

ΘΕΜΑ 2 ΕΞ2012Α (με μια μικρή απλοποίηση στο ερώτημα γ)

Δίνεται το σήμα $x_1(t) = 100 \cdot \text{sinc}^2(100 \cdot t)$. Το σήμα δειγματίζεται με την ελάχιστη δυνατή συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\text{min},1}$ και στη συνέχεια διέρχεται από κατάλληλο ιδανικό φίλτρο οπότε στην έξοδό του προκύπτει σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης $x_2(t)$, του οποίου το φάσμα $X_2(f)$ έχει μέγιστο πλάτος ίσο με τη μονάδα και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ίση με $f_{s,\text{min},2} = 600 \text{ Hz}$.

Ζητούνται τα εξής:

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του αρχικού σήματος $X_1(f)$ και να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\text{min},1}$.

(β) Να προσδιοριστούν οι εκφράσεις του δειγματοσιμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου $x_{1,\delta}(n)$ και στο πεδίο των συχνοτήτων $X_{1,\delta}(f)$.

(γ) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $X_2(f)$ του σήματος.

(δ) Με δεδομένο ότι η έκφρασή του $x_2(t)$ στο πεδίο του χρόνου είναι $x_2(t) = [e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t}] 100 \text{ sinc}^2(100t)$, να υποθέσετε ότι το $x_2(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 40\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $A_0 = 10 \text{ Volt}$ και συχνότητας $f_0 = 30 \text{ kHz}$. Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος. (Να λάβετε υπόψη ότι η μέγιστη απόκλιση συχνότητας για διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από τυχαίο σήμα πληροφορίας $z(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta f_{\text{max}} = \frac{k_f}{2\pi} \max(|z(t)|).$$

ΘΕΜΑ 2	25	
Ερώτημα α		5
Ερώτημα β		6
Ερώτημα γ		5
Ερώτημα δ		9

Απάντηση

α)

Δίνεται ότι $x_1(t) = 100 \cdot \text{sinc}^2(100 \cdot t)$

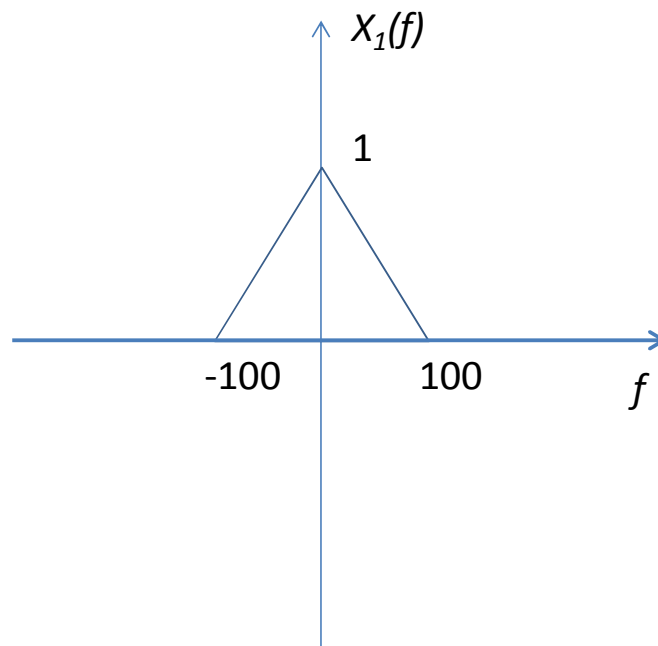
Έχουμε:

$$\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{100} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 \text{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 100 \text{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) = X_1(f)$$



Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με

$$f_{s,\min,1} = 200\text{Hz}$$

(β) Οι εκφράσεις του δειγματοσιμένου σήματος είναι οι εξής:

Στο πεδίο του χρόνου

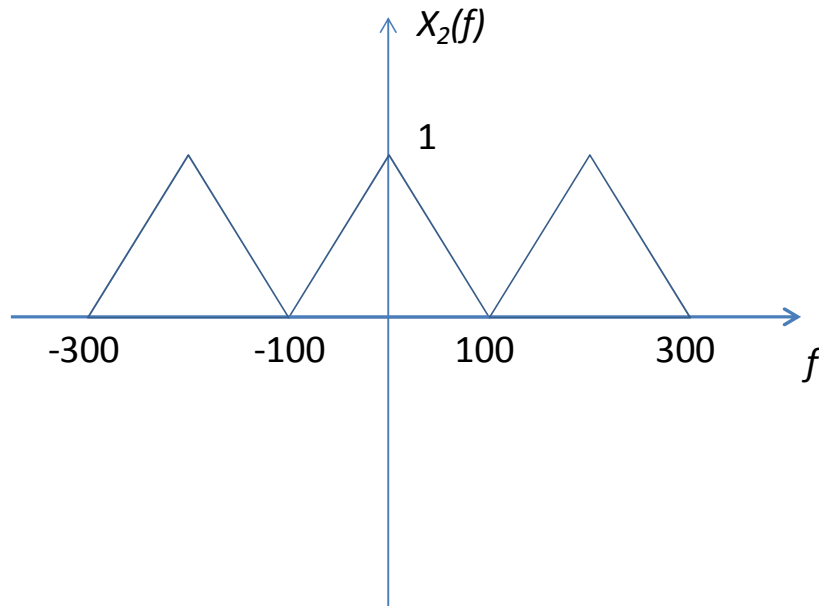
$$x_{1,\delta}(n) = x_1(t) \Big|_{t=nT_{s,1}} = 100 \sin^2\left(100 \cdot n \frac{1}{f_{s,\min,1}}\right) = 100 \sin^2\left(100 \cdot n \frac{1}{200}\right), n \in Z$$

και στο πεδίο των συχνοτήτων

$$X_{1,\delta}(f) = f_{s,\min,1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_1(f - mf_{s,\min,1}) = 200 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{tri}\left(\frac{f - m200}{100}\right), m \in Z.$$

(γ) Με βάση την περιγραφή το φάσμα εξόδου είναι το:

$$X_2(f) = \text{tri}\left(\frac{f + 200}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f - 200}{100}\right)$$



και η έκφραση του σήματος εξόδου στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$x_2(t) = [e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t}] 100 \sin c^2(100t)$$

(δ)

Έχουμε ότι

$$x_2(t) = [e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t}] 100 \sin c^2(100t)$$

Το σήμα $x_2(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 10\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $A_0 = 10 \text{ Volt}$ και συχνότητας $f_0 = 30 \text{ kHz}$.

Το διαμορφωμένο σήμα FM γράφεται:

$$\begin{aligned} x_{FM}(t) &= A_0 \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + k_f \int_{-\infty}^t x_2(\lambda) d\lambda\right) = \\ &= 10 \cos\left(2\pi 30000t + 40\pi \int_{-\infty}^t \left\{ [e^{j2\pi 200\lambda} + 1 + e^{-j2\pi 200\lambda}] 100 \sin c^2(100\lambda) \right\} d\lambda\right) \end{aligned}$$

Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W = 2(D+1) f_x$$

$$\text{όπου } D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_x}$$

Το σήμα πληροφορίας $x_2(t)$ έχει εύρος ζώνης ίσο με $f_x = f_{\max} = 300\text{Hz}$

Επίσης,

ισχύει ότι

$$\max |x_2(t)| = \max \left| \left[e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t} \right] 100 \sin c^2(100t) \right| = 3 \cdot 100$$

επειδή

$$\max \left| \left[e^{j2\pi 200t} + 1 + e^{-j2\pi 200t} \right] \right| = \max \left| \left[2 \cos(2\pi 200t) + 1 \right] \right| = 2 + 1 = 3,$$

$$\max |100 \sin c^2(100t)| = 100, \text{ όταν } t = 0$$

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi} \max (|x_2(t)|) = \frac{40\pi}{2\pi} (300) = 6000\text{Hz}$$

$$\text{οπότε, } D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_x} = \frac{6000}{300} = 20$$

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:

$$W = 2(20+1) \cdot 300 \text{ Hz} = 12600 \text{ Hz} = 12.6 \text{ kHz}$$