Βασικά Ζητήματα Δικτύων Η/Υ

ΕΑΠ/ΠΛΗ22 / ΑΘΗ 3
20.10.12
ΟΣΣ1 - Ασκήσεις

Νίκος Δημητρίου

ΓΕ1/1011/Θ3

<u>ΘΕΜΑ 3</u>
Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τη χρήση ιδιοτήτων των ΜΣ Fourier σε συνδυασμό με γνωστούς ΜΣ Fourier. Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/0910/Θ1.*
Να υπολογίσετε το ΜΣ Fourier του σήματος $x(t) = \frac{t^3}{6} e^{-at} \sin\left(2\pi f_c t\right) u(t)$, με $\alpha > 0$.
<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα των ΜΣ Fourier βασικών σημάτων και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα την ιδιότητα ολίσθησης συχνότητας .*

$$x(t)=\frac{t^3}{6}e^{-at}\sin\left(2\pi f_c t\right)u(t)=x_0\left(t\right)\sin\left(2\pi f_c t\right),\ \alpha>0$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier έχουμε:

ΠΙΝΑΚΑΣ Β Μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων		
Πεδίο χρόνου (*t*)	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u\left(t\right),\Re e\left\{a\right\}>0$	$\frac{1}{\left(a+j\Omega\right)^n}$	$\frac{1}{\left(a+j2\pi f\right)^n}$

Αρα (με *n=4*):

$$x_0(t)=\frac{t^3}{6}e^{-at}u(t)=\frac{t^{4-1}}{(4-1)!}e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{\left(a+j2\pi f\right)^4}=X_0\left(f\right)$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier έχουμε:

ΠΙΝΑΚΑΣ Β Μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων		
Πεδίο χρόνου (t)	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
$\sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$	$\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$

Εφαρμόζουμε και την ιδιότητα διαμόρφωσης:

ΠΙΝΑΚΑΣ Α Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier			
Ιδιότητα	**Πεδίο χρόνου (t)**	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega)*Y(\Omega)\right]$	$\left[X(f)*Y(f)\right]$

Οπότε, έχουμε:

$$x(t)=x_0(t)\sin(2\pi f_c t)\xleftrightarrow{F} X_0(f)*\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)\right]$$

Και λόγω της ιδιότητας:

- $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

Τελικά έχουμε:

$$x(t)=x_0(t)\sin(2\pi f_c t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{\left(a+j2\pi(f-f_c)\right)^4}-\frac{1}{\left(a+j2\pi(f+f_c)\right)^4}\right]=X(f)$$

ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0=\frac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t)=x(t)*\left[2a\cdot \operatorname{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha>f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \Im\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

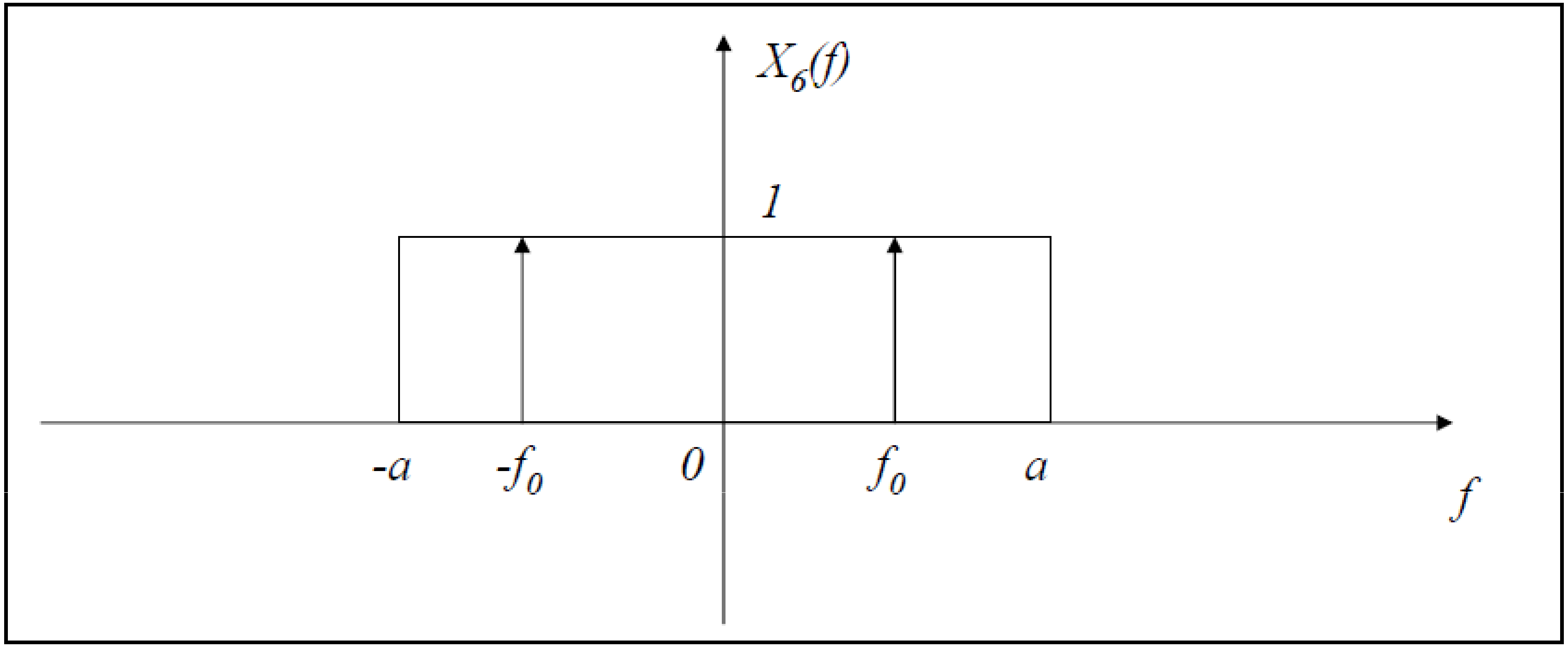
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] = X(f)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

και $\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2a} rect\left(\dfrac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

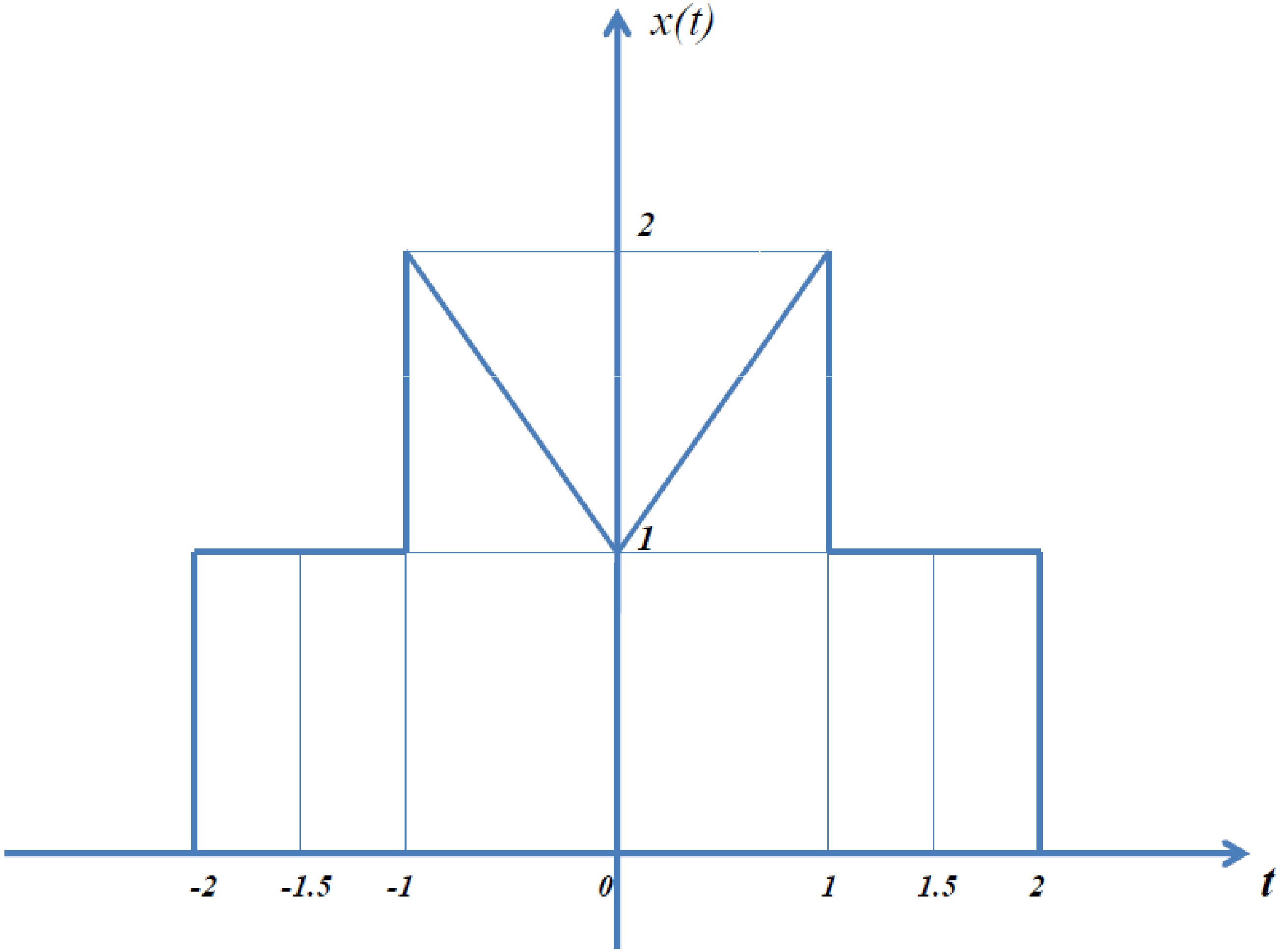
Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $\left[2a \cdot \operatorname{sinc}(2at)\right]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

ΕΞ2011Α/Θ1

Δίνεται το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος $X(f)$

(β) Το $x(t)$ πολλαπλασιάζεται στο πεδίο του χρόνου με κατάλληλο σήμα άπειρης χρονικής διάρκειας $g(t)$ για το οποίο ισχύει ότι $g(t) \neq 0$ όταν $t \to \pm\infty$ και προκύπτει το σήμα $y(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5)$. Να υπολογιστεί η χρονική έκφραση του $g(t)$ και το φάσμα πλάτους του $G(f)$.

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του προκύπτοντος σήματος $Y(f)$.

(δ) Το σήμα $y(t)$ διέρχεται από ένα σύστημα στην έξοδο του οποίου προκύπτει το σήμα $z(t)$ με φάσμα $Z(f) = \left[1+\cos(6\pi f)\right] \cdot \mathrm{sinc}(f)$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f) = \cos(3\pi f)$.

Από το σχήμα αναγνωρίζουμε τους στοιχειώδεις παλμούς κι έχουμε:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) + rect\left(\frac{t}{2}\right) - tri(t)$$

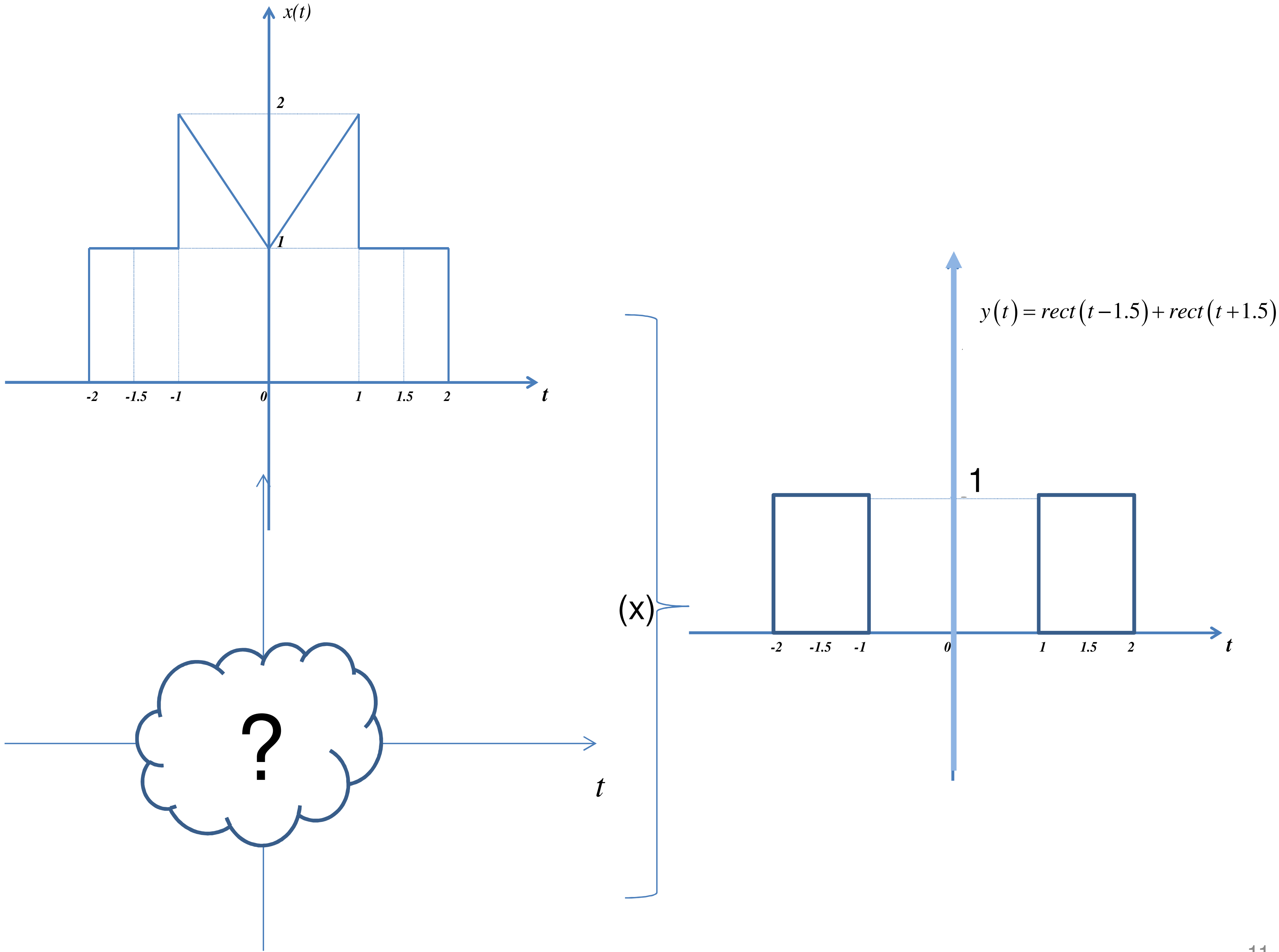
Υπολογίζουμε διαδοχικά τους ΜΣ Fourier κάθε όρου του αθροίσματος με χρήση γνωστών ΜΣ Fourier και ιδιοτήτων:

$$\boxed{rect(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f) \Leftrightarrow} \begin{cases} rect\left(\frac{t}{4}\right) \xleftrightarrow{F} 4\text{sinc}(4f) \\ rect\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\text{sinc}(2f) \end{cases}$$

$$\boxed{tri(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}^2(f)}$$

Αθροίζουμε τα επιμέρους αποτελέσματα που βρήκαμε κι έχουμε το ζητούμενο ΜΣ Fourier:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) + rect\left(\frac{t}{2}\right) - tri(t) \xleftrightarrow{F} 4\text{sinc}(4f) + 2\text{sinc}(2f) - \text{sinc}^2(f) = X(f)$$


x(t)
2
1
-2
-1.5
-1
0
1
1.5
2
t
?
t
(x)
$y(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5)$
1
-2
-1.5
-1
0
1
1.5
2
t

(β)

Το $x(t)$ πολλαπλασιάζεται στο πεδίο του χρόνου με κατάλληλο σήμα $g(t)$ και προκύπτει το σήμα $y(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5)$. Για να γίνει αυτό θα πρέπει το σήμα $g(t)$ να λειτουργεί ως υψιπερατό φίλτρο στο πεδίο του χρόνου με την κρουστική απόκριση να ισούται με $g(t) = 1 - rect\left(\frac{t}{2}\right)$ ενώ το φάσμα του θα ισούται με $G(f) = \delta(f) - 2\text{sinc}(2f)$.

(γ)

Έχουμε $y(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5)$.

Το φάσμα του ισούται με

$$Y(f) = e^{-j2\pi f 1.5} \cdot \mathrm{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5} \cdot \mathrm{sinc}(f) =$$
$$= \left[e^{-j2\pi f 1.5} + e^{j2\pi f 1.5}\right] \cdot \mathrm{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f) \cdot \mathrm{sinc}(f)$$

(δ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right] \cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)} .$$

Κι επειδή ισχύει ότι

$$1 + \cos(6\pi f) = 2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

$$H(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{2\cos^2(3\pi f) \cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)} = \cos(3\pi f)$$

ΘΕΜΑ 1

ΓΕ1/0910

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τη χρήση ιδιοτήτων ΜΣ Fourier. Σχετικές ασκήσεις:ΓΕ1/0809/Θ6*

Να υπολογίσετε το ΜΣ Fourier του σήματος $g(t) = e^{-at}\cos\left(2\pi f_c t\right)u(t)$, με $\alpha > 0$ και

$$u\left(t\right) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}.$$

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα μετατόπισης φάσματος που ισχύει για σήμα με γνωστό ΜΣ Fourier (από πίνακες ΜΣ Fourier) πολλαπλασιαζόμενο με συνημιτονικό σήμα*

Δίνεται ότι:

$$g(t) = e^{-at}\cos(2\pi f_c t)u(t), a > 0$$

Ζητείται ο ΜΣ Fourier ενός σύνθετου σήματος που περιλαμβάνει εκθετικό, τριγωνομετρικό και βηματικό όρο.
Μεθοδολογία: Αναζήτηση στους πίνακες ΜΣ Fourier ειδικών σημάτων για παρόμοιες εκφράσεις
σελ.57:

$e^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\Omega}$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$

$$h(t) = e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j2\pi f} = H(f)$$

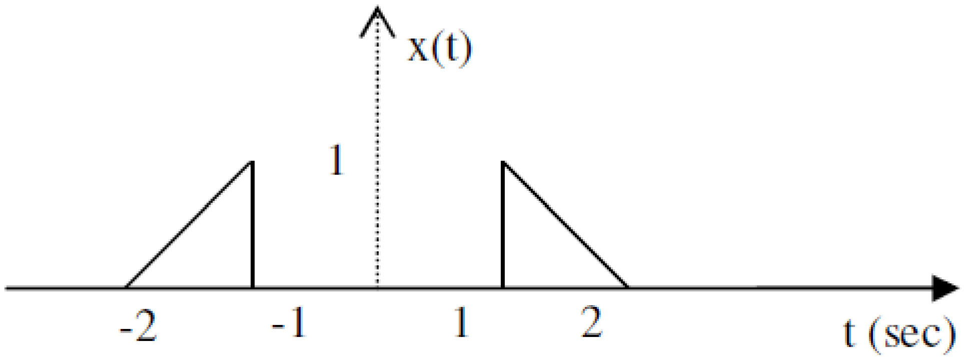
Και με βάση την ιδιότητα μετατόπισης φάσματος θα έχουμε:

$$g(t) = h(t)\cdot\cos(2\pi f_c t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[H(f - f_c) + H(f + f_c)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a + j2\pi(f - f_c)} + \frac{1}{a + j2\pi(f + f_c)}\right\} = G(f)$$

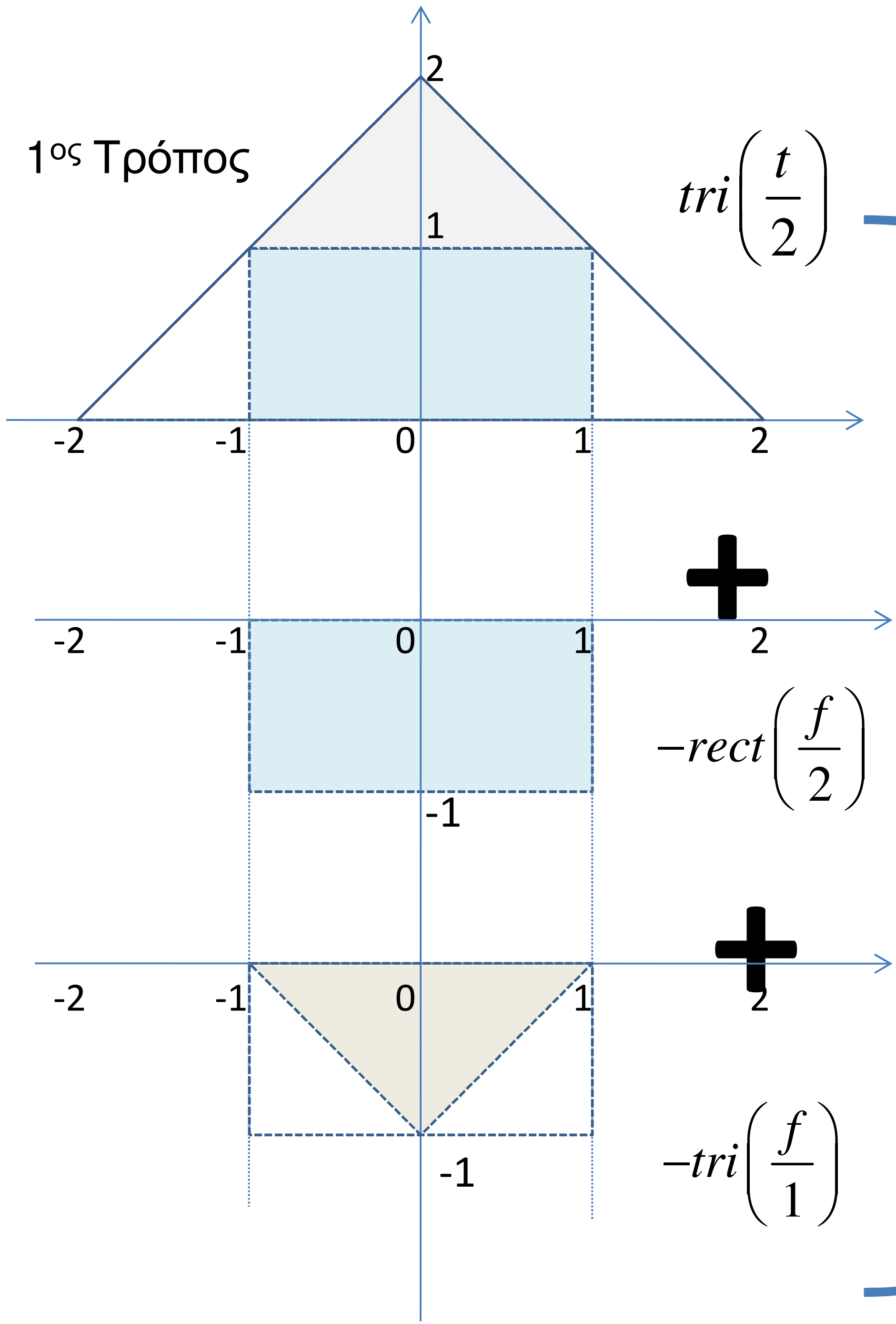
ΘΕΜΑ 2 ΓΕ1/0708

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ που δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Υπόδειξη: Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier είτε απευθείας από τον ορισμό με ολοκλήρωση, είτε εκφράζοντας κατάλληλα το σήμα ως άθροισμα τετραγωνικών (Π(t)) και τριγωνικών παλμών (Λ(t)).

1ος Τρόπος



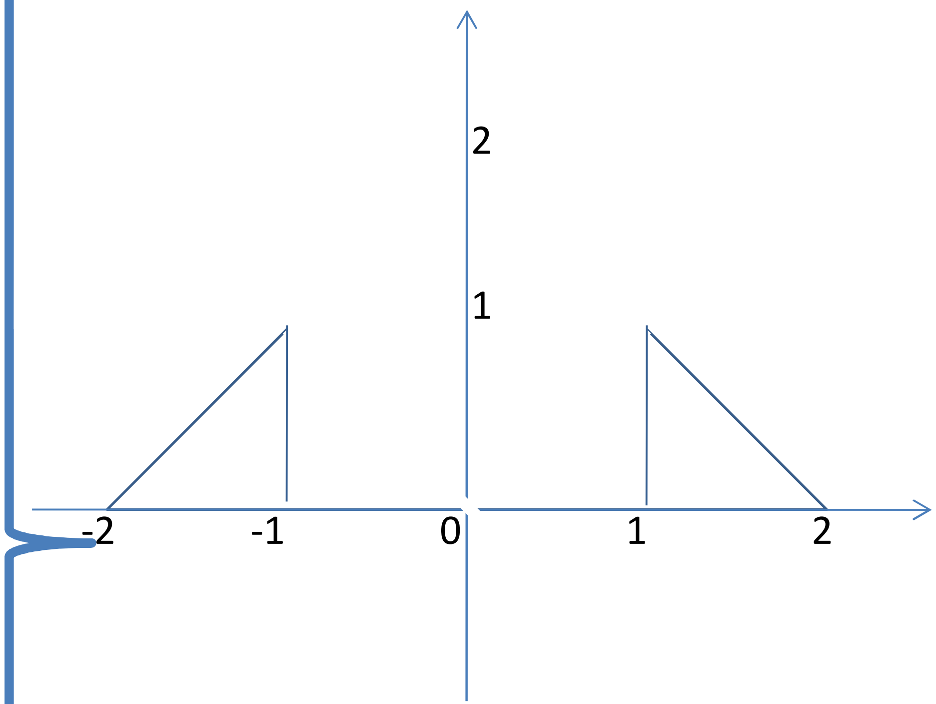
$$tri\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$+$$

$$-rect\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$+$$

$$-tri\left(\frac{f}{1}\right)$$

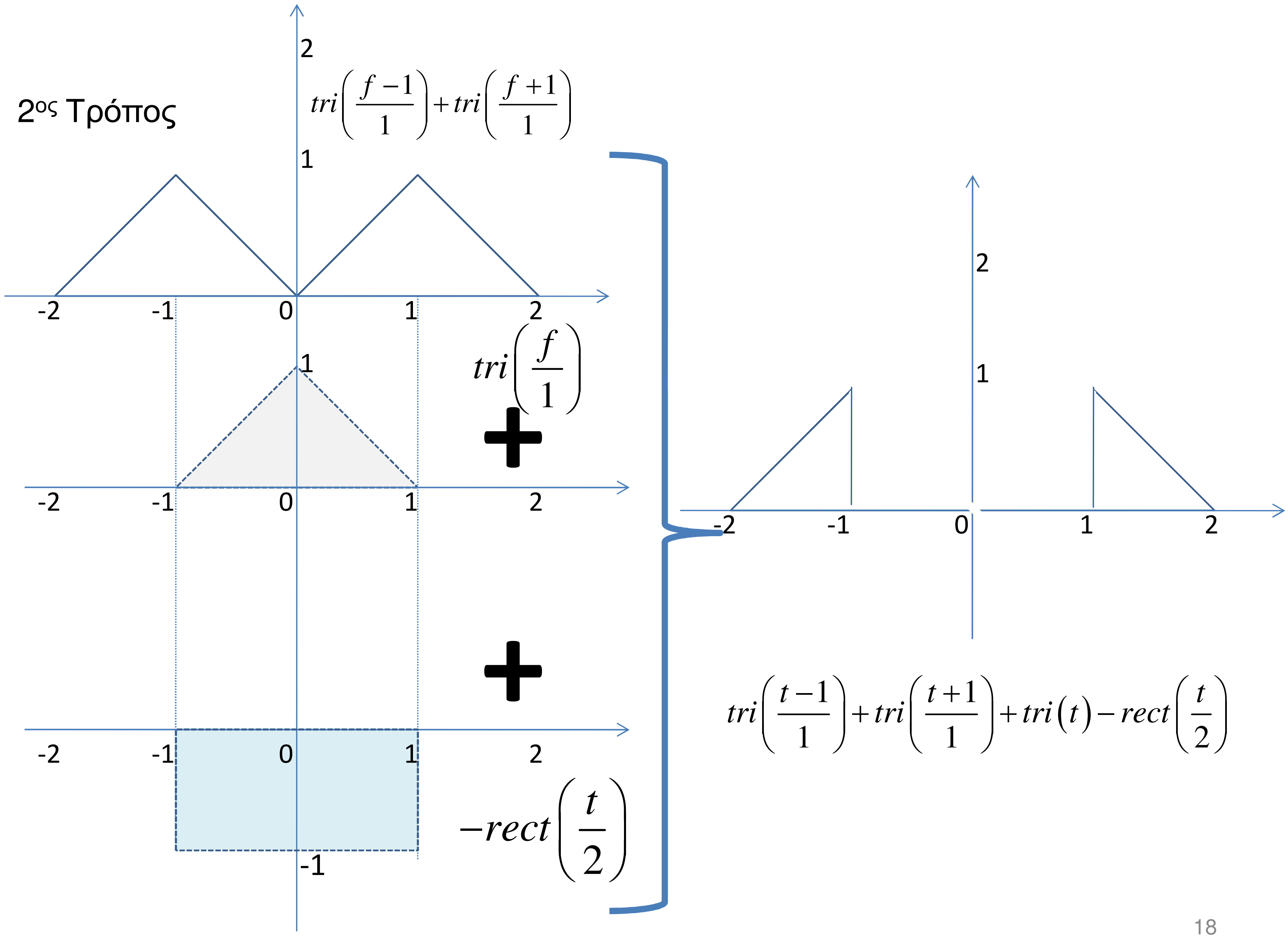


$$2tri\left(\frac{t}{2}\right) - rect\left(\frac{t}{2}\right) - tri\left(t\right)$$

$$\updownarrow$$

$$4\sin c^2(2f) - 2\sin c(2f) - \sin c^2 f$$

2ος Τρόπος



$$tri\left(\frac{t-1}{1}\right)+tri\left(\frac{t+1}{1}\right)+tri(t)-rect\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} tri\left(\frac{t-1}{1}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f}\operatorname{sinc}^2(f) \\ tri\left(\frac{t+1}{1}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f}\operatorname{sinc}^2(f) \\ tri(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{sinc}^2(f) \\ -rect\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} \text{-}2\operatorname{sinc}(2f) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$tri\left(\frac{t-1}{1}\right)+tri\left(\frac{t+1}{1}\right)+tri(t)-rect\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} \left[e^{-j2\pi f}+e^{j2\pi f}\right]\operatorname{sinc}^2(f)+\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)=$$

$$=2\cos(2\pi f)\operatorname{sinc}^2(f)+\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)=2\left[2\cos^2(\pi f)-1\right]\operatorname{sinc}^2(f)+\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)=$$

$$=4\cos^2(\pi f)\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}^2(f)+\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)=$$

$$=4\cos^2(\pi f)\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}-\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)=4\frac{\left[2\cos(\pi f)\sin(\pi f)\right]^2}{(2\pi f)^2}-\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)=$$

$$=4\frac{\left[\sin(2\pi f)\right]^2}{(2\pi f)^2}-\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)=4\operatorname{sinc}^2(2f)-\operatorname{sinc}^2(f)\text{-}2\operatorname{sinc}(2f)$$

Παράδειγμα με φίλτρα.

Ποιά η σχέση των a, b ώστε $(\alpha, b > 0)$

να ισχύει $\alpha \operatorname{sinc}(\alpha t) * b\operatorname{sinc}^2(bt) = b\operatorname{sinc}^2(bt)$?

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{\;y(t)\;} \qquad y(t) = x(t)$$

$x(t) = b\operatorname{sinc}^2(bt)$

$h(t) = \alpha \cdot \operatorname{sinc}(at) \qquad \alpha, b > 0$

Υπολογισμός $X(f)$

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{tri}(f)$

αλλ. κλίμακας $\mathrm{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

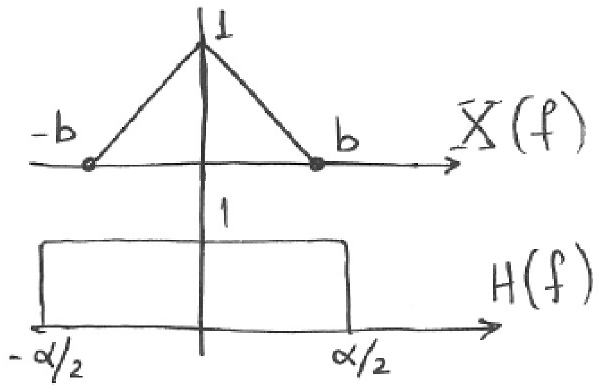
$\Rightarrow b\,\mathrm{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \mathrm{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

Υπολογισμός $H(f)$.

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}(f)$

αλλ. κλίμακας $\mathrm{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow \alpha\,\mathrm{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$



Εμείς θέλουμε $X(f)\cdot H(f) = X(f)$

οπότε $b \leq \frac{a}{2}$

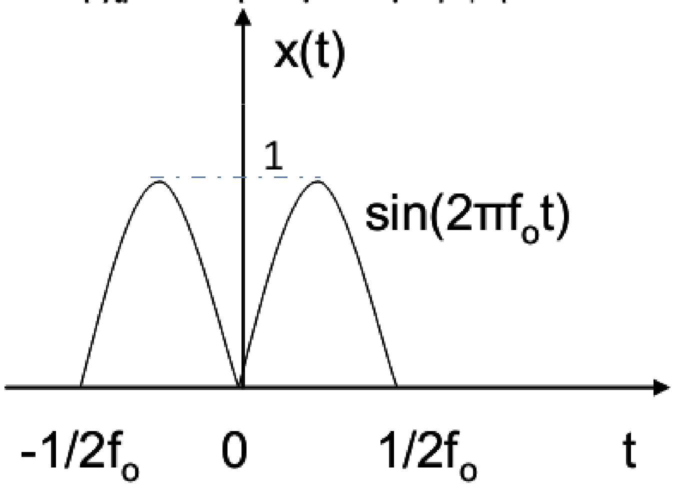
ΘΕΜΑ 1/ΓΕ1/1011

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό ΜΣ Fourier βασικών σημάτων και τη χρήση των ιδιοτήτων του. Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/0809/Θ3, ΓΕ1/0708/Θ3.*

Να υπολογιστεί ο ΜΣ Fourier για το πιο κάτω σήμα που ορίζεται ως εξής:

$$x(t)=\begin{cases}\sin(2\pi f_0 t), & \text{όταν } 0<t<\dfrac{1}{2f_0}\\ -\sin(2\pi f_0 t), & \text{όταν } -\dfrac{1}{2f_0}<t<0\end{cases}$$

και η χρονική κυματομορφή του απεικονίζεται ως εξής:



Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Αφού προσδιορίσετε την έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου ως κατάλληλο άθροισμα γινομένων τετραγωνικού παλμού και ημιτονικού σήματος, να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες του ΜΣ Fourier και κατόπιν να απλοποιήσετε την τελική έκφραση.*

Το σήμα *x(t)* μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα γινομένων κατάλληλου τετραγωνικού με ημιτονικό σήμα:

$$x(t) = \left\{ \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{4f_o}}{\frac{1}{2f_o}} \right) - \Pi\left(\frac{t + \frac{1}{4f_o}}{\frac{1}{2f_o}} \right) \right\} \sin(2\pi f_o t) =$$

$$\left\{ \Pi\left(2f_o\left(t - \frac{1}{4f_o} \right) \right) - \Pi\left(2f_o\left(t + \frac{1}{4f_o} \right) \right) \right\} \sin(2\pi f_o t)$$

$$\Im(x(t))=\left[\frac{1}{2f_o}\sin c\left(\frac{f}{2f_o}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{4f_o}}-\frac{1}{2f_o}\sin c\left(\frac{f}{2f_o}\right)e^{j2\pi\frac{f}{4f_o}}\right]*\left[\frac{1}{2j}(\delta(f-f_o))-(\delta(f+f_o))\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{1}{2f_o}\left[\sin c\left(\frac{f}{2f_o}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{4f_o}}*\delta(f-f_o)-\sin c\left(\frac{f}{2f_o}\right)e^{-j2\pi\frac{f}{4f_o}}*\delta(f+f_o)\right.$$

$$\left.-\sin c\left(\frac{f}{2f_o}\right)e^{j2\pi\frac{f}{4f_o}}*\delta(f-f_o)-\sin c\left(\frac{f}{2f_o}\right)e^{j2\pi\frac{f}{4f_o}}*\delta(f+f_o)\right]=$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{1}{2f_o}\left[\sin c\left(\frac{f-f_o}{2f_o}\right)e^{-j2\pi\frac{f-f_o}{4f_o}}-\sin c\left(\frac{f+f_o}{2f_o}\right)e^{-j2\pi\frac{f+f_o}{4f_o}}\right.$$

$$\left.-\sin c\left(\frac{f-f_o}{2f_o}\right)e^{j2\pi\frac{f-f_o}{4f_o}}+\sin c\left(\frac{f+f_o}{2f_o}\right)e^{j2\pi\frac{f+f_o}{4f_o}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{1}{2f_o}\left\{\sin c\left(\frac{f-f_o}{2f_o}\right)\left[\cos\left(2\pi\frac{f-f_o}{4f_o}\right)-j\sin\left(2\pi\frac{f-f_o}{4f_o}\right)\right]\right.$$

$$-\sin c\left(\frac{f+f_o}{2f_o}\right)\left[\cos\left(2\pi\frac{f+f_o}{4f_o}\right)-j\sin\left(2\pi\frac{f+f_o}{4f_o}\right)\right]$$

$$-\sin c\left(\frac{f-f_o}{2f_o}\right)\left[\cos\left(2\pi\frac{f-f_o}{4f_o}\right)-j\sin\left(2\pi\frac{f-f_o}{4f_o}\right)\right]$$

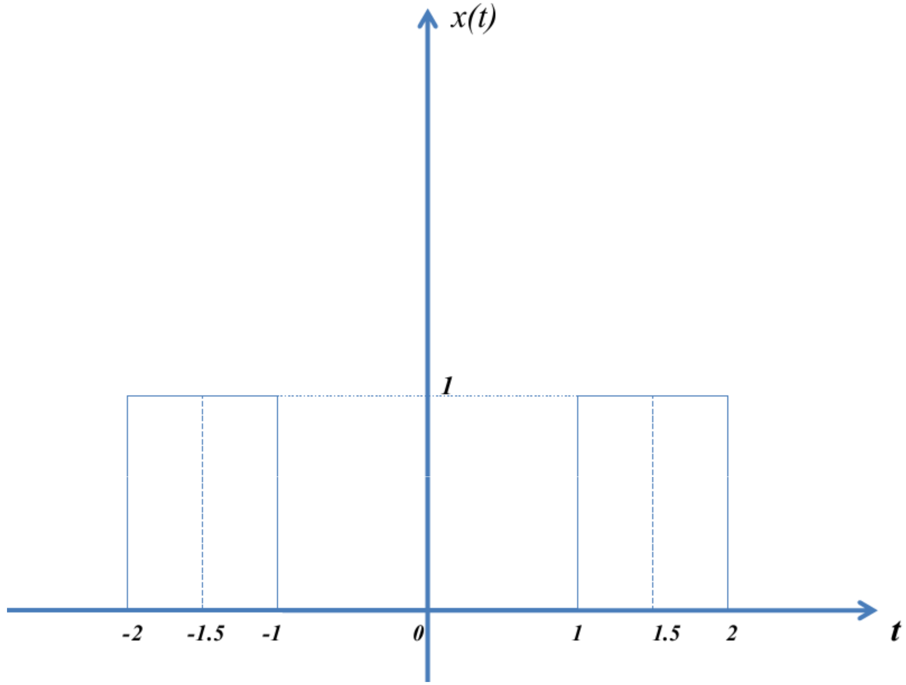
$$\left.+\sin c\left(\frac{f+f_o}{2f_o}\right)\left[\cos\left(2\pi\frac{f+f_o}{4f_o}\right)-j\sin\left(2\pi\frac{f+f_o}{4f_o}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{1}{2f_o}\left[-2j\sin c\left(\frac{f-f_o}{2f_o}\right)\sin\left(2\pi\frac{f-f_o}{4f_o}\right)+2j\sin c\left(\frac{f+f_o}{2f_o}\right)\sin\left(2\pi\frac{f+f_o}{4f_o}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2f_o}\left\{\sin c\left(\frac{f+f_o}{2f_o}\right)\sin\left(\pi\frac{f+f_o}{2f_o}\right)-\sin c\left(\frac{f-f_o}{2f_o}\right)\sin\left(\pi\frac{f-f_o}{2f_o}\right)\right\}$$

ΘΕΜΑ 4 /ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής συνέλιξη: $y(t)=\left\{\delta(t)+\frac{1}{2}\left[\delta(t-3)+\delta(t+3)\right]\right\}*rect(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f)=\cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5) \ .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5}\text{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5}\text{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f)\text{sinc}(f) \ .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} * rect(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$Y(f) = \Im\left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} \cdot \Im\left[rect(t)\right] =$$

$$= \left[1 + \cos(6\pi f)\right] \cdot \text{sinc}(f) = \text{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \text{sinc}(f)$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right]\cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\operatorname{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

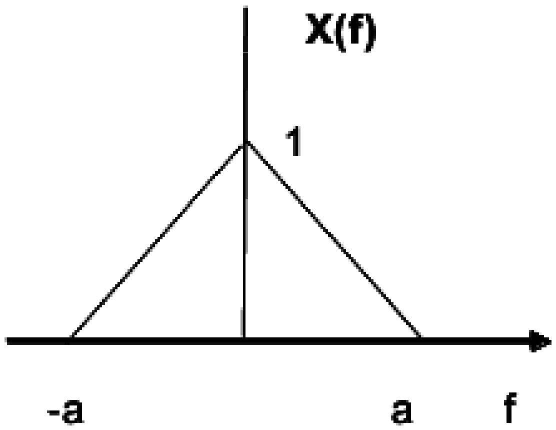
$$1+\cos(6\pi f)=2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

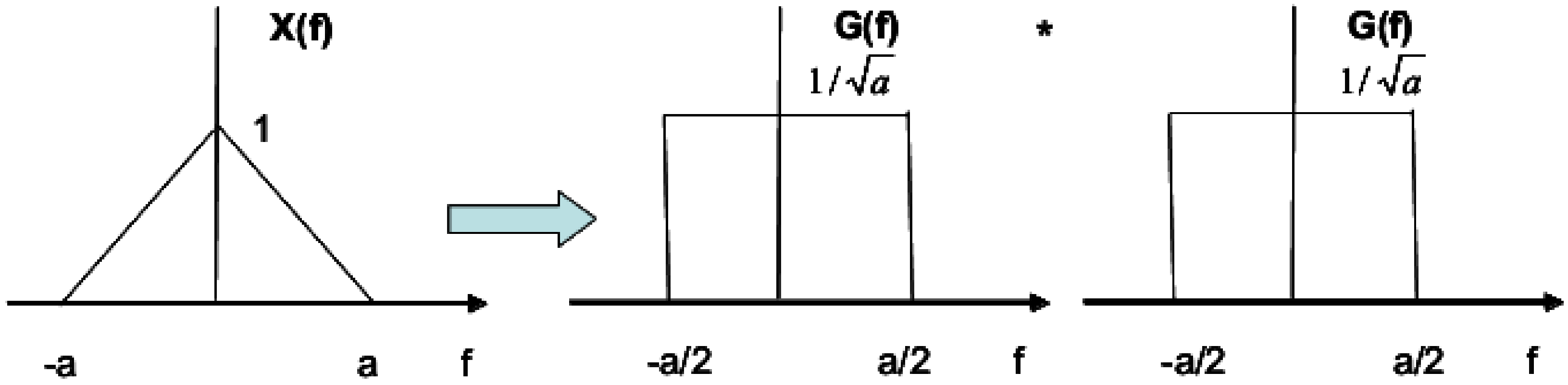
$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{2\cos^2(3\pi f)\cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\operatorname{sinc}(f)}=\cos(3\pi f)$$

Θέμα 5 ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα x(t) στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) [X(f)] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα x(t) προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier X(f) προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος G(f) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση g(t) με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a}\,\sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \sin c^2(at)$$