ΘΕΜΑ 4 /ΕΞ2009Β

Δίδεται κώδικας C που προέκυψε με εφαρμογή του αλγορίθμου κωδικοποίησης Huffman και του οποίου η αντιστοίχηση των κωδικών λέξεων με τα σύμβολα της πηγής (s1,…s9) περιέχεται στον ακόλουθο πίνακα:

Σύμβολα	**Κωδικές Λέξεις**
s1	011000
s2	01100100
s3	010
s4	0110011
s5	01101
s6	1
s7	01100101
s8	0111
s9	00

α) Να βρείτε τα σύμβολα εκείνα που έχουν το μεγαλύτερο και το μικρότερο πληροφοριακό περιεχόμενο. Εξηγείστε την απάντηση σας. [*3 μονάδες*]

β) Αν δίνεται ότι τα σύμβολα της πηγής παράγονται βάσει των πιθανοτήτων {0.28, 0.27, 0.25, 0.1, 0.05, 0.04, 0.005, 0.003, 0.002 }, να αντιστοιχίσετε τις πιθανότητες αυτές στα ανωτέρω σύμβολα της πηγής, s1 έως s9, έτσι ώστε το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων να παραμείνει βέλτιστο. Να εξηγήσετε την απάντησή σας. [*4 μονάδες*]

Απάντηση

α) Το σύμβολο που μεταφέρει το μεγαλύτερο πληροφοριακό περιεχόμενο πρέπει να είναι ανάμεσα σε αυτά που αντιστοιχούν στις κωδικές λέξεις με το μεγαλύτερο μήκος αφού αυτές οι κωδικές λέξεις έχουν ανατεθεί στις μικρότερες πιθανότητες λόγω του αλγορίθμου του Huffman. Με μία επισκόπηση του πίνακα των κωδικών λέξεων παρατηρούμε ότι τα σύμβολα s2 και s7 έχουν τις μεγαλύτερες κωδικές λέξεις με μήκος 8. Κατά αντιστοιχία η s6 έχει το μικρότερο πληροφοριακό περιεχόμενο.

β) Για να αντιστοιχήσουμε τις πιθανότητες στα σύμβολα της πηγής θα πρέπει να δούμε τις αντίστοιχες κωδικές λέξεις. Με δεδομένο ότι οι κωδικές λέξεις προέκυψαν από τον αλγόριθμο Huffman θα πρέπει να ξεκινήσουμε από τα σύμβολα με τις δύο μικρότερες πιθανότητες και αυτές να τις αντιστοιχήσουμε στα σύμβολα με τις δύο μεγαλύτερες κωδικές λέξεις. Αυτό συμβαίνει διότι ο Huffman κατασκευάζει το δένδρο των κωδικών λέξεων από τα φύλλα προς την ρίζα, δηλαδή αρχίζει από τα σύμβολα με τις μικρότερες πιθανότητες και προχωράει προς τις μεγαλύτερες πιθανότητες. Άρα οι πιθανότητες 0.002 και 0.003 πρέπει να αντιστοιχηθούν στα σύμβολα s2 και s7 αφού αυτά έχουν τις μεγαλύτερες κωδικές λέξεις μήκους 8. Στη συνέχεια το σύμβολο s4 είναι το μοναδικό με μήκος κωδικής λέξης 7, συνεπώς θα πρέπει να αντιστοιχηθεί στην αμέσως μικρότερη πιθανότητα που είναι η 0.005. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να αντιστοιχήσουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες καταλήγοντας στον παρακάτω πίνακα.

Σύμβολα	Κωδικές λέξεις	Πιθανότητες
s6	1	0,28
s9	00	0,27
s3	010	0,25
s8	0111	0,1
s5	01101	0,05
s1	011000	0,04
s4	0110011	0,005
s7	01100101	0,003
s2	01100100	0,002

ΘΕΜΑ 4 ΕΞ2012Β

Μια ψηφιακή πηγή **3** συμβόλων $\{x_1, x_2, x_3\}$εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο x_1 από την πηγή είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι πιθανότητες εκπομπής των άλλων δύο συμβόλων είναι ίσες. Να απαντηθούν τα ερωτήματα σε κάθε μία από τις παρακάτω 2 περιπτώσεις

α) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε κανάλι χωρίς θόρυβο. Ζητείται να βρεθούν:

i) Η χωρητικότητα του καναλιού **C** και η εντροπία της πηγής **H(X)** [*3 μονάδες*]

ii) Η εντροπία **H(X/Y)** [*3 μονάδες*]

β) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε ενθόρυβο κανάλι με πίνακα μετάβασης,

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθεί η εντροπία της πηγής **H(X)** και η **H(Y/X)** [*7 μονάδες*]
(Υπόδειξη: *Χρησιμοποιείστε τις παρακάτω τιμές των λογαρίθμων*
$\log_2(3) \approx 1.58, \quad \log_2(0.4) \approx -1.322, \quad \log_2(0.3) \approx -1.737, \quad \log_2(0.75) \approx -0.415,$
$\log_2(0.35) \approx -1.515, \quad \log_2(0.275) \approx -1.862, \quad \log_2(0.375) \approx -1.415$ *)*

Απάντηση

α). Κανάλι χωρίς θόρυβο

i) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι υπόλοιπες είναι $p(x_2) = p(x_3) = 0.3$
Άρα η εντροπία της πηγής είναι:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2(p(x_i)) = -\left[0.4 \cdot \log_2(0.4) + 0.3 \cdot \log_2(0.3) + 0.3 \cdot \log_2(0.3)\right] \approx 1.57\ bits$$

Γνωρίζω ότι η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς θόρυβο ισούται με τη μέγιστη τιμή του **H(X)** («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89) η οποία προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{3}$$

Η χωρητικότητα δίνεται από

$$C = \max\left(H(X)\right) = \log_2 q\big|_{q=3} = \log_2(3) = 1.58 \text{ bits/symbol}$$

όπου q είναι ο αριθμός συμβόλων εισόδου

ii) Επιπλέον, η εντροπία H(X/Y) ισούται με 0 αφού X=Y κι όπως αποδεικνύεται και στο βιβλίο σελ. 90.

β) Ενθόρυβο Κανάλι

i) Αν στο κανάλι εισαγάγουμε θόρυβο δεν αναμένεται να αλλάξει η εντροπία της πηγής αλλά μόνο η χωρητικότητα του καναλιού η οποία αναμένεται να είναι μικρότερη από αυτή του ερωτήματος (α)
Επομένως η εντροπία της πηγής H(X) είναι ίδια με αυτή του ερωτήματος (α).

Δεδομένου ότι το κανάλι έχει πίνακα μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Η εντροπία H(Y/X) δίνεται από τον τύπο

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i) H(Y/X = x_i) \qquad (1)$$

Άρα για κάθε i=1,2,3 έχουμε

$$H(Y/X = x_i) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις πιθανότητες κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης έχουμε:

$$H(Y/X = x_1) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_1) \log p(y_j/x_1) = -0.5\log 0.5 - 0.5\log 0.5 - 0\log 0 = 1\,bits$$

$$H(Y/X = x_2) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_2) \log p(y_j/x_2) = -0\log 0 - 0.25\log 0.25 - 0.75\log 0.75 = 0{,}811\,bits$$

$$H\left(Y/X = x_3\right) = -\sum_{j=1}^{3} p\left(y_j/x_3\right)\log p\left(y_j/x_3\right) = -0.5\log 0.5 - 0\log 0 - 0.5\log 0.5 = 1\,bits$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (1) έχουμε

$$H\left(Y/X\right) = \sum_{i=1}^{3} p\left(x_i\right) H\left(Y/X = x_i\right) = 0.4\cdot 1 + 0.3\cdot 0.811 + 0.3\cdot 1 \approx 0,943\,bits \qquad (2)$$

ii).
Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) θα κάνουμε χρήση του τύπου $I\left(X;Y\right) = H\left(Y\right) - H\left(Y/X\right)$

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εξόδου $P(Y) = \{p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\}$ οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω

$$P[Y] = \left[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\right] = \left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1, x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2, x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3, x_i)\right]$$

Γνωρίζω ότι ισχύει $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j / x_i)$ («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25) και επομένως θα έχουμε

$$P\left(Y, X\right) = \begin{bmatrix} p(y_1, x_1) & p(y_2, x_1) & p(y_3, x_1) \\ p(y_1, x_2) & p(y_2, x_2) & p(y_3, x_2) \\ p(y_1, x_3) & p(y_2, x_3) & p(y_3, x_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p(x_1)\cdot p(y_1 / x_1) & p(x_1)\cdot p(y_2 / x_1) & p(x_2)\cdot p(y_3 / x_1) \\ p(x_2)\cdot p(y_1 / x_2) & p(x_2)\cdot p(y_2 / x_2) & p(x_2)\cdot p(y_3 / x_2) \\ p(x_3)\cdot p(y_1 / x_3) & p(x_3)\cdot p(y_2 / x_3) & p(x_2)\cdot p(y_3 / x_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4\cdot 0.5 & 0.4\cdot 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3\cdot 0.25 & 0.3\cdot 0.75 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0 & 0.3\cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0.225 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Οπότε το ζητούμενο δίνεται από

$$P[Y] = \left[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\right] = \left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1, x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2, x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3, x_i)\right] =$$

$$= \left[0.35 \quad 0.275 \quad 0.375\right]$$

$$p(y_1) = 0.35$$

$$p(y_2) = 0.275$$

$$p(y_3) = 0.375$$

Συνεπώς

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} p\left(y_i\right)\log_2\left(p(y_i)\right) = -\left[0,35\cdot\log_2\left(0,35\right)+0,275\cdot\log_2\left(0,275\right)+0,375\cdot\log_2\left(0,375\right)\right] = 1.573\,bits$$

Από την παραπάνω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού είναι:

$$I\left(X;Y\right) = H\left(Y\right) - H\left(Y/X\right) = 1.573 - 0.943 \approx 0.63\,bits$$