ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ-3

4η ΟΣΣ
09.03.2013

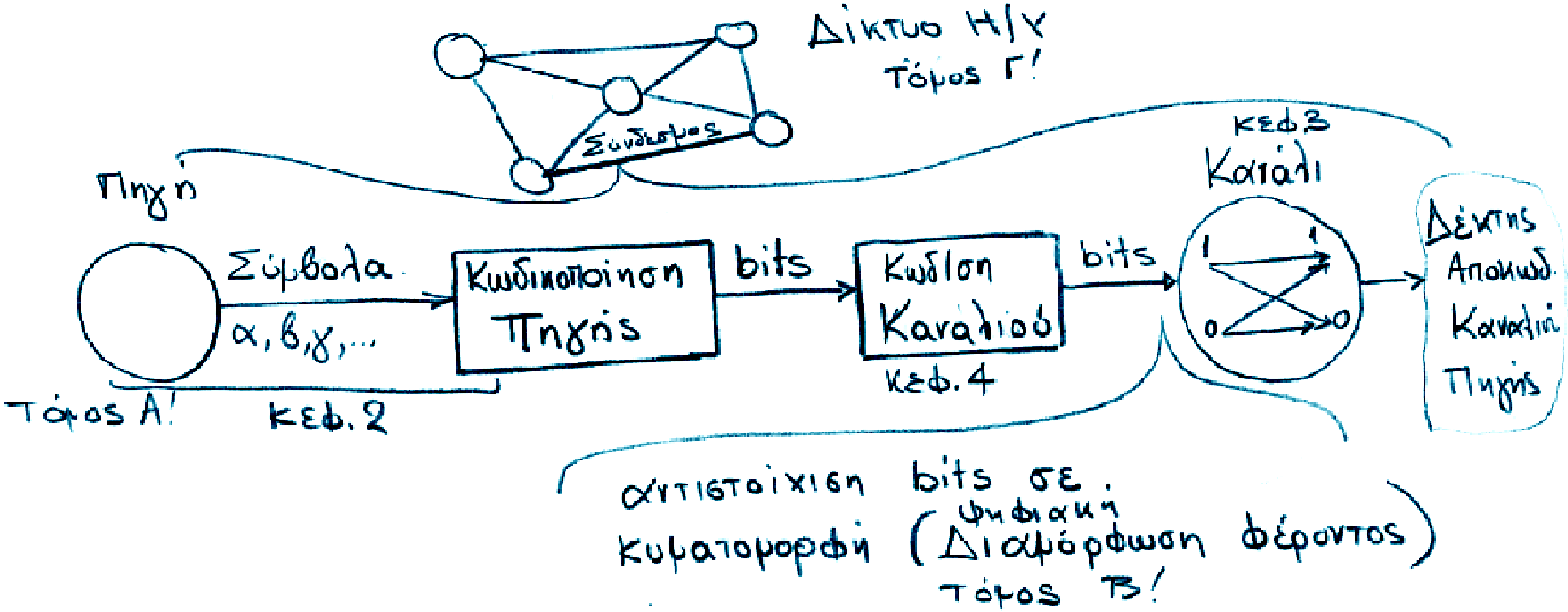
Ν.Δημητρίου

Περιεχόμενα

- $4^{η}$ ΓΕ
  - Πιθανότητες, Τυχαίες Μεταβλητές, Συναρτήσεις Μάζας/Πυκνότητας Πιθανότητας
  - Ποσότητες Πληροφορίας, Εντροπία
  - Κωδικοποίηση Συμβόλων (Fano, Shannon, Huffmann)
  - Πηγές Συμβόλων χωρίς/με μνήμη
  - Κανάλια επικοινωνίας

Επικοινωνιακό Μοντέλο

Επικοινωνία: Μεταβίβαση Πληροφορίας



Ειδικά θέματα:

1) Πιθανότητες- Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

2) Ποσότητα Πληροφορίας

3) Πηγές Συμβόλων με/χωρίς μνήμη

4) Κωδικοποίηση πηγής

5) Δυαδικά Κανάλια.

- Σύμβολα Πηγής ⟶ Δομικές μονάδες σήματος Πληροφορίας

  ↳ τυχαία η διαδοχή τους (τυχαία μεταβλητή)

- Σφάλματα λόγω θορύβου στο κανάλι ⟶ τυχαία μεταβλητή

  ⇒ Χρήση Πιθανοτήτων

  για την περιγραφή της ροής πληροφορίας

  από την πηγή διαμέσου του καναλιού στο δέκτη

Πιθανότητες· Εισαγωγή

Τυχαίο Πείραμα (Το αποτέλεσμά του δεν είναι εκ των προτέρων βέβαιο)

Π.χ. ρίψη νομίσματος, ζάρια, ορθή αποστολή πακέτου από κόμβο Α στον κόμβο Β.

Πείραμα → $S_1, S_2, \ldots, S_n$ } Ατομικά Αδιαίρετα Αποτελέσματα ή Ενδεχόμενα, Δειγματικά Σημεία

Ο δειγματικός χώρος ορίζεται ως το σύνολο των ενδεχομένων $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

και αντιστοιχίζεται σε μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ με τη σχέση } \underbrace{P(s_i) = P(X = x_i)}_{\text{"πιθανότητα ενδεχομένου } s_i\text{"}} = P(x_i)$$

"η τ.μ. X να ισούται με x_i"

Ιδιότητες Πιθανοτήτων

- Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχομένων ισούται με 1 $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$.
- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου πάντα ανήκει στο διάστημα $[0,1]$ $0 \leq P(x_i) \leq 1$

↑ απίθανο ↑ βέβαιο

Συνάρτηση Συνδυασμένης Πιθανότητας δύο

ενδεχομένων x_i, y_j δύο τ.μ. X, Y

$P(x_i, y_j)$: πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$ ταυτόχρονα

$\parallel$

$P(y_j, x_i)$

Υπο συνθήκη πιθανότητα : πιθανότητα $X = x_i$ με δεδομένο ότι $Y = y_j$

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

ενδεχόμενο εμφάνισης

δεδομένο

ισχύει επίσης ότι:

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)} = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i/y_j)P(y_j) = P(y_j/x_i)P(x_i)$

· Όταν τα x_i, y_j είναι μεταξύ τους <u>ανεξάρτητα</u> (δηλ. το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του άλλου)

έχουμε :

$$P(x_i/y_j) = P(x_i)$$

$$P(y_j/x_i) = P(y_j)$$

· Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$

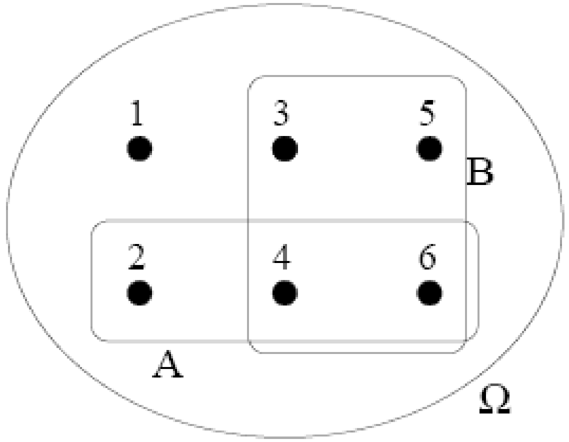
Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής X

Αν $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ με $\{P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)\}$

ισχύει ότι

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i).$$

Παράδειγμα



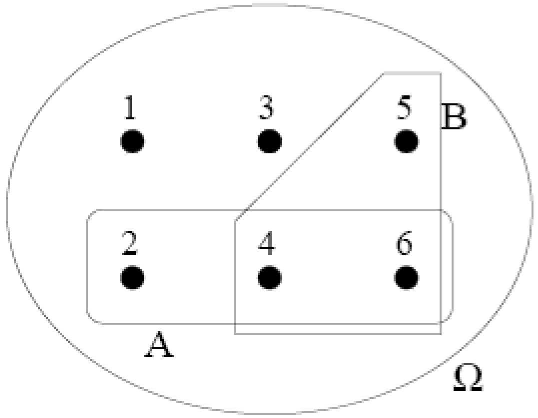
$A = \{\text{Το ζάρι φέρνει άρτιο}\}$

$B = \{\text{Το ζάρι φέρνει } \geq 3\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow A\&B \text{ είναι } \underline{\text{ανεξάρτητα}}$$

Πηγή http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/class_notes/TEL412_lecture02.pdf

Παράδειγμα



$$A = \{\text{Το ζάρι φέρνει άρτιο}\}$$

$$B = \{\text{Το ζάρι φέρνει } \geq 4\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) > P(A)P(B) \Rightarrow A\&B \text{ δεν είναι } \underline{\text{ανεξάρτητα}}$$

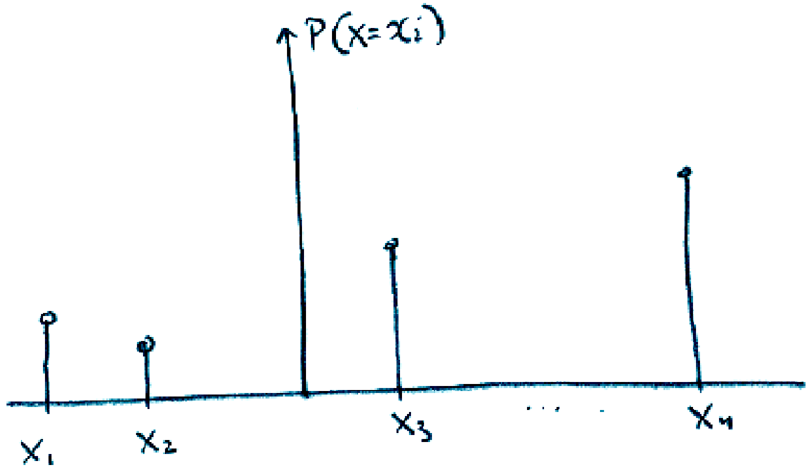
Επίσης $\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} > P(A) \Rightarrow \underbrace{P(A|B)}_{=\frac{2}{3}} > \underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{2}} \Rightarrow$ Η πραγματοποίηση του B αυξάνει την πιθανότητα για το A.

Πηγή http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/class_notes/TEL412_lecture02.pdf

Για 1 τυχαία μεταβλητή <u>διακριτή</u>

X με διακριτά ενδεχόμενα $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

το σύνολο των πιθανοτήτων $P(X=x_i) = p(x_i) = \{p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)\}$
ορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας μάζας. (σελ. 23)



ιστόγραμμα τ.μ. X

Ιδιότητες: • $0 \leq p(x_i) \leq 1$

• $\sum^{n} p(x_i) = 1$

Συνάρτηση κατανομής αθροιστικής πιθανότητας τ.μ. X

$$F(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad 0 \leq F(X \leq x) \leq 1$$

Για μια τ.μ. X <u>συνεχή</u> (παίρνει τιμές από συνεχές διάστημα)

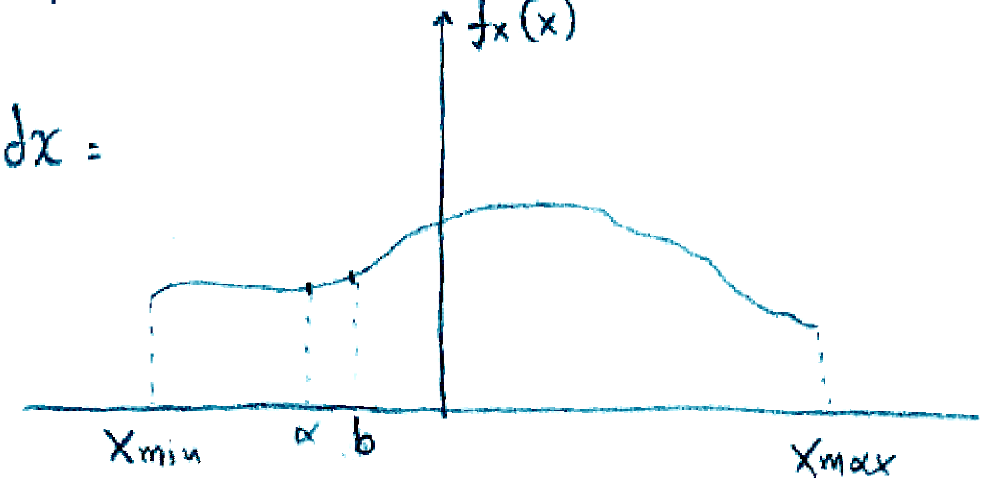
$X \in [x_{min}, x_{max}]$

Συνάρτηση κατανομής $F(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_x(x)\,dx$

$f_x(x)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$P(a \leq X \leq b) = \int_{\alpha}^{b} f_x(x)\,dx =$

$= F(X \leq b) - F(X \leq \alpha)$



Για 2 διακριτές τ.μ.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

η συνδυασμένη πιθανότητα μάζας ορίζεται

ως: $P(X=x_i, Y=y_j)$ → ισοδυναμεί με πίνακα $n \times m$

Ακραία Πιθανότητα μάζας ως προς X:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \qquad i = 1, \dots, n$$

Ακραία Πιθανότητα μάζας ως προς Y

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) \qquad j = 1, \dots, m$$

→ Ποσότητα Πληροφορίας ή Πληροφοριακό Περιεχόμενο $H(x_i)$ γεγονότος x_i τυχαίας μεταβλητής X (σελ. 28)

Αν πιθανότητα εμφάνισης του x_i η $P(x_i)$

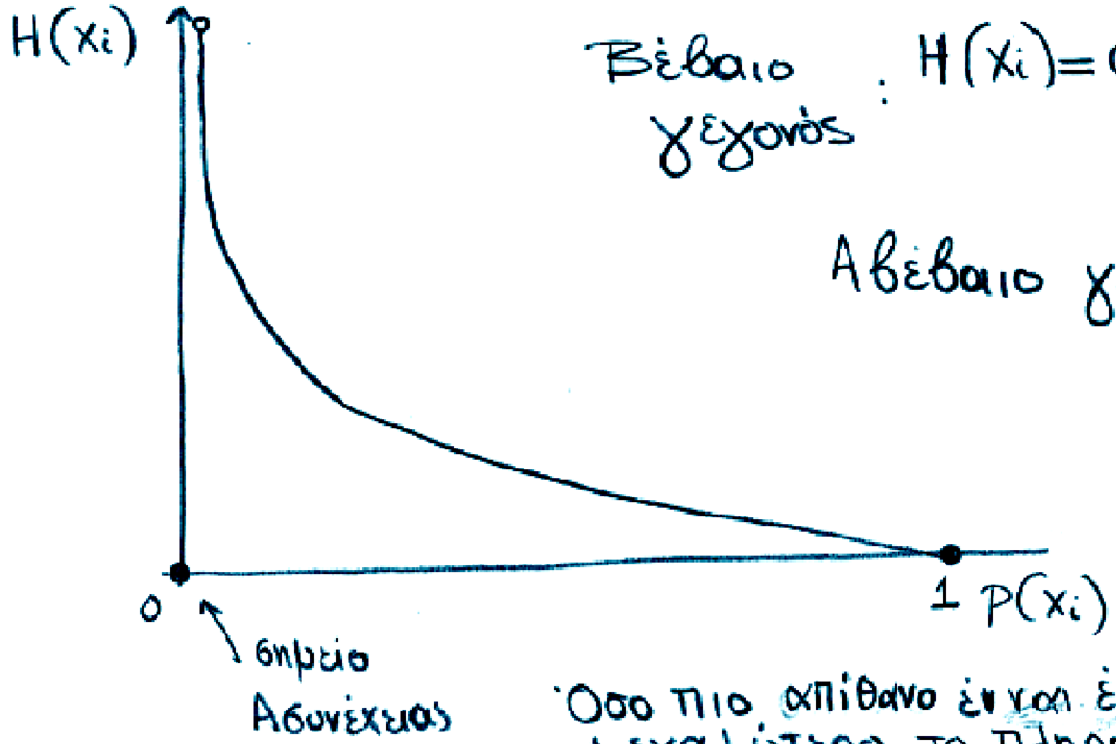
Τότε $H(x_i) = -\log_2[P(x_i)]$ bits

* Παρακάτω όπου $\log(x)$ θα εννοείται ο δυαδικός λογάριθμος

$H(x_i) = 1$ bit όταν

$P(x_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow H(x_i) = -\log\frac{1}{2} = -\log 1 + \log 2 = 1$ bit

→ Ποσότητα πληροφορίας για αβεβαιότητα μεταξύ 2 ισοπίθανων γεγονότων



Βέβαιο γεγονός : $H(x_i)=0$ όταν $P(x_i)=0$

$P(x_i)=1$

Αβέβαιο γεγονός

$H(x_i)$ αντιστρόφως ανάλογο του $p(x_i)$

Όσο πιο απίθανο είναι ένα γεγονός τόσο μεγαλύτερο το πληροφοριακό περιεχόμενό του.

Σημείωση για $\log_\alpha x$:

Συνήθως $\alpha = 2, 10, e$

Σύμβαση $\log_e \rightarrow \ln$

Αν $a^y = x$ τότε $y = \log_\alpha x$ (όπου $x > 0$)

Ιδιότητες: $\log_\alpha(x \cdot y) = \log_\alpha(x) + \log_\alpha(y)$

$$\log_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \log_\alpha(x) - \log_\alpha(y)$$

$$\log_\alpha(x^b) = b \cdot \log_\alpha(x)$$

$$\log_\alpha(1) = 0 \quad , \quad \log_\alpha \alpha = 1$$

Calculator

$$\log_\alpha x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} \alpha}$$

→ Μέση Ποσότητα Πληροφορίας ή μέση πληροφορία ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ή εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log[p(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, H(x_i)$$

μέση τιμή, άθροισμα $H(x_i)$ με συντελεστές βαρύτητας τις πιθ. εμφάνισης $p(x_i)$

→ Για κάθε τ. μ. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ισχύει ότι

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(n)$$

* $H(X) = 0$ όταν έχουμε βέβαιο γεγονός $p(x_i) = 1$, $p(x_j) = 0 \ \forall j \neq i$

* H(X)=log(n) όταν έχουμε μέγιστη αβεβαιότητα

⇒ ομοιόμορφη κατανομή τ. μ.

δηλ. $p(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

π.χ. τ.μ. με 2 πιθανά γεγονότα
σελ. 28 σχ. 1.4

$X = \{x_1, x_2\}$

Έστω $p(x_1) = \rho$

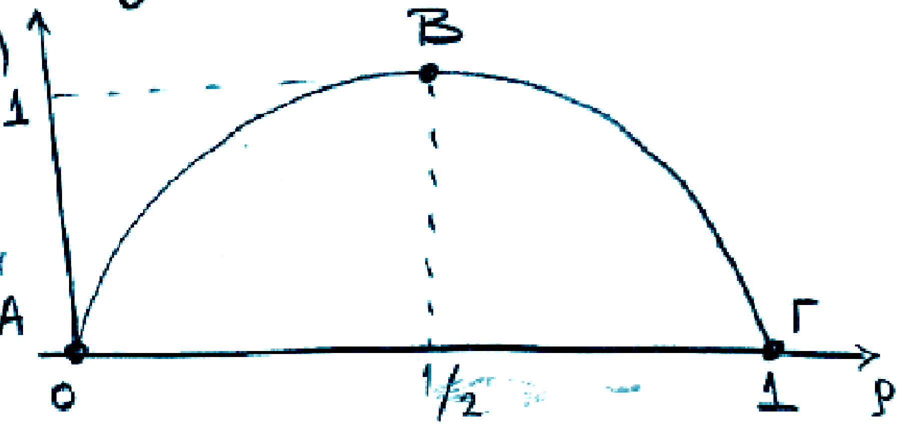
$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1-\rho$

$$H(X) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) =$$

$$= -\rho\log\rho - (1-\rho)\log(1-\rho)$$

Σημεία Α, Γ βέβαιο γεγονός $H(x)=0$

Σημείο Β: μέγιστη αβεβαιότητα
$H(x) = \log 2 = 1$



Σχέσεις για 2 τ.μ. X, Y $\quad X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i,y_j)\log\left[P(x_i,y_j)\right]$$

Υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X/Y) = +\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, H(X/y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p(y_j)\left[-\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)\log p(x_i/y_j)\right] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{p(y_j)\, p(x_i/y_j)}_{P(x_i,y_j)} \log p(x_i/y_j)$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_j)\cdot\log P(x_i/y_j)$$

Βασική σχέση: $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

Αμοιβαία Ποσότητα Πληροφορίας

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

$H(X)$: αβεβαιότητα της τ.μ. X

$H(X/Y)$: αβεβαιότητα της X δεδομένης της Y

$\Downarrow$

διαφορά μεταξύ των X, Y

$\Uparrow$

$H(Y/X)$: αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

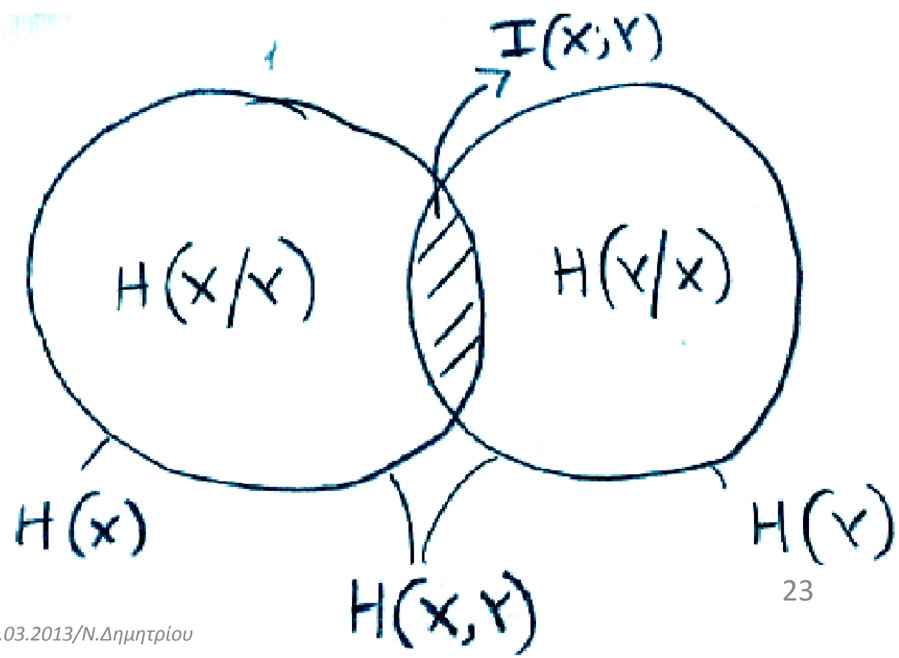
$I(X;Y)$: μέτρο εξάρτησης μεταξύ X, Y

Αν X και Y ανεξάρτητες

$H(X/Y) = H(X)$ $\quad H(Y/X) = H(Y)$

$I(X;Y) = 0$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$



→ Πηγές Συμβόλων

∗ Ισοπίθανα & Ανεξάρτητα Διαδοχικά Σύμβολα

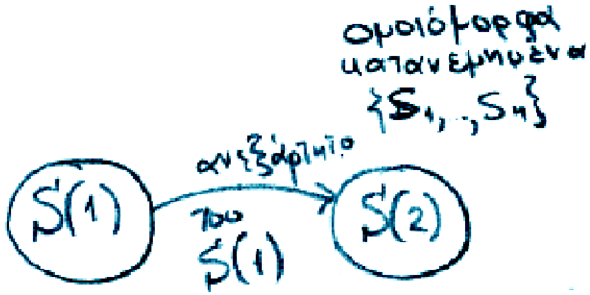
$$\text{τ.μ. } S = \{\overbrace{s_1, s_2, \dots, s_n}^{n \text{ πιθανά σύμβολα}}\}$$

$$\bigcirc \longrightarrow \dots S(i), S(i-1) \dots \; S(3), S(2), S(1)$$

$$P(S(i)=s_1) = p(s_1) = p(s_2) = \dots = p(s_n) = \frac{1}{n}$$

⇒ Εντροπία Πηγής $H_0(S) = \log(n)$ (μέγιστη)

⇒ Ομοιόμορφη Κωδικοποίηση συμβόλων · τέλεια εντροπία $H_0(S)$.



* Όχι ισοπίθανα αλλά διαδοχικά ανεξάρτητα (πηγή χωρίς μνήμη)

π.χ. αλφάβητο $p('\alpha') = 11{,}7\%$ $p('\psi') = 0{,}1\%$

σύμβολα $p(S_i) \neq p(S_j)$ $\quad p(S(n+1)/S(n)) = p(S(n+1))$

$\exists\, i, j \in \{1,\dots,n\}$ ώστε

Εντροπία πηγής $H_1(S) < H_0(S)$

⇒ Με χρήση ανομοιόμορφης κωδικοποίησης (βασισμένης στις $p(S_i)$) επιτυγχάνεται η συμπίεση της εντροπίας των τελικών συμβόλων της πηγής

ανομοιόμορφα κατανεμημένα $\{s_1,\dots,s_n\}$

$$S(1) \xrightarrow[\text{του } S(1)]{\text{ανεξάρτητο}} S(2)$$

* Όχι ισοπίθανα αλλά εξαρτημένα διαδοχικά σύμβολα

$\exists\, i,j \quad p(S_i) \neq p(S_j)$

Πηγές Markov

$p(S(n+1)/S(n)) \neq p(S(n+1))$

π.χ. αλφάβητο
$p(S(n+1)='α'/S(n)='τ') > p(S(n+1)='π'/S(n)='τ')$

Εντροπία πηγής $\quad H_2(S) < H_1(S)$

(λιγότεροι βαθμοί ελευθερίας στην εκπομπή κάθε συμβόλου)

⇒ με χρήση ανομοιόμορφης κωδ/σης βασισμένης στις $p(S_i(k+1)/S_j(k))$
περαιτέρω συμπίεση
της εντροπίας
της πηγής

ανομοιόμορφα κατανεμημένα $\{s_1,\dots,s_n\}$

$S(1) \xrightarrow{\text{εξάρτηση από } S(1)} S(2)$

Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Ορισμοί**
  - **Μη ιδιάζων κώδικας**
    - Όταν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές
  - **Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος**
    - Όταν και οι ακολουθίες των κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές
  - **Άμεσος ή Προθεματικός κώδικας**
    - Κάθε μοναδικά αποκωδικοποίησιμος κώδικας που επιτρέπει την άμεση αποκωδικοποίηση της κωδικής λέξης χωρίς να χρειάζεται να λάβει υπόψη του τις επόμενες κωδικές λέξεις.
    - Ο άμεσος κώδικας αποτελείται από κωδικές λέξεις οι οποίες δεν αποτελούν μέρος (προθέματα άλλων)

Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Παράδειγμα**
  - Μη ιδιάζων, I,II,III,IV
  - Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος, II,III,IV. O I δεν είναι αφού ΦΦΦΦ, ΦΦΨ, ΨΨ όλα έχουν κωδική λέξη την ίδια, 0000
  - Άμεσοι κώδικες, II και III
  - O κώδικας IV δεν είναι άμεσος αφού χρειάζεται να γνωρίζουμε ψηφία που ανήκουν στην επόμενη κωδική λέξη, π.χ. 011011100?

	I	II	III	IV
Φ	0	00	0	0
Χ	11	01	10	01
Ψ	00	10	110	011
Ω	01	11	1110	0111

ΘΣ / ΓΕ 02 03

Πηγή 8 συμβόλων

S_i	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ
$p(s_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Τ.μ.

$$\sum_{i=1}^{8} P(S_i) = 1$$

Σύμβολα με χαμηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο:

↓

Σύμβολα με υψηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Ε, Β

$$H(s_i) = -\log[p(s_i)] \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}} = -\log\frac{1}{4} = -(\log 1 - \log 4) =$$

$$= -(0 - \log 2^2) = -(-2\log 2) = 2 \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}.$$

Σύμβολα με υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο

↓

Σύμβολα με χαμηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Δ, Ζ

$$H(s_i) = -\log\left(\frac{1}{32}\right) = -(\log 1 - \log 32) = -(0 - \log 2^5) =$$

$$= 5\log 2 = 5 \ \text{bits/symbol}.$$

Μέσο Πληροφοριακό Περιεχόμενο Πηγής

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} p(S_i)\log[P(S_i)] = -p(A)\log[P(A)] - p(B)\log(P(B)) -$$

$$-p(\Gamma)\log(P(\Gamma)) - p(\Delta)\log(P(\Delta)) - p(E)\log(P(E)) - p(Z)\log(P(Z)) -$$

$$-p(H)\log(P(H)) - p(\Theta)\log(P(\Theta)) = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} -$$

$$-\frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\log 8 + \frac{2}{4}\log 4 + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{2}{32}\log 32 = \frac{3}{8}\cdot 3 + \frac{2}{4}\cdot 2 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{2}{32}\cdot 5 =$$

$$= \frac{36}{32} + \frac{32}{32} + \frac{8}{32} + \frac{10}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875 \text{ bits/symbol}$$

Αν τα σύμβολα ήταν ισοπίθανα (πιθανότητες εμφάνισης ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή)

$$P(S_i) = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{8}$$

$$H(S_i) = \log(\eta) = \log 8 = 3\,\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = -\eta\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = \log\eta = \log 8 = 3\,\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

Τρόποι Κωδικοποίησης

(A) Ομοιόμορφη (Θεωρώντας ίδιο αριθμό bits ανά σύμβολο)

Α	000 ← 3 bits/symbol → Μέσο μήκος κώδικα
Β	001
Γ	010
Δ	011
Ε	100
Ζ	101
Η	110
Θ	111

(B) Ανομοιόμορφη (βασισμένη στην εντροπία της πηγής)

Σκοπός: Κατασκευή κατάλληλου κώδικα του οποίου το μέσο μήκος να προσεγγίζει την εντροπία των συμβόλων της πηγής $H(S) < \bar{L} < \log n$

2.6875 bits/symbol — 3 bits/symbol

Χαρακτηριστικά Κώδικα σελ. 52

1) Μη ιδιάζων: Όλες οι κωδικολέξεις διαφορετικές

2) Μοναδικά Αποκωδικοποιήσιμος: Όλες οι ακολουθίες κωδικών λέξεων διαφορετικές

π.χ. ο κώδικας

Φ	Χ	Υ	Ω
0	11	00	01

δεν είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος γιατί 0000 → ΦΦΦΦ, ΥΥ, ΦΦΥ

3) Άμεσος: Κάθε κωδική λέξη μπορεί να αποκωδικοποιηθεί με τη λήψη της. (δεν είναι προθεματικός)

π.χ. ο κώδικας

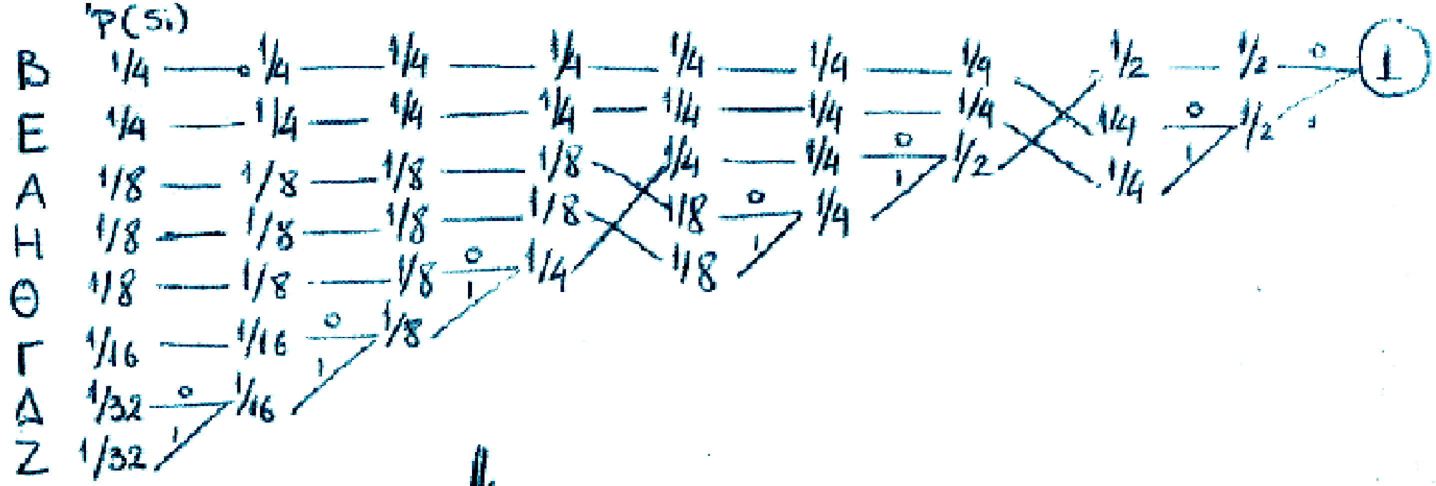
Φ	Χ	Υ	Ω
0	01	011	0111

δεν είναι άμεσος διότι είναι προθεματικός

Κωδικοποίηση Huffman
(JPEG, MPEG)

Άριστος κώδικας: max επίδοση

1. Διάταξη κατά φθίνουσα $P(S_i)$
2. Τα 2 τελευταία σύμβολα ενώνονται σε 1 με $P(\text{αθροιστική}) = P(S_i)+P(S_j)$
3. Αναδιάταξη Συμβόλων.
4. Επανάληψη του 2 μέχρι να καταλήξουμε σε 2 σύμβολα.
5. Από το τέλος στην αρχή σχηματίζουμε τον κώδικα για κάθε σύμβολο.



	από αριστερά προς δεξιά	τελικός κώδικας
B	01	10
E	11	11
A	010	010
H	110	011
Θ	000	000
Γ	0100	0010
Δ	01100	00110
Z	11100	00111

Καμμία κωδική λέξη δεν είναι πρόθεμα άλλης. (άμεσος κώδικας)

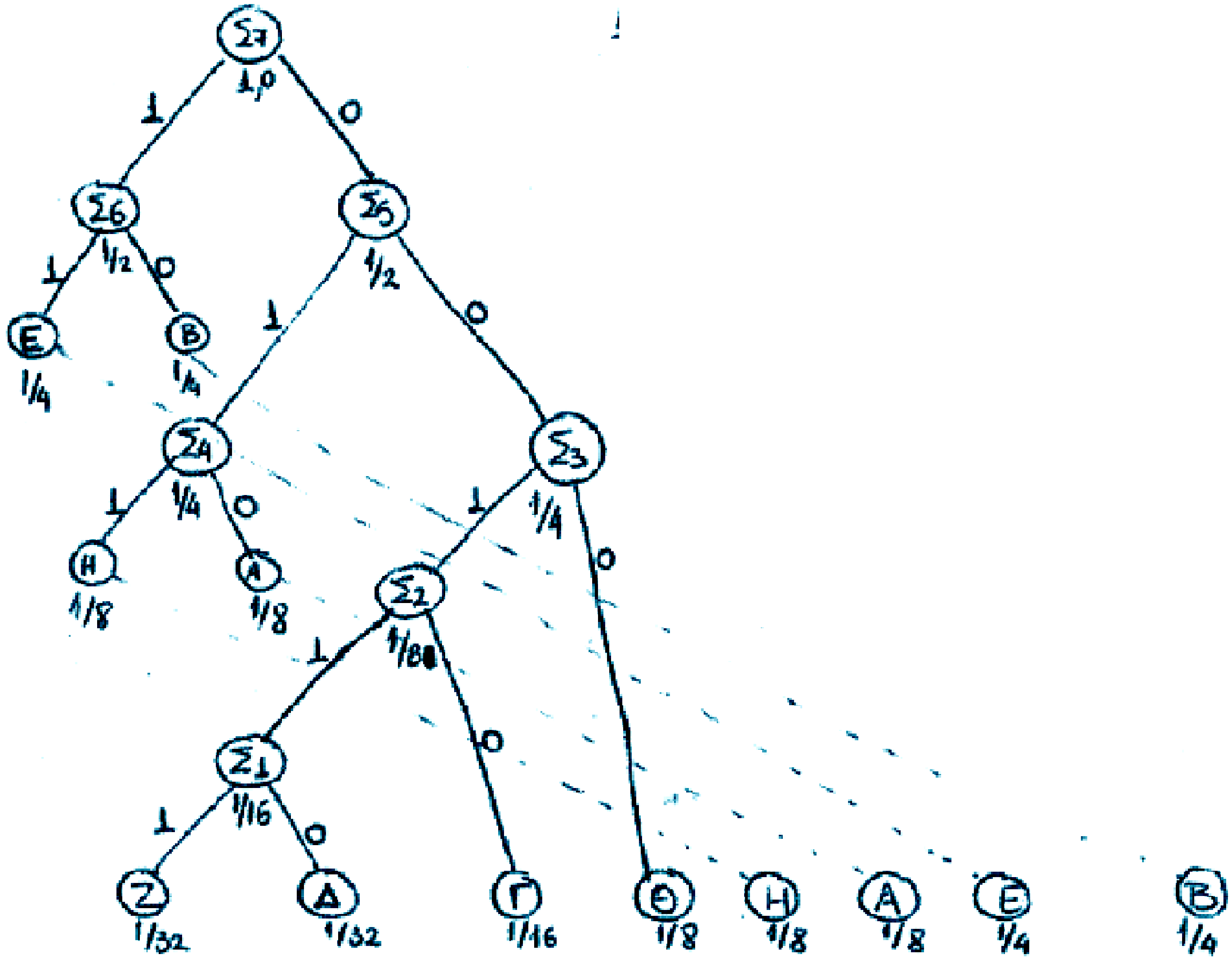
Κωδ. Huffmann με Χρήση δυαδικού δένδρου

1. Τοποθέτηση συμβόλων με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων: ΖΔΓΘΗΑΕΒ
2. Ομαδοποίηση Ζ, Δ στο Σ_1 $P_{\Sigma_1} = 1/32 + 1/32 = 1/16$
3. Σ_1 Γ Θ Η Α Ε Β σε αύξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση Σ_1, Γ στο Σ_2 $P_{\Sigma_2} = 1/16 + 1/16 = 1/8$
4. Σ_2 Θ Η Α Ε Β σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα ομαδοποίηση Σ_2, Θ στο Σ_3 $P_{\Sigma_3} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
5. Σ_3 Η Α Ε Β ΟΧΙ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων. Η Α Σ_3 Ε Β ομαδοποίηση Η, Α στο Σ_4 $P_{\Sigma_4} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
6. Σ_4 Σ_3 Ε Β σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση Σ_4, Σ_3 στο Σ_5 $P_{\Sigma_5} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
7. Σ_5 Ε Β ΟΧΙ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων: Ε Β Σ_5 ομαδοποίηση Ε, Β στο Σ_6 $P_{\Sigma_6} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
8. Ομαδοποίηση Σ_6, Σ_5 στο Σ_7 $P_{\Sigma_7} = 1{,}0$
9. Ανάθεση '1' στα αριστερά παιδιά και '0' στα δεξιά παιδιά κάθε κόμβου.
10. Αντιστοίχιση κωδ. λέξεων ανά σύμβολο.

Σε κάθε βήμα διατάσσουμε τα σύμβολα με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων και ομαδοποιούμε τα 2 αριστερότερα

Β: Διαδρομή $\Sigma_7 \to \Sigma_6 \to B$: 10
Ε: Διαδρομή $\Sigma_7 \to \Sigma_6 \to E$ 11
Α: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_4 \to A$: 010
Η: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_4 \to H$: 011
Θ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Theta$ 000
Γ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Gamma$: 0010
Δ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Sigma_1 \to \Delta$: 00110
Ζ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Sigma_1 \to Z$ 00111

Στην επόμενη σελίδα παρατίθεται η κωδ/ση Huffman με τη χρήση δυαδικού δένδρου.


Σ7
1,0
1
0
Σ6
1/2
Σ5
1/2
E
1/4
B
1/4
Σ4
1/4
Σ3
1/4
H
1/8
A
1/8
Σ2
Σ1
1/16
Z
1/32
Δ
1/32
Γ
1/16
Θ
1/8
H
1/8
A
1/8
E
1/4
B
1/4

Πλεονασμός πηγής

$$r_{ed} = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log N} = 1 - \frac{2{,}6875}{3} = 10{,}4\%$$

Επίδοση Κώδικα

$$\alpha = \frac{H(C)}{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i \log q}$$ σελ. 57

$$H(C) = 2{,}6875 \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$\log q = \log 2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \frac{1}{4}2 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{16}4 + \frac{1}{32}\cdot 5 + \frac{1}{32}5 =$$

$$= 1 + \frac{9}{8} + \frac{18}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875$$

Άρα $\alpha = 100\%$

$\alpha < 100\%$ όταν $l_i^* = -\log(p_i) \notin \mathbb{N}$

Κωδικοποίηση Αλγ. Fano.

① Διάταξη με φθίνουσα $P(S_i)$ — q κωδικά σύμβολα

② Διαχωρισμός σε q υποομάδες (για δυαδικό $q=2$) με όσο το ΔΥΝΑΤΟΝ ίσες αθροιστικές πιθανότητες

③ Αντιστοίχιση σε κάθε υποομάδα ενός κωδ. συμβόλου

④ Ξανά το ② για κάθε υποομάδα.

			l_i	
Β	1/4	1/2	0 0	(11)
Ε	1/4		0 1	(10)
Α	1/8	1/2	1 0 0	(011)
Η	1/8		1 0 1	(010)
Θ	1/8		1 1 0	(001)
Γ	1/16		1 1 1 0	(0001)
Δ	1/32		1 1 1 1 0	(00001)
Ζ	1/32		1 1 1 1 1	(00000)
	1			

με ανάθεση πρώτα του 1 και μετά το 0.

ΟΜΑΔΟΠΟΙΟΥΜΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ!

Κωδικοποίηση Shannon

1. Διάταξη συμβόλων με φθίνουσα $p(S_i)$
2. Υπολογισμός Αθροιστικής πιθανότητας $\Pi_i = \sum_{k=1}^{i-1} p(S_k)$, $\Pi_1 = 0$
3. Υπολογισμός πλήθους κωδικών συμβόλων (μήκους κωδικής λέξης) για κάθε σύμβολο $l_i = \lceil -\log(p(s_i)) \rceil$
4. Εύρεση Δυαδικού Αναπτύγματος για κάθε Π_i

Αλγόριθμος:

```
for k= 1:li
    Π(i) ← Π(i)·2
        if Π(i)≥1
          ψk = 1
          Π(i) ← Π(i)-1
        else
          ψk=0
        end
    end
```

s_i	$P(s_i)$	Π_i	$l_i = -\log P(s_i)$	κωδικολέξεις
B	1/4 = 0,25	0	2	00
E	1/4 = 0,25	0,25+0 = 0,25	2	01
A	1/8 = 0,125	0,25+0,25 = 0,5	3	100
H	1/8 = 0,125	0,125+0,5 = 0,625	3	101
Θ	1/8 = 0,125	0,125+0,625 = 0,75	3	110
Γ	1/16 = 0,0625	0,125+0,75 = 0,875	4	1110
Δ	1/32 = 0,03125	0,0625+0,875 = 0,9375	5	11110
Z	1/32 = 0,03125	0,03125+0,9375 = 0,96875	5	11111

π.χ για το Δ

$k = 1:5$, $\Pi_\Delta = 0,9375$

$k=1$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,9375 \times 2 = 1,875 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,875 - 1 = 0,875 \end{cases}$

$k=2$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,875 \times 2 = 1,75 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_2 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,75 - 1 = 0,75 \end{cases}$

$k=3$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,75 \times 2 = 1,5 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_3 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,5 - 1 = 0,5 \end{cases}$

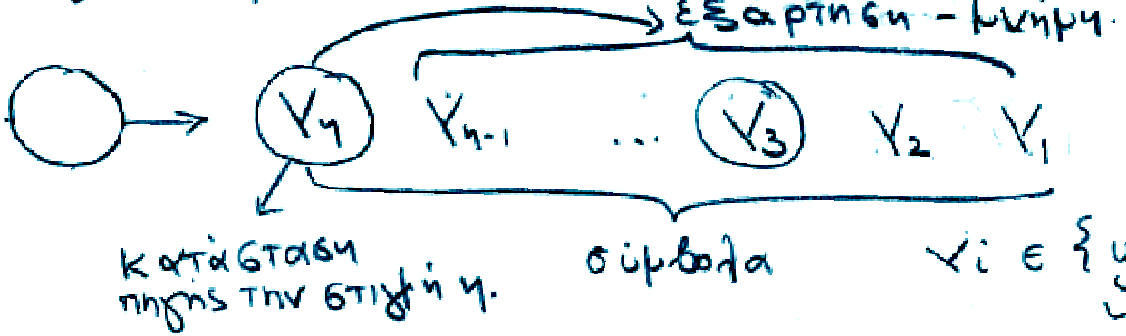
$k=4$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_4 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1 - 1 = 0 \end{cases}$

$k=5$

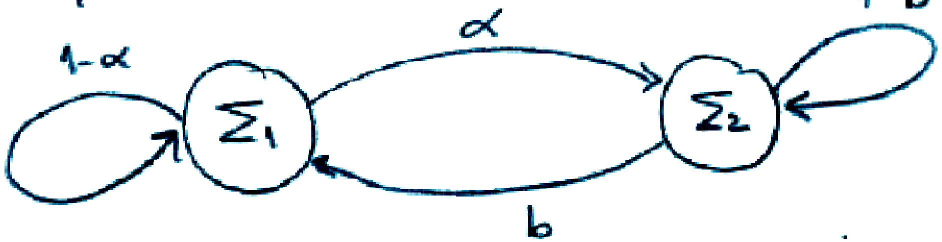
$\Pi_\Delta \leftarrow 0 \times 2 = 0 < 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_5 = 0 \\ \text{END} \end{cases}$

Πηγές με μνήμη - Αλυσίδες Markov



$Y_i \in \underbrace{\{y_1, \dots, y_n\}}_{\text{δυνατά σύμβολα.}}$

Για 2 σύμβολα



Για πηγή 1ης τάξης το κάθε εκπεμπόμενο σύμβολο εξαρτάται από το αμέσως προηγούμενό του

$$P\left(Y_{n+1}=y_{n+1} / Y_n=y_n, Y_{n-1}=y_{n-1}, \dots, Y_2=y_2, Y_1=y_1\right) = P\left(Y_{n+1}=y_{n+1} / Y_n=y_n\right)$$

* Χρονικά αμετάβλητη διαδικασία

$$P(Y_{n+1} = \Sigma_1 / Y_n = \Sigma_2) = P(Y_2 = \Sigma_1 / Y_1 = \Sigma_2)$$

* Στατική Διαδικασία

Η πιθανότητα κάθε κατάστασης είναι ανεξάρτητη του χρόνου

$$P(Y_n = \Sigma_1) = P(Y_{n+1} = \Sigma_1) \quad \forall n$$

Πίνακας Μετάβασης $P_{ij} = P(Y_{n+1} = j / Y_n = i)$

ΕΞ 2004Α / Θ2.

Στατική 1ης τάξης χρονικά αμετάβλητη } πηγή Markov 2 συμβόλων φ, χ

$$P_{ij} = \begin{array}{c|cc} & \varphi & \chi \leftarrow \text{κατάσταση } n+1 \\ \hline \varphi & 0{,}2 & 0{,}8 \\ \chi & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$$

↑ κατάσταση n

$$P(Y_{n+1} = \varphi / Y_n = \varphi) = 0{,}2 = P(\varphi/\varphi)$$

$$P(Y_{n+1} = \varphi / Y_n = \chi) = 0{,}5 = P(\varphi/\chi)$$

$$P(Y_{n+1} = \chi / Y_n = \cancel{\chi}\varphi) = 0{,}8 = P(\chi/\varphi)$$

$$P(Y_{n+1} = \chi / Y_n = \chi) = 0{,}5 = P(\chi/\chi)$$

Παρατήρηση:

1 Κάθε κατάσταση ακολουθείται είτε από φ είτε από x

δηλ $p(\varphi/x) + p(x/x) = 0{,}5+0{,}5=1$ (κατάσταση x)

$p(\varphi/\varphi) + p(x/\varphi) = 0{,}2+0{,}8=1$ (κατάσταση φ)

Δηλ. το άθροισμα κάθε γραμμής του πιν. μετάβασης $= \underline{1}$

2 $$P(\varphi) = P(\underset{=}{\overset{2o}{\varphi}}\,\overset{1o}{x}) + P(\underset{=}{\varphi}\varphi) = p(\varphi/x)\cdot p(x) + p(\varphi/\varphi)\cdot p(\varphi)$$

$$p(x) = P(\underset{=}{x}\varphi) + P(\underset{=}{x}x) = p(x/\varphi)\cdot p(\varphi) + p(x/x)\cdot p(x)$$

$$[p(\varphi)\quad p(x)] = [p(\varphi)\quad p(x)]\ \underbrace{\begin{bmatrix} p(\varphi/\varphi) & p(x/\varphi) \\ p(\varphi/x) & p(x/x) \end{bmatrix}}_{\text{πιν. μετάβασης}} \quad (1)$$

$p(\varphi)+p(x)=1$. (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $p(\varphi)=0,384$

$p(x)=0,615$

Εντροπία συμβόλων που εκπέμπονται από την κατάσταση φ

$$H(\varphi) = -\left\{p(\varphi/\varphi)\cdot\log[p(\varphi/\varphi)] + p(x/\varphi)\cdot\log(p(x/\varphi))\right\} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{2} P_{1j}\log(P_{1j}) = -0,2\log 0,2 - 0,8\log 0,8 = 0,72$$

αντίστοιχα

$$H(x) = -\sum_{j=1}^{2} P_{2j}\log(P_{2j}) = -0,5\log 0,5 - 0,5\log 0,5 = 1.$$

Εντροπία Πηγής 1 συμβόλου (με μνήμη)

$$H_m(S) = \sum_{i=1}^{2} p(s_i) \cdot H(s_i) = p(\varphi) \cdot H(\varphi) + p(x) \cdot H(x) =$$

$$= 0,384 \cdot 0,72 + 0,615 \cdot 1 = 0,891 \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

Εντροπία Πηγής 1 συμβόλου (χωρίς μνήμη)

$$H_0(S) = -\sum_{i=1}^{2} p(s_i) \log p(s_i) = -0,384 \log 0,384 - 0,615 \log 0,615 =$$

$$= 0,96 \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

(Εντροπία πηγής 2 συμβόλων

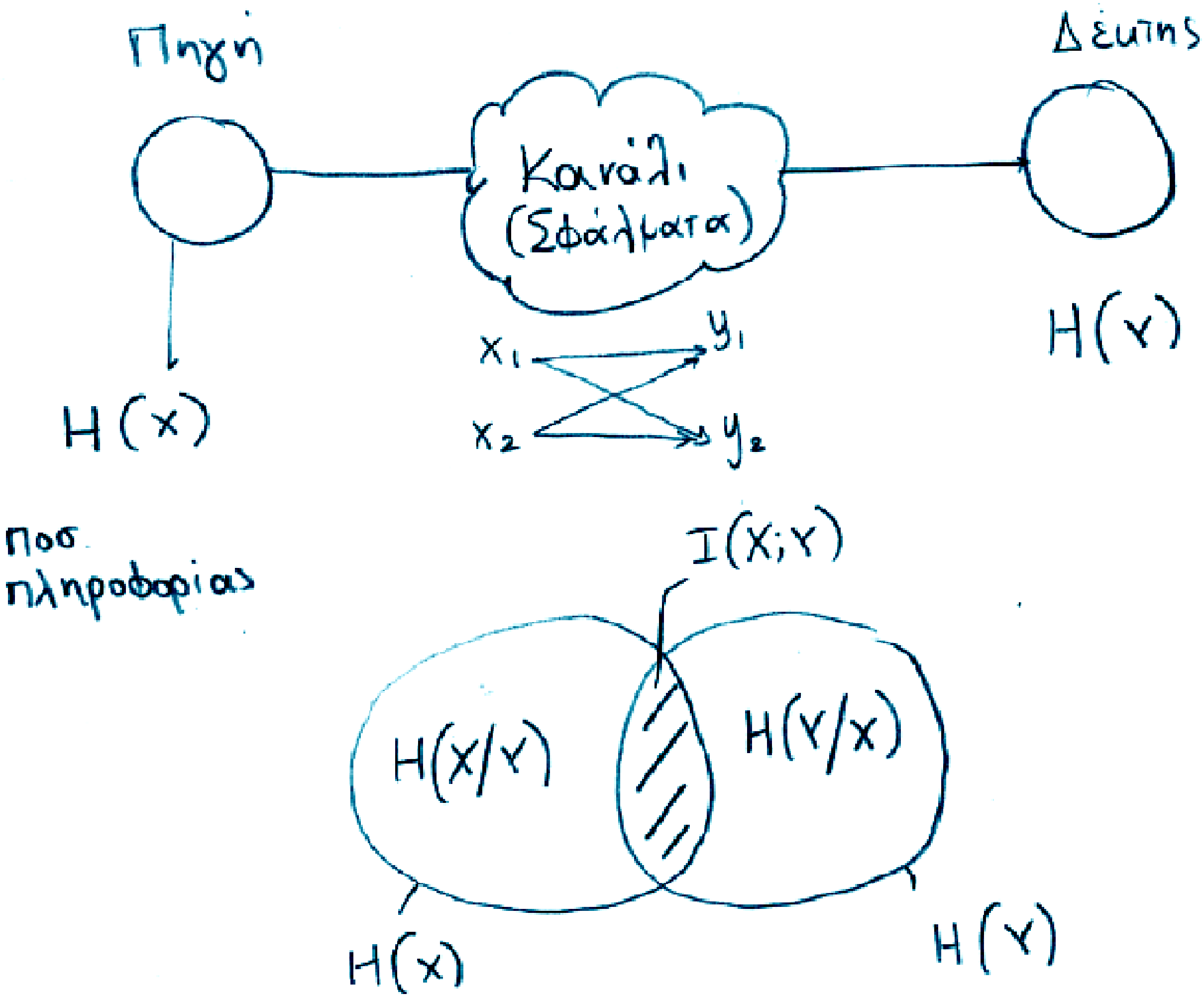
$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H_0(S) + H_m(S) = (0,891 + 0,96) \frac{\text{bits}}{\text{message}}$$)

Πλεονασμός πηγής χωρίς μνήμη $r_0 = 1 - \frac{H_0(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H_0(S)}{\log 2}$

-"- -"- με μνήμη $r_m = 1 - \frac{H_m(S)}{\log 2}$

-"- εξάρτησης $r_{\varepsilon\xi} = 1 - \frac{H_m(S)}{H_0(S)}$

Κανάλια



Πηγή
Κανάλι
(Σφάλματα)
Δέκτης
H(X)
H(Y)
x_1
x_2
y_1
y_2
Ποσ.
πληροφορίας
I(X;Y)
H(X/Y)
H(Y/X)
H(X)
H(Y)

Αθόρυβο κανάλι

$$x_1 \longrightarrow y_1$$

$$x_2 \longrightarrow y_2$$

$$p(x_i/y_j) = 1.$$

Μεταφερόμενη πληροφορία (χωρίς σφάλματα)

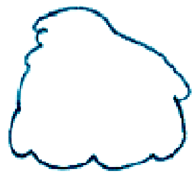
$$I(x_i;y_j) = \log \frac{P(x_i/y_j)}{P(x_i)} = \log \frac{1}{P(x_i)} = H(x_i)$$

ανεξάρτητα

Ενθόρυβο κανάλι

x_1 $\quad$ y_1

x_2 $\quad$ y_2



$$p(x_i/y_j) = p(x_i)$$

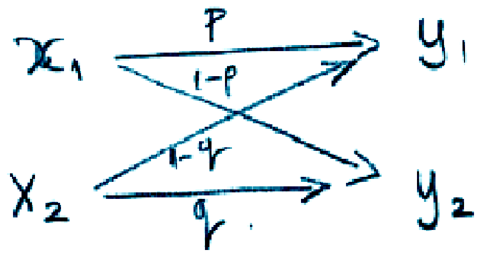
$$I(x_i;y_j) = \log \frac{P(x_i)}{P(x_i)} = \log 1 = 0$$

$$I(X;Y) = H(X) - \underbrace{H(X/Y)}_{\text{χαμένη ποσ. πληροφορίας στο κανάλι λόγω θορύβου}} = H(Y) - H(Y/X)$$

ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρεται από το κανάλι

ποσότητα πληροφορίας που εκπέμπει η πηγή

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι



Πίνακας Μετάβασης

$$\begin{array}{ccc} & y_1 & y_2 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$P_{ij} = P(Y = y_j / X = x_i)$$

Το άθροισμα της κάθε γραμμής του πιν. μετάβασης $= 1$

$$P(y_1/x_1) + P(y_2/x_1) = P(y_1/x_2) + P(y_2/x_2) = 1.$$

$$[P(y_1) \quad P(y_2)] = [P(x_1) \quad P(x_2)] \cdot P_{ij}$$