε να προέλθει με εφαρμογή του αλγορίθμου κωδικοποίησης Huffman, π.χ. για κατανομή πιθανοτήτων {0,55, 0,30, 0,10, 0,05}

3. Ο κώδικας έχει κωδικές λέξεις διάφορες μεταξύ τους και είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Όμως, δεν είναι Huffman, αφού δεν είναι βέλτιστος, για παράδειγμα οι δύο πρώτες κωδικές λέξεις μπορούν να γίνουν '00' και '01' και οι άλλες τρεις κωδικές λέξεις μπορούν να γίνουν '10', '110' και '111'.

4. Ο κώδικας αυτός είναι μη ιδιάζων αλλά δεν είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, δεν είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος ούτε άμεσος ούτε μπορεί να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman.

5. Ο κώδικας έχει κωδικές λέξεις διάφορες μεταξύ τους και είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Όμως, δεν είναι Huffman, αφού οι μεγαλύτερου μήκους κωδικές λέξεις δεν έχουν ίσο μήκος. Αν αντί της κωδικής λέξης '1110' μας δίνονταν κωδική λέξη '111', δηλαδή αντί του δεδομένου κώδικα είχαμε τον κώδικα {0, 10, 110, 111}, τότε αυτός είναι Huffman, π.χ. για κατανομή πιθανοτήτων {0,55, 0,30, 0,10, 0,05}, όπως και στο ερώτημα 2.

6. Ο κώδικας είναι ελεύθερος προθέματος και επομένως πληροί όλες τις ιδιότητες, μπορεί δε να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman, με την ακόλουθη ενδεικτική κατανομή πιθανοτήτων εμφάνισης των 8 συμβόλων της πηγής: {¼ ¼, 1/8, 1/8, 1/8, 1/16, 1/32, 1/32}.