

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ-3

2^η ΟΣΣ 21/12/2013

Πρόσθετες Ασκήσεις

ΘΕΜΑ 1

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τα μέτρα ποσότητας πληροφορίας. Σχετικές ασκήσεις: Θ1/ΓΕ4/2004-5, Θ1/ΓΕ4/2008-9.

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X , η οποία αναπαριστά την κατηγοριοποίηση ενός ηλεκτρονικού μηνύματος σε ανεπιθύμητο ή επιθυμητό, δηλαδή με δύο δυνατά αποτελέσματα, $x_1 = \text{«το ηλεκτρονικό μήνυμα είναι ανεπιθύμητο ή spam»}$ και $x_2 = \text{«το ηλεκτρονικό μήνυμα είναι επιθυμητό»}$. Επίσης, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή Y με τέσσερα δυνατά αποτελέσματα, $y_1 = \text{«ο αποστολέας του ηλεκτρονικού μηνύματος περιέχεται σε black lists»}$, $y_2 = \text{«ο αποστολέας του ηλεκτρονικού μηνύματος είναι άγνωστος και δεν περιέχεται σε black lists»}$, $y_3 = \text{«ο αποστολέας του ηλεκτρονικού μηνύματος είναι συνεργάτης»}$ και $y_4 = \text{«ο αποστολέας του ηλεκτρονικού μηνύματος είναι συγγενής ή φίλος»}$, καθώς και την τυχαία μεταβλητή Z , με τα τέσσερα δυνατά αποτελέσματα, (z_1, z_2, z_3, z_4) , $z_1 = \text{«το ηλεκτρονικό μήνυμα περιέχει τουλάχιστον μία από τις λέξεις 'drug', 'pharmacy', 'order'»}$, $z_2 = \text{«το ηλεκτρονικό μήνυμα περιέχει τη λέξη 'watches'»}$, $z_3 = \text{«το ηλεκτρονικό μήνυμα περιέχει τουλάχιστον μία από τις λέξεις 'lottery' ή 'congratulations'»}$ και $z_4 = \text{«το ηλεκτρονικό μήνυμα δεν περιέχει καμία από τις προηγούμενες λέξεις»}$. Δίνονται επίσης οι πιθανότητες $p(x_1) = 7/8$ και $p(x_2) = 1/8$. Οι υπό συνθήκη ή δεσμευμένες πιθανότητες $p(y_i/x_j)$ και $p(z_i/x_j)$ περιέχονται στους κατωτέρω πίνακες.

Y/X	x_1	x_2
y_1	1/2	0
y_2	1/4	1/2
y_3	1/8	1/4
y_4	1/8	1/4

Z/X	x_1	x_2
z_1	1/4	1/32
z_2	1/8	1/16
z_3	1/8	1/32
z_4	1/2	7/8

Ζητείται να υπολογίσετε

1. Τις συνδυασμένες ποσότητες πληροφορίας $H(X, Y)$, $H(X, Z)$,
2. Τις μέσες ποσότητες πληροφορίας $H(X)$, $H(Y)$ και $H(Z)$,
3. Τις υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας $H(X/Y)$ και $H(X/Z)$ και
4. Την αμοιβαία πληροφορία $I(X; Y)$ και $I(X; Z)$.
5. Αν κατασκευάζατε ένα αντί-spam φίλτρο, δηλαδή ένα φίλτρο αυτόματης κατηγοριοποίησης ληφθέντων ηλεκτρονικών μηνυμάτων σε spam ή επιθυμητά, με τον περιορισμό αυτό το φίλτρο να βασίζεται στην προηγούμενη γνώση της τιμής μιας μόνο από τις τυχαίες μεταβλητές Y και Z , ποια από τις δύο τυχαίες μεταβλητές θα επιλέγατε ως βάση του φίλτρου και γιατί;

Ενδεικτική Μεθοδολογία: Πρώτα πρέπει να υπολογίσετε τις ακραίες, κοινές και υπό συνθήκη πιθανότητες. Ακολούθως, εφαρμόζετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζονται τα ζητούμενα μέτρα. Για την απάντηση του ερωτήματος 5, να λάβετε υπόψη τα κατάλληλα μέτρα ποσότητας πληροφορίας.

ΓΕ4/1011/Θ1

Από τις δεδομένες υπό συνθήκη ή δεσμευμένες πιθανότητες $p(y_i/x_j)$ και $p(z_i/x_l)$ και τις $p(x_i)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνδυασμένες πιθανότητες $p(x_i, y_j)$ και $p(x_i, z_j)$ και ακολούθως και τις ακραίες πιθανότητες $p(y_k)$ και $p(z_l)$ και τις δεσμευμένες πιθανότητες $p(x_i/y_j)$ και $p(x_i/z_l)$. Από τις σχέσεις των σελίδων 24-26 του βιβλίου

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j/x_i), \quad p(x_i, z_j) = p(x_i)p(z_j/x_i), \quad p(y_k) = \sum_{i=1}^2 p(x_i, y_k) \quad \text{και}$$

$$p(z_k) = \sum_{i=1}^2 p(x_i, z_k) \quad \text{λαμβάνουμε} \quad p(x_1, y_1) = (7/8) * (1/2) = 7/16,$$

$p(x_1, y_2) = (7/8) * (1/4) = 7/32, \quad p(x_1, y_3) = (7/8) * (1/8) = 7/64, \quad p(x_1, y_4) = 7/64,$
 $p(x_2, y_1) = (1/8) * (0) = 0, \quad p(x_2, y_2) = 1/16, \quad p(x_2, y_3) = 1/32, \quad p(x_2, y_4) = 1/32,$ καθώς και τις
 ακραίες πιθανότητες $(7/16, 9/32, 9/64, 9/64)$ για την Y . Επίσης, λαμβάνουμε τις
 $p(x_1, z_1) = (7/8) * (1/4) = 7/32, \quad p(x_1, z_2) = (7/8) * (1/8) = 7/64, \quad p(x_1, z_3) = (7/8) * (1/8) = 7/64,$
 $p(x_1, z_4) = 7/16, \quad p(x_2, y_1) = (1/8) * (1/32) = 1/256, \quad p(x_2, z_2) = 1/128, \quad p(x_2, z_3) = 1/256, \quad p(x_2,$
 $y_4) = 7/64$ και τις ακραίες πιθανότητες $(57/256, 15/128, 29/256, 35/64)$ για τη Z .

Από τις σχέσεις $p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$, $p(x_j / z_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_i)}$ λαμβάνουμε τις

ακόλουθες δεσμευμένες πιθανότητες

$$p(x_1/y_1) = (7/16)/(7/16) = 1, \quad p(x_1/y_2) = (7/32)/(9/32) = 7/9, \quad p(x_1/y_3) = (7/64)/(9/64) = 7/9 \text{ και}$$

$$p(x_1/y_4) = (7/64)/(9/64) = 7/9, \quad p(x_2/y_1) = 0/(7/16) = 0, \quad p(x_2/y_2) = (1/16)/(9/32) = 2/9,$$

$$p(x_2/y_3) = (1/32)/(9/64) = 2/9 \text{ και } p(x_2/y_4) = (1/32)/(9/64) = 2/9 \text{ και}$$

$$p(x_1/z_1) = (7/32)/(57/256) = 56/57,$$

$$p(x_1/z_2) = (7/64)/(15/128) = 14/15,$$

$$p(x_1/z_3) = (7/64)/(29/256) = 28/29 \quad \text{και}$$

$$p(x_1/z_4) = (7/16)/(35/64) = 28/35,$$

$$p(x_2/z_1) = (1/256)/(57/256) = 1/57,$$

$$p(x_2/z_2) = (1/128)/(15/128) = 1/15,$$

$$p(x_2/z_3) = (1/256)/(29/256) = 1/29 \text{ και } p(x_2/z_4) = (7/64)/(35/64) = 7/35.$$

1. Για τον υπολογισμό της συνδυασμένης ποσότητας πληροφορίας $H(X, Y)$ και $H(X, Z)$, δείτε το σχετικό τύπο στη σελίδα 34 του βιβλίου:

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$
$$= -\frac{7}{16} \log \frac{7}{16} - \frac{7}{32} \log \frac{7}{32} - 2 \frac{7}{64} \log \frac{7}{64} - 0 - \frac{1}{16} \log \frac{1}{16} - 2 \frac{1}{32} \log \frac{1}{32} = 2,26 \text{ bits.}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε $H(X, Z) = 2,15 \text{ bits}$.

2. Για τον υπολογισμό των ακραίων ποσοτήτων πληροφορίας δείτε τον τύπο της σελίδας 28 του βιβλίου:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^2 p(x_i) \log p(x_i) = -\frac{7}{8} \log \frac{7}{8} - \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} = 0,54 \text{ bit.}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε $H(Y)=1,83$ bits και $H(Z)=1,68$ bits.

3. Για τον υπολογισμό της δεσμευμένης ποσότητας πληροφορίας $H(X/Y)$ και $H(X/Z)$, δείτε το σχετικό τύπο στη σελίδα 36 του βιβλίου:

$$\begin{aligned} H(X/Y) &= -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 p(x_i, y_j) \log p(x_i / y_j) \\ &= -\frac{7}{16} \log 1 - \frac{7}{32} \log \frac{7}{9} - 2 \frac{7}{64} \log \frac{7}{9} - 0 - \frac{1}{16} \log \frac{2}{9} - 2 \frac{1}{32} \log \frac{2}{9} = 0,43 \text{ bits.} \end{aligned}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε $H(X/Z) = 0,49 \text{ bits}$.

4. Για τον υπολογισμό αμοιβαίας πληροφορίας $I(X;Y)$ και $I(X;Z)$, δείτε το σχετικό τύπο στη σελίδα 39 του βιβλίου:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 0,54 - 0,43 = 0,11 \text{ bits},$$

$$I(X;Z) = H(X) - H(X/Z) = 0,54 - 0,49 = 0,05 \text{ bits}.$$

5. Για την επιλογή της καταλληλότερης εκ των δεδομένων τυχαίων μεταβλητών Y και Z ως βάση του φίλτρου λαμβάνουμε υπόψη ότι η υψηλότερη αμοιβαία πληροφορία αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή που περιέχει περισσότερη πληροφορία για την X , ενώ η χαμηλότερη υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή, η γνώση της οποίας αφήνει τη μικρότερη αβεβαιότητα ως προς την έκβαση της X και είναι επομένως η καταλληλότερη για την πρόβλεψη της X . Επομένως, από τις ανωτέρω τιμές συνάγουμε ως καταλληλότερη για βάση του φίλτρου την Y .

ΘΕΜΑ 5

ΕΞ2012Α

Θεωρούμε κανάλι επικοινωνίας με είσοδο την τυχαία μεταβλητή $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ και έξοδο την $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά υπό ποιές προϋποθέσεις μπορεί να είναι σωστές ή αν σε κάθε περίπτωση είναι εσφαλμένες οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $H(X) = 2$ bits,
2. $H(Y) = 4$ bits,
3. $H(X, Y) = 4,5$ bits,
4. $H(Y/X) = 2,1$ bits,
5. $H(X/Y) = 0$ bits,
6. $I(X; Y) = 0$ bits,
7. $I(X; Y) = -2$ bits,
8. $I(X; Y) = 2,1$ bits,
9. $C = H(X)$,
10. $C \geq I(X; Y)$.

1. $H(X) = 2$ bits, είναι σωστό για ισοπίθανες εισόδους,
2. $H(Y) = 4$ bits, είναι λάθος, αφού η μέγιστη δυνατή τιμή είναι 2 bits,
3. $H(X, Y) = 4,5$ bits, είναι λάθος, αφού η μέγιστη δυνατή τιμή είναι 4 bits,
4. $H(Y/X) = 2,1$ bits, είναι λάθος, αφού υπερβαίνει τη μέγιστη εντροπία της Y ,
5. $H(X/Y) = 0$ bits, είναι σωστό για αθόρυβο κανάλι,
6. $I(X; Y) = 0$ bits, είναι σωστό για εξόδους ανεξάρτητες από τις εισόδους,
7. $I(X; Y) = -2$ bits, είναι λάθος, αφού η αμοιβαία πληροφορία είναι μη αρνητική,
8. $I(X; Y) = 2,1$ bits, είναι λάθος αφού η αμοιβαία πληροφορία δεν μπορεί να υπερβεί τη μέγιστη εντροπία των τυχαίων μεταβλητών,
9. $C = H(X)$, σωστό για αθόρυβο κανάλι και ισοπίθανες εισόδους,
10. $C \geq I(X; Y)$, σωστό, αφού η χωρητικότητα είναι ίση με τη μέγιστη αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου του καναλιού.