ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3

Έκτακτη ΟΣΣ

31/05/2014

Νίκος Δημητρίου

nikodim@phys.uoa.gr

Περιεχόμενα

- Λύσεις 5ης Εργασίας
- Επαναληπτικές Ασκήσεις

***<u>Σημείωση</u>**: Η έκτακτη ΟΣΣ έχει ως σκοπούς: να αναλυθεί η φετινή ΓΕ5, να απαντηθούν απορίες σχετικά με την ύλη, να δοθεί ένα κίνητρο για μια πρώτη επανάληψη και να αναπτυχθεί το σχετικό σκεπτικό στην επίλυση των θεμάτων παλαιοτέρων εργασιών και εξετάσεων **<u>χωρίς σε καμία περίπτωση</u>** να περιορίζεται με τον τρόπο αυτό η εξεταστέα ύλη.*

Ψηφιακές Επικοινωνίες

ΘΕΜΑ 1

Στόχος της άσκησης *είναι η επανάληψη στον ΜΣ Fourier βασικών σημάτων. Σχετικές ασκήσεις: Θ4/ΓΕ1/2006-7, Θ3/ΓΕ1/2007-8, Θ4/ΓΕ1/2009-10, Θ1/ΕΞ2011Α, Θ4/ΓΕ1-2012-2013*

Δίνεται το σήμα $x(t) = rect\left(\frac{t}{8}\right) + tri(t+2) + tri(t-2)$

(α) Να σχεδιαστεί το *x(t)* στο Matlab, να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *Y(f)* του σήματος και κατόπιν να σχεδιαστεί στο Matlab. Επίσης, να υπολογιστεί η συχνότητα δειγματοληψίας του.

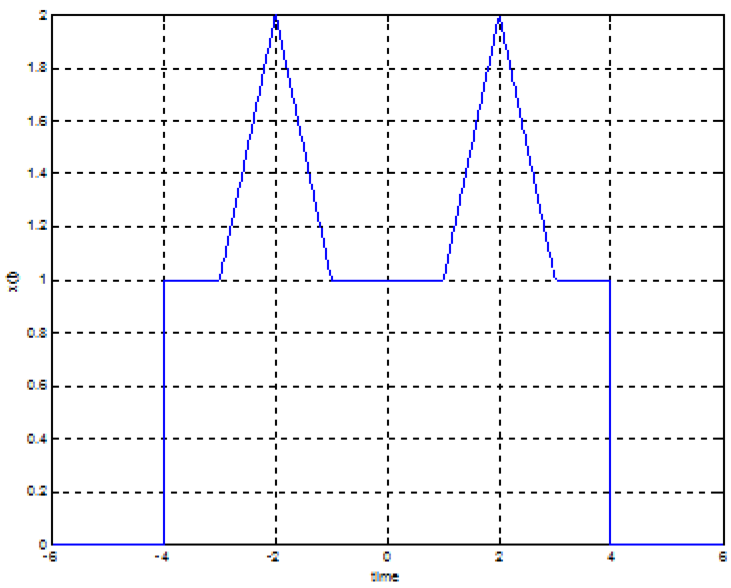
(β) Να υπολογίσετε την περίοδο του σήματος $\Im^{-1}\left\{\frac{Y(f) - 8\sin c(8f)}{\Im\{rect(t) * rect(t)\}}\right\}$, αν υπάρχει.

(γ) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς κατάλληλου φίλτρου που πρέπει να εφαρμοστεί στο σήμα *x(t)* έτσι ώστε η έξοδος του με φάσμα $Y_1(f)$ να μπορεί να δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας 8Hz, η οποία είναι διπλάσια της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας κατά Nyquist. Επίσης να σχεδιαστεί στο Matlab το φάσμα πλάτους $Y_1(f)$.

(δ) Το σήμα με φάσμα $Y_1(f)$ διαμορφώνεται κατά DSB με φέρον μοναδιαίου πλάτους 2 και συχνότητας 5KHz. Να σχεδιάσετε το φάσμα του διαμορφωμένου DSB σήματος χωρίς να το υπολογίσετε.

(α)

```
t=-6:0.001:6.0;
y1=rectpulse(t,0,8)
y2=triangular(t,-2,1);
y3=triangular(t,2,1);
y=y1+y2+y3;
plot(t,y);
grid
xlabel('time');
ylabel('x(t)');
```



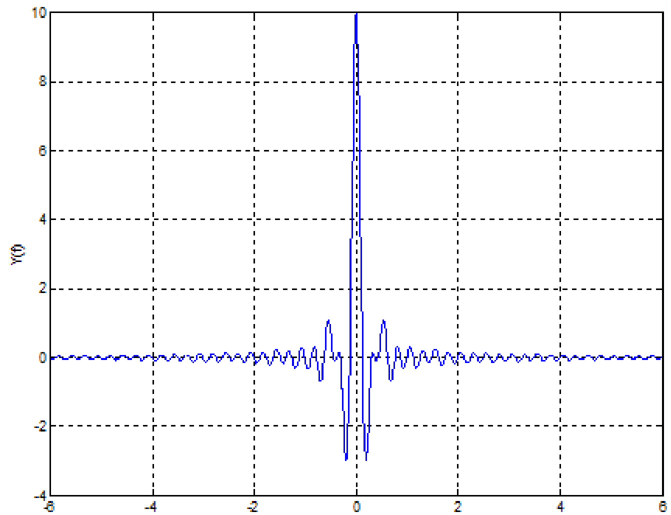
$$x(t) = rect\left(\frac{t}{8}\right) + tri(t+2) + tri(t-2)$$

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{8}\right) + tri(t+2) + tri(t-2)$$

Το φάσμα πλάτους είναι:

$$X(f) = 8\text{sinc}(8f) + \sin c^2(f)e^{j4\pi f} + \sin c^2(f)e^{-j4\pi f} =$$
$$= 8\text{sinc}(8f) + 2\sin c^2(f)\cos(4\pi f)$$

```
f=-6:1e-4:6;
y1=8*sinc(8*f);
y2=2*cos(4*pi*f).*(sinc(f)).^2;
y=y1+y2;
plot(f,y);
grid
xlabel('frequency (Hz)')
ylabel('Y(f)');
```



Το σήμα $x(t)$ δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης, συνεπώς δεν μπορεί να οριστεί συχνότητα δειγματοληψίας με το κριτήριο Nyquist.

$$\Im^{-1}\left\{\frac{Y(f)-8\sin c(8f)}{\Im\{rect(t)*rect(t)\}}\right\}=\Im^{-1}\left\{\frac{2\sin c^2(f)\cos(4\pi f)}{\sin c^2(f)}\right\}=\Im^{-1}\{2\cos(4\pi f)\}=\delta(t-2)+\delta(t+2)$$

¶

Το·φάσμα·είναι·συνεχές·συνεπώς·το·σήμα·δεν·είναι·περιοδικό.¶

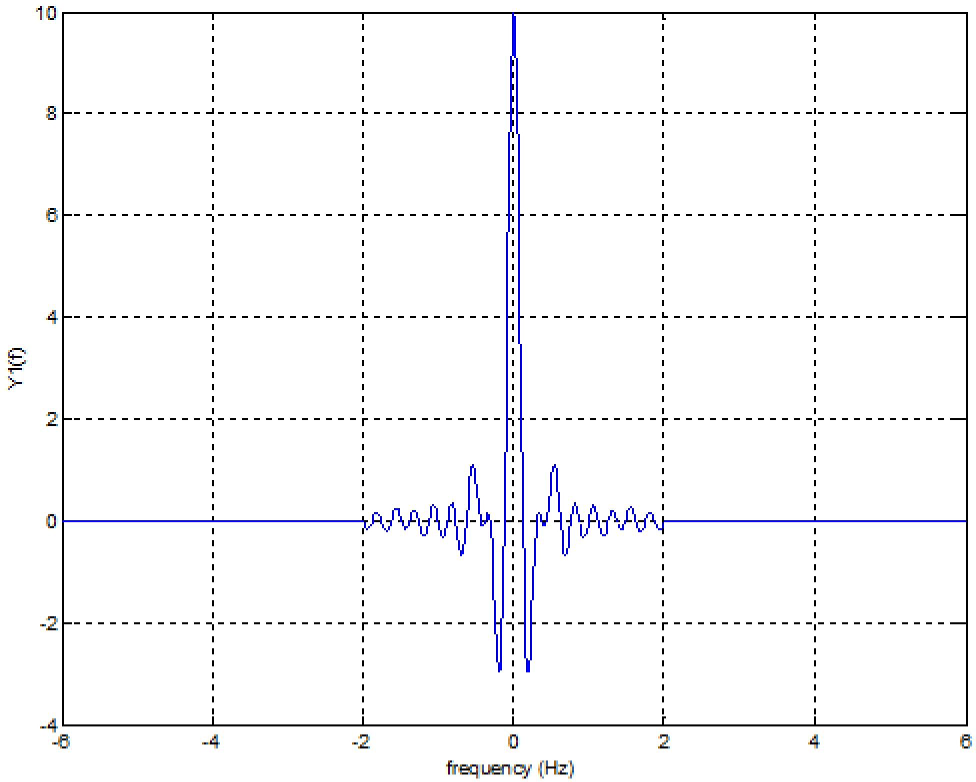
(γ)

Αφού η έξοδος δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας 8Hz η οποία είναι διπλάσια της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας κατά Nyquist πρέπει να ισχύει:

$$f_s = 2\cdot(2f_{\max}) = 4f_{\max} = 8 \Leftrightarrow f_{\max} = 2\mathrm{Hz}$$

Επομένως συμπεραίνεται ότι το το *Y(f)* πρέπει να περάσει από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο που κόβει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από 2Hz (άρα εύρους 4) και έτσι στην έξοδο δημιουργείται το σήμα $Y_1(f)$.

```
f=-6:1e-4:6;
y1=8*sinc(8*f);
y2=2*cos(4*pi*f).*(sinc(f)).^2;
y3=y1+y2;
y4=rectpulse(f,0,4);
y=y3.*y4;
plot(f,y);
grid
xlabel(‘frequency (Hz)’)
ylabel(‘Y(f)’);
```

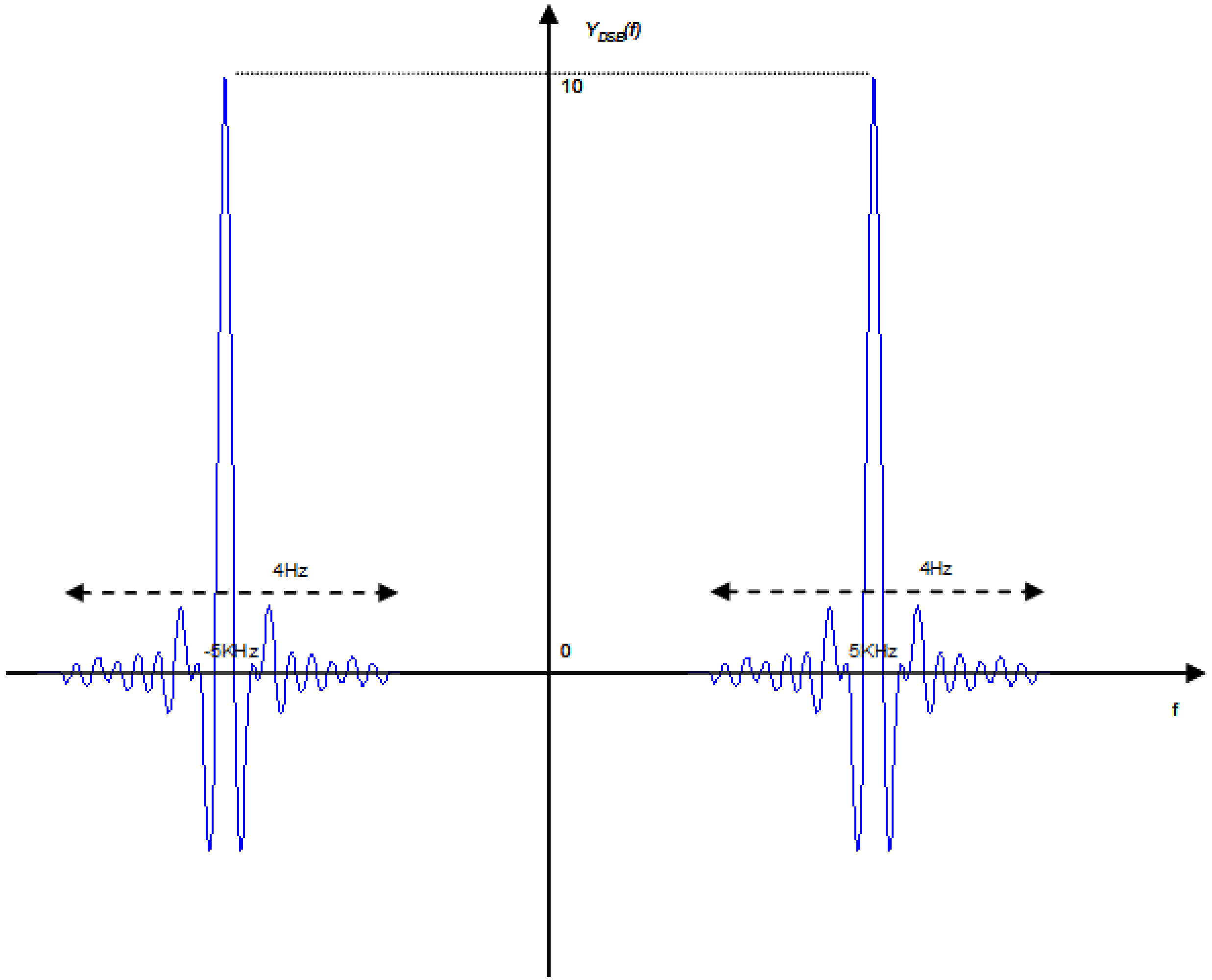


Η συνάρτηση μεταφοράς του βαθυπερατού φίλτρου είναι

$$H_{LP}(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right)$$

(δ)¶

Η· διαμόρφωση· κατά· DSB· της· εξόδου· $Y_1(f)$· με· φέρον· πλάτους· 2· και· συχνότητας· 5KHz· σημαίνει· ‘μεταφορά’· του· σήματος· $Y_1(f)$· στα· ±5KHz· χωρίς· αλλαγή· του· πλάτους· του· διαμορφωμένου,·δηλαδή:¶



ΘΕΜΑ 2

Στόχος της άσκησης *είναι η επανάληψη στον ΜΣ Fourier βασικών σημάτων, στη διερεύνηση περιοδικότητας, στο κριτήριο δειγματοληψίας, στη διαμόρφωση FM και σε βασικές εντολές MATLAB. Σχετικές ασκήσεις: Θ2,4,5/ΓΕ1/2013-14, Θ6/ΓΕ5/2011-12*

Δίνονται τα σήματα $x_1(t)=\sin(2\pi\cdot a\cdot f_0 t)$ και $x_2(t)=\cos^2(\beta\cdot f_0 t)$

όπου $f_0=100Hz$

(α) Να υπολογιστούν (αν ορίζονται) η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας των παρακάτω σημάτων:

(i) $x_i(t)=x_1(t)+x_2(2\pi t)$ όπου $\alpha=1, \beta=1$

(ii) $x_{ii}(t)=\left[x_1(t)+x_2(t)\right]*\mathrm{sinc}(400t)$ όπου $\alpha=1, \beta=3\pi$

(iii) $x_{iii}(t)=\left[x_1(t)+x_2(t)\right]+\mathrm{sinc}(400t)$ όπου $\alpha=1, \beta=3\pi$

(β) Για το σήμα του ερωτήματος (α-iii) [$x_{iii}(t)=\left[x_1(t)+x_2(t)\right]+\mathrm{sinc}(400t)$ όπου $\alpha=1, \beta=3\pi$] να υποθέσετε ότι διέρχεται από βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 250Hz και στη συνέχεια δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας διπλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist. Να δώσετε τις εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων.

(γ) Προκειμένου να σχεδιαστεί στο MATLAB το σήμα του ερωτήματος (α-i)

[$x_i(t)=x_1(t)+x_2(2\pi t)$ όπου $\alpha=1, \beta=1$] στο χρονικό διάστημα [-T,T] (όπου T η περίοδος του σήματος $x_i(t)$), να δοθούν οι σχετικές εντολές ορισμού του διαστήματος και σχεδίασης της κυματομορφής του $x_i(t)$ στο MATLAB υποθέτοντας συχνότητα δειγματοληψίας 10-πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist. Επίσης, να δοθεί το σχετικό σχήμα της κυματομορφής στο MATLAB.

(α-i)¶

$$x_i(t) = x_1(t) + x_2(2\pi t) = \sin(2\pi \cdot a \cdot f_0 t) + \cos^2(2\pi\beta \cdot f_0 t) =$$

$$= \sin(2\pi \cdot a \cdot f_0 t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2\beta \cdot f_0 t)$$ ¶

Θέτοντας $f_0 = 100Hz$ και $\alpha = 1, \beta = 1$¶

έχουμε¶

$$x_i(t) = \sin(2\pi \cdot 100t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 200t)$$ ¶

Οι όροι είναι περιοδικοί με περιόδους ¶

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{100} Hz, \mathrm{T}_2 = \frac{1}{200} Hz$$ ¶

Ο λόγος τους είναι ¶

$$\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{200}} = 2$$ ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό.¶

Η περίοδος του σήματος είναι $\mathrm{T}_{o\lambda} = \mathrm{T}_1 = 2\mathrm{T}_2 = \frac{1}{100}\sec$ ¶

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 200Hz άρα η ελάχιστη συχνοτητα δειγματοληψίας είναι 400Hz.¶

(α-ii)

$$x_{ii}(t)=\left[x_1(t)+x_2(t)\right]*\mathrm{sinc}(400t)=$$

$$=\left[\sin(2\pi\cdot a\cdot f_0t)+\cos^2(\beta\cdot f_0t)\right]*\mathrm{sinc}(400t)=$$

$$=\left[\sin(2\pi\cdot a\cdot f_0t)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\beta\cdot f_0t)\right]*\mathrm{sinc}(400t)\overset{\alpha=1,\beta=3\pi}{=}$$

$$=\left[\sin(2\pi\cdot 100t)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\cdot 3\pi\cdot 100t)\right]*\mathrm{sinc}(400t)\overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\longleftrightarrow}\left[\frac{1}{2j}\left(\delta(f-100)-\delta(f+100)\right)+\frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{4}\left(\delta(f-300)+\delta(f+300)\right)\right]\frac{1}{400}rect\left(\frac{f}{400}\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{2j}\left(\delta(f-100)-\delta(f+100)\right)+\frac{\delta(f)}{2}\right]\frac{1}{400}$$

δηλ. έχουμε αποκοπή της συχνότητας 300Hz και το τελικό σήμα περιέχει μόνο τη συχνότητα 100Hz κι ένα σταθερό όρο. Η περίοδός του είναι $T_{o\lambda}=\frac{1}{100}\sec$

και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του είναι 200Hz.

(a-iii)

Το σήμα του ερωτήματος (α-iii) έχει τους ίδιους όρους με το σήμα του προηγούμενου ερωτήματος, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση της συνέλιξης με απλή άθροιση:

$$x_{iii}(t)=\left[\sin(2\pi\cdot 100t)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\cdot 3\pi\cdot 100t)\right]+\mathrm{sinc}(400t)\xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F}\left[\frac{1}{2j}\left(\delta(f-100)-\delta(f+100)\right)+\frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{4}\left(\delta(f-300)+\delta(f+300)\right)\right]+\cdots$$

$$+\frac{1}{400}rect\left(\frac{f}{400}\right)=X_{iii}(f)$$

Ο ΜΣ Fourier του σήματος περιλαμβάνει το άθροισμα παλμών δ στις συχνότητες 100 και 300Hz

με τον παλμό

$$\frac{1}{400}rect\left(\frac{f}{400}\right)$$

Επειδή το φάσμα πλάτους είναι συνεχές το σήμα είναι απεριοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα που περιέχεται είναι 300Hz άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 600Hz.

(β)

Το σήμα του ερωτήματος α-iii διέρχεται από βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπης 250 Hz άρα έχουμε το σήμα:

$$x_\beta(t) = \left[\sin(2\pi \cdot 100t) + \frac{1}{2}\right] + \mathrm{sinc}(400t) \overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\longleftrightarrow} \left[\frac{1}{2j}\left(\delta(f-100) - \delta(f+100)\right) + \frac{\delta(f)}{2}\right] +$$

$$+\frac{1}{400} rect\left(\frac{f}{400}\right) = X_\beta(f)$$

και στη συνέχεια δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας διπλάσια της ελάχιστης

Η μέγιστη συχνότητα είναι 200Hz άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 400Hz συνεπώς f_δ=800Hz.

Η έκφραση του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι

$$x_{\beta,\delta}(n) = x_\beta(t)\Big|_{t=nT_\delta} = \left[\sin(2\pi \cdot 100nT_\delta) + \frac{1}{2}\right] + \mathrm{sinc}(400nT_\delta) =$$

$$= \left[\sin\left(2\pi \cdot 100n\frac{1}{800}\right) + \frac{1}{2}\right] + \mathrm{sinc}\left(400n\frac{1}{800}\right), \text{ όπου } n \text{ ακέραιος}$$

Και στο πεδίο συχνοτήτων είναι:

$$X_{\beta,\delta}(f) = f_\delta \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_\beta(f - mf_\delta) =$$

$$= 800\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2j}\left(\delta(f-m800-100) - \delta(f-m800+100)\right) + \frac{\delta(f-m800)}{2} + \frac{1}{400} rect\left(\frac{f-m800}{400}\right)\right]$$

(γ) Προκειμένου να σχεδιαστεί στο MATLAB το σήμα του ερωτήματος (α-i) έχουμε τα εξής:

$$x_i(t) = \sin(2\pi \cdot 100t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 200t)$$

Η περίοδος του σήματος είναι $T_{ολ} = T_1 = 2T_2 = \frac{1}{100}\sec$ και η ελάχιστη συχνοτητα δειγματοληψίας είναι 400Hz.

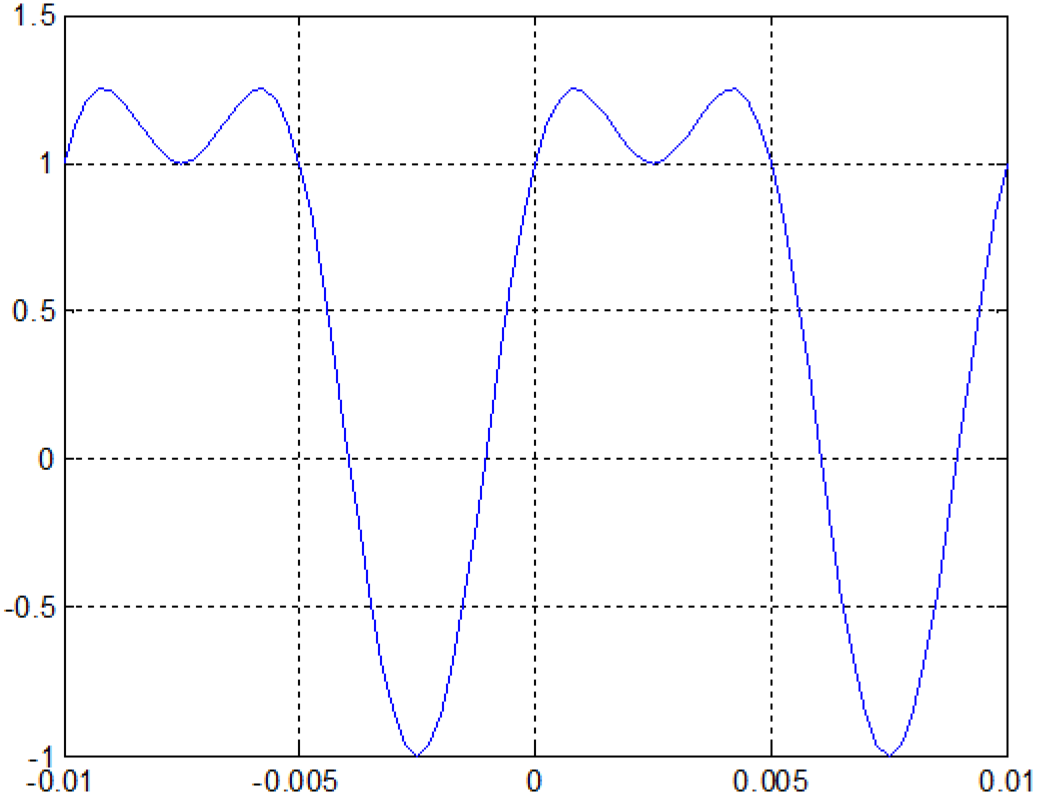
Η συχνότητα δειγματοληψίας που υποθέτουμε είναι 10-πλάσια της ελάχιστης, άρα $f_δ = 4000Hz$

Η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_δ = \frac{1}{f_δ} = \frac{1}{4000}\sec$

Συνεπώς, το διάστημα ορίζεται στο MATLAB ως

```
t=-1/100:1./4000:1/100
%or
t=linspace (-1/100,1/100,81)

%και η σχεδίαση της κυματομορφής θα γίνει με τις εντολές:
x=sin(2.*pi.*100.*t)+0.5+0.5.*cos(2.*pi.*200.*t);
plot(t,x);
```


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.01
-0.005
0
0.005
0.01

Θ2/ΓΕ5/2014

(δ) Να υποθέσετε το σήμα $z(t)$ με φάσμα πλάτους $Z(f)$ που προκύπτει περιορίζοντας το φάσμα $Y(f)=\cos^2\left(\frac{\pi f}{2000}\right)$ στο διάστημα συχνοτήτων $[-1000Hz, 1000Hz]$ με τη χρήση κατάλληλου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου. Να δοθούν οι σχετικές εντολές MATLAB και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $Z(f)$ υποθέτοντας 401 σημεία στο πεδίο των συχνοτήτων ισοκατανεμημένα στο ανωτέρω διάστημα. Επίσης, να δοθούν οι εκφράσεις του σήματος $z(t)$ στο πεδίο του χρόνου και των συχνοτήτων, καθώς και η κρουστική απόκριση και η συνάρτηση μεταφοράς του ιδανικού φίλτρου.

(ε) Το σήμα $z(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 50\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους 20 Volt και συχνότητας 1MHz.

Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος. Δίνεται ότι η μέγιστη τιμή του z(t) είναι 10Volt.

Σχόλια matlab/octave

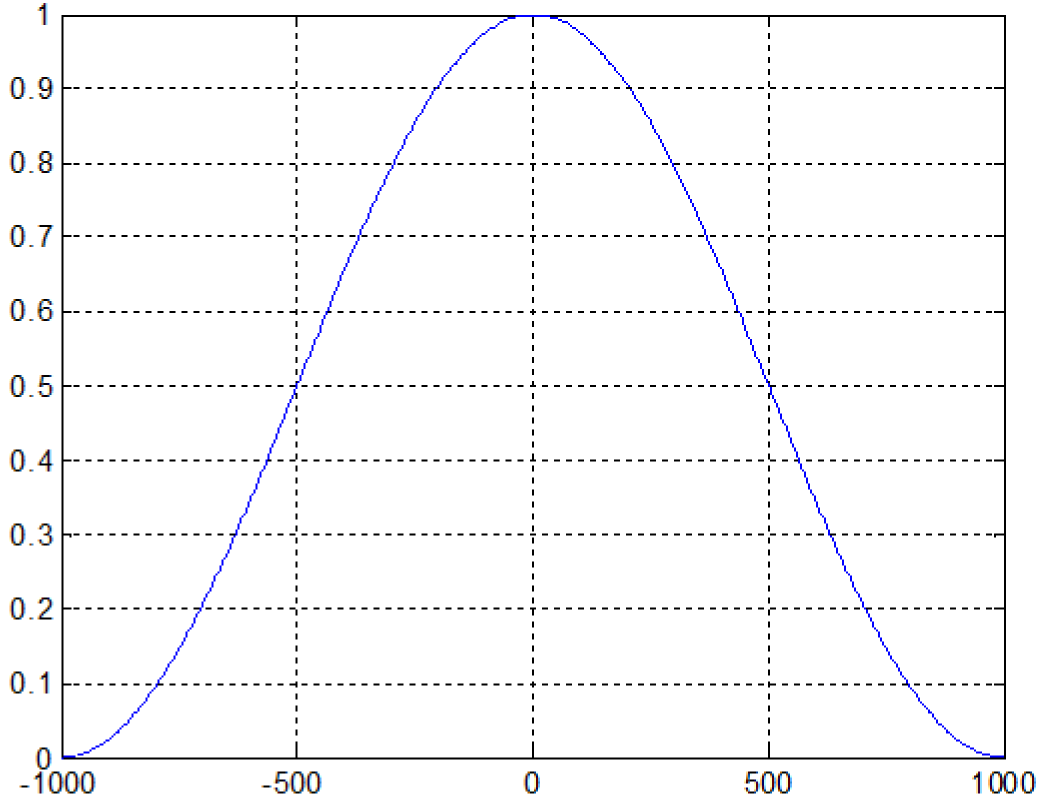
Ορισμός διαστημάτων στο Octave

- Γενικά εάν έχουμε ένα διάστημα με όρια A,B και ορίζουμε ισομήκη διαστήματα με N συνολικά σημεία (που συμπεριλαμβάνουν τα A,B) καθένα από τα οποία (διαστήματα) έχει μήκος Δ, τότε ισχύει η σχέση Δ=(B-A)/(N-1).
- Το διάστημα αυτό μπορεί να οριστεί στο MATLAB
  - είτε ως t=A:Δ:B
  - είτε ως t=linspace(A,B,N).

(δ) Το σήμα $z(t)$ με φάσμα πλάτους $Z(f)$ που προκύπτει περιορίζοντας το φάσμα $Y(f)=\cos^2\left(\frac{\pi f}{2000}\right)$ στο διάστημα συχνοτήτων $[-1000Hz, 1000Hz]$ με τη χρήση κατάλληλου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου.

Το διάστημα ορίζεται στο MATLAB ως

```
f=-1000:5:1000
%or
f=linspace (-1000,1000,401);
%και η σχεδίαση του φάσματος πλάτους θα γίνει με τις εντολές:
Z=(cos(pi.*f./2000)).^2;
plot(f,Z);
grid;
```


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1000
-500
0
500
1000

Η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι ¶

$$h(t) = 2000\,\mathrm{sinc}(2000t)$$

¶

και η συνάρτηση μεταφοράς του είναι¶

$$\mathrm{H}(f) = rect\left(\frac{f}{2000}\right)$$ ¶

Οι εκφράσεις του σήματος $z(t)$:¶

Στο πεδίο των συχνοτήτων: ¶

$$Z(f) = \cos^2\left(\frac{\pi f}{2000}\right) \cdot rect\left(\frac{f}{2000}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi f}{1000}\right)\right) \cdot rect\left(\frac{f}{2000}\right)$$ ¶

Στο πεδίο του χρόνου:¶

$$z(t) = \left(\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4}\left(\delta\left(t - \frac{1}{2000}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{2000}\right)\right)\right) * 2000\,\mathrm{sinc}(2000t) =$$

$$= \frac{1}{2}2000\,\mathrm{sinc}(2000t) + \frac{1}{4}2000\,\mathrm{sinc}\left(2000\left(t - \frac{1}{2000}\right)\right) +$$ ¶

$$+\frac{1}{4}2000\,\mathrm{sinc}\left(2000\left(t + \frac{1}{2000}\right)\right)$$

¶

(ε)

<u>1η περίπτωση: Λαμβάνοντας υπόψη την υπόδειξη ότι το z(t) περιορίζεται στα 10Volt:</u>

Το σήμα $z(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 50\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους 20 Volt και συχνότητας 1MHz.

Η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι η:

$$z_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} z(\lambda)\, d\lambda\right] = 20\cos\left[2\pi 10^6 t + 50\pi \int_{-\infty}^{t} z(\lambda)\, d\lambda\right]$$

Το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας είναι $1000Hz$

Η μέγιστη τιμή του στο πεδίο του χρόνου είναι 10 Volt.

Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι $\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left[|z(t)|\right] = \frac{50\pi}{2\pi}10 = 250Hz$

Ο λόγος απόκλισης είναι

$$D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_z} = \frac{250}{1000} = 0.25$$

Οπότε το εύρος ζώνης είναι

$$W = 2(D+1)f_z = 2(0.25+1)1000 = 2500Hz$$

2η περίπτωση: Λαμβάνοντας υπόψη ότι το z(t) έχει μέγιστη τιμή τα 1000Volt (με βάση τη διερεύνηση του z(t)):

Το σήμα $z(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 50\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους 20 Volt και συχνότητας 1MHz.

Η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι η:

$$z_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} z(\lambda)\,d\lambda\right] = 20\cos\left[2\pi \cdot 10^6 t + 50\pi \int_{-\infty}^{t} z(\lambda)\,d\lambda\right]$$

Το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας είναι $1000Hz$

Η μέγιστη τιμή του στο πεδίο του χρόνου είναι 1000 Volt.

Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι $\Delta f_{\max} = \dfrac{k_f}{2\pi}\max\left[\left|z(t)\right|\right] = \dfrac{50\pi}{2\pi}1000 = 25000Hz$

Ο λόγος απόκλισης είναι

$$D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_z} = \frac{25000}{1000} = 25$$

Οπότε το εύρος ζώνης είναι

$$W = 2(D+1)f_z = 2(25+1)1000 = 52000Hz$$

Θεωρία Πληροφορίας

ΘΕΜΑ 3	ΓΕ5/2014
Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με την έννοια της εντροπίας τυχαίας μεταβλητής, καθώς και με τις έννοιες της υπό συνθήκη, συνδυασμένης ποσότητας πληροφορίας δύο ή περισσότερων τυχαίων μεταβλητών.* ***Σχετικές ασκήσεις:*** *Θ1/ΓΕ4/2005-6, Θ1/ΓΕ4/2006-7, Θ1/ΓΕ4/2008-9, Θ1/ΓΕ4/2009-10, Θ1/ΓΕ4/2011-2012*	

Έστω ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με κωδικό αλφάβητο για τις εισόδους $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ και για τις εξόδους $y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Ο Πίνακας Μετάβασης από την είσοδο στην έξοδο του καναλιού δίνεται ως.

$$P = \begin{bmatrix} p\left(\frac{y_1}{x_1}\right) & p\left(\frac{y_2}{x_1}\right) & p\left(\frac{y_3}{x_1}\right) \\ p\left(\frac{y_1}{x_2}\right) & p\left(\frac{y_2}{x_2}\right) & p\left(\frac{y_3}{x_2}\right) \\ p\left(\frac{y_1}{x_3}\right) & p\left(\frac{y_2}{x_3}\right) & p\left(\frac{y_3}{x_3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Η πηγή εκπέμπει τα σύμβολά της με τις ακόλουθες πιθανότητες $P(X) = \left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right\}$

Ζητούνται να υπολογισθούν

(α) Το διάγραμμα καταστάσεων του καναλιού και οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης

(β) Η εντροπία της πηγής **H(X)**

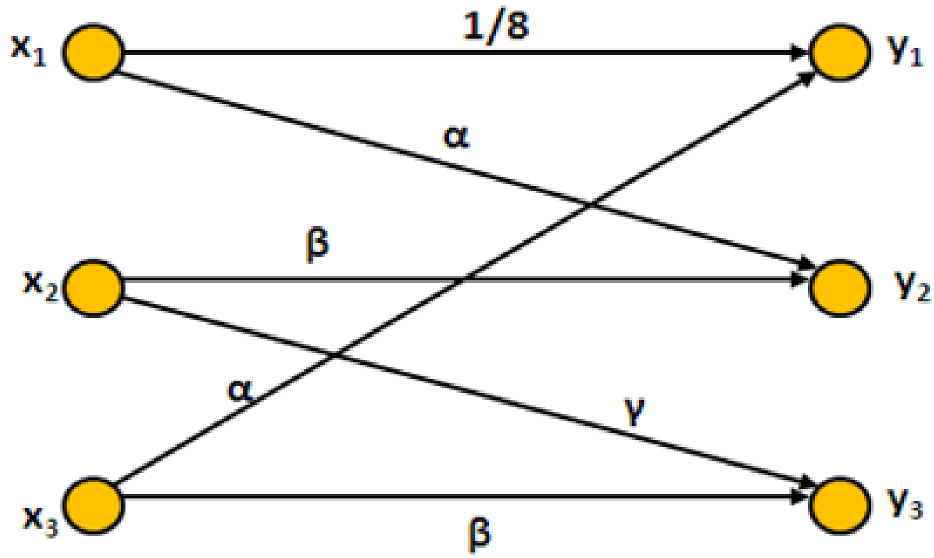
(γ) Η μέγιστη εντροπία της πηγής.

(δ) Οι πιθανότητες εξόδου $\boldsymbol{P(Y) = \{y_1, y_2, y_3\}}$ καθώς και η μέση ποσότητα πληροφορίας **H(Y)**

(ε) Οι υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας **H(Y/X=x1)**, **H(Y/X=x2)** και **H(Y/X=x3)** καθώς και η **H(Y/X)**

(στ) Η αμοιβαία πληροφορία **I(X,Y)**

α). Για το διάγραμμα καταστάσεων θα έχουμε :



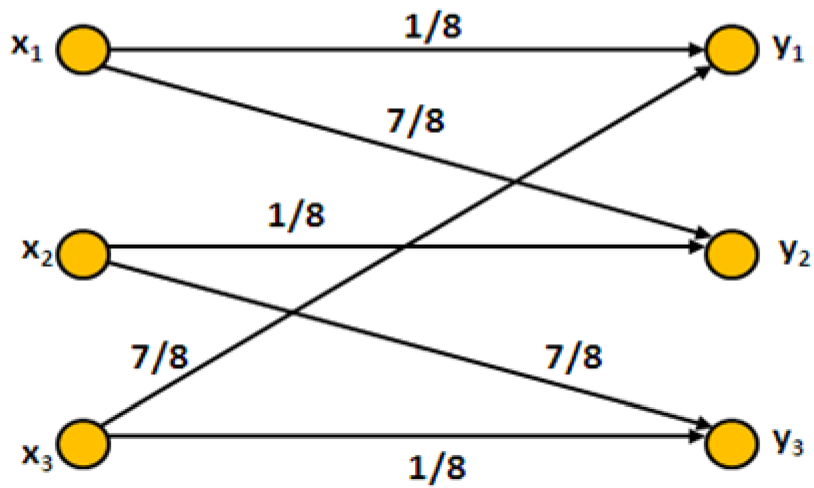
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ισχύει :

$\mathbf{x_1}$: $p(y_1/x_1) + p(y_2/x_1) + p(y_3/x_1) = 1 \Rightarrow 1/8 + a + 0 = 1 \Rightarrow a = 7/8$

$\mathbf{x_3}$: $p(y_1/x_3) + p(y_2/x_3) + p(y_3/x_3) = 1 \Rightarrow a + 0 + \beta = 1 \Rightarrow 7/8 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1/8$

$\mathbf{x_3}$: $p(y_1/x_2) + p(y_2/x_2) + p(y_3/x_2) = 1 \Rightarrow 0 + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow 0 + 1/8 + \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 7/8$

Επομένως



Οπότε ο πίνακας μετάβασης θα δίνεται ως

$$P=\begin{bmatrix} p\left(\frac{y_1}{x_1}\right) & p\left(\frac{y_2}{x_1}\right) & p\left(\frac{y_3}{x_1}\right) \\ p\left(\frac{y_1}{x_2}\right) & p\left(\frac{y_2}{x_2}\right) & p\left(\frac{y_3}{x_2}\right) \\ p\left(\frac{y_1}{x_3}\right) & p\left(\frac{y_2}{x_3}\right) & p\left(\frac{y_3}{x_3}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 7/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 7/8 \\ 7/8 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

β). Η εντροπία H(X) όπως γνωρίζουμε δίνεται από τη σχέση

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3}[p(x_i)log_2(p(x_i)] \Leftrightarrow$$

$$H(X) = -\left[\frac{1}{8}\cdot log_2\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{8}\cdot log_2\left(\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{2}\cdot log_2\left(\frac{1}{2}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$H(X) = [0.375+0.530+0.5] = 1.405$$

γ). Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της εντροπίας **H(X),** («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89), προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3$$

άρα

$$\max[H(X)] = log_2 q|_{q=3} = log_2(3) = 1.5849\ bits/\ symbols$$

δ). Γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες εξόδου $P(Y) = [p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]$, οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω:

$$P(Y) = [p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)] = \left[\sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_1) \quad \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_2) \quad \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_3)\right]$$

Επίσης από τον νόμο του Bayes («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25), γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j/x_i)$$

Με βάση τα παραπάνω, διαμορφώνουμε τον πίνακα P(X,Y)

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} p(y_1,x_1) & p(y_2,x_1) & p(y_3,x_1) \\ p(y_1,x_2) & p(y_2,x_2) & p(y_3,x_2) \\ p(y_1,x_3) & p(y_2,x_3) & p(y_3,x_3) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} p(x_1)\cdot p(y_1/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_2/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_3/x_1) \\ p(x_2)\cdot p(y_1/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_2/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_2) \\ p(x_3)\cdot p(y_1/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_2/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_3/x_3) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} 1/8\cdot 1/8 & 1/8\cdot 7/8 & 1/8\cdot 0 \\ 3/8\cdot 0 & 3/8\cdot 1/8 & 3/8\cdot 7/8 \\ 1/2\cdot 7/8 & 1/2\cdot 0 & 1/2\cdot 1/8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} 1/64 & 7/64 & 0 \\ 0 & 3/64 & 21/64 \\ 7/16 & 0 & 1/16 \end{bmatrix}$$

$$P(Y) = [p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)] = [1/64 + 7/16 \quad 7/64 + 3/64 \quad 21/64 + 1/16] =$$
$$= [29/64 \quad 10/64 \quad 25/64]$$

Οπότε η αντίστοιχη εντροπία H(Y) θα δίνεται ως

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i) \cdot log_2[p(y_i)] = 1.4656$$

ε). Για να υπολογίσω την εντροπία H(Y/X=x_1), H(Y/X=x_2), H(Y/X=x_3) χρησιμοποιώ τον τύπο

$$H\left(Y \middle/ X = x_j\right) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i/x_1) \cdot \log_2\left[p(y_i/x_j)\right] \quad \forall\, j = 1,2,3$$

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα θα είχαμε :

$$H\left(Y \middle/ X = x_1\right) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i/x_1) \cdot log_2[p(y_i/x_1)] = 0.375 + 0.168 + 0 = 0.543$$

$$H\left(Y \middle/ X = x_2\right) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i/x_2) \cdot log_2[p(y_i/x_2)] = 0 + 0.375 + 0.168 = 0.543$$

$$H\left(Y \middle/ X = x_2\right) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i/x_2) \cdot log_2[p(y_i/x_2)] = 0.375 + 0.168 + 0 = 0.543$$

Τέλος όσον αφορά το H(Y/X) θα δίνεται από

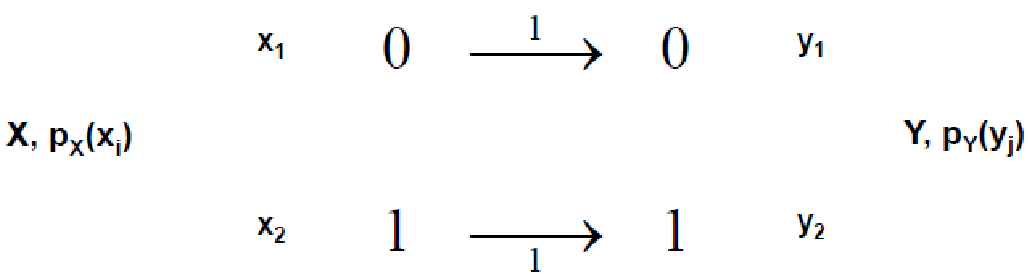
$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i) \cdot H(Y/X = x_i) = \frac{1}{8} \cdot 0.543 + \frac{3}{8} \cdot 0.543 + \frac{1}{2} \cdot 0.543 = 0.543$$

στ). Η αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) θα δίνεται ως

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = 1.4656 - 0.543 = 0.9226$$

Τυπολόγιο με διάφορες κατηγορίες καναλιών (από τις διαφάνειες της 2ης ΟΣΣ)

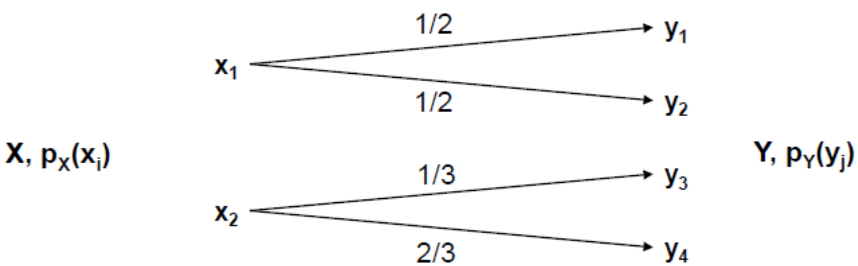
Δυαδικό κανάλι χωρίς θόρυβο



- $C(Q)=\max_{P_X} I(X;Y)=1$ bit, Προσοχή: $I(X,Y)=H(X)$

$$[p_Y(0) \quad p_Y(1)] = [p_x(0) \quad p_x(1)]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

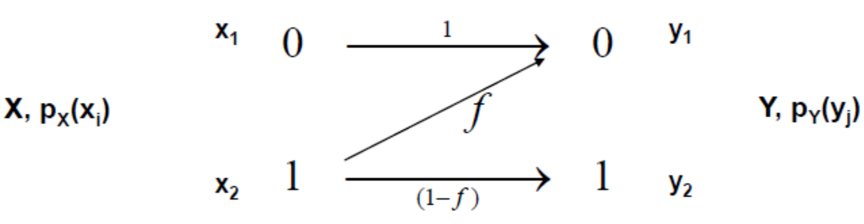
Ενθόρυβο κανάλι με μη επικαλυπτόμενες εξόδους



$C(Q)=\max_{P_X} I(X;Y)=1$ bit

$$[p_Y(y_1) \quad p_Y(y_2) \quad p_Y(y_3) \quad p_Y(y_4)] = [p_x(x_1) \quad p_x(x_2)]\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Το κανάλι Z



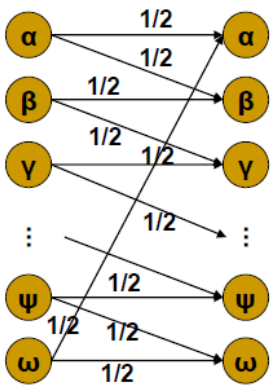
$$[p_Y(0) \quad p_Y(1)] = [p_x(0) \quad p_x(1)]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f & 1-f \end{bmatrix}$$

Αν θέσουμε $p_X(x_1=0)=1-\pi$, και $p_X(x_2=1)=\pi$, τότε από τα $p_Y(y_i)$, i=1,2 δίνονται από τους τύπους (βλ. διαφάνεια 11) τότε

- $H(Y)=H((1-f)\pi)$
- $H(Y/X)=\pi^*H(Y/X=1)=\pi^*H(f)$

Οπότε $\max I(X;Y)=\max(H(Y)-H(Y/X))$
$=\max(H((1-f)\pi) - \pi^*H(f))$

- ***Ενθόρυβη Γραφομηχανή***
  - {α,β,γ,δ,...,χ,ψ,ω}



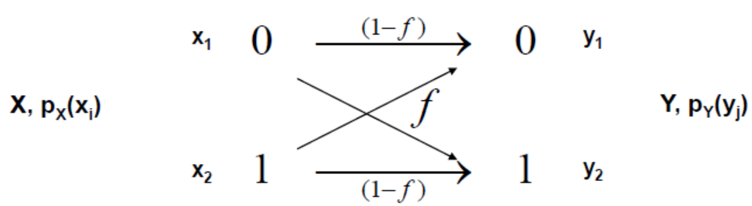
$$
\begin{array}{c}
\\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \chi \\ \psi \\ \omega
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \cdots & \chi & \psi & \omega \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 1/2 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Παρατηρούμε ότι κάθε ένα γράμμα είτε λαμβάνεται σωστά είτε λαμβάνεται το επόμενό του με πιθανότητα ½. Με δεδομένο ότι έχουμε 24 διαφορετικά σύμβολα εάν μεταδίδαμε μόνο κάθε δεύτερο σύμβολο δηλ. β,δ,ζ,θ,...,χ,ω, τότε μόνο αυτά τα 12 σύμβολα από τα 24 θα μπορούσαν να μεταδοθούν και στη συνέχεια να αποκωδικοποιηθούν χωρίς σφάλματα. Με άλλα λόγια η χωρητικότητα του καναλιού είναι log12 bits

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό

- $\boxed{\max_{P_x} I(X;Y)=\max_{P_x} [H(Y)-H(Y/X)]=\max_{P_x} H(Y) -1=\log 24-1=\log 12}$

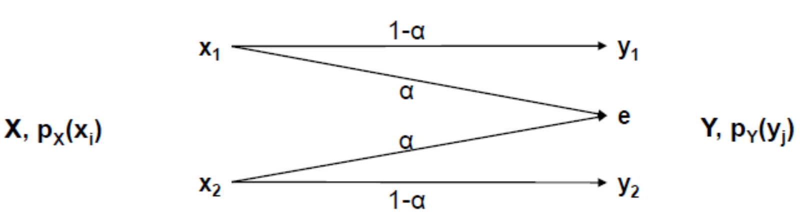
- ***Δυαδικό συμμετρικό κανάλι***



$$[p_Y(0) \quad p_Y(1)]=[p_x(0) \quad p_x(1)]\begin{bmatrix} 1-f & f \\ f & 1-f \end{bmatrix}$$

- $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$
  $=H(Y)-\sum p(x)H(Y/X=x)$
  $=H(Y)-\sum p(x)H(f)$
  $=H(Y)-H(f)$
  $\boxed{\leq 1-H(f)}$

Δυαδικό κανάλι με αποσβέσεις



$$[p_Y(y_1) \quad p_Y(e) \quad p_Y(y_2)]=[p_x(x_1) \quad p_x(x_2)]\begin{bmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & a & 1-a \end{bmatrix}$$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/Ε-ΟΣΣ/Ν.Δημητρίου/ 31.05.2014

max I(X;Y)=max(H(Y)-H(Y/X))
=max(H(Y)-H(α))
=maxH(Y)-H(α)

Θα μπορούσε να είναι max H(Y)=log3 αλλά αυτή η τιμή δεν είναι εφικτή για καμία τιμή της $p_X(x_i)$, i=1,2

Αν θέσουμε $p_X(x_1)=1-\pi$, και $p_X(x_2)=\pi$, τότε από τα $p_Y(y_i)$, i=1,e,2 δίνονται από τους τύπους (βλ. διαφάνεια 10) τότε

- maxH(Y)=max H((1-α)π,α,(1-α)(1-π))=max[(1-α)*H(π)+H(α)]=(1-α)*maxH(π)+H(α)

Οπότε προκύπτει ότι

- $\boxed{\max I(X;Y)=\max H(Y)-H(\alpha)=(1-\alpha)*\max_{\pi=1/2} H(\pi)+H(\alpha)-H(\alpha)=1-\alpha}$

ΕΞ2009Α

ΘΕΜΑ 4

Από την μία άκρη ενός επιταχυντή σωματιδίων εκπέμπονται στην αρχή πρωτόνια και νετρόνια, με πιθανότητες 3/4, και 1/4 αντίστοιχα, τα οποία παραλαμβάνονται στην έξοδο του επιταχυντή. Στη συνέχεια διεξάγεται πείραμα στη διάρκεια του οποίου εκπέμπονται όχι μόνο τα πρωτόνια και νετρόνια με τις ανωτέρω πιθανότητες, αλλά και συνεχής δέσμη ηλεκτρονίων με την αντίθετη όμως κατεύθυνση από αυτή των σωματιδίων. Έχει παρατηρηθεί ότι με πιθανότητα f=1/4 τα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα δύο αυτά σωματίδια με αποτέλεσμα την καταστροφή των σωματιδίων πριν αυτά προλάβουν και φτάσουν στον προορισμό τους (έξοδο επιταχυντή). Να βρείτε ποιο είναι το ποσό της πληροφορίας που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι (επιταχυντή) καθώς και την χωρητικότητα του καναλιού (για κατάλληλες πιθανότητες εκπομπής πρωτονίων και νετρονίων), στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

α) Πριν από τη διεξαγωγή του πειράματος, όταν δηλαδή δεν εκπέμπονται ηλεκτρόνια από την αντίθετη κατεύθυνση, και,

β) Κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του πειράματος, όταν δηλαδή έχουμε εκπομπή ηλεκτρονίων από την αντίθετη κατεύθυνση. Με ποιο είδος καναλιού θα μοντελοποιούσατε τον επιταχυντή; Φτιάξτε το κατάλληλο σχήμα.

(Υπόδειξη: Δίδεται ότι $H(Y/X)=H(f)=0,811$ bits και ότι $\log_2 3=1,585$)

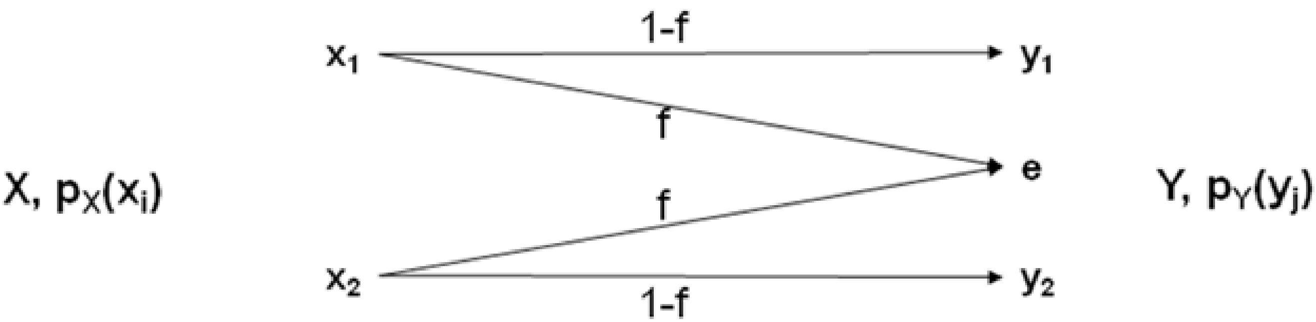
α) Πριν από τη διεξαγωγή του πειράματος δεν υπάρχουν συγκρούσεις οπότε το κανάλι (επιταχυντής) είναι χωρίς θόρυβο. Συνεπώς η πληροφορία που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι είναι η αμοιβαία πληροφορία η οποία στην περίπτωση αυτή ταυτίζεται με την εντροπία της πηγής H(X) λόγω απουσίας θορύβου

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \log p_i = -\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}(\log 3 - 2) + \frac{1}{2} = 2 - 0.75\log 3 = 0.811 \text{ bits}$$

Η χωρητικότητα του επιταχυντή απουσία θορύβου θα είναι στην περίπτωση όπου τα 2 σωματίδια εκπέμπονται με την ίδια πιθανότητα και άρα

$$H(X) = \log 2 = 1 \text{ bits}$$

β) Η έναρξη του πειράματος έχει σαν αποτέλεσμα την δημιουργία θορύβου αφού με πιθανότητα f κάθε σωματίδιο ενδέχεται να μην φτάσει στον προορισμό του. Αυτό αντιστοιχεί σε κανάλι με αποσβέσεις (2αδικό) όπως φαίνεται από το σχήμα,



Θεωρώντας ότι X είναι η τ.μ. των σωματιδίων που εκπέμπονται και Y η τ.μ. των σωματιδίων που τελικά φτάνουν στον προορισμό τους (έξοδο επιταχυντή), ισχύει ότι

$$\left[p_Y(y_1) \quad p_Y(e) \quad p_Y(y_2)\right] = \left[p_x(x_1) \quad p_x(x_2)\right]\begin{bmatrix} 1-f & f & 0 \\ 0 & f & 1-f \end{bmatrix}$$

$$p_Y(y_1) = (1-f)\,p_x(x_1),$$

$$p_Y(e) = f\left(p_x(x_1) + p_x(x_2)\right) = f,$$

$$p_Y(y_2) = (1-f)\,p_x(x_2)$$

Άρα για f=1/4 και p(x1)=3/4, p(x2)=1/4, έχουμε ότι

$$p_Y(y_1) = \frac{9}{16}, \quad p_Y(e) = \frac{1}{4}, \quad p_Y(y_2) = \frac{3}{16} \cdots\cdots(1)$$

Για να βρούμε την πληροφορία που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι ουσιαστικά θα πρέπει να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) η οποία αυτή τη φορά είναι παρουσία θορύβου λόγω της εκπομπής των ηλεκτρονίων.

$$I(X;Y) = H(Y)-H(Y/X)$$

Από την (1) έχουμε ότι η H(Y) είναι

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} p_Y(y_i)\log p_Y(y_i) = -\frac{9}{16}\log\frac{9}{16} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{16}$$

$$= -\frac{9}{16}(\log 9 - \log 16) + \frac{1}{2} - \frac{3}{16}(\log 3 - \log 16) = -\frac{9}{16}(2\cdot\log 3 - 4) + \frac{1}{2} - \frac{3}{16}(\log 3 - 4)$$

$$= -\frac{18}{16}\log 3 + \frac{9}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{16}\log 3 + \frac{3}{4} = 3,5 - \frac{21}{16}\log 3 =$$

$$= 3,5 - 2,08 = 1,42\ bits$$

Εφόσον δίδεται ότι η H(Y/X)=H(f)=0,811 bits, η αμοιβαία πληροφορία η οποία αντιστοιχεί στο ποσό της πληροφορίας που περνά πάνω από το κανάλι (επιταχυντή) είναι

I(X;Y) = H(Y)-H(Y/X)=1,42-0,811=**0,609 bits**

Για να βρούμε τώρα την χωρητικότητα του καναλιού πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την αμοιβαία πληροφορία

$$C=\max I(X;Y)=\max[H(Y)-H(Y/X)] \Rightarrow$$

$$C=\max I(X;Y)=\max(H(Y)-H(Y/X))=\max(H(Y)-H(f))=\max H(Y)-H(f)$$

Θα μπορούσε να είναι $\max H(Y)=\log 3$ αλλά αυτή η τιμή δεν είναι εφικτή για καμμία τιμή της $p_X(x_i)$, $i=1,2$

Αν θέσουμε $p_X(x_1)=1-\pi$, και $p_X(x_2)=\pi$, τότε από τα $p_Y(y_i)$, $i=1,e,2$ δίνονται από τους παραπάνω τύπους τότε

$$\max H(Y)=\max[H((1-f)\pi,f,(1-f)(1-\pi))]=\max[(1-f)*H(\pi)+H(f)]=(1-f)*\max H(\pi)+H(f)$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$C=\max I(X;Y)=\max H(Y)-H(f)=(1-f)*\max H(\pi)+H(f)-H(f)=1-f=3/4=\mathbf{0{,}75\ bits}$$

Σημείωση:

Θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιούσε κατευθείαν τον γενικό τύπο της χωρητικότητας καναλιού με απόσβεση και να έφτανε αμέσως στο αποτέλεσμα 1-f χωρίς να χρειαστεί η παραπάνω ανάλυση.

ΘΕΜΑ 4

ΕΞ 2012Β

Μια ψηφιακή πηγή **3** συμβόλων $\{x_1, x_2, x_3\}$ εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο x_1 από την πηγή είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι πιθανότητες εκπομπής των άλλων δύο συμβόλων είναι ίσες. Να απαντηθούν τα ερωτήματα σε κάθε μία από τις παρακάτω 2 περιπτώσεις

α) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε κανάλι χωρίς θόρυβο. Ζητείται να βρεθούν:

i) Η χωρητικότητα του καναλιού C και η εντροπία της πηγής **H(X)**

ii) Η εντροπία **H(X/Y)**

β) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε ενθόρυβο κανάλι με πίνακα μετάβασης,

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθούν:

i) Η εντροπία της πηγής **H(X)** και η **H(Y/X)**

ii) Η αμοιβαία πληροφορία του ενθόρυβου καναλιού.

(Υπόδειξη: *Χρησιμοποιείστε τις παρακάτω τιμές των λογαρίθμων*

$$\log_2(3) \approx 1.58, \quad \log_2(0.4) \approx -1.322, \quad \log_2(0.3) \approx -1.737, \quad \log_2(0.75) \approx -0.415,$$
$$\log_2(0.35) \approx -1.515, \quad \log_2(0.275) \approx -1.862, \quad \log_2(0.375) \approx -1.415$$

)

α). Κανάλι χωρίς θόρυβο

i) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι υπόλοιπες είναι $p(x_2) = p(x_3) = 0.3$

Άρα η εντροπία της πηγής είναι:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2(p(x_i)) = -\left[0.4\cdot\log_2(0.4) + 0.3\cdot\log_2(0.3) + 0.3\cdot\log_2(0.3)\right] \approx 1.57\ bits$$

Γνωρίζω ότι η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς θόρυβο ισούται με τη μέγιστη τιμή του **H(X)** («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89) η οποία προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε

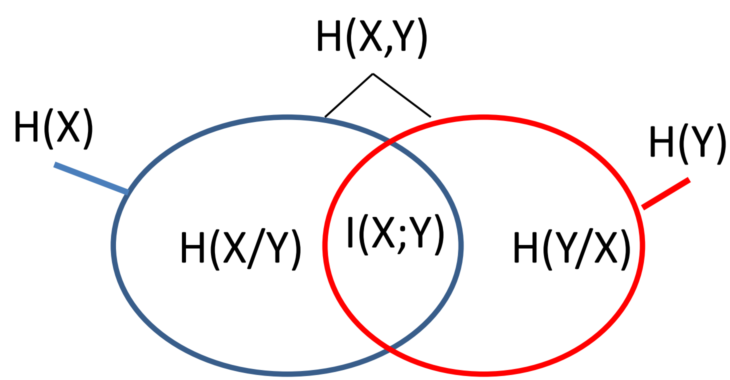
$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{3}$$

Η χωρητικότητα δίνεται από

$$C = \max(H(X)) = \log_2 q\big|_{q=3} = \log_2(3) = 1.58\ \text{bits/symbol}$$

όπου q είναι ο αριθμός συμβόλων εισόδου.

ii) Επιπλέον, η εντροπία H(X/Y) ισούται με 0 αφού X=Y κι όπως αποδεικνύεται και στο βιβλίο σελ. 90.



β) Ενθόρυβο Κανάλι

i) Αν στο κανάλι εισαγάγουμε θόρυβο δεν αναμένεται να αλλάξει η εντροπία της πηγής αλλά μόνο η χωρητικότητα του καναλιού η οποία αναμένεται να είναι μικρότερη από αυτή του ερωτήματος (α).
Επομένως η εντροπία της πηγής H(X) είναι ίδια με αυτή του ερωτήματος (α).

Δεδομένου ότι το κανάλι έχει πίνακα μετάβασης

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Η εντροπία H(Y/X) δίνεται από τον τύπο

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{3} p(x_i)H(Y/X=x_i) \qquad (1)$$

Άρα για κάθε i=1,2,3 έχουμε

$$H(Y/X=x_i)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις πιθανότητες κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης έχουμε:

$$H(Y/X=x_1)=-\sum_{j=1}^{3}p(y_j/x_1)\log p(y_j/x_1)=-0.5\log 0.5-0.5\log 0.5-0\log 0=1\,bits$$

$$H(Y/X=x_2)=-\sum_{j=1}^{3}p(y_j/x_2)\log p(y_j/x_2)=-0\log 0-0.25\log 0.25-0.75\log 0.75=0,811\,bits$$

$$H(Y/X=x_3)=-\sum_{j=1}^{3}p(y_j/x_3)\log p(y_j/x_3)=-0.5\log 0.5-0\log 0-0.5\log 0.5=1\,bits$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (1) έχουμε

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i)H(Y/X=x_i)=0.4\cdot 1+0.3\cdot 0.811+0.3\cdot 1\approx 0,943\,bits \qquad (2)$$

ii).

Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) θα κάνουμε χρήση του τύπου $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εξόδου $P(Y)=\{p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\}$ οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω

$$P[Y]=[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3,x_i)\right]$$

Γνωρίζω ότι ισχύει $p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)$ («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25) και επομένως θα έχουμε

$$P(Y,X)=\begin{bmatrix} p(y_1,x_1) & p(y_2,x_1) & p(y_3,x_1) \\ p(y_1,x_2) & p(y_2,x_2) & p(y_3,x_2) \\ p(y_1,x_3) & p(y_2,x_3) & p(y_3,x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p(x_1)\cdot p(y_1/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_2/x_1) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_1) \\ p(x_2)\cdot p(y_1/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_2/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_2) \\ p(x_3)\cdot p(y_1/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_2/x_3) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.4\cdot 0.5 & 0.4\cdot 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3\cdot 0.25 & 0.3\cdot 0.75 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0 & 0.3\cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0.225 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

- Οπότε το ζητούμενο δίνεται από ¶
- $$P[Y]=[p(y_1)\quad p(y_2)\quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3}p(y_1,x_i)\quad \sum_{i=1}^{3}p(y_2,x_i)\quad \sum_{i=1}^{3}p(y_3,x_i)\right]=$$ ¶
  $$=[0.35\quad 0.275\quad 0.375]$$
- $p(y_1)=0.35$ ¶
- $p(y_2)=0.275$ ¶
- $p(y_3)=0.375$ ¶

¶

Συνεπώς ¶

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{3}p(y_i)\log_2(p(y_i))=-[0,35\cdot\log_2(0,35)+0,275\cdot\log_2(0,275)+0,375\cdot\log_2(0,375)]=1.573\ bits$$

Από την παραπάνω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού είναι: ¶

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=1.573-0.943\approx 0.63\ bits$$

ΘΕΜΑ 4

ΓΕ5/2014

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις*: Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3-4/ΓΕ5/2008-09, Θ3/ΓΕ5/2010-11, Θ*

Θεωρείστε κωδικοποιητή γραμμικού κώδικα *μπλοκ* ελέγχου ισοτιμίας, C_1, τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ με επταψήφιες κωδικές λέξεις $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, οι οποίες ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

a) $x_1=u_1$, b) $x_2=u_2$, c) $x_3=u_3$, d) $x_4=u_4$,

e) $x_5=u_1\oplus u_2\oplus u_4$, f) $x_6=u_1\oplus u_2\oplus u_3$ και g) $x_7=u_2\oplus u_3\oplus u_4$.

Ο κωδικοποιητής χρησιμοποιείται για κωδικοποίηση και μετάδοση δυαδικής πληροφορίας.

Ζητείται:

(α) Να ελέγξετε κατά πόσο ότι ο γραμμικός κώδικας ελέγχου ισοτιμίας είναι συστηματικός.

(β) Να βρείτε τον Γεννήτορα και έναν Πίνακα Ελέγχου Ισοτιμίας του κώδικα.

(γ) Να χαρακτηρίσετε τη δυνατότητα «ανίχνευσης» & «διόρθωσης» λαθών του κώδικα. Επίσης, σχολιάσετε αν ο κώδικας είναι «τέλειος».

(δ) Να σχηματίσετε πίνακες Τυπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ.

(ε) Να βρείτε για την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης ΠΑΜΠ, πόσοι συνδυασμοί των 1, 2, και 3 σφαλμάτων αποκωδικοποιούνται σωστά.

(στ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος $\varepsilon<½$ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου.

- **(α).** Επειδή από τις σχέσεις των τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ με τις επταψήφιες κωδικές λέξεις $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, έχουμε ότι: 1) $x_1 = u_1$, 2) $x_2 = u_2$, 3) $x_3 = u_3$, 4) $x_4 = u_4$, καθώς και ότι 5) όλα τα ψηφία, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, των κωδικών λέξεων είναι Γραμμικοί Συνδυασμοί των ψηφίων u_1, u_2, u_3, u_4 της πληροφορίας, ο κώδικας είναι Συστηματικός Κώδικας Ελέγχου Ισοτιμίας.

- **β)** Από τις παραπάνω σχέσεις ψηφίων πληροφορίας με ψηφία κωδικών λέξεων, έχουμε ότι ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H είναι:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **γ)** Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H εμπεριέχει ως σειρές όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3. Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6 (βλ., σελ. 151 του βιβλίου «Θεωρίας της Πληροφορίας & Κωδικοποίησης) ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming. Επομένως, ο κώδικας είναι «Τέλειος» και έχει «απόσταση» d=3 (βλ. Άσκηση αυτό-αξιολόγησης 4.15). Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 (βλ. σελ. 4.2) είναι σε θέση να ανιχνεύει όλα τα «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 2, καθώς και να διορθώνει κάθε μεμονωμένο σφάλμα ή «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1.

- **δ)** Αφού ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming, όλα τα δυνατά «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1, θα περιέχονται ως οδηγοί των συνομάδων. Τα αντίστοιχα σύνδρομα είναι η γραμμές του H, όπως πολλαπλασιάζονται με το μοναδικό 1 του οδηγού. Επειδή, οι γραμμές του H (σύνδρομα) είναι όλες διαφορετικές, οι τυπικές διατάξεις αποκωδικοποίησης του κώδικα για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ συμπίπτουν και είναι:

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				**ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ**						
0	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**		**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**		**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**		**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

- **ε)** Σύμφωνα με τη τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, αποκωδικοποιούνται χωρίς σφάλμα, ή ο κώδικας έχει τη δυνατότητα διόρθωσης

- **a)** όλων (επτά) των διατάξεων μεμονωμένων σφαλμάτων μετάδοσης,
- **b)** καμίας διάταξης διπλού σφάλματος,
- **c)** καμίας διάταξης τριπλού σφάλματος.

- **στ)** Σύμφωνα με την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, η πιθανότητα σφάλματος, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος ε < ½ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου, είναι:

$$P_I(\varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon)^7 - 7\varepsilon(1-\varepsilon)^6$$

Όπου ο όρος $(1-\varepsilon)^7$ προκύπτει από την διάταξη μηδενικού (0000000) λάθους, και ο όρος $7\varepsilon(1-\varepsilon)^6$ από τις 7 πλήρως διορθώσιμες διατάξεις μεμονωμένου σφάλματος που υιοθετούνται στη ΤΔΑ για ΠΑΜΠ.

ΘΕΜΑ 5 ΕΞ 2012Β

Δίνονται οι συστηματικοί γραμμικοί κώδικες C1={00000, 10010, 01101, 11111} και C2={000000, 100101, 011010, 111111} και C3= {0000000, 1001011, 0110110, 1111101}. Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Ο ρυθμός πληροφορίας του κάθε κώδικα,
2. Μια βάση σε μορφή ΠΚΔΓ,
3. Τη διάσταση και την απόσταση καθενός από τους κώδικες C1, C2 και C3.
4. Ο αριθμός των σφαλμάτων που ανιχνεύει και διορθώνει καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.
5. Δείξτε από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν ανιχνεύει και από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν διορθώνει σωστά καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.

Απάντηση

1. Αφού όλοι οι κώδικες έχουν 4 κωδικές λέξεις, δηλαδή τα διαφορετικά μηνύματα είναι 4, αρκούν 2 bits για την παράστασή τους. Επομένως, ο ρυθμός πληροφορίας για τον κώδικα C1 είναι 2/5, για τον κώδικα C2 είναι 2/6 και για τον κώδικα C3 είναι 2/7.
2. Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε τις βάσεις των δεδομένων κωδίκων: για τον C1 η βάση είναι {10010, 01101}, για τον C2 {100101, 011010} και για τον C3 {1001011, 0110110}
3. Η διάσταση όλων των κωδίκων είναι 2 και οι αποστάσεις τους 2, 3 και 4, αντίστοιχα διότι είναι οι λέξεις με το ελάχιστο βάρος.
4. Ο κώδικας C1 ανιχνεύει 1 και δεν διορθώνει κανένα σφάλμα, ο κώδικας, C2 ανιχνεύει 2 και διορθώνει 1 και C3 ανιχνεύει 3 και διορθώνει 1 σφάλματα.
5. Ο κώδικας C1 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘10010’ γιατί το βάρος του συμπίπτει με την απόσταση και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘10000’ γιατί το βάρος του είναι μικρότερο της απόστασης d-1/2. Ομοίως, ο κώδικας, C2 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘100101’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘100001’ , και ο C3 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘1001011’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘1000001’.

ΕΞ2009Α

ΘΕΜΑ 5

Δίδεται ο ακόλουθος Πίνακας Ελέγχου Ισοτιμίας γραμμικού κώδικα **C**

$$H = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a_1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να προσδιοριστούν τα a_1, a_2, a_3 δεδομένου ότι μεταδόθηκε και ελήφθη χωρίς σφάλματα στο δέκτη η κωδική λέξη $r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ του **C**.

(β) Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας του **C.**

(γ) Αν παραληφθούν από τον αποκωδικοποιητή οι λέξεις
$r1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $r2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
αποκωδικοποιείστε τις λέξεις βάσει ΑΑΜΠ και προσδιορίστε αν θα ζητηθεί επανεκπομπή.

(Υπόδειξη: Για την απάντηση του ερωτήματος γ) δεν είναι απαραίτητη η δημιουργία όλου του ΤΔΑ)

(α) Αν δεν υπεισέλθουν σφάλματα κατά τη μετάδοση, τότε γνωρίζω ότι ισχύει $r \cdot H = 0$ (σελίδα 145). Επομένως θα έχω

$$r \cdot H = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a_1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 + a_1 + 1 & a_2 + 1 + 1 & 1 + a_3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 0$

Οπότε $a_2 = 0$

$a_3 = 0$

Οπότε ο τελικός Πίνακας Ισοτιμίας H είναι

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¶
(β) Ο γεννήτορας πίνακας του **C** δίνεται από ¶
¶

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ¶

.¶

(γ) Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα αρκεί να κάνουμε κάποιες διαπιστώσεις αναλύοντας τις τιμές του H. Έτσι θα αποφύγουμε να κατασκευάσουμε όλο την ΤΔΑ αφού μας ενδιαφέρουν μόνο εκείνα τα σύνδρομα τα οποία αντιστοιχούν στις παραληφθείσες λέξεις r1 και r2.

Έχουμε λοιπόν ότι το σύνδρομο που αντιστοιχεί στη λέξη r1 είναι

r1 . H= [0 1 0]

Άρα για να αποφανθούμε τι θα κάνει ο ΑΑΜΠ αποκωδικοποιητής αρκεί να βρούμε πιο είναι το πρότυπο σφάλματος ε1 και αν αυτό είναι μοναδικό. Το γεγονός ότι επίσης

ε1.H = [0 1 0] σημαίνει ότι ένα από τα ελαχίστου βάρους πρότυπα σφάλματος θα είναι η λέξη που έχει μονάδα στην αντίστοιχη θέση με αυτή της γραμμής του H που δίνει το σύνδρομο δηλαδή που στη συγκεκριμένη περίπτωση συμπίπτει με τη λέξη r1, δηλαδή έχουμε

r1=ε1=[0 0 1 0 0 0]

Άρα πρέπει να διαπιστώσουμε αν αυτό το πρότυπο σφάλματος είναι και το μοναδικό. Παρατηρούμε όμως ότι η 3η γραμμή του H υπάρχει και στη θέση 6 που σημαίνει ότι και η λέξη ε΄1= [0 0 0 0 0 1 0] αντιστοιχεί και αυτή στο ίδιο σύνδρομο το [0 1 0].

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι και οι δύο λέξεις, ε1 και ε΄1, αποτελούν πρότυπα σφάλματα ίδιου βάρους για το σύνδρομο [0 1 0] και άρα στην περίπτωση της r1 ο αποκωδικοποιητής θα ζητήσει επανεκπομπή.

Για την περίπτωση της λέξης $r2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ σκεφτόμαστε όπως και στην περίπτωση της r1. Δηλαδή το σύνδρομο της r2 είναι

r2 . H= [1 1 1]

Άρα για να αποφανθούμε τι θα κάνει ο ΑΑΜΠ αποκωδικοποιητής αρκεί να βρούμε ποιο είναι το πρότυπο σφάλματος ε2 και αν αυτό είναι μοναδικό. Το γεγονός ότι το σύνδρομο [1 1 1] μπορεί να προκύψει από πρόσθεση δύο συνδυασμών γραμμών του H, π.χ. $1^{η}$ γραμμή και $2^{η}$ γραμμή, ή $3^{η}$ και $4^{η}$, ή $2^{η}$ και $5^{η}$, ενώ δεν υπάρχει ως γραμμή στον H αυτό σημαίνει ότι το πρότυπο σφάλματος θα έχει βάρος 2 και οι μονάδες θα βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις της λέξης με αυτές των γραμμών που το άθροισμά τους δημιουργεί το σύνδρομο. Έτσι τα παρακάτω είναι πρότυπα σφάλματος ίδιου βάρους που έχουν το ίδιο σύνδρομο [1 1 1].

[1 1 0 0 0 0 0], [0 0 1 1 0 0 0] και [0 1 0 0 1 0 0]

Άρα και στην περίπτωση r2 ο ΑΑΜΠ αποκωδικοποιητής θα ζητήσει επανεκπομπή.

ΘΕΜΑ 3 / ΓΕ5 0809

Δίδεται ο γραμμικός κώδικας ελέγχου ισοτιμίας, C_1, όπου με $u_1u_2u_3$ συμβολίζεται το προς κωδικοποίηση μήνυμα και με $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$ η κάθε κωδική λέξη του γραμμικού κώδικα. Ο κώδικας C_1 ορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

I.1) $\mathbf{c_1 = u_1}$, **I.4)** $\mathbf{c_4 = u_1 \oplus u_2}$

I.2) $\mathbf{c_2 = u_2}$, **I.5)** $\mathbf{c_5 = u_1 \oplus u_3}$

I.3) $\mathbf{c_3 = u_3}$, **I.6)** $\mathbf{c_6 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3}$

(α) Πόσες είναι οι κωδικές λέξεις του κώδικα; Με τι ισούται ο πλεονασμός r του κώδικα; Με τι ισούται ο ρυθμός πληροφορίας R;

(β) Είναι ο κώδικας συστηματικός; Είναι γραμμικός; Πόσα σφάλματα μπορεί να ανιχνεύσει; Πόσα σφάλματα μπορεί να διορθώσει;

(γ) Έστω ότι τώρα χρησιμοποιούμε τον κώδικα C_2, **ο οποίος δίνεται από τις εξισώσεις**

1. **II.1)** $\mathbf{c_1 = u_1}$, **II.4)** $\mathbf{c_4 = u_1 \oplus u_2 \oplus 1}$
2. **II.2)** $\mathbf{c_2 = u_2}$, **II.5)** $\mathbf{c_5 = u_1 \oplus u_3}$
3. **II.3)** $\mathbf{c_3 = u_3}$, **II.6)** $\mathbf{c_6 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \oplus 1}$

Είναι ο κώδικας γραμμικός; Είναι συστηματικός; Πόσα σφάλματα μπορεί να ανιχνεύσει; Πόσα σφάλματα μπορεί να διορθώσει;

(δ) Δείξτε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σύνδρομα για να κάνουμε διόρθωση σφαλμάτων στο δέκτη όταν χρησιμοποιείται ο κώδικας C2, πιθανώς με κάποιες τροποποιήσεις/προσθήκες στον αλγόριθμο αποκωδικοποίησης. Δώστε τις αντιστοιχίες συνδρόμων-προτύπων σφάλματος που διορθώνει ο κώδικας και περιγράψτε πώς πρέπει να γίνει η αποκωδικοποίηση (δώστε δηλαδή τα βήματα του αλγορίθμου αποκωδικοποίησης).

5.

Θέμα 3 / ΓΕ5 / 0809

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = u_1 \\ c_2 = u_2 \\ c_3 = u_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{data}\\ \text{bits}\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} c_4 = u_1 \oplus u_2 \\ c_5 = u_1 \oplus u_3 \\ c_6 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{parity bits}\\ r = 3\end{array}$$

6 bits / κωδικολέξη

α) παράγονται με δυαδικό ανάπτυγμα του $\overbrace{u_1 u_2 u_3}^{3\text{ bits}}$

$\Rightarrow 2^3$ δυνατοί συνδυασμοί $\Rightarrow 2^3$ κωδικολέξεις

$$\text{Ρυθμός πληροφορίας} = \frac{\text{data bits}}{\text{codeword bits}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

β) Κώδικας συστηματικός $\underbrace{c_1 c_2 c_3}_{\text{data bits}}\ c_4 c_5 c_6$

* Δεν χρειαζόταν να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας σε τυπική μορφή (με μετατροπή σε ΠΚΔΓ μορφή του πίνακα των κωδικολέξεων)

$G = [\, I \,|\, M \,]$

Κώδικας γραμμικός διότι περιέχει τη μηδενική λέξη
($\gamma\iota\alpha\ u_1 = u_2 = u_3 = 0$) *

* Δεν χρειαζόταν υπολογισμός των κωδικολέξεων και έλεγχος της συνθήκης $\forall x, y \in C,\ x+y \in C$

Αριθμός σφαλμάτων που διορθώνει ο κώδικας.

Χρειάζεται υπολογισμός Απόστασης d.

α' τρόπος: Υπολογισμός όλων των κωδικολέξεων και εύρεση αυτής με το ελάχιστο βάρος (χρονοβόρος)

β' τρόπος: Κατασκευή γεννήτορα πίνακα.

*Σημείωση: Στην περίπτωση της άσκησης αρκούσε να δείξουμε ότι ο κώδικας περιέχει το μηδενικό στοιχείο. Επειδή τα ψηφία ισοτιμίας δίνονται με σχέσεις XOR των ψηφίων δεδομένων, σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\forall x, y \in C_1,\ x+y \in C_1$

Κώδικας $(n,k,d) = (6,3,d) \longrightarrow G = [I_3 \,\vdots\, M]$ 6.

$$G = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & & & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \to \text{βάρος} = 4 \\ \to \text{βάρος} = 3 \\ \to \text{βάρος} = \underline{\underline{3}} \end{matrix}$$

κωδικολέξεις βάσης κώδικα

Δεν υπάρχουν δύο μέλη της βάσης με κοινό τμήμα πλεονασμού ώστε από την πρόσθεσή τους να προκύψει λέξη βάρους 2, άρα $d = 3$.

Ικανότητα ανίχνευσης $d - 1 = 2$ σφαλμάτων ανά λέξη

-״- διόρθωσης $\frac{d-1}{2} = 1$ σφάλματος -״-

γ) C_2.

$$\text{data}\begin{cases} C_1 = u_1 \\ C_2 = u_2 \\ C_3 = u_3 \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} C_4 &= u_1 \oplus u_2 \oplus 1 \\ C_5 &= u_1 \oplus u_3 \\ C_6 &= u_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \oplus 1 \end{aligned}\right\} \text{parity}$$

Δεν μπορεί να προκύψει η μηδενική λέξη ⟹ μη γραμμικός

Είναι συστηματικός

Παρατήρηση $C_2 = C_1 + 000101$

ο C_2 είναι συνομάδα του C_1

άρα → έχει την ίδια απόσταση
→ διορθώνει / ανιχνεύει ίδιο αριθμό σφαλμάτων
} με τον C_1

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/Ε-ΟΣΣ/Ν.Δημητρίου/
31.05.2014

Τρόπος αποκωδικοποίησης

- Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας ΤΔΑ
- Για ληφθείσα κωδική λέξη r υπολογίζουμε την $r' = r + 000101$. Αποκωδικοποιούμε με ΤΔΑ του C_1 την r' και βρίσκουμε το πρότυπο σφάλματος e ⟹ σωστή λέξη $r_0 = r + e$

Δίκτυα Η/Υ

ΓΕ5/2014

ΘΕΜΑ 5

Στόχος της άσκησης *είναι η επανάληψη στα βασικά πρωτόκολλα επανεκπομπής.*

Μεθοδολογία Άσκησης: *ΓΕ0910/Θ5, ΓΕ3/1112/Θ3, ΓΕ3/1112/Θ4, ΓΕ3/1213/Θ2. ΓΕ3/1011/Θ4, ΓΕ3/1112/Θ4, ΓΕ3/1213/Θ3.*

(α) Σε ένα κανάλι με ρυθμό μετάδοσης δεδομένων 100 kbps γίνεται μετάδοση πλαισίων σταθερού μεγέθους 1029 bytes, από τα οποία τα 1024 bytes αποτελούν δεδομένα και τα 5 bytes αποτελούν την επιβάρυνση που οφείλεται στην επικεφαλίδα. Χρησιμοποιείται το πρωτόκολλο παύσης και αναμονής υποθέτοντας μηδενικό ρυθμό εσφαλμένων πακέτων. Το μέγεθος των πλαισίων επιβεβαίωσης είναι 8 bytes (συμπεριλαμβάνεται στο μέγεθος αυτό η επικεφαλίδα) και ο χρόνος επεξεργασίας σε κάθε κόμβο αμελητέος. Αν το μέγεθος ενός αρχείου προς μετάδοση δεν αποτελεί ακέραιο πολλαπλάσιο των 1024 bytes, τότε το υπόλοιπο συμπληρώνεται (bit-stuffing). Ο χρόνος διάδοσης είναι 80msec.

(i) Να υπολογιστεί ο συνολικός χρόνος μεταφοράς του αρχείου για την μετάδοση ενός αρχείου 126.038 bytes.

(ii) Να υπολογιστεί ο πραγματικός βαθμός χρήσης της ζεύξης, *η*, που ορίζεται ως ο λόγος του χρόνου που απαιτείται για τη μετάδοση των D bits καθαρών δεδομένων προς το συνολικό χρόνο που ξοδεύεται στη ζεύξη για να επιτευχθεί η μετάδοση αυτή.

α-i) Αφού το μέγεθος του αρχείου είναι 126.038 byte τότε σε κάθε πλαίσιο δεδομένων που μεταδίδονται τοποθετούνται 1204 byte του αρχείου και 5 byte της επικεφαλίδας. Ο αριθμός των πλαισίων είναι : [126.038 / 1024] = 124 πλαίσια. Το τελευταίο πλαίσιο θα συμπληρωθεί (bit-stuffing) καθότι126.038 / 1024 = 123,083984375

Ο συνολικός χρόνος μεταφοράς του αρχείου θα είναι:

$$S = n \cdot \left[TRANSP + TRANSA + 2xPROP \right]$$

Το πλαίσιο δεδομένων περιέχει D=1024 bytes δεδομένων και H=5 bytes επικεφαλίδα, οπότε:

$$TRANSP = \frac{8 \cdot (D+H)}{R} = \frac{8 \cdot (1024+5)}{100 \cdot 10^3} \sec = 82,32ms$$

Το πλαίσιο επιβεβαίωσης περιέχει 8 bytes οπότε:

$$TRANSA = \frac{8 \cdot ACK}{R} = \frac{8 \cdot 8}{100 \cdot 10^3} \sec = 0,64ms$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές και επιπλέον n=124 πλαίσια και $PROP = 80m\sec$ στην παραπάνω εξίσωση, προκύπτει ότι:

$$S = n \cdot (TRANSP + TRANSA + 2 \cdot PROP)$$

$$= 124 \cdot \left(82,2 + 0,64 + 2 \cdot 80\right) = 30112,16m\sec$$

$$\simeq 30,112 \sec$$

(α-ii) Ο πραγματικός βαθμός χρήσης της ζεύξης, n, αφορά τον χρόνο που πραγματικά μεταδίδονται δεδομένα. Έχοντας υπόψη ότι το τελευταίο πλαίσιο συμπληρώνεται τότε:

Τα 123 πλαίσια έχουν χρόνο μετάδοσης ίσο με $T_{file} = \dfrac{8 \cdot 126038 byte}{R}$. Οπότε ο βαθμός χρήσης θα είναι

$$\eta = \frac{T_{file}}{S} = \frac{8 \cdot 126038 / 100 \cdot 10^3}{30.112 \sec} = 33\%$$

Θ5/ΓΕ5/2014

(β) Σε ένα κανάλι γίνεται μετάδοση πλαισίων σταθερού μεγέθους 1024 bytes με ρυθμό μετάδοσης δεδομένων 4 Mbps, χρησιμοποιώντας το πρωτόκολλο οπισθοδρόμησης κατά N με μέγεθος παραθύρου W = 6. Τα πλαίσια δεδομένων δεν έχουν επιβαρύνσεις και το μέγεθος των πλαισίων επιβεβαίωσης θεωρείται αμελητέο. Θεωρούμε ότι στο κανάλι δεν υπάρχουν σφάλματα μετάδοσης. Αν ο χρόνος διάδοσης ενός αρχείου 435928 bytes είναι 1,565 sec και η καθυστέρηση διάδοσης είναι 2 μs/km να βρείτε την απόσταση d μεταξύ των κόμβων εκπομπής και λήψης. (Αν το μέγεθος ενός αρχείου προς μετάδοση δεν αποτελεί ακέραιο πολλαπλάσιο των 1024 bytes, τότε το υπόλοιπο συμπληρώνεται (bit-stuffing)) (β) Με μήκος πλαισίου 1024 bytes, για την μετάδοση ενός αρχείου μεγέθους 435928bytes θα απαιτηθούν: N = [435928 / 1024] = 425,7109375 = 426 πλαίσια

Ο χρόνος που απαιτείται για την μετάδοση W=6 πλαισίων θα είναι:

$$\begin{aligned} S &= TRANSP + TRANSA + 2xPROP \\ &= TRANSP + 2xPROP \end{aligned}$$

, αφού το μέγεθος των πλαισίων επιβεβαίωσης είναι αμελητέο. Οπότε η μετάδοση του συνόλου των πλαισίων θα είναι:

$S_{total} = \left[\frac{N}{W}\right]\cdot(TRANSP + 2xPROP)$. Επιλύοντας ως προς τον χρόνο διάδοσης είναι:

$$PROP = \frac{S_{total} - \left[\frac{N}{W}\right]\cdot TRANSP}{2\cdot\left[\frac{N}{W}\right]} \Rightarrow$$

$$d\cdot 2\mu\sec/km = \frac{S_{total} - \left[\frac{N}{W}\right]\cdot TRANSP}{2\cdot\left[\frac{N}{W}\right]} \Rightarrow$$

$$d = \frac{S_{total} - \left[\frac{N}{W}\right]\cdot TRANSP}{2\cdot\left[\frac{N}{W}\right]\cdot 2\mu\sec/km}$$

όπου ο χρόνος διάδοσης αντικαταστάθηκε από την απόσταση d των κόμβων επί της καθυστέρησης διάδοσης.

Αντικαθιστώντας N=426, S_{total}=1.565 sec, W=6, $TRANSP = \frac{L}{R} = \frac{8\cdot 1024}{4\cdot 10^6}\sec$ προκύπτει ότι

d=4998,6km

ΘΕΜΑ 6

ΓΕ5/2014

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τα βασικά πρωτόκολλα επανεκπομπής.*

Σχετικές ασκήσεις*: ΓΕ0910/Θ5, ΓΕ3/1011/Θ4, ΓΕ3/1112/Θ3, ΓΕ3/1112/Θ4, ΓΕ3/1213/Θ2, ΓΕ3/1213/Θ3.*

Μία ζεύξη επικοινωνίας παρέχει 1 Mbps για την επικοινωνία της Γης με τη σελήνη. Η ζεύξη αυτή χρησιμοποιείται για να την αποστολή έγχρωμων εικόνων από τη σελήνη. Κάθε εικόνα περιέχει 16.000 x 16.000 pixels και 12 bits χρησιμοποιούνται για καθένα από τα συστατικά τριών χρωμάτων (R, G, B) του κάθε pixel ανα συστατικό χρώματος.

α) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μετάδοσης εικόνων ανά δευτερόλεπτο μέσω της ζεύξης.

β) Αν κάθε εικόνα μεταδίδεται ως ένα ενιαίο κομμάτι, πόσος χρόνος χρειάζεται μέχρι να ληφθεί μία επιβεβαίωση από τη Γη; Θεωρείστε ότι ο χρόνος επιβεβαίωσης (TRANSA) είναι πολύ μικρότερος από το χρόνο μετάδοσης (TRANSP). Η απόσταση γης-σελήνης είναι 375000 km και η ταχύτητα διάδοσης ενός σήματος είναι 3×10^8 m/sec.

γ) Να υποθέσετε ότι για την ανωτέρω μετάδοση οι εικόνες υποδιαιρούνται σε πακέτα δεδομένων μεγέθους 5000 bytes και σε κάθε πακέτο προστίθενται 20 bytes επικεφαλίδας. Να υπολογίσετε το βέλτιστο μέγεθος παραθύρου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση εφαρμογής πρωτοκόλλων επανεκπομπής Go–Back–N και Selective Repeat υποθέτοντας μηδενικό ρυθμό εσφαλμένων πακέτων και επιβεβαιωσεις μεγέθους 20 bytes (συμπεριλαμβάνεται στο μέγεθος αυτό η επικεφαλίδα). Στη συνέχεια, για το μέγεθος παραθύρου που βρήκατε να υποθέσετε ότι ο ρυθμός σφάλματος bit (Bit Error Rate) είναι ίσος με 3×10^{-8} και να υπολογίσετε την απόδοση των 2 πρωτοκόλλων επανεκπομπής Go–Back–N και Selective Repeat υποθέτοντας και για τα δύο πρωτόκολλα ότι ο χρόνος προθεσμίας T να είναι ίσος με εκείνη την τιμή του χρόνου μετάβασης μετ' επιστροφής που δίδει τη μέγιστη απόδοση του 100% απουσία σφαλμάτων μεταφοράς .

Α) Ο ρυθμός μετάδοσης των εικόνων ανά δευτερόλεπτο είναι:

$$\frac{1\ x\ 10^{6}\ \dfrac{bits}{sec}}{16000^{2}\ \ x\ 12\ x\ 3\ \dfrac{bits}{image}} = 1.085\ x\ 10^{-4}\ image/sec$$

Β) Ο συνολικός χρόνος για τη λήψη μίας επιβεβαίωσης από τη Γη, θεωρώντας ότι TRANSA<<TRANSP είναι:

$$t_0 = TRANSP + 2 * PROP = \frac{\left(16000^{2}\ \ x\ 12\ x\ 3\ \dfrac{bits}{image}\right)}{1\ x\ 10^{6}\ \dfrac{bits}{sec}} + 2\,\frac{375000\ \ x\ 10^{3} m}{3\ x\ 10^{8}\ \dfrac{m}{sec}}$$

$$= 9216 + 2\ x\ 1.25 = \text{9218.5 sec/image}$$

Σημειώστε ότι αν κάθε εικόνα μεταδίδεται σε ένα ενιαίο κομμάτι, η καθυστέρηση διάδοσης $PROP$ είναι ασήμαντη σε σύγκριση με την καθυστέρηση μετάδοσης TRANSP.

Γ) Γνωρίζουμε ότι προκειμένου να βελτιστοποιήσουμε την αποδοτικότητα, η W θα έπρεπε να επιλεχθεί έτσι ώστε, χωρίς σφάλμα, τα πακέτα να μεταδίδονται συνέχεια.

Και για τα 2 πρωτόκολλα επανεκπομπής η απόδοση απουσία σφαλμάτων είναι

$$n = W\frac{TRANSP}{TRANSP + 2PROP + TRANSA}$$

Θέτοντας

$$n = 100\%$$

και αντικαθιστώντας

TRANSP=$\frac{(5000+20)8}{10^6} = 0.04016sec$

TRANSA=$\frac{(20)8}{10^6} = 0.00016sec$

2PROP=2.5sec

λαμβάνουμε W=64

Με βάση την τιμή αυτή του παραθύρου υπολογίζουμε τις αποδόσεις των πρωτοκόλλων υποθέτοντας πιθανότητα επιτυχούς μετάδοσης πακέτου δεδομένων και λήψης επιβεβαίωσης την εξής:

$p = p_{succ,data} \cdot p_{succ,ack} = (1 - 3 \cdot 10^{-8})^{(5000+20)8} \cdot (1 - 3 \cdot 10^{-8})^{(20)8}$ =0,9987911

Για να υπολογίσουμε την αποδοτικότητα της μετάδοσης, μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της σελ.124 του τόμου Γ.

$$n_{GBN} = \frac{1}{1+W\frac{1-p}{p}} = 0{,}9281$$

$$n_{SRP} = \frac{2+(1-p)(W-1)}{2+(1-p)(3W-1)} = 0{,}9306$$

Πρωτόκολλα Επανεκπομπής

ABP

When PER=0 $$n_{ABP} = \frac{TRANSP}{RTT}$$

When PER>0 $$n_{ABP} = \frac{TRANSP}{RTT + T\frac{1-p}{p}}$$

GBN

When PER=0 $$n_{GBN} = \min\left\{1, W\frac{TRANSP}{RTT}\right\}$$

When PER>0 $$n_{GBN} = \frac{TRANSP}{TRANSP + T\frac{1-p}{p}}$$

When PER>0

AND T=WxTRANSP $$n_{GBN} = \frac{1}{1+W\frac{1-p}{p}}$$

$$p = \text{Prob(succ.data packet Tx AND succ. ACK Rx)}$$

SRP

When PER=0 $$n_{SRP} = \min\left\{1, W\frac{TRANSP}{RTT}\right\}$$

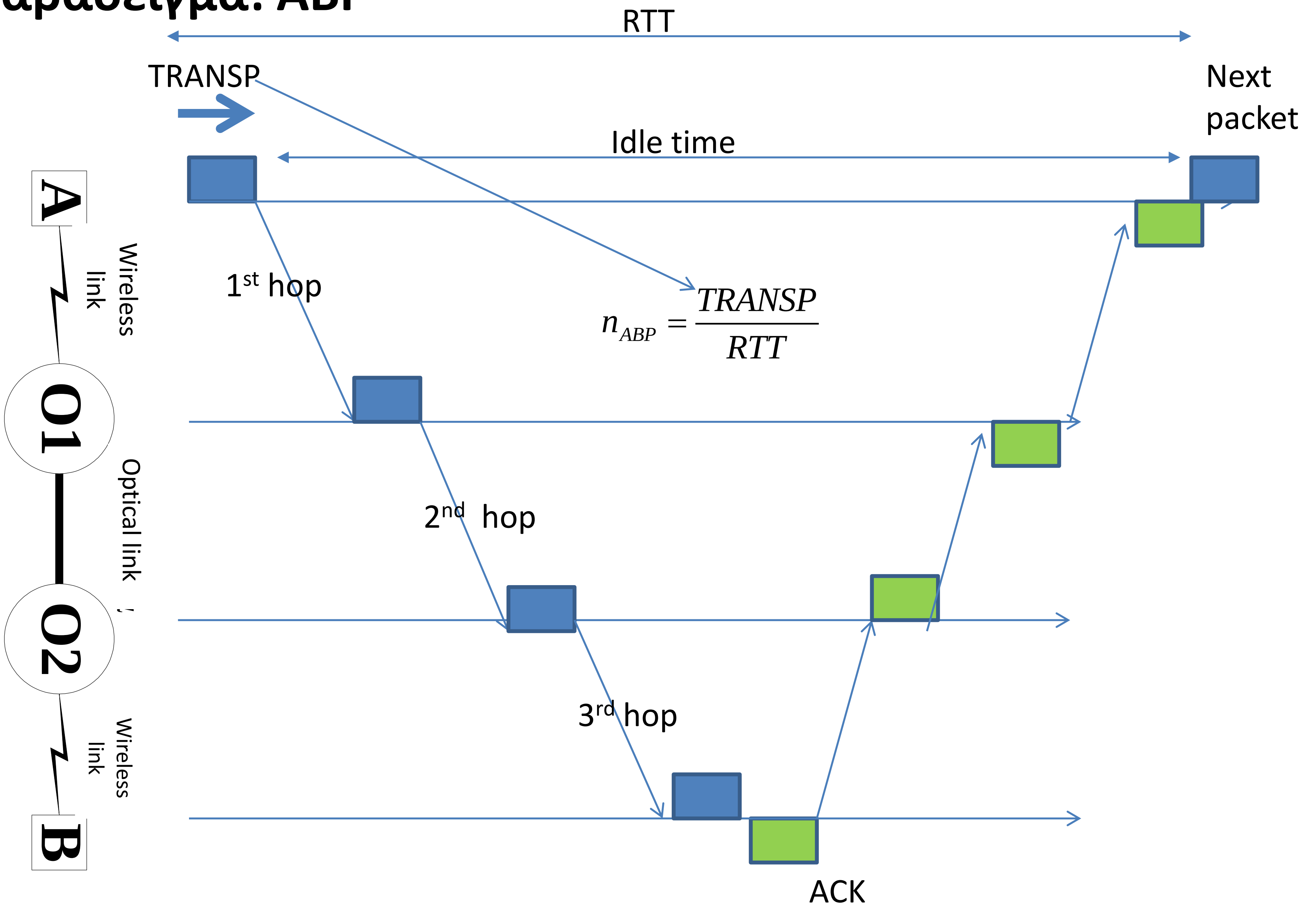
When PER>0

AND T=WxTRANSP $$n_{SRP} \approx \frac{2+(1-p)(W-1)}{2+(1-p)(3W-1)}$$

AND $(1-p)W \le 10\%$

- Σημείωση: Όταν έχουμε διαδοχικούς συνδέσμους μεταξύ αποστολέα και παραλήπτη, στον αριθμητή της έκφρασης που δίνει την απόδοση του πρωτοκόλλου λαμβάνουμε υπόψη *μόνο* το χρόνο μετάδοσης πακέτου/πακέτων στον *πρώτο* σύνδεσμο.

Παράδειγμα: ABP



<u>ΘΕΜΑ 3</u> ¶ ΕΞ 2010Β

Ένας μηχανικός δικτύου θέλει να δημιουργήσει μία ζεύξη μεταξύ 2 σημείων με οπτική ίνα στην οποία θα γίνεται χρήση του πρωτοκόλλου GBN. Έχει παρατηρηθεί ότι σε ζεύξεις με οπτική ίνα ο ρυθμός εσφαλμένων πακέτων (Packet Eror Rate, PER) σε κάθε κατεύθυνση της ζεύξης είναι σταθερός και ίσος με 0,001 και είναι ανεξάρτητος της απόστασης μεταξύ των κόμβων και του μεγέθους των πακέτων. Εάν θεωρήσουμε ότι για το πρωτόκολλο επανεκπομπής ο χρόνος προθεσμίας T να είναι ίσος με εκείνη την τιμή του χρόνου μετάβασης μετ' επιστροφής που δίδει τη μέγιστη απόδοση του 100% απουσία σφαλμάτων μεταφοράς, να βρεθούν:¶

(α) Η μέγιστη δυνατή ακέραια τιμή του παραθύρου W του πρωτοκόλλου GBN έτσι ώστε η απόδοση στην οπτική ζεύξη να μην πέσει κάτω από το 95%.¶

(β) Το μήκος L της οπτικής ίνας που συνδέει τα δύο σημεία αν είναι γνωστά ότι: i) TRANSP=TRANSA=10^{-6} sec, ii) το μέγεθος παραθύρου W=52 δίνει απόδοση 100% του πρωτοκόλλου GBN απουσία λαθών και iii) h ταχύτητα διάδοσης φωτός σε οπτική ίνα είναι C=200000 km/sec¶

(α) Γνωρίζουμε ότι η απόδοση του πρωτοκόλλου GBN δίνεται από τον τύπο και η οποία πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 95%

$$\eta_{GBN}(p)=\frac{1}{1+\frac{S}{TRANSP}\frac{1-p}{p}}\geq 0.95$$

Επειδή το T=S και με δεδομένο ότι W=S/TRANSP αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\eta_{GBN}(p)=\frac{1}{1+W\frac{1-p}{p}}\geq 0.95$$

Λύνοντας ως προς W έχουμε ότι

$$W\leq\frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{0.95}-1\right)$$

Αντικαθιστώντας στη παραπάνω εξίσωση τις τιμές για p=(1-PER)(1-PER)=0,998 βρίσκουμε ότι τα παράθυρο πρέπει να είναι

$$W\leq 26,26$$

Άρα η μέγιστη ακέραια τιμή του παραθύρου πρέπει να είναι W=26 για να μην πέσει η απόδοση του πρωτοκόλλου κάτω από 95%

$$\frac{1}{1+\frac{1-p}{p}W}\geq 0.95\Leftrightarrow\frac{1}{0.95}\geq 1+\frac{1-p}{p}W\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{0.95}-1\geq\frac{1-p}{p}W\Leftrightarrow W\leq\frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{0.95}-1\right)$$

Θ3/ΕΞ2009Α

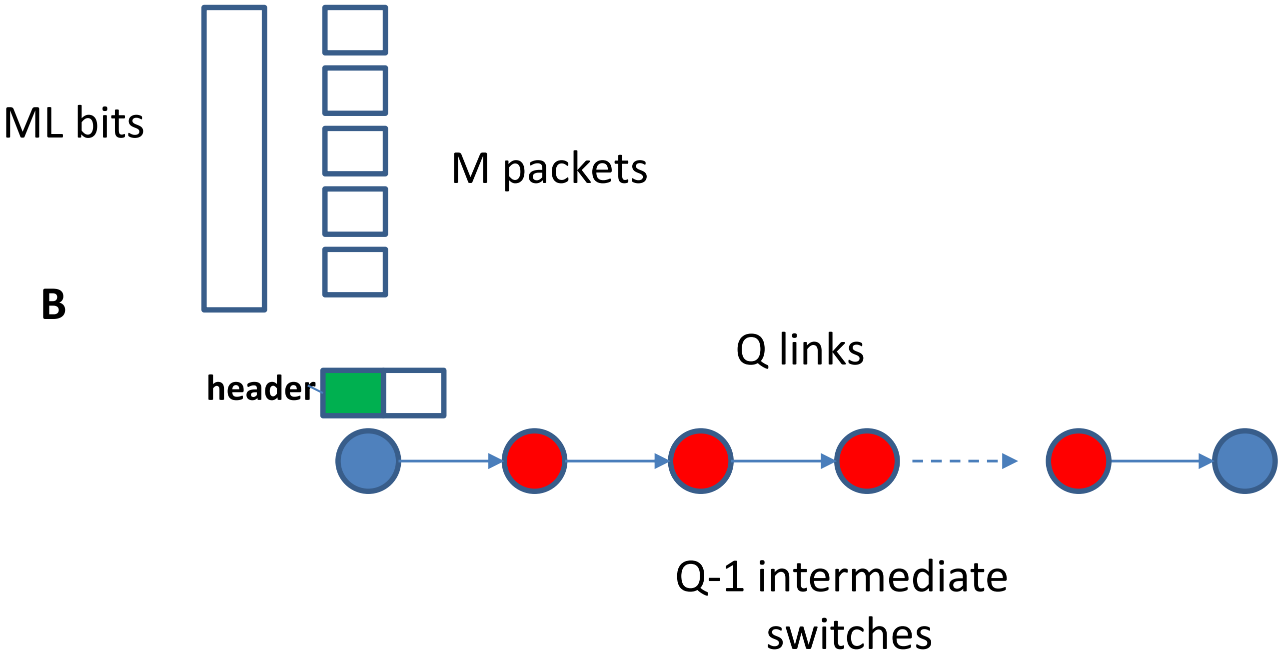
Έστω δύο κόμβοι Α και Β ενός δικτύου απέχουν μεταξύ τους L=500 km. Μεταξύ των κόμβων Α και Β παρεμβάλλονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους N ενδιάμεσοι κόμβοι, οι οποίοι προωθούν ό,τι πακέτα λαμβάνουν (βλ. σχήμα) μέσω οπτικής ίνας. Ο ρυθμός μετάδοσης των συνδέσμων μεταξύ όλων των κόμβων είναι ίσος με $R=10^7$ bps ενώ η ταχύτητα διάδοσης είναι $C=2x10^8$ m/sec.

α) Αρχικά ο κόμβος Α θέλει απλά να μεταδώσει ένα αρχείο μεγέθους D=1 Gb ($1Gb=10^9$ bits) στον κόμβο Β μέσω πακέτων μήκους P=1Kb ($1Kb=10^3$ bits) το καθένα. Να βρεθεί, ο συνολικός χρόνος μετάδοσης όλου του αρχείου $T_{ολ}$ αν γνωρίζουμε ότι N=9.

β) Μεταξύ των κόμβων Α και Β εφαρμόζεται ενιαίο πρωτόκολλο επανεκπομπής GBN από τον Α έως τον Β (end-to-end) για μετάδοση πακέτων μήκους P=1Kb ($1Kb=10^3$ bits) το καθένα. Αν υποθέσουμε ότι N=9 (οι κόμβοι που παρεμβάλλονται με ίσες αποστάσεις μεταξύ τους είναι 9) και οι επιβεβαιώσεις είναι ίδιου μήκους με τα πακέτα P να βρείτε:

1. Το μέγεθος του παραθύρου W για να έχουμε απόδοση πρωτοκόλλου 90% απουσία λαθών. Θεωρείστε ότι ο χρόνος προθεσμίας T είναι ίσος με τον αντίστοιχο χρόνο μετάβασης μετ' επιστροφής S μεταξύ των κόμβων Α-Β

2. Την πιθανότητα επιτυχούς μετάδοσης ενός πακέτου p, αν γνωρίζετε ότι ο ρυθμός ροής πακέτων (ρυθμοαπόδοση) που επιτυγχάνεται είναι $\lambda=10^6$ bits/sec και ότι ο χρόνος προθεσμίας T είναι κατά 1/7 προσαυξημένος του S.



Single link-hop delay $(L+2h)/R$

1^{st} packet arrives at destination after Q hops $Q(L+2h)/R$

2^{nd} packet arrives at destination after Q+1 hops $Q(L+2h)/R+(L+2h)/R$

M^{th} packet arrives at destination after Q+M-1 hops $Q(L+2h)/R+\left(M-1\right)(L+2h)/R$

Total file transmission delay $(Q+M-1)(L+2h)/R$

Ο χρόνος μετάδοσης TRANSP του πακέτου σε κάθε σύνδεσμο

$$TRANP = P/R = 10^3/10^7 \text{ sec} = 10^{-4} \text{ sec} \qquad (1)$$

Ο χρόνος διάδοσης $PROP_i$ σε κάθε ένα από τους συνδέσμους

$$PROP_i = \frac{\left(\frac{L}{N+1}\right)}{C} = \frac{\left(\frac{5\cdot 10^5}{9+1}\right)}{2\cdot 10^8} = 2,5\cdot 10^{-4} \text{ sec} \qquad (2)$$

Το πλήθος K των πακέτων που χρειάζονται για να μεταδοθεί όλο το αρχείο

$$K = \frac{D}{P} = \frac{10^9}{10^3} = 10^6 \text{ πακέτα} \qquad (3)$$

Με βάση την άσκηση αυτοαξιολόγησης 2.1 γνωρίζουμε ότι για N΄ συνδέσμους ισχύει ότι ο συνολικός χρόνος μετάδοσης είναι

$$T_{ολ} = t_N + t_1(K-1) = t_1(N'+K-1)$$

Αλλά στην περίπτωση μας είναι N΄=N+1. Επίσης για τον υπολογισμό του χρόνου t_1 εκτός από το χρόνο μετάδοσης TRANSP πρέπει να ληφθεί υπόψη και ο χρόνος διάδοσης $PROP_i$ που στην α.α 1.2 θεωρείτο αμελητέος. Οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$T_{ολ} = t_1(N+1+K-1) = (TRANSP + PROP_i)(N+K)$$

$$T_{ολ} = t_1(N+K) = 3,5\cdot 10^{-4}(9+10^6) = 350,00315 \text{ sec}$$

1. Πρέπει πρώτα να βρούμε το χρόνο μετάβασης μετ' επιστροφής, S. Αυτός αποτελείται από το χρόνο που χρειάζεται ένα πακέτο να μεταβεί μέσω των N+1 συνδέσμων από το A στο B και είναι t_{N+1} και το χρόνο t_{ack} που χρειάζεται να παραληφθεί από τον A η επιβεβαίωση που στέλνει ο B. Ο χρόνος t_{ack} είναι ίσος με τον t_{N+1} διότι η επιστροφή έχει τους ίδιους χρόνους μετάδοσης και διάδοσης με τη διαδρομή των πακέτων. Άρα

$$S = t_{N+1} + t_{ack} = 2 \cdot t_{N+1} = 7 \cdot 10^{-3} \sec \qquad (8)$$

Η απόδοση του πρωτοκόλλου Go-Back-N δίνεται από τη σχέση

$$\eta_{GBN} = \min\left\{1, \frac{W \times TRANSP}{S}\right\} \qquad (9)$$

Οπότε με δεδομένο ότι η απόδοσή του είναι 90% αντικαθιστώντας στην (9) τις τιμές των S και TRANSP από τις (8) και (1) έχουμε

$$\eta_{GBN} = \frac{W \times TRANSP}{S} \Leftrightarrow 0,9 = W \times \frac{TRANSP}{S} \Leftrightarrow$$

$$W = 0,9 \times \frac{S}{TRANSP} = 0,9 \times \frac{7 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 63$$

<u>2</u>

$$\lambda = nR = R\frac{TRANSP}{TRANSP + T\,\dfrac{1-p}{p}} =$$

$$= R\frac{TRANSP}{TRANSP + \dfrac{8RTT}{7}\cdot\dfrac{1-p}{p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{6} = 10^{7}\frac{10^{-4}}{10^{-4} + \dfrac{8\cdot 7\cdot 10^{-3}}{7}\cdot\dfrac{1-p}{p}} \Rightarrow$$

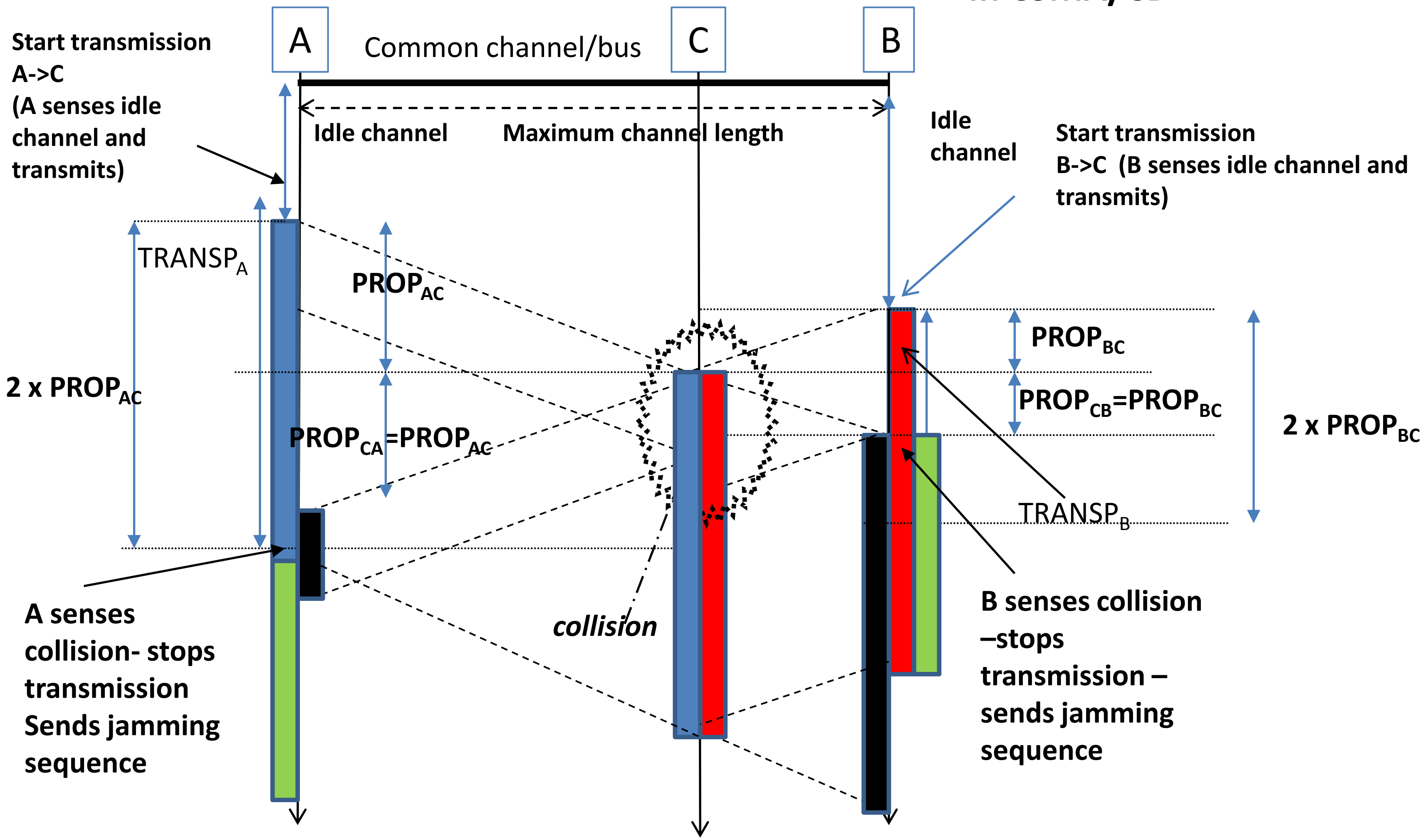
$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{0.1 + 8\cdot\dfrac{1-p}{p}} \Rightarrow 0.1 + 8\cdot\frac{1-p}{p} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot\frac{1-p}{p} = 0.9 \Rightarrow 8 - 8p = 0.9p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{8}{8.9} = \frac{80}{89}$$

Μερικές επισημάνσεις σε ασκήσεις Δικτύων Η/Υ

Collision Detection condition In CSMA/CD



In order for the transmitter to sense a collision while transmitting the packet we must have

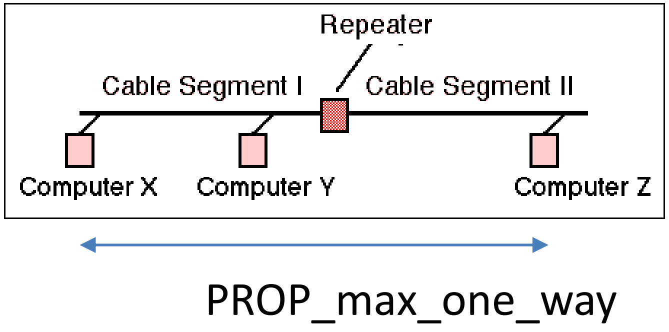
TRANSP ≥ 2 PROP

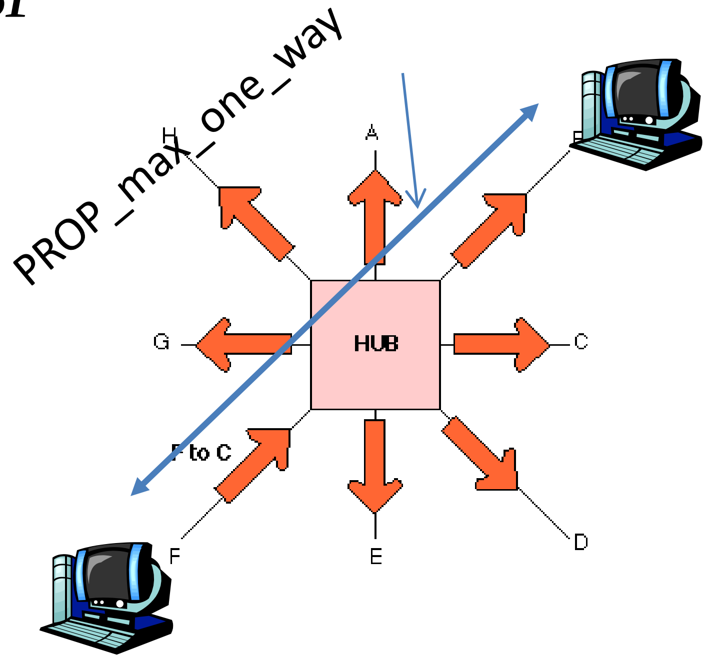
Worse Case: C is co-located with B (maximum distance from A)

TRANSP≥2PROP$_{MAX_ONE\ WAY}$ (maximum propagation time end-end)

Απόδοση CSMA CD

$$n = \frac{1}{1 + 5\frac{PROP_{MAX,one\_way}}{TRANSP}}$$





<u>**ΘΕΜΑ 3**</u> ΕΞ 2013Α

Ας θεωρήσουμε ένα κανάλι πολλαπλής πρόσβασης ενός δικτύου με χωρητικότητα C=100 Mbits/sec και μήκος D=600m πάνω στο οποίο συνδέονται N σταθμοί διαδοχικά και με ίσες αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών σταθμών. Πάνω στο κανάλι χρησιμοποιείται το πρωτόκολλο τύπου CSMA/CD που έχει απόδοση 0,4 ενώ η ταχύτητα διάδοσης του σήματος στο κανάλι είναι V=200000 km/sec.

α) Να υπολογίστε το ρυθμό ροής σε frames/sec του καναλιού συνολικά καθώς και το αντίστοιχο ελάχιστο μήκος του frame (πακέτο) το οποίο χρησιμοποιείται από τους N σταθμούς όταν αυτοί μεταδίδουν. *(8 μονάδες)*

β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι χρήστες σε καθένα από τους N σταθμούς στέλνουν βίντεο. Το βίντεο που στέλνουν έχει γυριστεί με ρυθμό 24 εικόνες/sec. Η κάθε εικόνα αποτελείται από 1000 στοιχειώδη κομμάτια (pixels). Το κάθε pixel που αντιστοιχεί στην φωτεινότητα είναι δυνατόν να πάρει μία εκ των 256 τιμών, χρειάζονται δηλαδή 8 bits για να κωδικοποιηθεί.

i) Πόσα frames ανά sec στέλνει ο κάθε σταθμός στο κανάλι για να μεταδίδει το βίντεο; *(5 μονάδες)*

ii) Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός σταθμών N που μπορεί να υποστηριχτεί από το παραπάνω δίκτυο απόδοσης 0,4; *(7 μονάδες)*

α)

Εφόσον η απόδοση είναι η=0,4 αυτό σημαίνει ότι από τον τύπο της απόδοσης του πρωτοκόλλου CSMA/CD έχουμε

$$\eta_{CSMA/CD} = \frac{1}{1+5a} = 0.4, \quad a = \frac{PROP}{TRANSP}$$
$$\alpha = 0.3$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $PROP = \dfrac{D(\text{Απόσταση})}{V(\text{Ταχύτητα Διάδοσης})}$ και $TRASNP = \dfrac{F \text{ (Μέγεθος πλαισίου)}}{C(\text{Χωρητικότητα Καναλιού})}$

Άρα

$$a = \frac{PROP}{TRANSP} = \frac{\frac{D}{V}}{\frac{F}{C}} = 0.3 \Rightarrow F = \frac{C \cdot D}{0.3 \cdot V} = \frac{10^8 (bits/\sec) \cdot 600m}{0.3 \cdot 2 \cdot 10^8 (m/\sec)} \Rightarrow F = 1000\ bits$$

Αφού το κανάλι έχει χωρητικότητα 100 Mbits/sec και η απόδοσή του είναι 0,4 συνεπάγεται ότι ο μέγιστος συνολικός ρυθμός μετάδοσης που υποστηρίζεται είναι

ρ=40 Mbits/sec = 40000 frames/sec.

Προσοχή: Εφόσον δίνεται η απόδοση του πρωτοκόλλου, έχει οριστεί η σχέση μεταξύ TRANSP, PROP, κι εδώ δεν ισχύει ότι TRANSP=TRANSPmin=2PROP, αλλά TRANSP=3.3PROP

β)

Ο ρυθμός δεδομένων που παράγεται από έναν χρήστη είναι:

r=(24 εικόνες/sec) x 1000 (pixels/εικόνα) x (8 bits/pixel)=192.000 bits/sec=192Kbits/sec.

(i) Άρα με δεδομένο ότι το κάθε frame έχει μήκος 1000 bits τότε ο κάθε χρήστης στέλνει 192 frames/sec

(ii) Εφόσον ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης στο δίκτυο είναι 40000 frames/sec και ο κάθε κόμβος πρέπει να στέλνει 192 frames/sec τότε ο μέγιστος αριθμός των σταθμών που μπορεί να υποστηρίξει το δίκτυο είναι:

N_{max}=(40000 frames/sec)/(192 frames/sec)=208.33, δηλαδή 208 κόμβοι.

IP addressing

Subnet Mask : Μετατροπή σε δυαδική μορφή : ‘1’s :network id , ‘0’s :host id bits
Network id: συνδυασμοί αριστερών bits για address classes
0 : Class A
10: Class B
110: Class C

Host id:
All ‘0’s : subnet
All ‘1’s : broadcast address (within subnet)

Εναλλακτική αναπαράσταση: X.Y.Z.W / S
S : o αριθμός των ‘1’ (από αριστερά προς τα δεξιά) στη subnet mask
e.g. 255.255.255.128 συμβολίζεται στην IP address X.Y.Z.W ως X.Y.Z.W/25

IP addressing methodology (cont'd)

Subnet address= IP address AND subnet mask

Π.χ. 202.60.215.150/20

```
       11001010.00111100.11010111.10010110
AND    11111111.11111111.11110000.00000000
       11001010.00111100.11010000.00000000 = 202.60.208.0
```

Broadcast Address = IP address OR inverted subnet mask

Π.χ. 202.60.215.150/20

```
       11001010.00111100.11010111.10010110
OR     00000000.00000000.00001111.11111111
       11001010.00111100.11011111.11111111 = 202.60.223.255
```

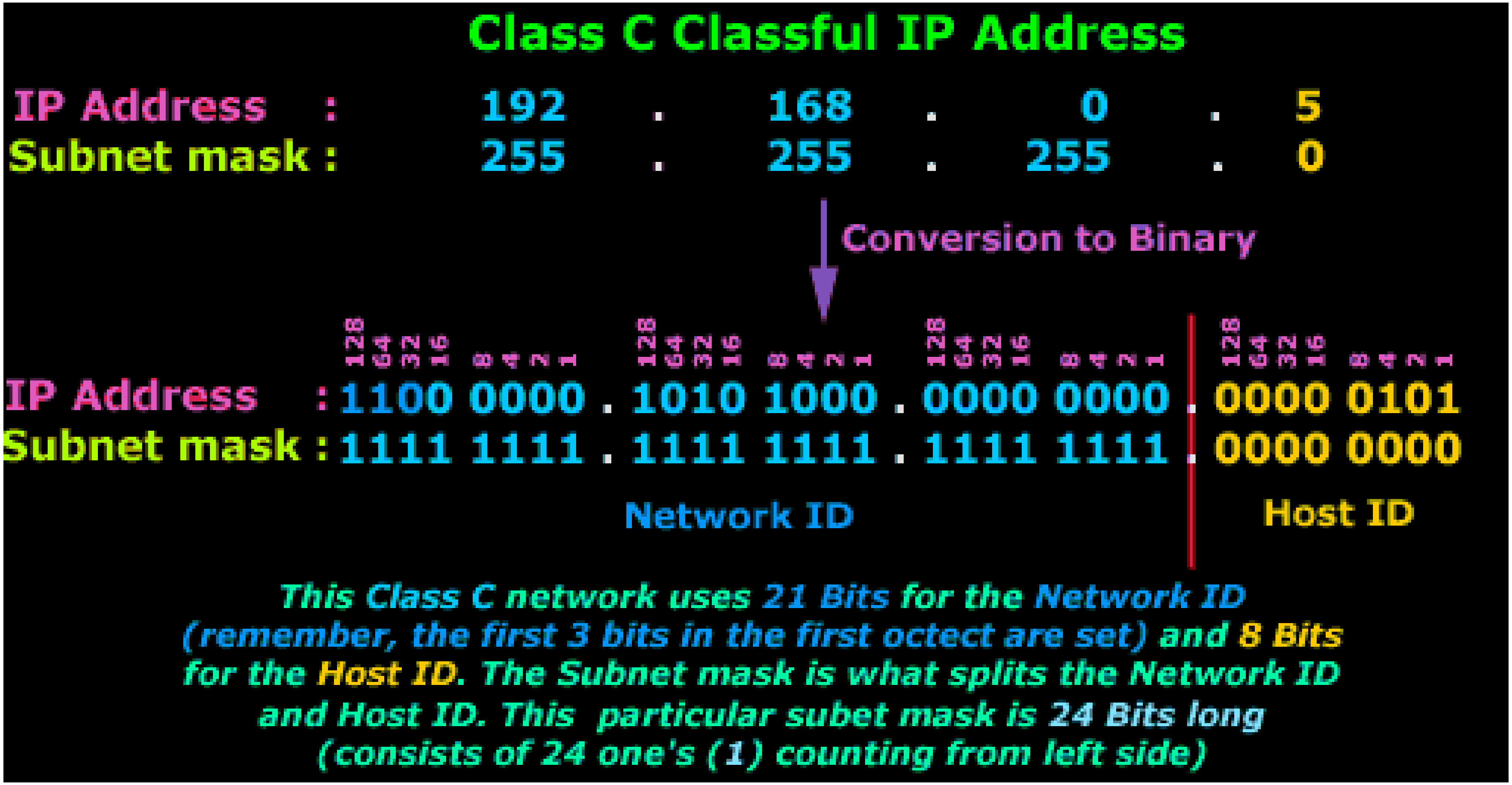
host number =IP address AND inverted subnet mask

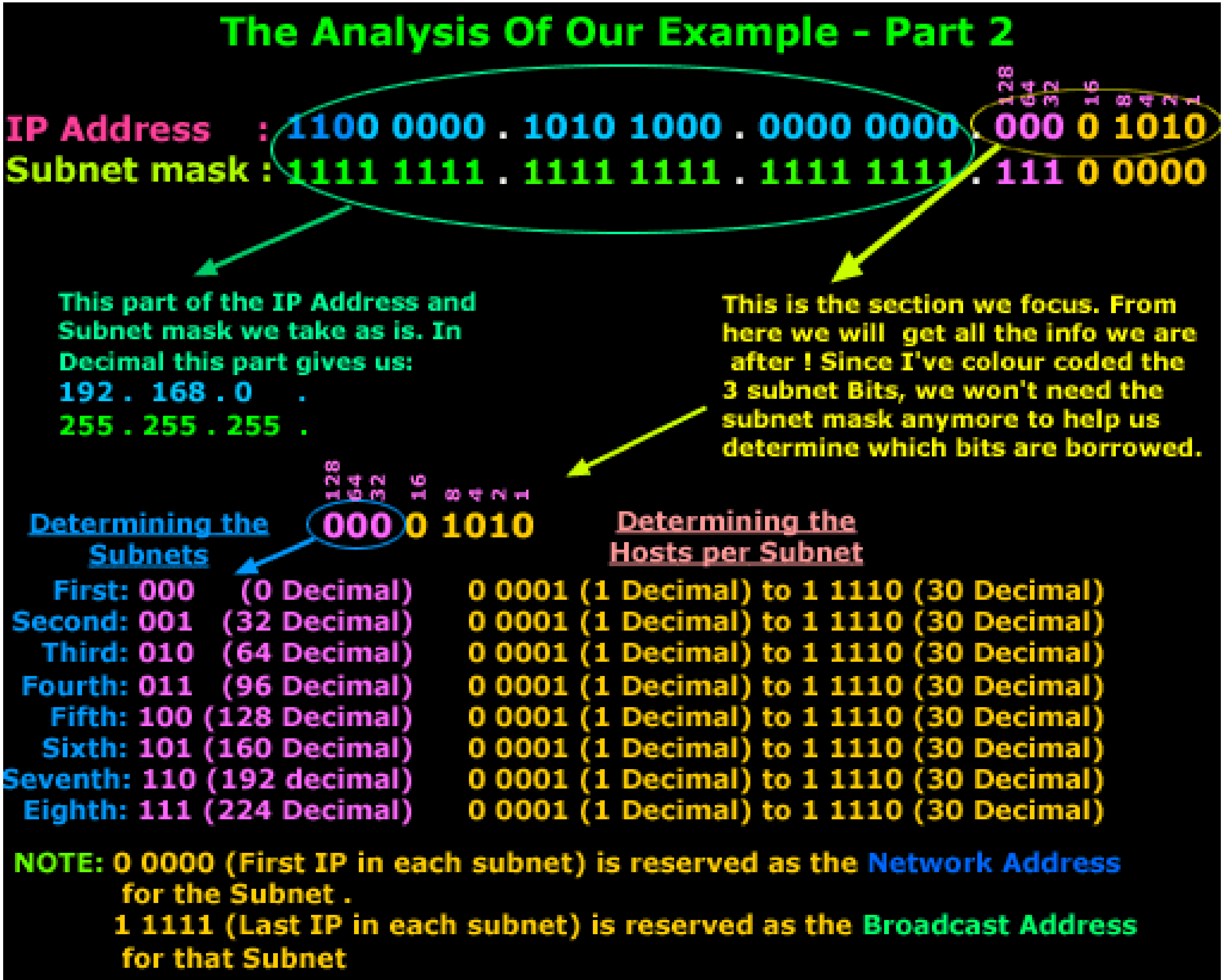
Π.χ. 202.60.215.150/20

```
       11001010.00111100.11010111.10010110
AND    00000000.00000000.00001111.11111111
       00000000.00000000.00000111.10010110 =host id=1942
```

IP addressing – subnetting

Sub-netting: Για δεδομένη subnet mask δημιουργούμε υποδίκτυα με ‘δανεισμό’ κατάλληλων δυαδικών bits (από αριστερά) από το host part.
Δείτε το παράδειγμα στις επόμενες διαφάνειες:
Πηγή: online tutorials in http://www.firewall.cx/networking-topics.html


Class C Classful IP Address
IP Address : 192 . 168 . 0 . 5
Subnet mask : 255 . 255 . 255 . 0
Conversion to Binary
128 64 32 16 8 4 2 1
IP Address : 1100 0000 . 1010 1000 . 0000 0000 . 0000 0101
Subnet mask : 1111 1111 . 1111 1111 . 1111 1111 . 0000 0000
Network ID
Host ID
This Class C network uses 21 Bits for the Network ID (remember, the first 3 bits in the first octect are set) and 8 Bits for the Host ID. The Subnet mask is what splits the Network ID and Host ID. This particular subet mask is 24 Bits long (consists of 24 one's (1) counting from left side)


The Analysis Of Our Example - Part 2
128 64 32 16 8 4 2 1
IP Address : 1100 0000 . 1010 1000 . 0000 0000 . 000 0 1010
Subnet mask : 1111 1111 . 1111 1111 . 1111 1111 . 111 0 0000
This part of the IP Address and Subnet mask we take as is. In Decimal this part gives us:
192 . 168 . 0 .
255 . 255 . 255 .
This is the section we focus. From here we will get all the info we are after ! Since I've colour coded the 3 subnet Bits, we won't need the subnet mask anymore to help us determine which bits are borrowed.
128 64 32 16 8 4 2 1
000 0 1010
Determining the Subnets
Determining the Hosts per Subnet
First: 000 (0 Decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
Second: 001 (32 Decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
Third: 010 (64 Decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
Fourth: 011 (96 Decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
Fifth: 100 (128 Decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
Sixth: 101 (160 Decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
Seventh: 110 (192 decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
Eighth: 111 (224 Decimal) 0 0001 (1 Decimal) to 1 1110 (30 Decimal)
NOTE: 0 0000 (First IP in each subnet) is reserved as the Network Address for the Subnet .
1 1111 (Last IP in each subnet) is reserved as the Broadcast Address for that Subnet

The Analysis Of Our Example - Part 3

FIRST NETWORK

128 64 32 16 8 4 2 1

First IP: 0000 0000 (0 Decimal) Last IP: 0001 1111 (31 Decimal)

Full Range of the First Network: 192.168.0.0 - 192.168.0.31

SECOND NETWORK

128 64 32 16 8 4 2 1

First IP: 0010 0000 (32 Decimal) Last IP: 0011 1111 (63 Decimal)

Full Range of the Second Network: 192.168.0.32 - 192.168.0.63

THIRD NETWORK

128 64 32 16 8 4 2 1

First IP: 0100 0000 (64 Decimal) Last IP: 0101 1111 (95 Decimal)

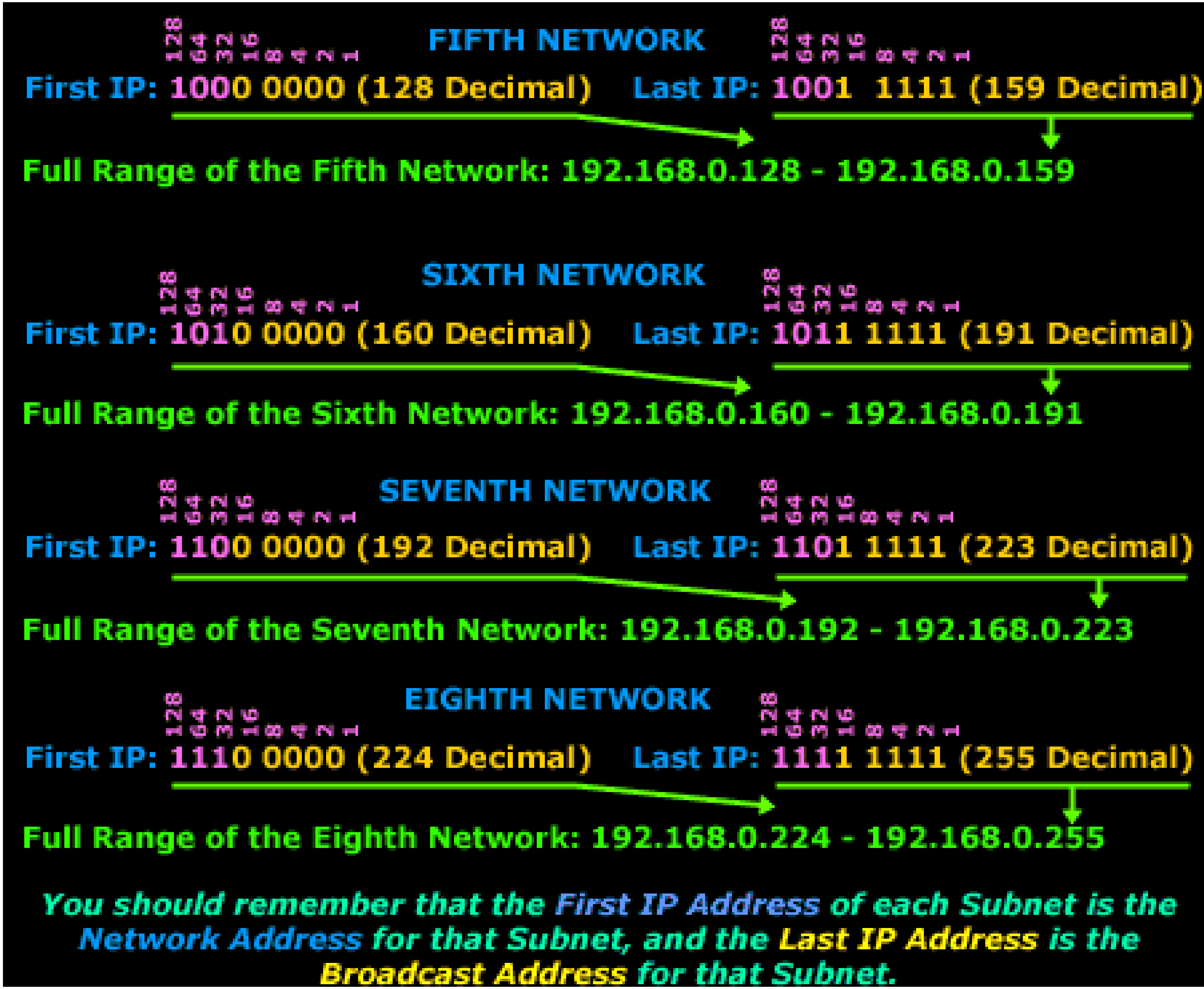
Full Range of the Third Network: 192.168.0.64 - 192.168.0.95

FOURTH NETWORK

128 64 32 16 8 4 2 1

First IP: 0110 0000 (96 Decimal) Last IP: 0111 1111 (127 Decimal)

Full Range of the Fourth Network: 192.168.0.96 - 192.168.0.127


FIFTH NETWORK
128 64 32 16 8 4 2 1
First IP: 1000 0000 (128 Decimal)
128 64 32 16 8 4 2 1
Last IP: 1001 1111 (159 Decimal)
Full Range of the Fifth Network: 192.168.0.128 - 192.168.0.159
SIXTH NETWORK
128 64 32 16 8 4 2 1
First IP: 1010 0000 (160 Decimal)
128 64 32 16 8 4 2 1
Last IP: 1011 1111 (191 Decimal)
Full Range of the Sixth Network: 192.168.0.160 - 192.168.0.191
SEVENTH NETWORK
128 64 32 16 8 4 2 1
First IP: 1100 0000 (192 Decimal)
128 64 32 16 8 4 2 1
Last IP: 1101 1111 (223 Decimal)
Full Range of the Seventh Network: 192.168.0.192 - 192.168.0.223
EIGHTH NETWORK
128 64 32 16 8 4 2 1
First IP: 1110 0000 (224 Decimal)
128 64 32 16 8 4 2 1
Last IP: 1111 1111 (255 Decimal)
Full Range of the Eighth Network: 192.168.0.224 - 192.168.0.255
You should remember that the First IP Address of each Subnet is the Network Address for that Subnet, and the Last IP Address is the Broadcast Address for that Subnet.

παράδειγμα

Έστω η classful IP address 181.18.4.200.

1. Σε ποια κλάση ανήκει? Πόσα δίκτυα μπορούν να αναπαρασταθούν με την κλάση αυτή?
2. Ποια είναι η subnet mask? Ποιες είναι οι subnet and broadcast IP addresses? Πόσοι σταθμοί μπορούν να συμπεριληφθούν στο υποδίκτυο?
3. Πώς μπορούμε να διαιρέσουμε το ανωτέρω δίκτυο σε 4 νέα υποδίκτυα?

- 181=10110101 = 10xxxxxx => class B network id
- Δυαδικά Ψηφία για την αναπαράσταση του network id: 14=> 2^{14} διαφορετικά δίκτυα
- Subnet Mask 255.255.0.0
- Subnet Address: 181.18.0.0
- Broadcast Address: 181.18.255.255
- Μέγιστος αριθμός hosts: 2^{16}-2
- Για 4 υποδίκτυα: Δανειζόμαστε 2 δυαδικά από το host part (τα 2 αριστερότερα) , και η subnet mask θα είναι είναι 255.255.192.0
- Host ranges (H $1^{η}$ και η τελευταία IP address δεσμεύονται για τη subnet και την broadcast address αντίστοιχα):
  - 1st subnet 181.18.0.1-181.18.63.254
  - 2nd subnet 181.18.64.1-181.18.127.254
  - 3rd subnet 181.18.128.1-181.18.191.254
  - 4th subnet 181.18.192.1-181.18.255.254

Παράδειγμα χρήσης IP διευθύνσεων

Με βάση τον παρακάτω πίνακα δρομολόγησης

Subnet Number	Next Hop
128.96.39.0/25	Interface 0
128.96.39.128/25	Interface 1
128.97.0.9/16	R2
193.96.39.0/25	R3

Να κάνετε τη δρομολόγηση των πακέτων με τις παρακάτω IP διευθύνσεις προορισμού

a) 128.96.39.132
β) 193.96.39.34
γ) 128.97.40.32

Subnet Number	Next Hop
128.96.39.0/25	Interface 0
128.96.39.128/25	Interface 1
128.97.0.9/16	R2
193.96.39.0/25	R3

128.96.39.0/25 -> subnet mask 11111111.11111111.11111111.10000000=255.255.255.128
128.96.39.128/25-> subnet mask 11111111.11111111.11111111.10000000=255.255.255.128
128.97.0.9/16 -> subnet mask 11111111.11111111.00000000.00000000=255.255.0.0
193.96.39.0/25 -> subnet mask 11111111.11111111.11111111.10000000=255.255.255.128

Κάθε destination address γίνεται AND'ed με την κάθε subnet mask

128.96.39.132 = 10000000.01100000.00100111.10000100
255.255.255.128 = 11111111 .11111111 .11111111 .10000000
result = 10000000.01100000.00100111.10000000=128.96.39.128 ->Interface 1

193.96.39.34 AND 255.255.255.128 =
=193.96.39.00100010 AND 255.255.255.10000000 = 193.96.39.00000000=
=193.96.39.0 ->Interface 0

Subnet Number	Next Hop
128.96.39.0/25	Interface 0
128.96.39.128/25	Interface 1
128.97.0.9/16	R2
193.96.39.0/25	R3

128.97.40.32 AND 255.255.255.128 =
=128.97.40.00100000 AND 255.255.255.10000000=128.97.40.00000000=**128.97.40.0**

128.97.40.32 AND 255.255.0.0 =
=128.97.40.00100000 AND 255.255.00000000.00000000=
=**128.97.0.0**

Longest Prefix matching: ->R2