Βασικά Ζητήματα Δικτύων Η/Υ

ΕΑΠ/ΠΛΗ22 / ΑΘΗ 3

19.10.12

Νίκος Δημητρίου

Περιεχόμενα

- Μετασχηματισμός Fourier
- Πράξεις Σημάτων - Συνέλιξη – Φίλτρα - Συστήματα
- Παραδείγματα

2.3.2 Γενίκευση: Μετασχηματισμός Fourier

<u>Ορισμός-Επέκταση Ανάλυσης Fourier για μη περιοδικά σήματα</u>

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.3.1, το πλάτος και η φάση ενός περιοδικού σήματος με περίοδο Τ σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k=kf$ προσδιορίζεται με τον υπολογισμό του αντίστοιχου συντελεστή Fourier $V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi nft}dt = |V_k|e^{j\phi_k}$. Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η περίοδος μπορεί να υποτεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \to +\infty$), και το φάσμα του σήματος θα είναι συνεχές και όχι διακριτό ($nf \to f$). Συνεπώς, με τη γενίκευση των εκφράσεων για τις σειρές Fourier προκύπτει η έκφραση του φάσματος μη περιοδικών σημάτων , δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$ (το μέτρο της $G(f)$ έχει μονάδες $Volt/Hz$)

Αντίστοιχα, η σχέση που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του φάσματος ενός σήματος δίνεται παρακάτω:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν και με βάση την έκφραση του φάσματος του σήματος στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας $\omega=2\pi f$:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Χρειάζεται προσοχή, όταν εργάζεται κανείς στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας, διότι σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζεται σε σχέσεις και ιδιότητες μετασχηματισμών ο παράγοντας 2π ή 1/2π .

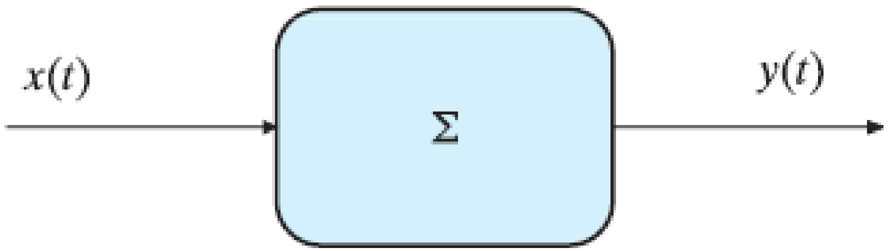
Όταν ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier το φάσμα $G(f)$, μπορούμε να γράψουμε: $x(t)\xleftrightarrow{F}G(f)$. Ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει τη σχέση ισοδυναμίας των εκφράσεων του σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

2.3.3.7 *Συνέλιξη*

Η έννοια της συνέλιξης σχετίζεται με τη χαρακτηριστική σχέση εισόδου-εξόδου σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα $y(t)$.



Σχήμα 2.24

Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου

Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S(x(t))$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:

Αν

$$y_1(t)=S(x_1(t))$$

και

$$y_2(t)=S(x_2(t))$$

τότε:

$$\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)=S(\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t))$$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι

Αν

$$y_1(t)=S(x_1(t)),\, y_2(t)=S(x_2(t)),\dots,\, y_k(t)=S(x_k(t))$$

τότε:

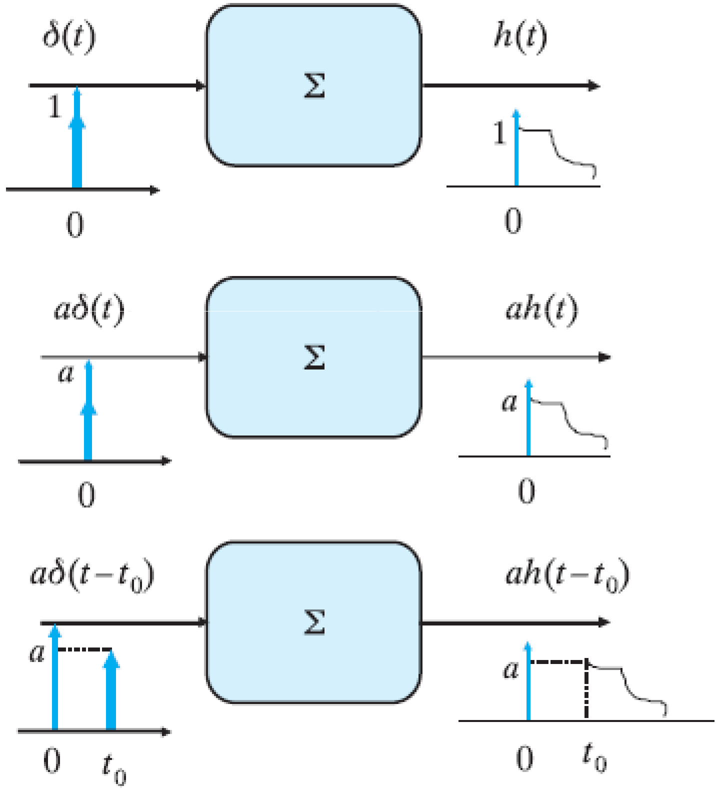
$$\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)+\ldots+\alpha_k y_k(t)=\sum_{i=1}^{k} a_i y_i(t)=$$

$$=S(\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)+\ldots+\alpha_k x_k(t))=S\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, εαν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0 , το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0.

Δηλαδή, αν $y(t)=S\left[x(t)\right]$ τότε $y(t-t_0)=S\left[x(t-t_0)\right]$.

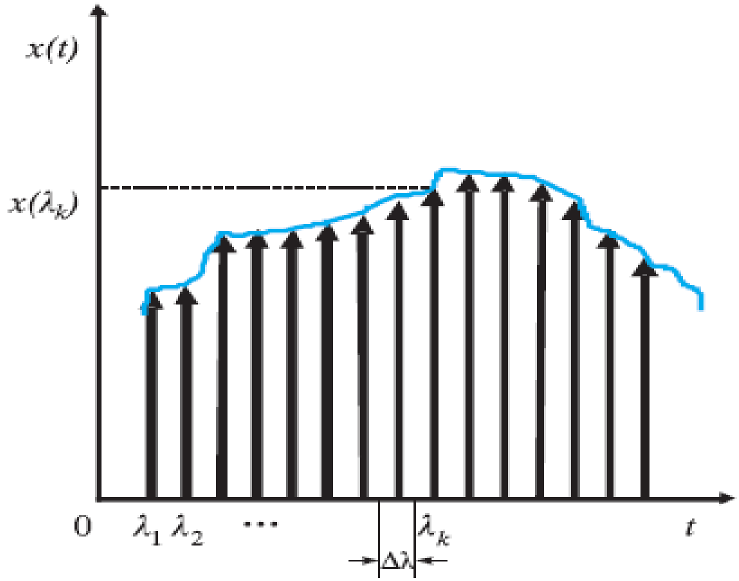
Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος *h(t)* είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση *δ(t)*. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



Σχήμα 2.25

Κρουστική απόκριση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



Σχήμα 2.26

Αναπαράσταση σήματος εισόδου ως αθροίσματος παλμών

οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)\delta(t-\lambda_i)$$

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\xrightarrow{\Delta\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(t)*h(t)$$

Η πράξη $x(t)*h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t),h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Δηλαδή, αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(f)$ και $y(t)\xleftrightarrow{F}Y(f)$

τότε:

$x(t)*y(t)\xleftrightarrow{F}X(f)\cdot Y(f)$ (A)

και

$x(t)\cdot y(t)\xleftrightarrow{F}X(f)*Y(f)$ (B)

http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

2.3.4 Μετασχηματισμοί Fourier χαρακτηριστικών σημάτων:

Πεδίο Χρόνου (t)	Πεδίο Συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(f)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$$

ΠΙΝΑΚΑΣ Α Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.			
Ιδιότητα	**Πεδίο του χρόνου**	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
Γραμμικότητα	$a\,x_1(t)+b\,x_2(t)$	$a\,X_1(\Omega)+b\,X_2(\Omega)$	$aX_1(f)+bX_2(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j\Omega t_0}\,X(\Omega)$	$e^{-j2\pi f t_0}X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t}x(t)=e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(\Omega-\Omega_0)$	$X(f-f_0)$
Αλλαγή κλίμακας:	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(\Omega)$ ή $x(t)\xleftrightarrow{F}X(f)$	$y(t)=X(t)$	$Y(\Omega)=2\pi\,x(-\Omega)$	$Y(f)=x(-f)$
Διαμόρφωση	$x(t)\,y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega)*Y(\Omega)\right]$	$\left[X(f)*Y(f)\right]$
Παραγώγιση στο χρονικό πεδίο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\Omega\,X(\Omega)$	$j2\pi f\cdot X(f)$

2.5 Ιδανικά Φίλτρα

Τα φίλτρα είναι γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων που ανήκουν σε μια συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων (που καλείται ζώνη διέλευσης) και αποκόπτουν τα σήματα που ανήκουν στο υπόλοιπο μέρος του φάσματος (που λέγεται ζώνη αποκοπής). Ανάλογα με το μέρος του φάσματος που ανήκει στη ζώνη διέλευσης, τα φίλτρα χωρίζονται στα εξής είδη:

2.5.1 Βαθυπερατά φίλτρα

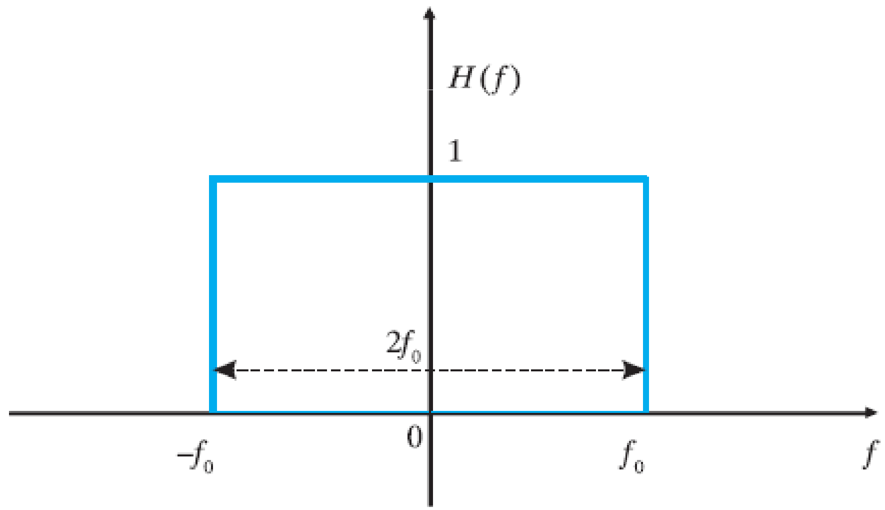
Στα βαθυπερατά φίλτρα (ή περιορισμένου εύρους ζώνης ή κατωδιαβατά) η ζώνη διέλευσης είναι μια περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων:

$$H(f)=\begin{cases}1, & \text{όταν } |f|<f_0 \text{ δηλ. } -f_0<f<f_0\\ 0, & \text{όταν } |f|>f_0 \text{ δηλ. } \begin{cases} f>f_0\\ \text{ή}\\ f<-f_0\end{cases}\end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(f)=rect\left(\frac{f}{2f_0}\right)$$

και μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής:



Σχήμα 2.28

Συνάρτηση μεταφοράς βαθυπερατού φίλτρου

2.5.2 Υψιπερατά φίλτρα

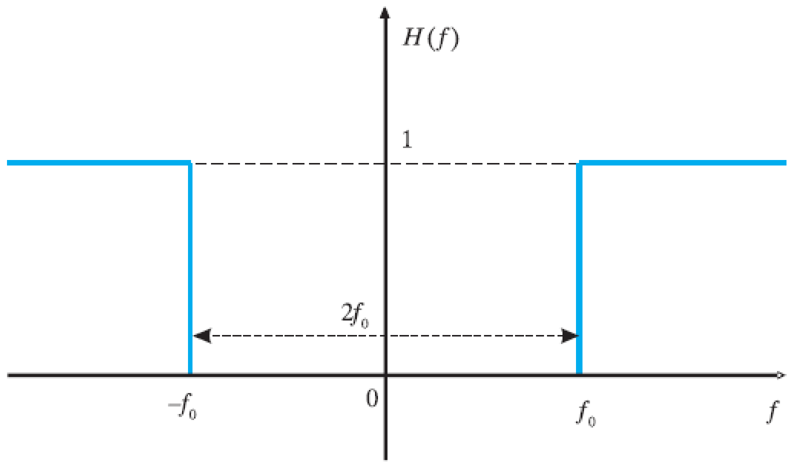
Στα υψιπερατά φίλτρα (ή ανωδιαβατά) η ζώνη αποκοπής είναι μια περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων:

$$H(f)=\begin{cases} 1,\ \text{όταν } |f|>f_0 \ \text{ δηλ. } \begin{cases} f>f_0 \\ \text{ή} \\ f<-f_0 \end{cases} \\ 0,\ \text{όταν } |f|<f_0 \ \text{ δηλ. } -f_0<f<f_0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(f)=1-rect\left(\frac{f}{2f_0}\right)=u\left[-(f+f_0)\right]+u(f-f_0)$$

και μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής



Σχήμα 2.29

Συνάρτηση μεταφοράς υψιπερατού φίλτρου

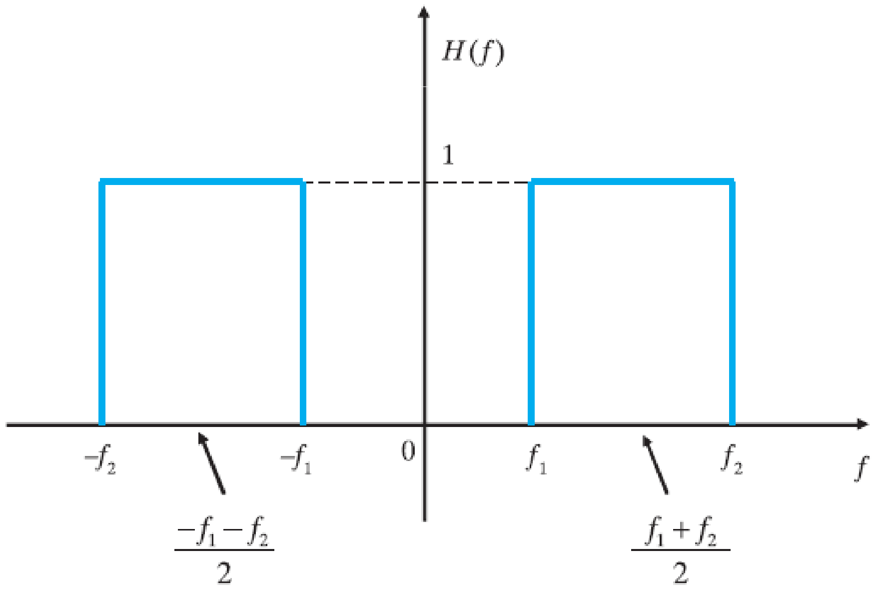
2.5.3 Ζωνοπερατά φίλτρα

Στα ζωνοπερατά φίλτρα (ή ζωνοδιαβατά) η ζώνη διέλευσης αποτελείται από δύο συγκεκριμένες συμμετρικές ζώνες στο θετικό και τον αρνητικό ημιάξονα των συχνοτήτων:

$$H(f)=\begin{cases} 1, & \text{όταν } f_1<|f|<f_2, \text{ δηλ. } \begin{cases} f_1<f<f_2 \\ \text{ή} \\ -f_2<f<-f_1 \end{cases} \\ 0, & \text{όταν } \begin{cases} |f|<f_1, \text{ δηλ. } -f_1<f<f_1 \\ \text{ή} \\ |f|>f_2, \text{ δηλ. } \begin{cases} f>f_2 \\ \text{ή} \\ f<-f_2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(f)=rect\left(\frac{f-\frac{-f_1-f_2}{2}}{f_2-f_1}\right)+rect\left(\frac{f-\frac{f_1+f_2}{2}}{f_2-f_1}\right)$$



Σχήμα 2.30

Συνάρτηση μεταφοράς ζωνοπερατού φίλτρου

2.5.4 Ζωνοφρακτικά φίλτρα

Στα ζωνοφρακτικά φίλτρα η ζώνη αποκοπής αποτελείται από δύο συγκεκριμένες συμμετρικές ζώνες στο θετικό και τον αρνητικό ημιάξονα των συχνοτήτων:

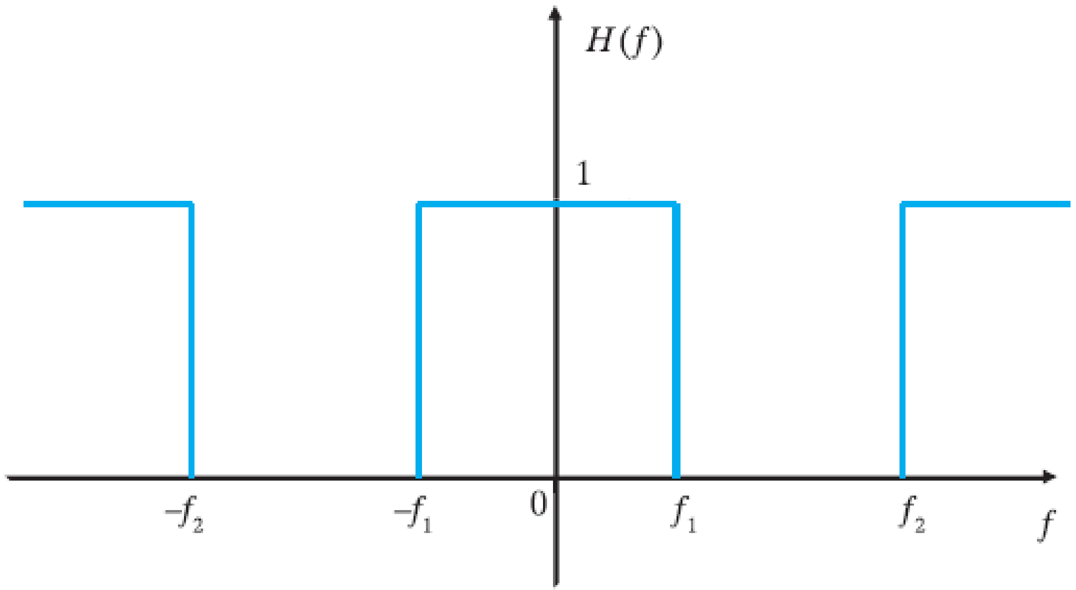
$$
H(f) = \begin{cases} 1,\ \text{όταν} \begin{cases} |f| < f_1,\ \text{δηλ.}\ -f_1 < f < f_1 \\ \text{ή} \\ |f| > f_2,\ \text{δηλ.} \begin{cases} f > f_2 \\ \text{ή} \\ f < -f_2 \end{cases} \end{cases} \\ 0,\ \text{όταν}\ f_1 < |f| < f_2,\ \text{δηλ.} \begin{cases} f_1 < f < f_2 \\ \text{ή} \\ -f_2 < f < -f_1 \end{cases} \end{cases}
$$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(f) = 1 - rect\left(\frac{f - \frac{-f_1 - f_2}{2}}{f_2 - f_1}\right) - rect\left(\frac{f - \frac{f_1 + f_2}{2}}{f_2 - f_1}\right) =$$

$$= u(-(f + f_2)) + rect\left(\frac{f}{2f_1}\right) + u(f - f_2)$$

και μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής



Σχήμα 2.31

Συνάρτηση μεταφοράς ζωνοφρακτικού φίλτρου

ΓΕ1/1011/Θ3

ΘΕΜΑ 3
Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τη χρήση ιδιοτήτων των ΜΣ Fourier σε συνδυασμό με γνωστούς ΜΣ Fourier. Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/0910/Θ1.*
Να υπολογίσετε το ΜΣ Fourier του σήματος $x(t)=\frac{t^3}{6}e^{-at}\sin\left(2\pi f_c t\right)u(t)$, με $\alpha>0$.
Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα των ΜΣ Fourier βασικών σημάτων και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα την ιδιότητα ολίσθησης συχνότητας .*

$$x(t)=\frac{t^3}{6}e^{-at}\sin\left(2\pi f_c t\right)u(t)=x_0\left(t\right)\sin\left(2\pi f_c t\right),\ \alpha>0$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier έχουμε:

ΠΙΝΑΚΑΣ Β Μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων		
Πεδίο χρόνου (t)	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u\left(t\right),\Re e\left\{a\right\}>0$	$\frac{1}{\left(a+j\Omega\right)^n}$	$\frac{1}{\left(a+j2\pi f\right)^n}$

Αρα (με *n=4*):

$$x_0(t)=\frac{t^3}{6}e^{-at}u(t)=\frac{t^{4-1}}{(4-1)!}e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{\left(a+j2\pi f\right)^4}=X_0\left(f\right)$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier έχουμε:

ΠΙΝΑΚΑΣ Β Μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων		
Πεδίο χρόνου (t)	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
$\sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right]$	$\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$

Εφαρμόζουμε και την ιδιότητα διαμόρφωσης:

ΠΙΝΑΚΑΣ Α Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier			
Ιδιότητα	**Πεδίο χρόνου (t)**	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[X(\Omega)*Y(\Omega)\right]$	$\left[X(f)*Y(f)\right]$

Οπότε, έχουμε:

$$x(t)=x_0(t)\sin(2\pi f_c t)\xleftrightarrow{F}X_0(f)*\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)\right]$$

Και λόγω της ιδιότητας:

- $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

Τελικά έχουμε:

$$x(t)=x_0(t)\sin(2\pi f_c t)\xleftrightarrow{F}\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{\left(a+j2\pi(f-f_c)\right)^4}-\frac{1}{\left(a+j2\pi(f+f_c)\right)^4}\right]=X(f)$$

ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0=\frac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t)=x(t)*\left[2a\cdot\mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \Im\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

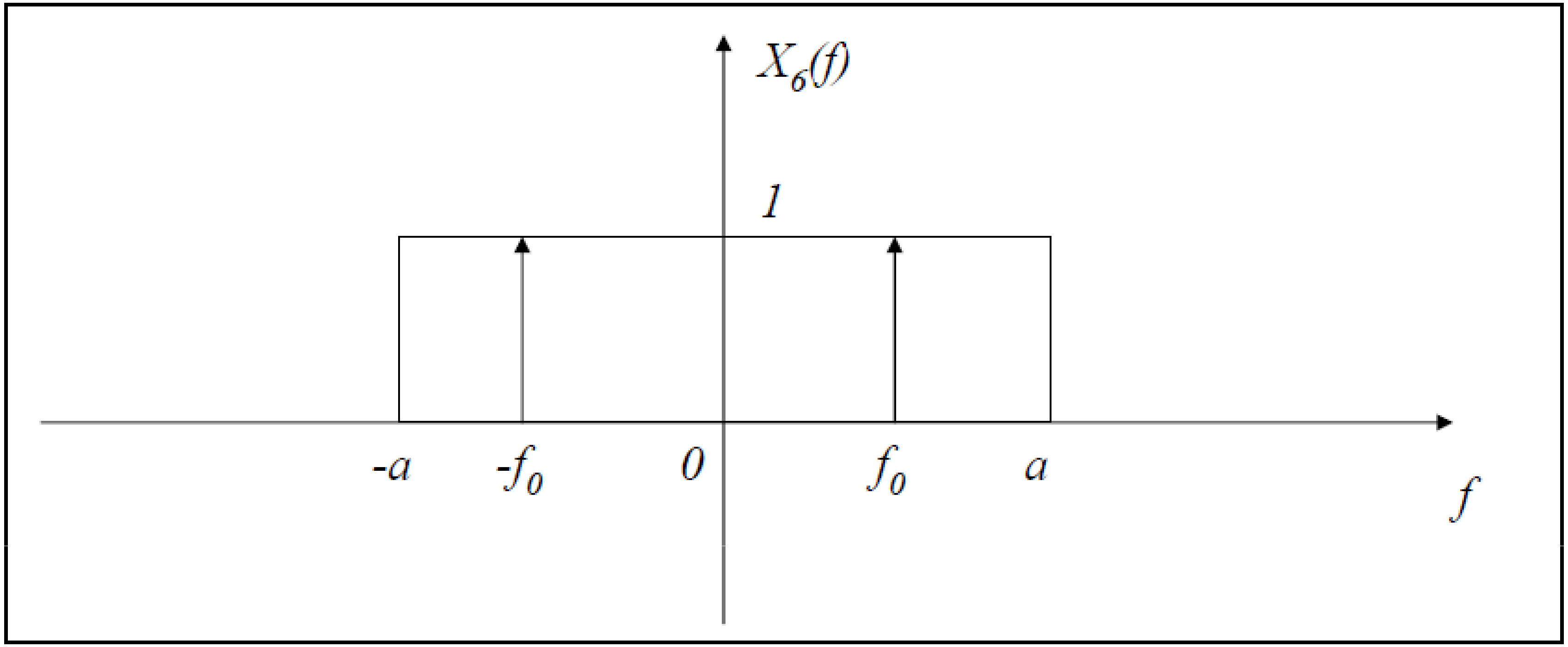
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] = X(f)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

και $\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2a} rect\left(\dfrac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $\left[2a \cdot \text{sinc}(2at)\right]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$