# Βασικά Ζητήματα Δικτύων Η/Υ

ΕΑΠ/ΠΛΗ22 / ΑΘΗ 3

12.10.12

Νίκος Δημητρίου

# Περιεχόμενα

- Εισαγωγή στα σήματα
- Περιοδικά σήματα
- Αναφορά στις σειρές Fourier
- Κριτήρια περιοδικότητας
- Παραδείγματα
- Ενδεικτικά μη περιοδικά σήματα
- Παραδείγματα σχεδίασης σημάτων

- *(οι διαφάνειες είναι βασισμένες στον τόμο Β' / Μέρος Β' / Ψηφιακές Επικοινωνίες ΙΙ (Σήματα – Διαμόρφωση – Θόρυβος)*

## 2.2 Είδη Σημάτων

Ως σήμα ορίζεται ένα φυσικό μέγεθος που μεταβάλλεται σε σχέση με το χώρο, χρόνο ή κάποια άλλη μεταβλητή. Μαθηματικά, ένα σήμα αναπαριστάται με μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots)$. Στη συνέχεια τα σήματα που θα μελετηθούν θα μεταβάλλονται μόνο με το χρόνο ή τη συχνότητα.

### 2.2.1 Αιτιατά Σήματα

Τα αιτιατά σήματα ορίζονται μόνο για θετικές τιμές του χρόνου και έχουν μηδενική τιμή για αρνητικές τιμές του χρόνου: $x(t) = 0$, όταν $t < 0$

Τα σήματα που ορίζονται και για αρνητικές τιμές του χρόνου καλούνται μη αιτιατά.

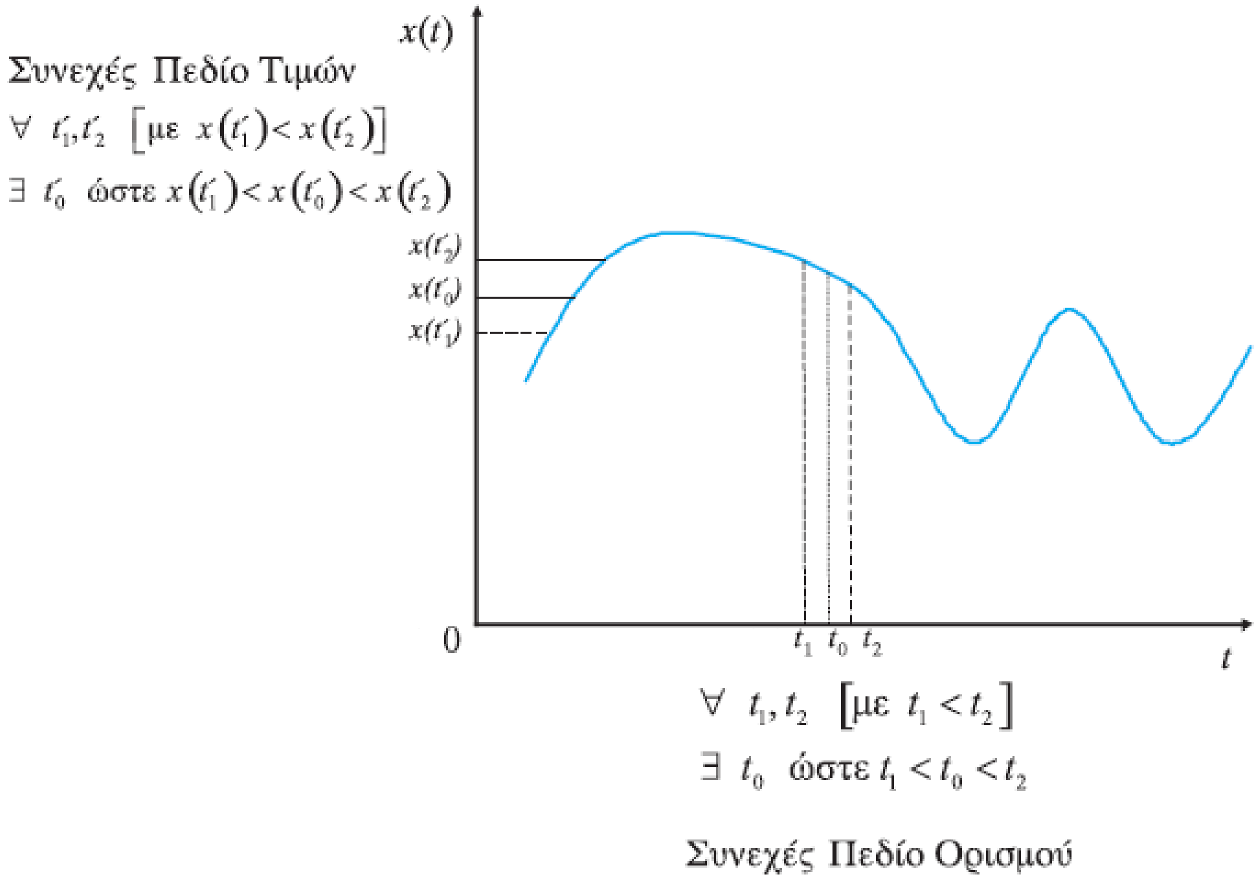
### 2.2.2 Πραγματικά-Μιγαδικά Σήματα

Ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ λαμβάνει πραγματικές τιμές για κάθε χρονική τιμή:

$\forall\ t \in \mathbb{R},\ x(t) \in \mathbb{R}$ . Ένα μιγαδικό σήμα $z(t)$ αποτελείται από το συνδυασμό δύο πραγματικών σημάτων , $x_1(t), x_2(t)$ των οποίων οι τιμές σε κάθε χρονική στιγμή δίνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z(t)$ αντίστοιχα:

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\ z(t) = x_1(t) + jx_2(t) \in \mathbb{C},\ x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}.$$

### 2.2.3 Σήματα Συνεχούς Χρόνου – Αναλογικά



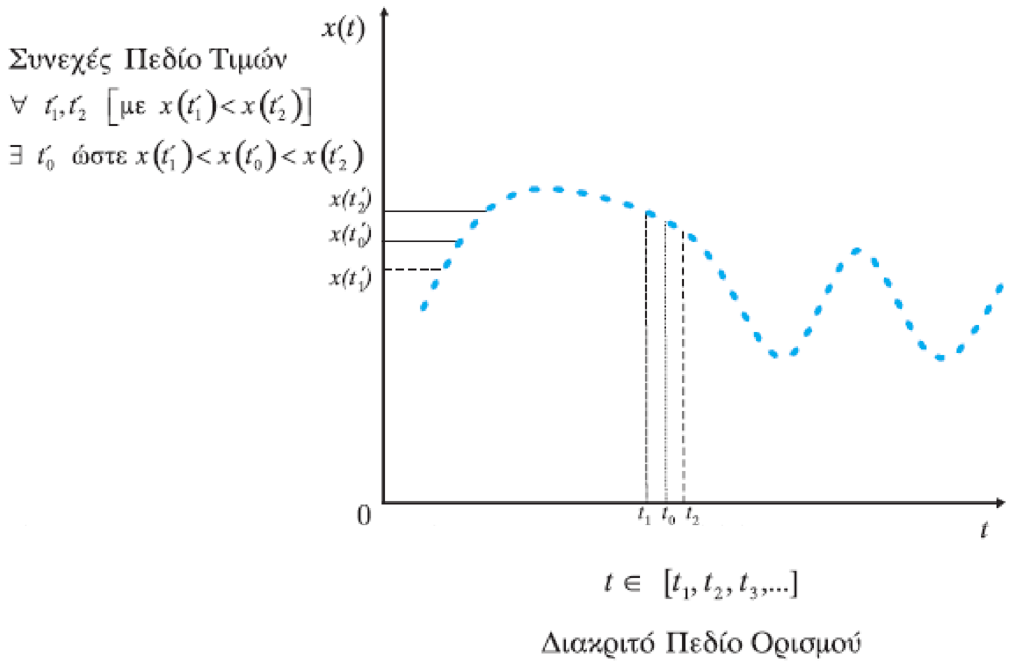

**Σχήμα 2.4**

*Σήμα συνεχούς χρόνου (αναλογικό)*

Τα σήματα συνεχούς χρόνου (αναλογικά) έχουν συνεχές πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$, $t \in \mathbb{R}$ είναι συνεχούς χρόνου.

### 2.2.4 Σήματα Διακριτού Χρόνου

Τα σήματα διακριτού χρόνου έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών



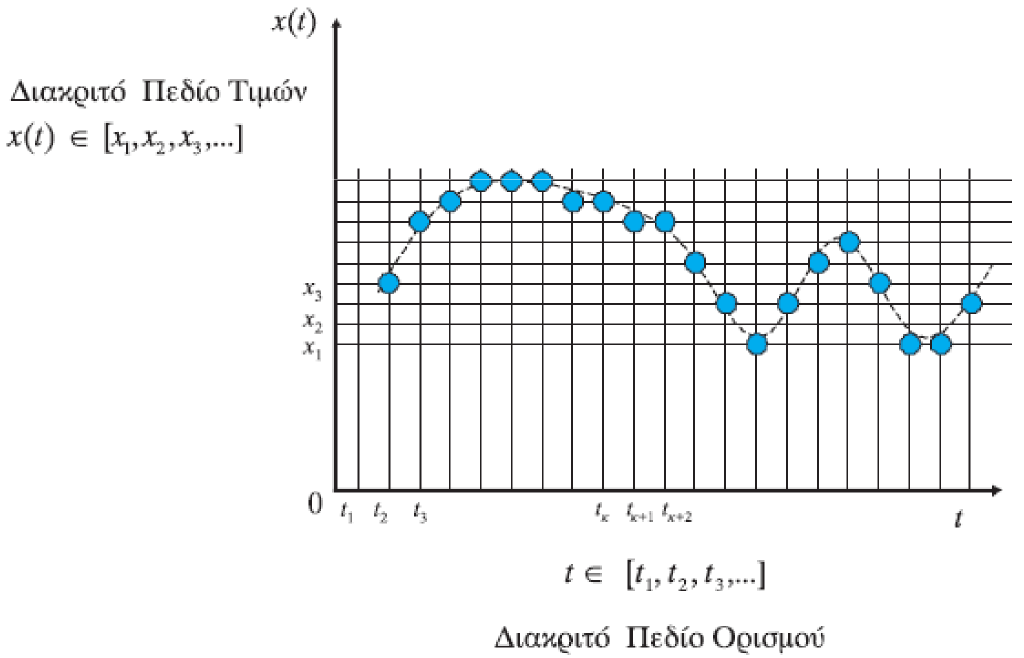

**Σχήμα 2.5**

*Σήμα διακριτού χρόνου*

Για παράδειγμα, το σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} n\right)$, όπου $n = 0, 1, 2, ...$ και $T_0$ άρρητος, $\left(\text{π.χ. } T_0 = \sqrt{5}\right)$ είναι διακριτού χρόνου, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα συνεχές σύνολο (το [-1,1]) $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

### 2.2.5 Ψηφιακά Σήματα

Τα ψηφιακά σήματα έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και διακριτό πεδίο τιμών . Για παράδειγμα, το σήμα $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n=0,1,2,\ldots$ και $T_0$ ρητός είναι ψηφιακό, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα διακριτό σύνολο (π.χ. για $T_0=5$, το $x(n)$ παίρνει τις τιμές $\{0.309,-0.809,1\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.




**Σχήμα 2.6**

*Ψηφιακό σήμα*

### 2.2.6 Περιοδικά – Μη περιοδικά

Ένα σήμα $x(t)$ ορίζεται ως περιοδικό αν ισχύει ότι

$\exists T \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x(t+kT)=x(t)$ για $k=1,2,\ldots$

## Παράδειγμα 2.2 – Συνημιτονοειδές σήμα

$$x(t)=A\cdot\cos(\omega t+\theta)=A\cdot\cos(2\pi ft+\theta)$$

$\omega$: κυκλική συχνότητα (μετράται σε rad/sec)

$\theta$: φάση (μετράται σε rad)

$f$: συχνότητα (μετράται σε Hertz)

$A$: πλάτος (μετράται σε Volt)

**Υπολογισμός περιόδου**

Αναζητείται θετικό $T\in\mathbb{R}_+^*$ τέτοιο ώστε $\forall t\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x(t+T)=x(t)\Leftrightarrow A\cdot\cos(2\pi f(t+T)+\theta)=A\cdot\cos(2\pi ft+\theta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(2\pi ft+2\pi fT+\theta)=\cos(2\pi ft+\theta)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{ισχύει ότι αν }\cos(x)=\cos(y),\\ \text{τότε }x=2k\pi+y,\ k=1,2,\ldots\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi ft+2\pi fT+\theta=2\pi ft+\theta+2k\pi, k=1,2,\ldots$$

Άρα,

$$2\pi fT=2k\pi\Leftrightarrow T=\frac{k}{f}, k=1,2,\ldots$$

Η θεμελιώδης περίοδος λαμβάνεται για $k=1$ και ισούται με $T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{2\pi f}=\frac{2\pi}{\omega}$.

**Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων**

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους $T_1$, $T_2$ θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$

**Γενίκευση:**

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα Ν περιοδικών σημάτων με περιόδους $T_1$, $T_2$, ..., $T_N$ θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$

$\Theta_1$ 2006Β ΕΞ.

$x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t) \quad x_2(t) = 10\sin(2\pi f_2 t)$

$f_1 = 25Hz \quad f_2 = 40Hz.$

? Περιοδικότητα των:

$+\cos 2t$

$\Rightarrow g_1(t) = x_1\left(\frac{t}{\pi}\right) + \cos 2t = \cos\left(2\pi f_1 \frac{t}{\pi}\right) = \cos(2f_1 t) + \cos(2t)$

Για το $\cos(\underbrace{2f_1}_{\omega_1} t)$: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}f_1} = \frac{\pi}{25}$ sec άρρητος

Για το $\cos(\underbrace{2}_{\omega_2} t)$: $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ sec. άρρητος

ο λόγος $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi/25}{\pi} = \frac{1}{25}$ είναι ρητός άρα το $g_1(t)$ περιοδικό

και η περίοδος του σήματος-αθροίσματος θα είναι

$T_{o\lambda} = 25T_1 = T_2 = \pi$ sec, (άρρητος)

$\Rightarrow g_2(t) = x_2(t) + \cos(\sqrt{2}\,\pi t) = 10\sin(2\pi f_2 t) + \cos(\sqrt{2}\,\pi t)$

Για το $10\sin(\underbrace{2\pi f_2}_{\omega_1} t)$ $\quad T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{2\pi}{2\pi f_2} = \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{1}{40}$ sec

Για το $\cos(\underbrace{\sqrt{2}\,\pi}_{\omega_2} t)$ $\quad T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}\,\pi} = \sqrt{2}$ sec

Ο λόγος $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{1/40}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{40\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{80}$, <u>άρρητος</u>

άρα το σήμα είναι <u>απεριοδικό</u>

Σημ. Ένα περιοδικό σήμα έχει περίοδο που ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, μπορεί να είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

# ΓΕ1/0809/Θ4

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0=\dfrac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(α) $x_1(t)=x(2t)$

(β) $x_2(t)=x\left(\sqrt{3}\cdot t\right)$

(γ) $x_3(t)=x(at)\cdot\dfrac{d}{dt}\left[x(bt)\right]$

(δ) $x_5(t)=x(t)\cdot u(t)$

(α) $x_1(t) = x(2t) = \cos(2\pi f_0 2t) = \cos(2\pi(2f_0)t)$

Το σήμα είναι συνημιτονικό, άρα και περιοδικό με περίοδο ίση με: $T_1 = \dfrac{1}{2f_0}$

(β) $x_2(t) = x\left(\sqrt{3}\cdot t\right) = \cos\left(2\pi f_0 \sqrt{3}\cdot t\right) = \cos\left(2\pi\left(\sqrt{3} f_0\right)\cdot t\right)$

Το σήμα είναι συνημιτονικό, άρα και περιοδικό με περίοδο ίση με: $T_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3} f_0}$

(γ)

$$x_3(t) = x(at)\cdot\frac{d}{dt}\left[x(bt)\right] = \cos(2\pi f_0 at)\cdot\frac{d}{dt}\left[\cos(2\pi f_0 bt)\right] =$$
$$= \cos(2\pi f_0 at)\cdot\left[-\sin(2\pi f_0 bt)\cdot 2\pi f_0 b\right] = -2\pi f_0 b\cdot\sin(2\pi f_0 bt)\cdot\cos(2\pi f_0 at)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin(A)\cdot\cos(B)+\sin(B)\cdot\cos(A)\\ \sin(A-B) &= \sin(A)\cdot\cos(B)-\sin(B)\cdot\cos(A)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin(A)\cdot\cos(B) \Rightarrow \sin(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

Άρα το σήμα διαδοχικά γράφεται:

$$x_3(t) = -2\pi f_0 b\cdot\sin(2\pi f_0 bt)\cdot\cos(2\pi f_0 at) = -2\pi f_0 b\cdot\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\pi f_0 (b+a)t\right)+\sin\left(2\pi f_0 (b-a)t\right)\right] =$$
$$= -\pi f_0 b\cdot\sin\left(2\pi f_0 (b+a)t\right) - \pi f_0 b\cdot\sin\left(2\pi f_0 (b-a)t\right)$$

δηλαδή αποτελείται από το άθροισμα 2 ημιτονικών περιοδικών όρων με τις εξής περιόδους:

Για τον όρο:

$$-\pi f_0 b\cdot\sin\left(2\pi f_0\left(b+a\right)t\right)$$

$$T_{31}=\frac{1}{f_0\left(b+a\right)}$$

Για τον όρο:

$$-\pi f_0 b\cdot\sin\left(2\pi f_0\left(b-a\right)t\right)$$

$$T_{32}=\frac{1}{f_0\left(b-a\right)}$$

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι:

$$\frac{T_{31}}{T_{32}}=\frac{\dfrac{1}{f_0\left(b+a\right)}}{\dfrac{1}{f_0\left(b-a\right)}}=\frac{\left(b-a\right)}{\left(b+a\right)}=\frac{\left(1-\dfrac{a}{b}\right)}{\left(1+\dfrac{a}{b}\right)}$$

Για να είναι το σήμα $x_3\left(t\right)$ περιοδικό θα πρέπει ο λόγος $\dfrac{\left(b-a\right)}{\left(b+a\right)}=\dfrac{\left(1-\dfrac{a}{b}\right)}{\left(1+\dfrac{a}{b}\right)}$ να είναι ρητός, και αυτό συμβαίνει σε 2 περιπτώσεις:

(ι) Αν τα α,b είναι ρητοί

(ιι) Αν τα α,b είναι άρρητοι αλλά ο λόγος τους $\dfrac{a}{b}$ είναι ρητός

π.χ. $a=\sqrt{3}, b=4\sqrt{3}$

$$\frac{b-a}{b+a}=\sqrt{3}\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$$

$$(\delta)\ \ x_5(t) = x(t)\cdot u(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t),\ \text{όταν t>0} \\ 0,\ \text{όταν t<0} \end{cases}$$

Το σήμα δεν είναι περιοδικό, διότι δεν ισχύει

$$x_5(t+T_0) = x_5(t),\ \forall\ t \in\ \mathrm{R}$$

π.χ. όταν $t = -\dfrac{T_0}{2}$,

$$x_5\left(-\frac{T_0}{2}+T_0\right) = x_5\left(\frac{T_0}{2}\right) = \cos\left(2\pi f_0 \frac{T_0}{2}\right) = \cos(\pi) = -1 \neq x_5\left(-\frac{T_0}{2}\right) = 0$$

- Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας:
  - Θεμελιώδης Ορισμός:

    $$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT) = x(t)\ \text{για}\ k = 1,2,\ldots$$

  - Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση

    $$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N \qquad m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

  - Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από διακριτούς παλμούς σε συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση

    $$f = k_1 f_1 = k_2 f_2 = \ldots = k_N f_N\ ,\ k_1, k_2 \ldots k_N \in \mathbb{N}^*$$

## 2.3.1 Περιοδικά Σήματα - Σειρές Fourier

**Ορισμός-Τριγωνομετρική-Εκθετική**

**Βασική Ιδιότητα:**

Όλα τα περιοδικά σήματα αποτελούνται από αθροίσματα συνημιτόνων και ημιτόνων ορισμένων συχνοτήτων.

$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos(2\pi nft) + B_n \sin(2\pi nft) \right\}$, όπου ισχύει $f = \dfrac{1}{T}$ («$f$» η συχνότητα και «$T$» η περίοδος του σήματος αντίστοιχα).

Η παραπάνω σχέση αντιπροσωπεύει την τριγωνομετρική σειρά Fourier. Εαν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις Euler, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft}$ , που αντιπροσωπεύει τη μιγαδική σειρά Fourier.

Οι συχνότητες που περιέχονται στα παραπάνω αθροίσματα είναι οι εξής:

Για $n=1$, $f_1=f$, $T_1=1/f$

Για $n=2$, $f_2=2f$, $T_2=1/2f$

…

Για $n=k$, $f_k=kf$, $T_k=1/kf$

…

Ισχύει ότι $T_1=2T_2=3T_3=\ldots=kT_k=\ldots$, $k \in \mathbb{N}$, που συμπίπτει με το κριτήριο περιοδικότητας που παρουσιάστηκε σε την ενότητα 2.2.6

Οι συντελεστές Fourier απεικονίζουν το σήμα (πλάτος και φάση) σε καθεμιά από τις συνιστώσες συχνότητες.

π.χ. για τη συχνότητα $f_k=kf$ έχουμε $V_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi kft}dt=|V_k|e^{j\phi_k}$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος $|V_k|$ αντιπροσωπεύει το φάσμα πλάτους και ο όρος $\phi_k$ το φάσμα φάσης του σήματος για τη συγκεκριμένη συχνότητα.

**<u>Παράδειγμα.</u>**

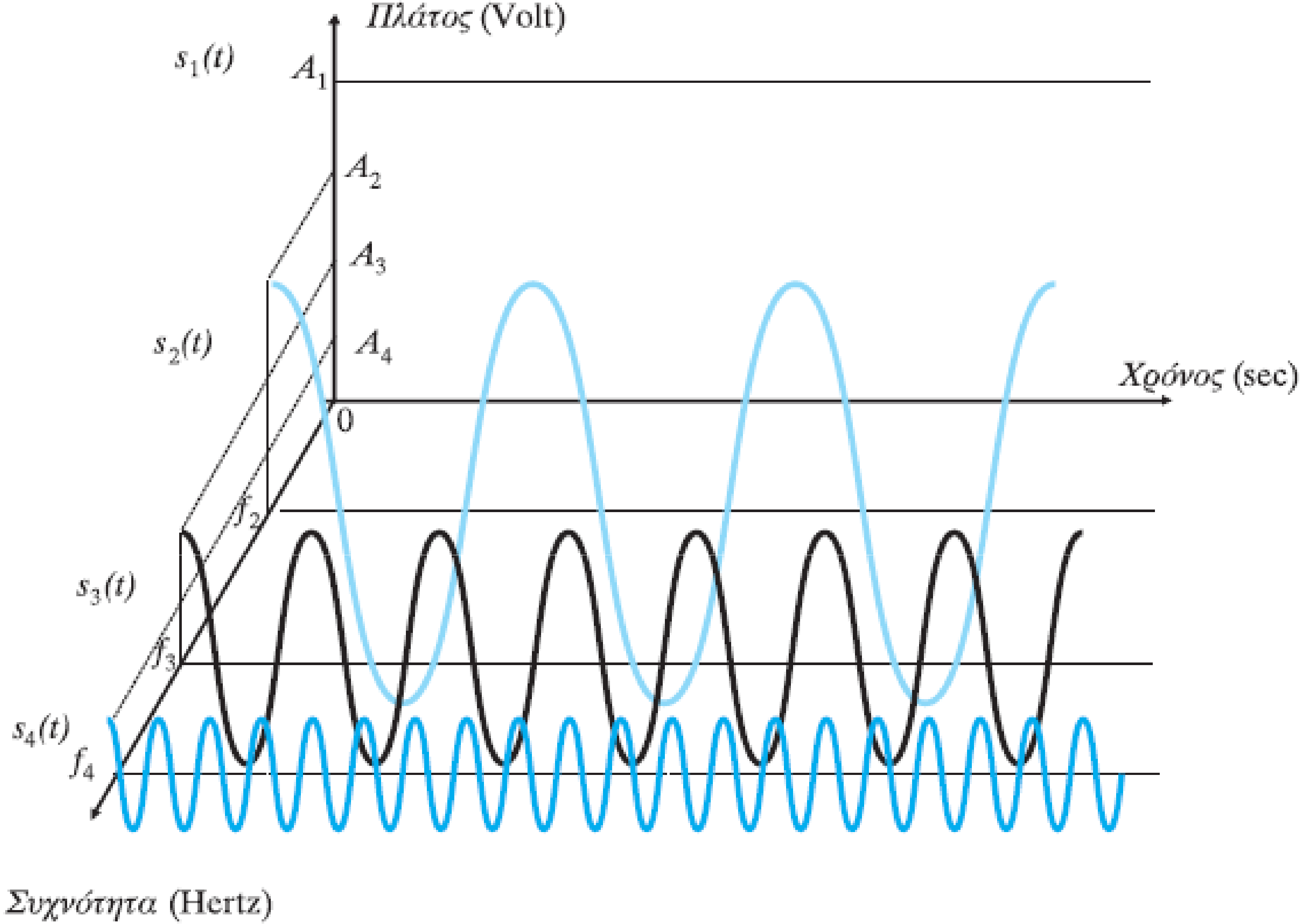
Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$
$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$
$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$
$$f_2 < f_3 < f_4$$
$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

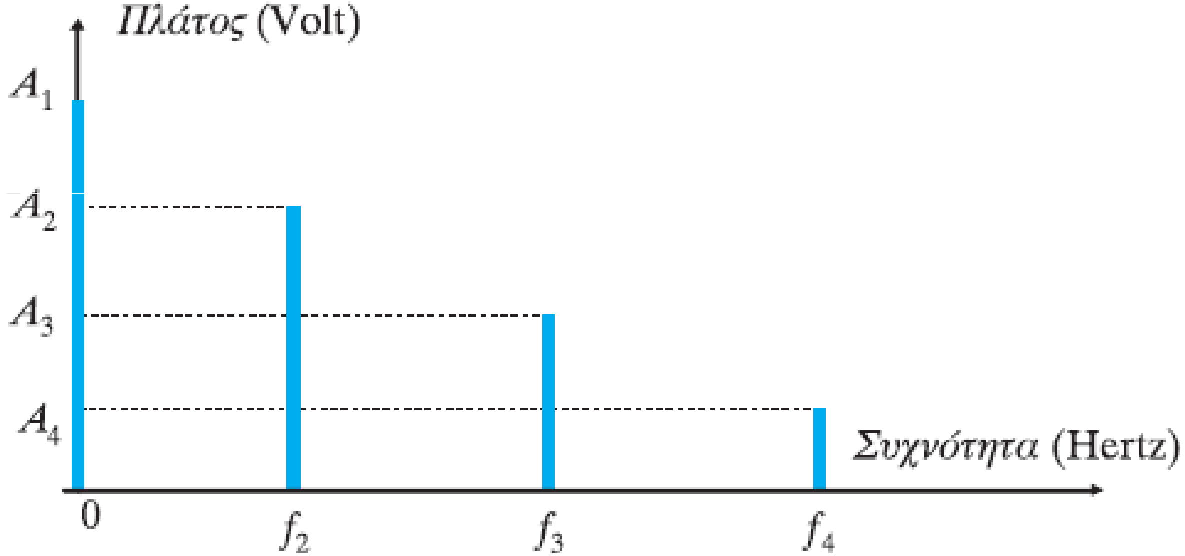
Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:




**Σχήμα 2.21**

*Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων*

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



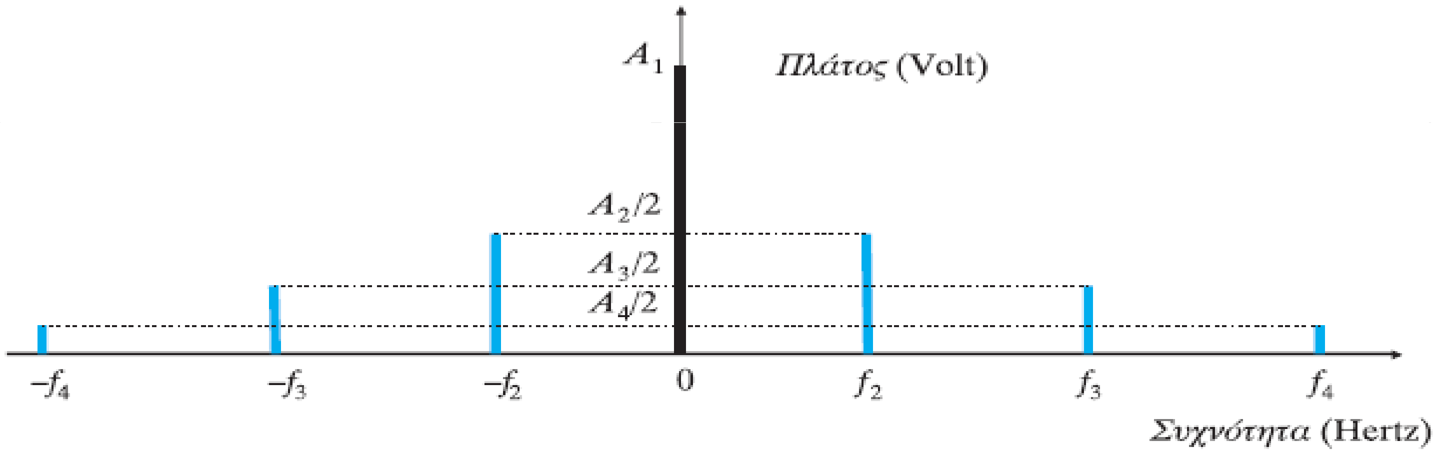

**Σχήμα 2.22**

*Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος* $s(t)$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

$$s(t) = A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} =$$
$$= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t}$$

Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):




**Σχήμα 2.23**

*Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$*

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.

### 2.2.7 Ενδεικτικά μη περιοδικά σήματα:

#### 2.2.7.1 *Ορθογωνικός Παλμός*

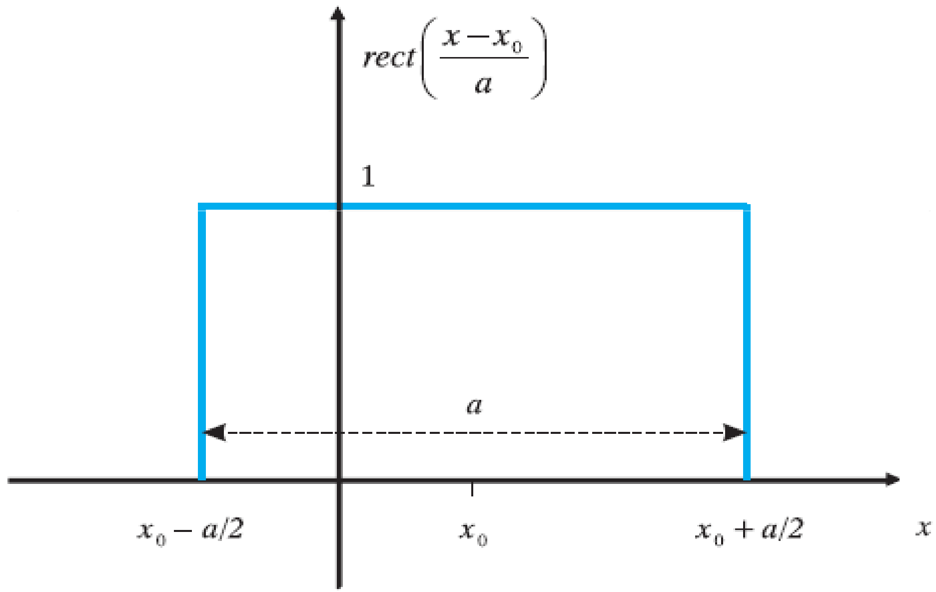
Ο ορθογωνικός παλμός ορίζεται ως:

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, \text{ όταν } |x-x_0|<\frac{a}{2} \text{ δηλ. } x_0-\frac{a}{2}<x<x_0+\frac{a}{2} \\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>\frac{a}{2} \text{ δηλ. } \begin{cases} x<x_0-\frac{a}{2} \\ \text{ή} \\ x>x_0+\frac{a}{2}\end{cases}\end{cases}$$

,όπου $a>0$

όπου

Ο παλμός αυτός παριστάνεται γραφικά ως εξής:

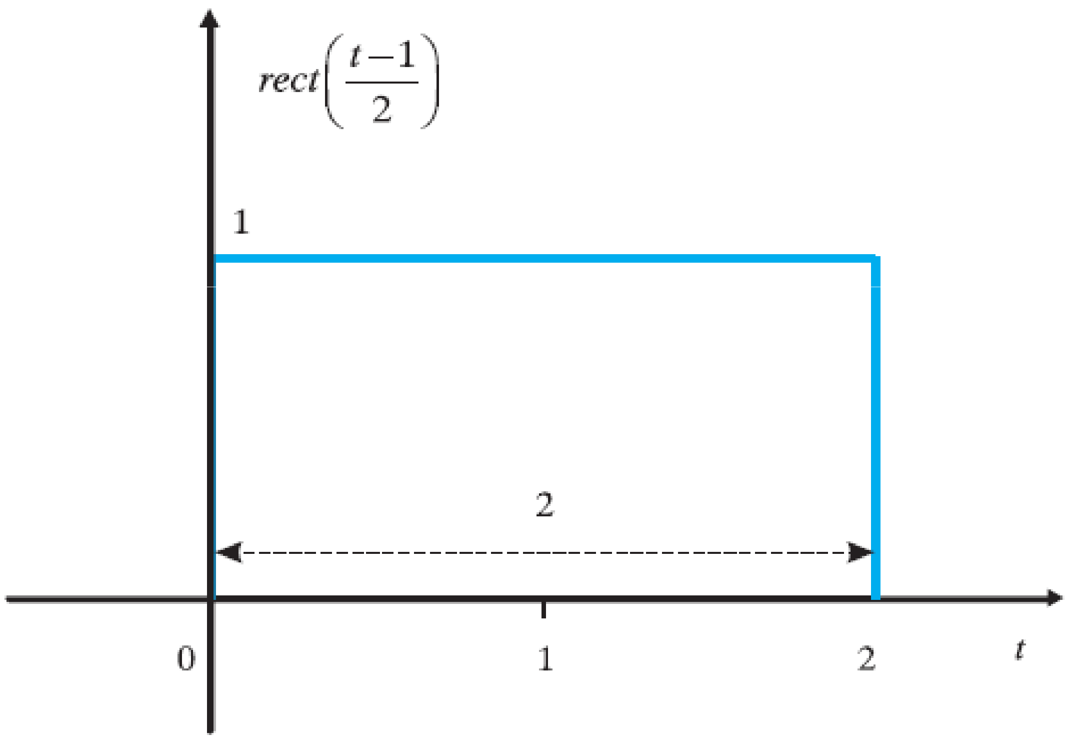



**Σχήμα 2-9 Απεικόνιση Τετραγωνικού Παλμού**

Προκειμένου να σχεδιαστεί ένας παλμός που αντιστοιχεί σε έναν δεδομένο τύπο, έστω $rect(f(x))$, θα πρέπει να γραφεί στη μορφή $rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$ ώστε να προσδιοριστούν το εύρος $(a)$ και το κέντρο του $(x_0)$.

- $$x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0,2)$.

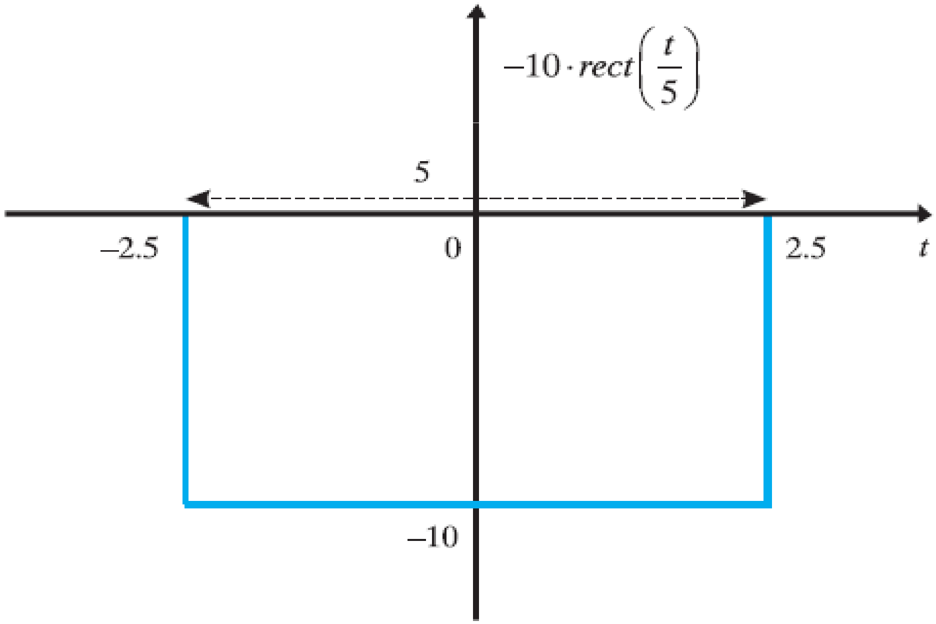



**Σχήμα 2.10**

*Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού* $x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$

$$x(t) = -10 \cdot rect\left(\frac{t}{5}\right)$$

Το σήμα είναι ένας παλμός πλάτους –10, με κέντρο $t_0 = 0$ και εύρος 5, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{5}{2},\ t_0 + \frac{5}{2}) = (-2.5,\ 2.5)$.




**Σχήμα 2.11**

*Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού* $x(t) = -10 \cdot rect\left(\frac{t}{5}\right)$

### 2.2.7.2 *Τριγωνικός Παλμός*

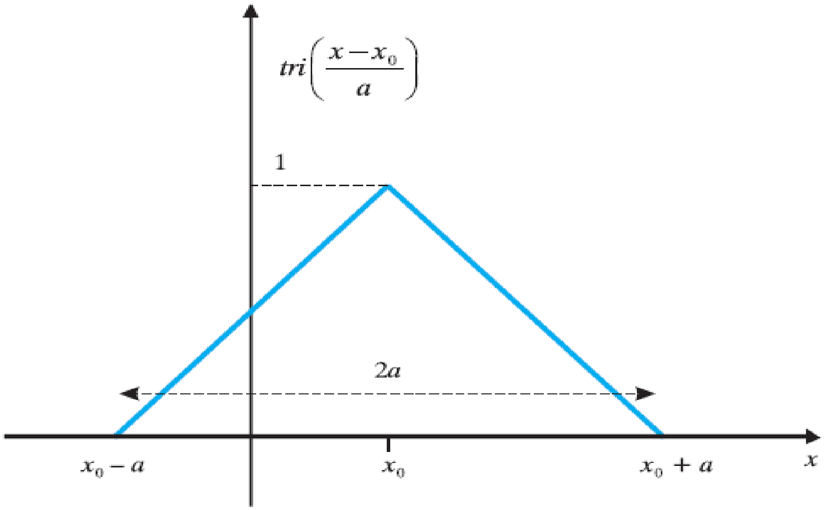
Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως:

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-x_0|}{a}, & \text{όταν } |x-x_0|<a \text{ δηλ. } x_0-a<x<x_0+a\\ 0, & \text{όταν } |x-x_0|>a \text{ δηλ. } \begin{cases}x<x_0-a\\ \text{ή}\\ x>x_0+a\end{cases}\end{cases}$$

,όπου $a>0$

Ο παλμός αυτός παριστάνεται γραφικά ως εξής

Προκειμένου να σχεδιαστεί ένας παλμός που αντιστοιχεί σε έναν δεδομένο τύπο $tri(f(x))$, θα πρέπει να γραφεί στη μορφή $tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$ ώστε να προσδιοριστούν το εύρος $(2a)$ και το κέντρο του $(x_0)$.



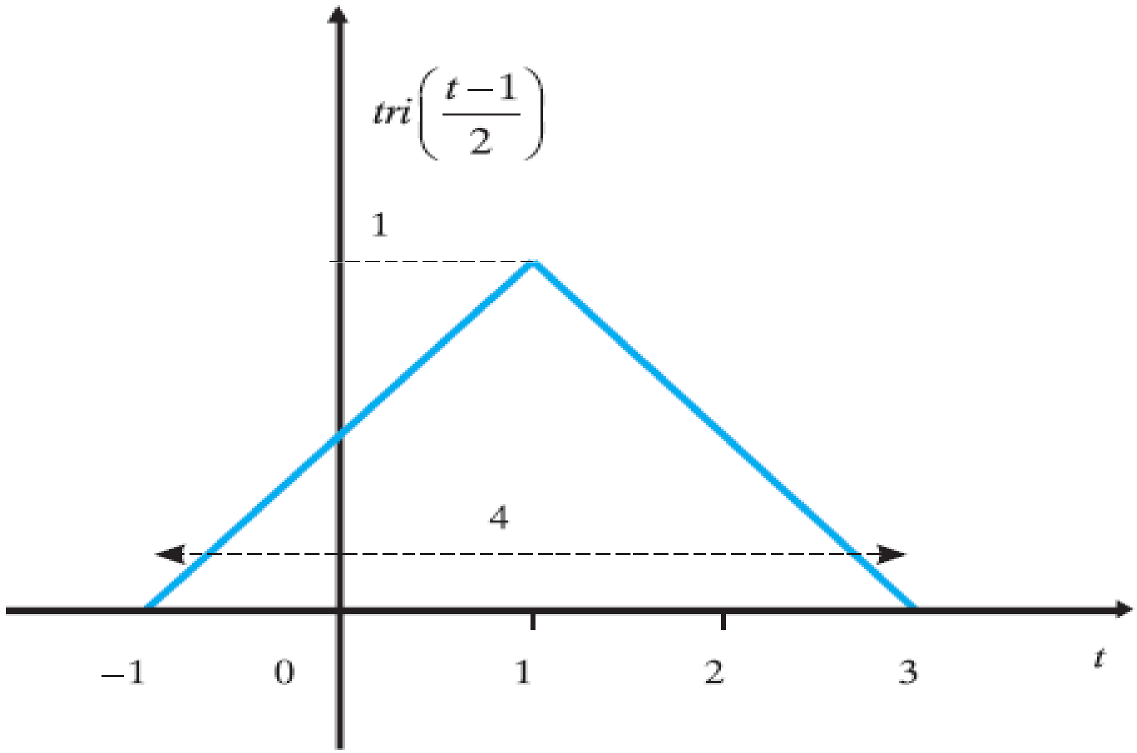

**Σχήμα 2.12**

*Απεικόνιση τριγωνικού παλμού*

$$x(t) = tri\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2}, t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$.




**Σχήμα 2.13**

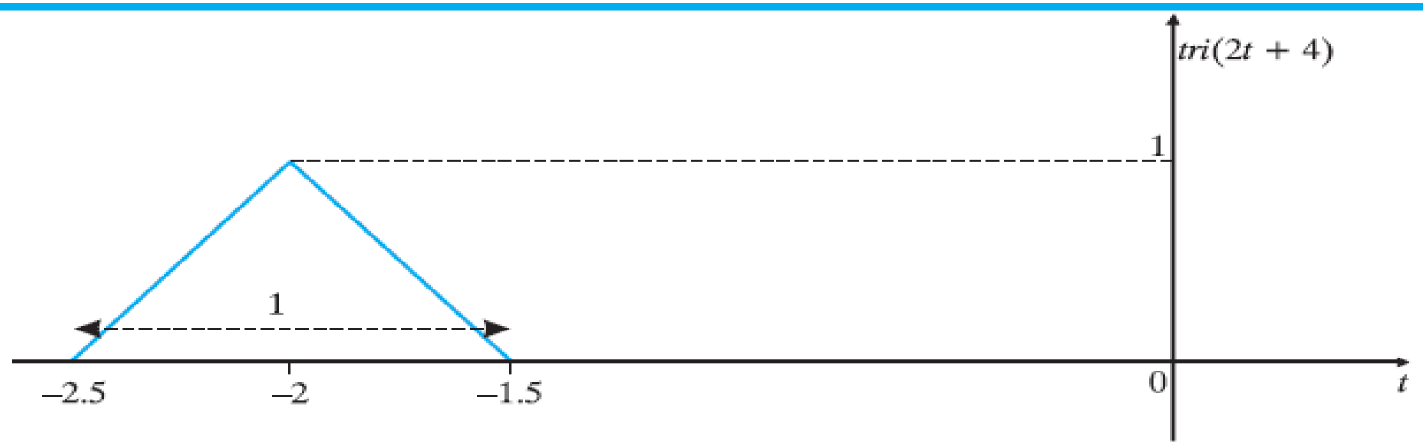
*Απεικόνιση τριγωνικού παλμού* $x(t) = tri\left(\frac{t-1}{2}\right)$

$$x(t) = tri\left(2t+4\right)$$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $tri\left(\dfrac{t-t_0}{a}\right)$.

Είναι: $x(t) = tri\left(2t+4\right) = tri\left(2\left(t+2\right)\right) = tri\left(\dfrac{t+2}{1/2}\right) = tri\left(\dfrac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \dfrac{1}{2}, t_0 + \dfrac{1}{2}) = (-2.5, -1.5)$.




**Σχήμα 2.14**

*Απεικόνιση τριγωνικού παλμού* $x(t) = tri\left(2t+4\right)$

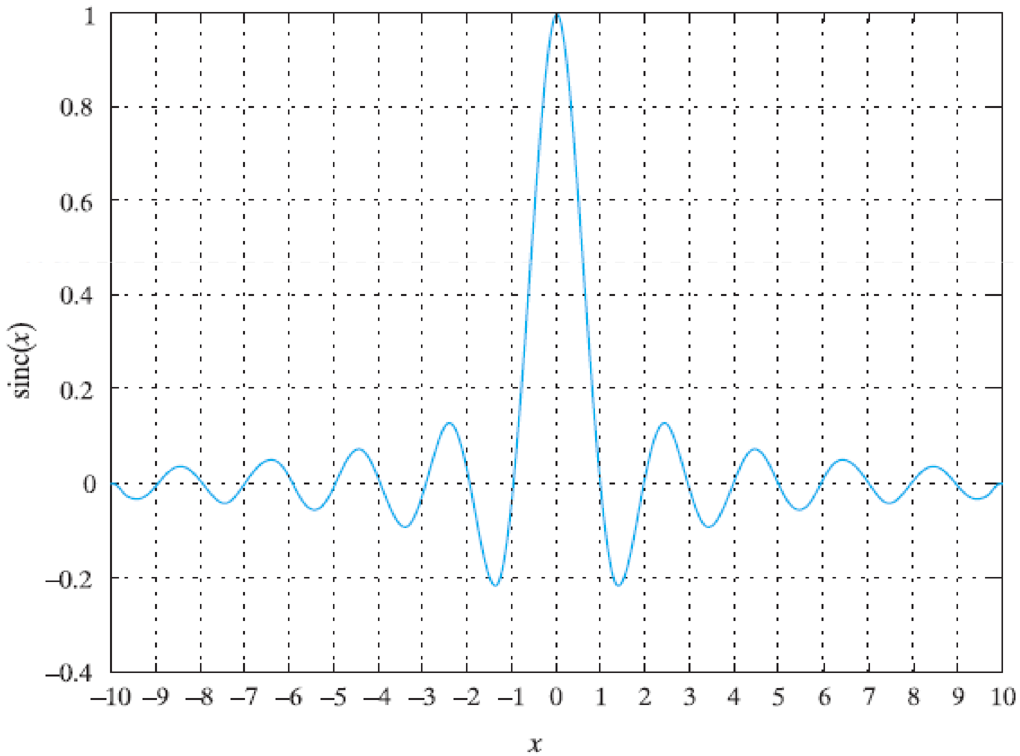
### 2.2.7.3 *Συνάρτηση sinc*

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:




**Σχήμα 2.15**

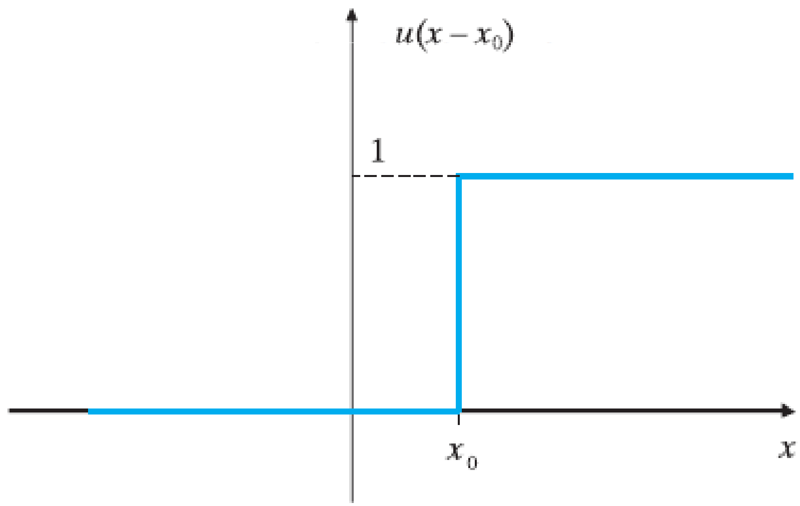
*Απεικόνιση συνάρτησης sinc*

### *2.2.7.4 Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα*

Το μοναδιαίο βηματικό σήμα ορίζεται ως εξής:

$$u(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{οταν } x < x_0 \\ 1, & \text{οταν } x > x_0 \end{cases}$$

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:

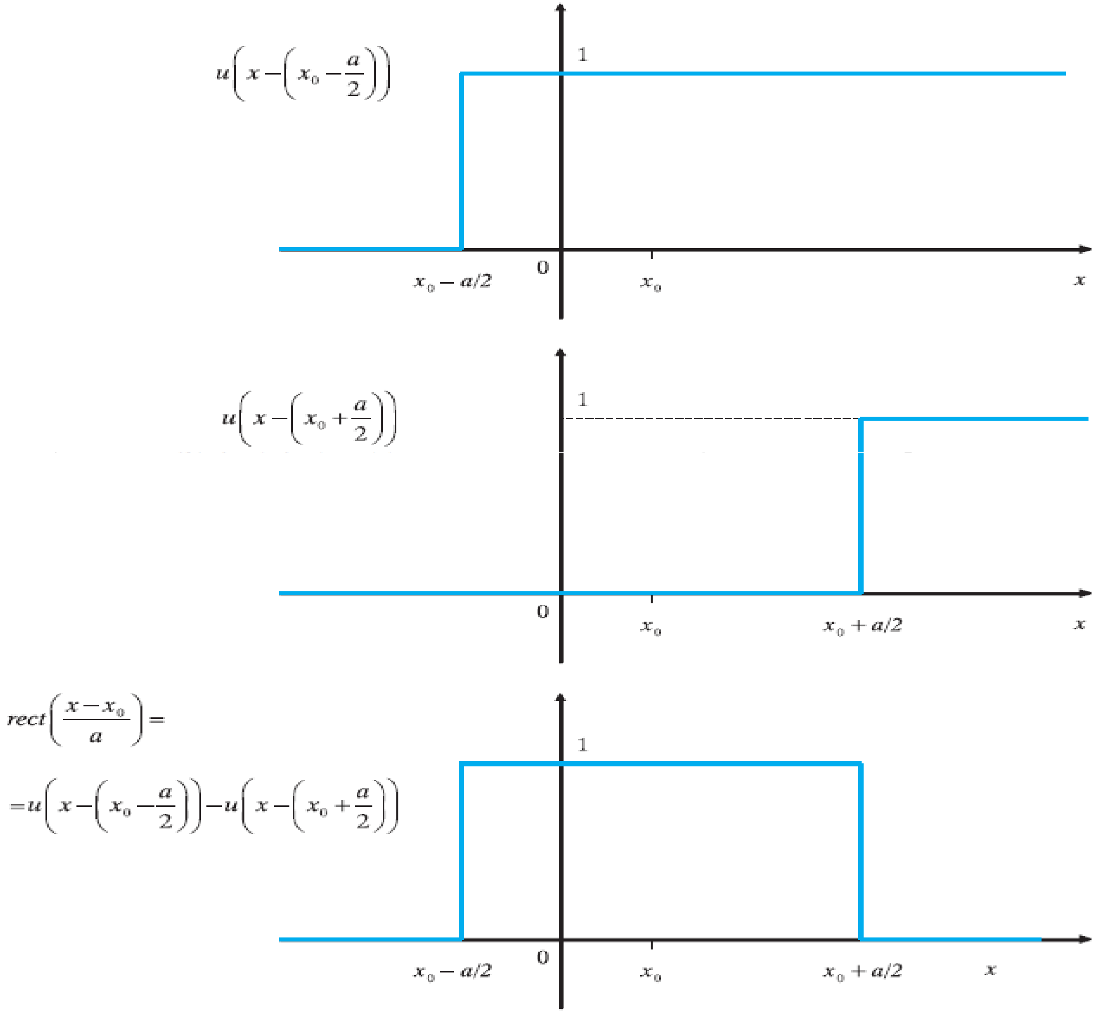



**Σχήμα 2.16**

*Απεικόνιση μοναδιαίου βηματικού σήματος*

Η συνάρτηση ορθογωνικού παλμού μπορεί να περιγραφεί με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση ως εξής:

$$rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=u\left(x-\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right)-u\left(x-\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right)$$




**Σχήμα 2.17**

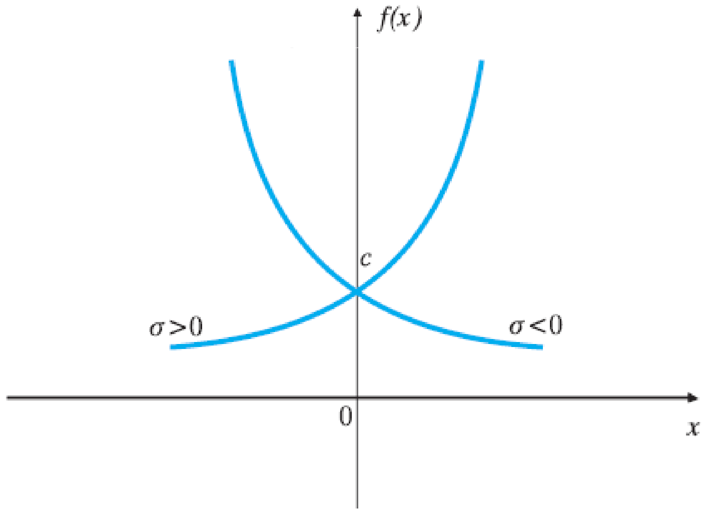
*Κατασκευή μοναδιαίου παλμού από βηματικά σήματα*

## 2.2.7.5 *Πραγματικό Εκθετικό σήμα*

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\sigma x},\ \text{οπου}\ c, \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



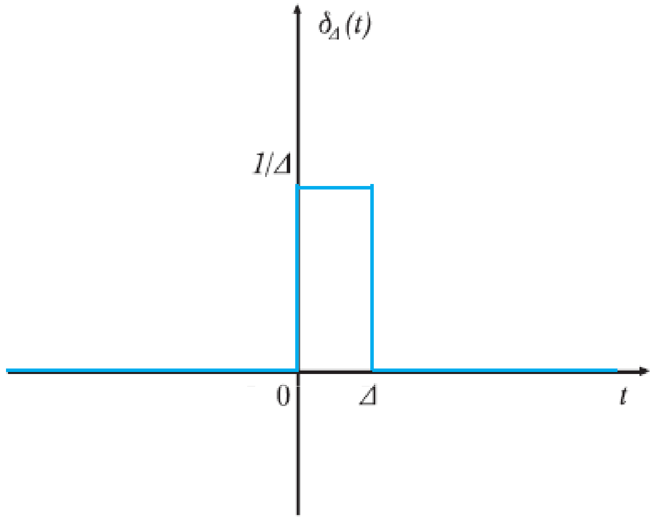

**Σχήμα 2.18**

*Απεικόνιση πραγματικού εκθετικού σήματος*

## 2.2.7.6 *Κρουστική Συνάρτηση δ(x) (Dirac)*

Λαμβάνεται ένας ορθογωνικός παλμός (μοναδιαίου εμβαδού) της εξής μορφής:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, \text{ οταν } t < 0 \\ \dfrac{1}{\Delta}, \text{ οταν } 0 < t < \Delta \\ 0, \text{ οταν } t > \Delta \end{cases}$$




όπου Δ>0.

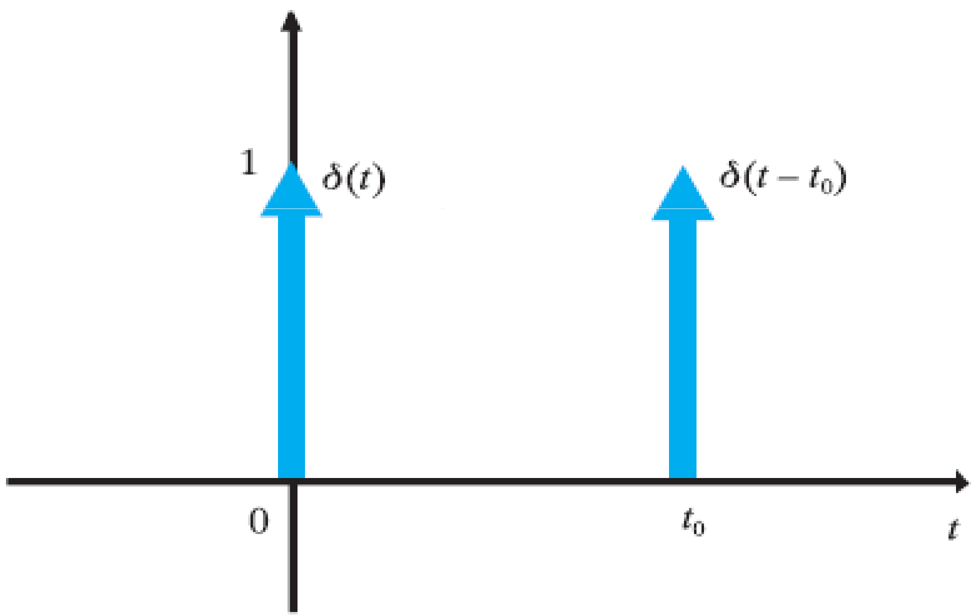
Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} rect\left( \frac{t - \dfrac{\Delta}{2}}{\Delta} \right)$$

**Σχήμα 2.19**

*Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού*

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ( $\Delta \to 0$ ), η χρονική διάρκεια του παλμο
μηδενίζεται και το πλάτος του απειρίζεται, ενώ το εμβαδό του παραμένει ίσο με 1.
κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0}\left[\delta_\Delta(t)\right]$ σχεδιάζεται ως εξής:




**Σχήμα 2.20**

*Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και $t_0$*

# Ιδιότητες

- $\delta(t) = 0, \text{ οταν } t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0, \text{ οταν } t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)\,dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0)$
- $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$