ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3
4η τηλεδιάσκεψη
08/06/2013

Ν.Δημητρίου

Σχετικά με τους πίνακες Μετάβασης 6

$$p(y_j/x_i),\ p(x_i/y_j)$$

$$\underbrace{p(x_i/y_j)}_{\text{Πιν. μετάβασης δεδομένης της εξόδου}} = \overbrace{p(y_j/x_i)}^{\text{Πιν. μετάβασης δεδομένης της εισόδου}} \cdot \frac{P(x_i)}{P(y_j)}$$

$$p(x_i/y_j) = p(y_j/x_i) \quad \forall\, i,j$$

όταν:

1) $p(x_i) = p(y_j) \ \forall i,j$ δηλ $p(x_i) = p(y_j) = \frac{1}{n}$

2) όταν $p(x_i) = 1/n$ και $\sum_{i=1}^{n} p(y_j/x_i) = 1$

τα αθροίσματα των στηλών του $p(y_j/x_i)$ είναι ίσο με 1.

διότι $p(x_i/y_j) = p(y_j/x_i) \dfrac{p(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(y_j, x_i)} =$

$$= p(y_j/x_i) \frac{p(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(y_j/x_i)\, p(x_i)} = p(y_j/x_i) \frac{\cancel{1/n}}{\cancel{1/n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p(y_j/x_i)}_{=1}} =$$

$$= p(y_j/x_i)$$

7

3) όταν $p(y_j) = \frac{1}{n}$ και $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} p(x_i/y_j) = 1}$

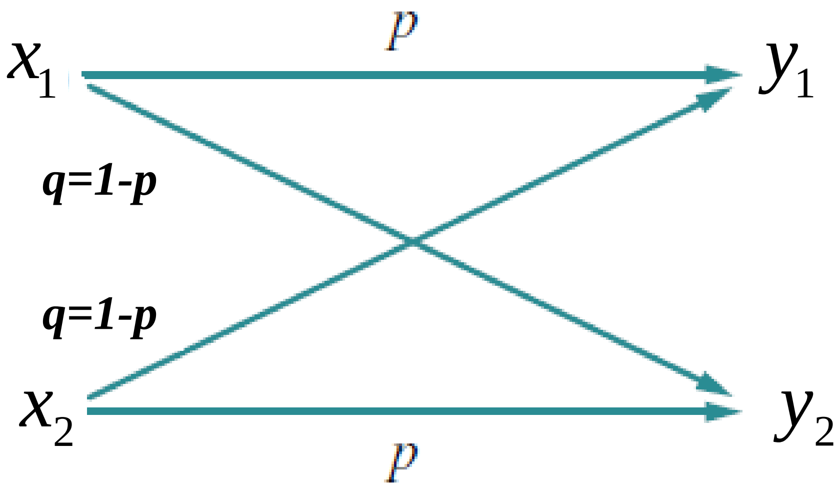
τα αθροίσματα των στηλών του $p(x_i/y_j)$ είναι ίσα με 1.

$$p(x_i/y_j) = p(y_j/x_i) \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} p(y_j, x_i)}{p(y_j)} =$$

$$= p(y_j/x_i) \frac{\sum_{j=1}^{n} p(x_i/y_j) \cdot p(y_j)}{p(y_j)} = p(y_j/x_i) \frac{\cancel{\frac{1}{n}} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)}^{1}}{\cancel{\frac{1}{n}}} =$$

$$= p(y_j/x_i)$$

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι



$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{2}p(x_i)H(Y/x_i)=-\sum_{i=1}^{2}p(x_i)\sum_{j=1}^{2}p(y_j/x_i)\log\left(p(y_j/x_i)\right)=$$

$$=-p(x_1)\left[p(y_1/x_1)\log\left(p(y_1/x_1)\right)+p(y_2/x_1)\log\left(p(y_2/x_1)\right)\right]-$$

$$-p(x_2)\left[p(y_1/x_2)\log\left(p(y_1/x_2)\right)+p(y_2/x_2)\log\left(p(y_2/x_2)\right)\right]=$$

$$=-p(x_1)\left[\rho\log(\rho)+q\log(q)\right]-p(x_2)\left[q\log(q)+\rho\log(\rho)\right]=$$

$$=-\left[p(x_1)+p(x_2)\right]\left[\rho\log(\rho)+q\log(q)\right]=-\left[\rho\log(\rho)+q\log(q)\right]=$$

$$=-\left[\rho\log(\rho)+(1-\rho)\log(1-\rho)\right]=H(\rho)$$

$$H(X/Y)=\sum_{j=1}^{2}p(y_i)H(\mathrm{X}/\mathrm{y}_j)=-\sum_{j=1}^{2}p(y_j)\sum_{i=1}^{2}p(x_i/\mathrm{y}_j)\log\left(p(x_i/\mathrm{y}_j)\right)=$$

$$=-p(y_1)\left[p(x_1/\mathrm{y}_1)\log\left(p(x_1/\mathrm{y}_1)\right)+p(x_2/\mathrm{y}_1)\log\left(p(x_2/\mathrm{y}_1)\right)\right]-$$

$$-p(y_2)\left[p(x_1/\mathrm{y}_2)\log\left(p(x_1/\mathrm{y}_2)\right)+p(x_2/\mathrm{y}_2)\log\left(p(x_2/\mathrm{y}_2)\right)\right]$$

$$p(x_i/\mathrm{y}_j)=\frac{p(x_i,\mathrm{y}_j)}{p(\mathrm{y}_j)}=\frac{p(\mathrm{y}_j/x_i)\,p(x_i)}{p(y_j)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αν $\forall i,j \quad p(x_i/\mathrm{y}_j)=p(\mathrm{y}_j/x_i)$ (δείτε τις συνθήκες στις προηγούμενες διαφάνειες),

τότε μόνο $H(Y/X)=H(X/Y)$ και $H(X)=H(Y)$

ειδάλλως ισχύει μόνο η γενική σχέση

$H(X)-H(X/Y) \; =H(Y)-H(Y/X)=I(X;Y)$,

και $H(X)\neq H(Y)$, $H(Y/X)\neq H(X/Y)$

Παράδειγμα κώδικα με απόσταση μικρότερη από το ελάχιστο βάρος του G

ΓΕ0304/θ6 (δείτε και τη διαφάνεια 13 στο σημείο 21: Παραδείγματα 27/04/13 (Ασκήσεις -Παραδείγματα 5ης ΟΣΣ) στο http://users.uoa.gr/~nikodim/index.html)

$$G = \begin{bmatrix} 1000 & 110 \\ 0100 & 101 \\ 0010 & 110 \\ 0001 & 101 \end{bmatrix}$$

Ελάχιστο βάρος γραμμών του G: 3
Όμως το μέρος ισοτιμίας της $1^{ης}$ και της $3^{ης}$ γραμμής (ή της $2^{ης}$ και της $4^{ης}$ γραμμής) είναι κοινό οπότε προσθέτοντας τις γραμμές 1,3 ή 2,4 λαμβάνεται λέξη βάρους 2, άρα η απόσταση του κώδικα είναι 2.

Παράδειγμα ΤΔΑ με πρότυπα σφάλματος βάρους >1

ΕΞ2008Β/ΘΕΜΑ 5

Δίδονται δύο γραμμικοί κώδικες ελέγχου ισοτιμίας, C_I και C_{II}, όπου με $u_1u_2u_3$ συμβολίζεται το προς κωδικοποίηση μήνυμα και με $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ η κάθε κωδική λέξη του γραμμικού κώδικα. Ο Κώδικας Ι ορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

I.1)	$\mathbf{x_1 = u_1}$,	**I.4)**	$\mathbf{x_4 = u_1 \oplus u_2}$
I.2)	$\mathbf{x_2 = u_2}$,	**I.5)**	$\mathbf{x_5 = u_1 \oplus u_3}$
I.3)	$\mathbf{x_3 = u_3}$,	**I.6)**	$\mathbf{x_6 = u_2 \oplus u_3}$
		I.7)	$\mathbf{x_7 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3}$

Ο Κώδικας ΙΙ είναι ίδιος εκτός από το ότι **ΙΙ.6)** $\mathbf{x_6 = u_2}$.

α)

i) Ζητείται ο γεννήτορας πίνακας $\mathbf{G_I}$ και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας $\mathbf{H_I}$ του Κώδ. Ι.

ii) Ζητείται ο γεννήτορας πίνακας $\mathbf{G_{II}}$ και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας $\mathbf{H_{II}}$ του Κώδ. ΙΙ.

β) Βρείτε την απόσταση **d** για τον Κώδικα Ι και τον Κώδικα ΙΙ.

γ) Συμπληρώστε τον πίνακα αποκωδικοποίησης ΤΔΑ για ΠΑΜΠ του Κώδικα Ι (Σύνδρομο, Πρότυπο Σφάλματος) με τα σύνδρομα και πρότυπα σφάλματος που λείπουν.

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				**ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ**						
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**

δ) Υποθέσατε ότι, μετά τη μετάδοση μιας άγνωστης κωδικής λέξης του:

i) Κώδικα Ι, λαμβάνεται η λέξη (0011101). Αποκωδικοποιείστε τη με χρήση του πίνακα αποκωδικοποίησης ΤΔΑ για ΠΑΜΠ του Κώδικα Ι.

ii) Κώδικα ΙΙ, λαμβάνεται η λέξη (1000111). Αποκωδικοποιείστε τη με χρήση του πίνακα αποκωδικοποίησης ΤΔΑ για ΠΑΜΠ του Κώδικα ΙΙ όταν γνωρίζετε ότι ο πίνακας αποκωδικοποίησης ΤΔΑ για ΠΑΜΠ του Κώδικα ΙΙ είναι ο εξής:

ΣΥΝΔΡΟΜΟ					**ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ**						
0	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**		**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**		**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**		**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**0**		**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**		**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**		**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**		**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**		**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**0**	**0**		**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**		**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**0**		**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

(α)

i)

$$\mathbf{G_I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H_I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii)

$$\mathbf{G_{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H_{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) Για τον Κώδικα Ι: **d**= 4, ενώ για το Κώδικα ΙΙ: **d**= 3.

Σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε το ελάχιστο βάρος των γραμμών του G
και παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν συνδυασμοί d-1 γραμμών του G που να δίνουν λέξη βάρους μικρότερου από d

(γ)

i) Πίνακας αποκωδικοποίησης ΤΔΑ για ΠΑΜΠ του Κώδικα Ι.

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

Τα σύνδρομα που λείπουν είναι δύο από ένα σύνολο 16 συνδρόμων και αντιστοιχούν στα πρότυπα σφάλματος 0100000 και 1100000 με σύνδρομα 1011 και 0110 αντίστοιχα.

Σκεπτικό: Από τους δυνατούς 16 (ή 15 μη μηδενικούς) συνδυασμούς συνδρόμων βρίσκουμε ότι λείπουν τα 1011 και 0110. Αυτά τα κατασκευάζουμε στη συνέχεια χρησιμοποιώντας αντίστοιχες γραμμές του Η , π.χ. για το 1011 έχουμε την $2^{η}$ γραμμή του Η άρα πρότυπο σφάλματος είναι το 0100000, όμοια για το 0110 βρίσκουμε το 1100000 (πιθανό πρότυπο 2μπιτου σφάλματος διότι ο κώδικας σίγουρα διορθώνει 1 σφάλμα (d=4))

(δ)

i) [0011101] x $\mathbf{H_I}$ = [1010] = σύνδρομο $\boldsymbol{\sigma_I}$. Από το πίνακα αποκωδικοποίησης του Κώδικα Ι, το αντίστοιχο πρότυπο σφάλματος είναι $\boldsymbol{\varepsilon_I}$ = [1010000]. Άρα: Κωδική λέξη = [1001101].

Υπενθύμιση : η ΤΔΑ του κώδικα Ι

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0

ii) $[1000111] \times \mathbf{H}_{II} = [1010]$ = σύνδρομο $\boldsymbol{\sigma}_{II}$. Από το πίνακα αποκωδικοποίησης του Κώδικα ΙΙ, το αντίστοιχο πρότυπο σφάλματος είναι $\boldsymbol{\varepsilon}_{II} = [0001010]$. Άρα: Κωδική λέξη = [1001101].

Υπενθύμιση : η ΤΔΑ του κώδικα Ι Ι

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0

Σχόλια: Κατά την αποκωδικοποίηση με ΤΔΑ για τον κώδικα Ι χρησιμοποιήθηκε
η δεδομένη (από την εκφώνηση) γραμμή της ΤΔΑ για το σύνδρομο 1010 , και υποθέσαμε (λόγω
ΠΑΜΠ) ότι ο κώδικας Ι διορθώνει το συγκεκριμένο 2μπιτο σφάλμα παρότι από την απόστασή
του (d=4) προκύπτει ότι σίγουρα διορθώνει μόνο όλα τα πιθανά σφάλματα 1 bit.

Επίσης, για την εύρεση του πρότυπου σφάλματος για το σύνδρομο 0110, η λύση προτείνει
Το πρότυπο 1100000 αλλά μπορεί να βρεθούν και άλλα πρότυπα σφάλματος (π.χ. το 0000110),
Για το λόγο αυτό καλό θα ήταν να αναφερθεί το προτεινόμενο πρότυπο ως ‘πιθανό’ , δεν
χρειαζόταν να γίνει εξαντλητική αναζήτηση όλων των προτύπων σφάλματος που αντιστοιχούσαν
στο συγκεκριμένο σύνδρομο (υποθέτοντας ΠΑΜΠ αρκούσε η αναφορά ενός κατάλληλου
προτύπου σφάλματος.