ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

1η ΟΣΣ / ΠΛΗ22 / ΑΘΗ.3 /19.10.2013

Νίκος Δημητρίου

(Σημείωση: Η παρουσίαση αυτή βασίζεται στα αρχεία PLH22_1stOSS_final.pdf, plh22_1stOSS_octave_matlab.pdf και 1st_OSS.zip που βρίσκονται στον υποφάκελο ΟΣΣ1 του study.eap.gr κι έχει εμπλουτιστεί με πρόσθετα παραδείγματα)

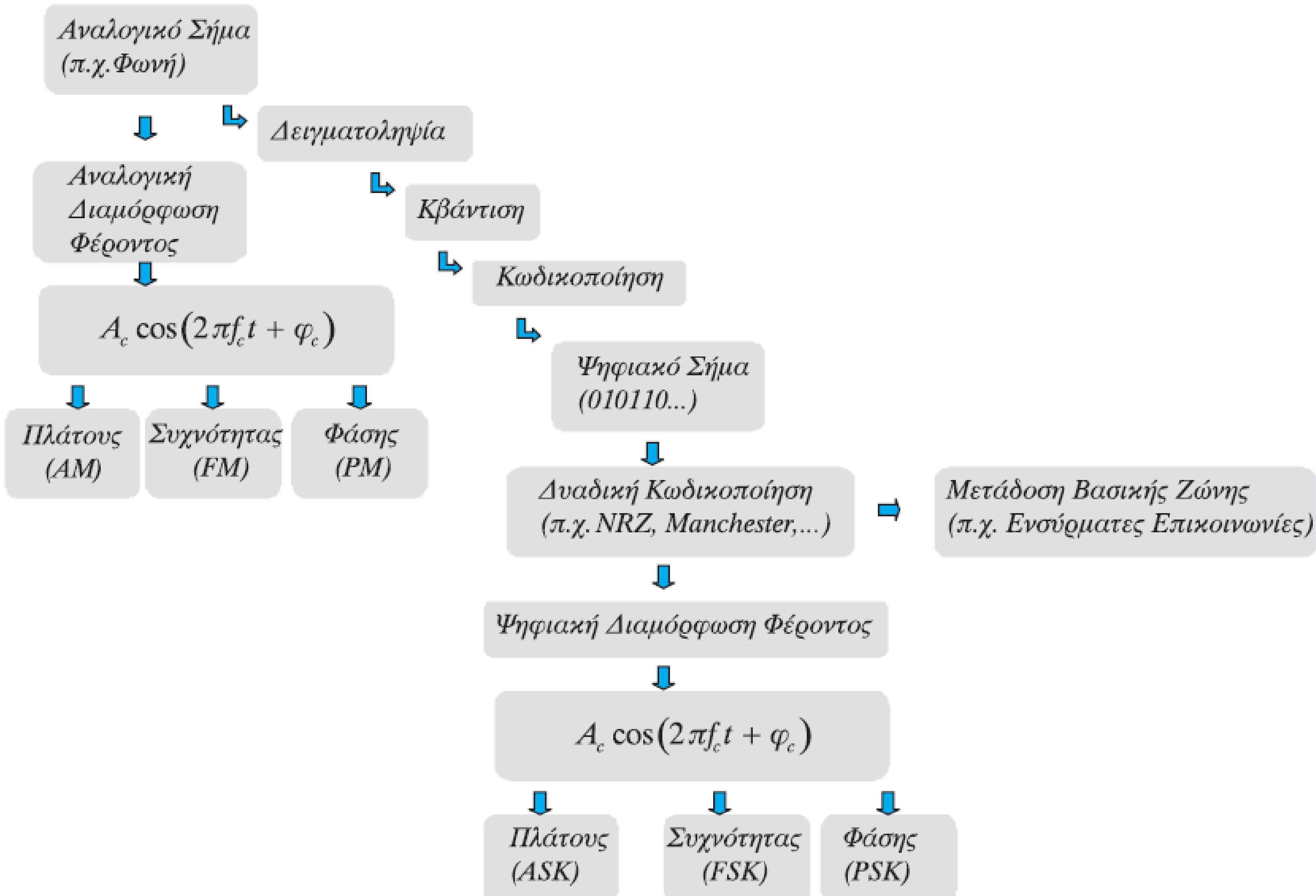
Στόχοι Μελέτης

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
  - Παροχή Υπηρεσιών προς τους χρήστες
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
  - Τύποι Σημάτων
  - Χαρακτηριστικά Συστημάτων
  - Φάσμα
- Αναλογικές Διαμορφώσεις
- Ψηφιακές Διαμορφώσεις

ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/1η ΟΣΣ/19.10.2013/Ν.Δημητρίου

Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



Σήματα και Συστήματα

Σήμα

- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
  - Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα

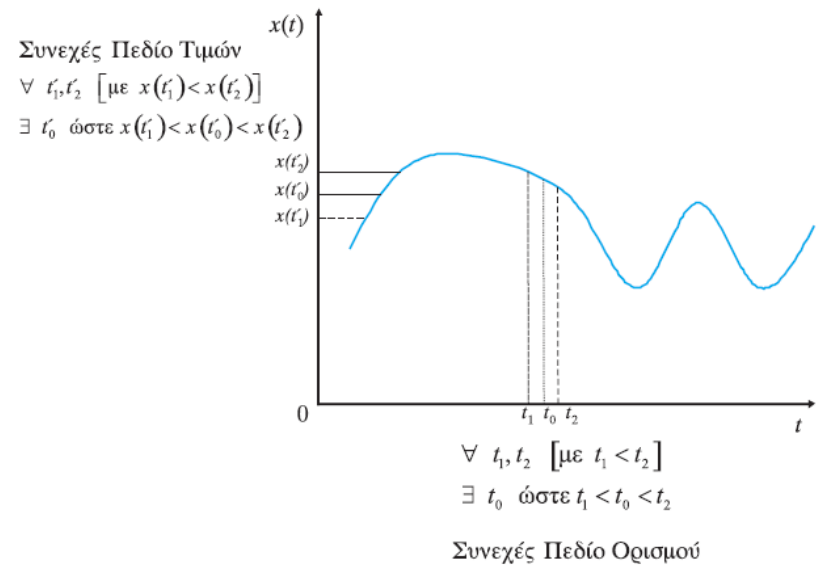
- Ένα σήμα περιγράφεται με μια συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου (κυματομορφή) και με μια συνάρτηση στο πεδίο των συχνοτήτων (φάσμα)

Κατηγορίες Σημάτων

- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
  - Περιοδικά Σήματα
  - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
    - Ημιτονοειδή Σήματα
    - Ορθογώνιος Παλμός
    - Τριγωνικός Παλμός
    - Κρουστικά Σήματα
    - Σήμα Βήματος

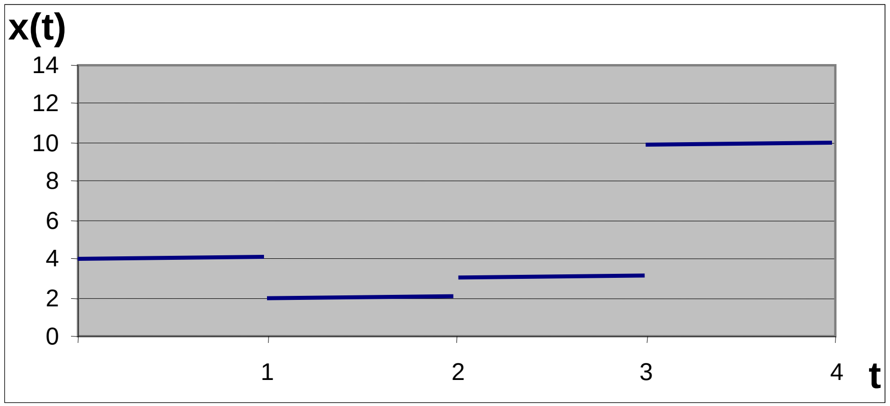
Σήματα Συνεχούς Χρόνου (ΣΣΧ)

- Είναι αυτά στα οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος) παίρνει συνεχείς τιμές



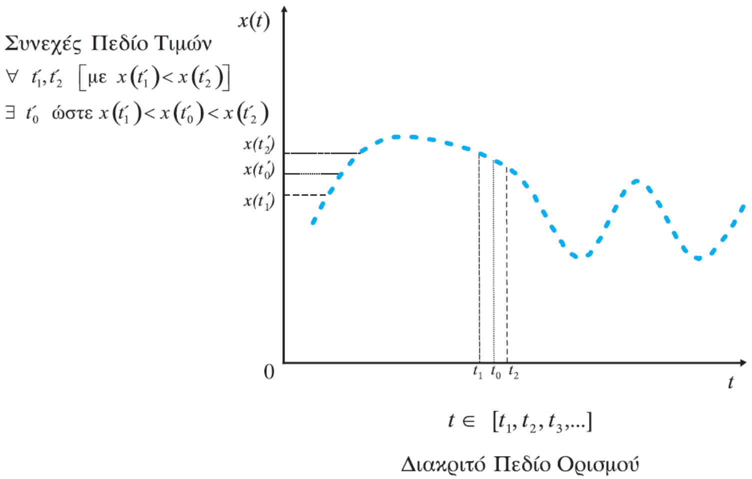
- Αναλογικά Σήματα: Είναι αυτά τα ΣΣΧ που και η εξαρτημένη μεταβλητή x(t) παίρνει συνεχείς τιμές
  - x(t)=4t
- Διακριτά Σήματα Συνεχούς Χρόνου: Είναι σήματα ΣΣΧ που η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές

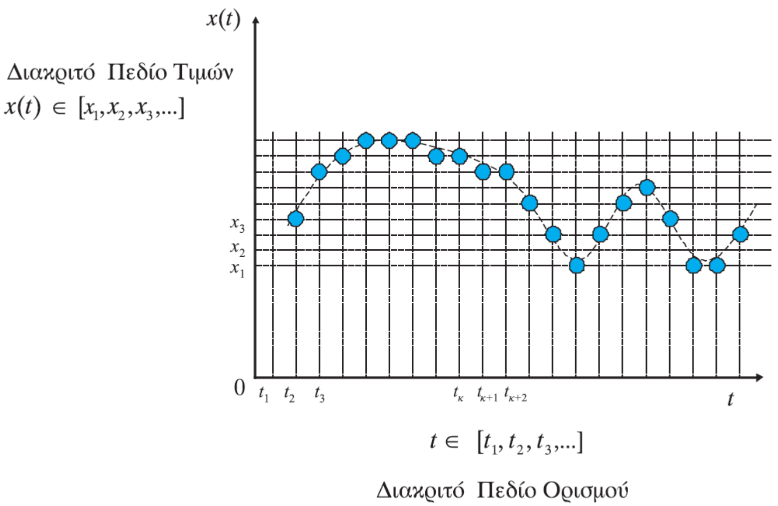
$$x(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t \le 1 \\ 2, & 1 \langle t \le 2 \\ 3, & 2 \langle t \le 3 \\ 10.3 \langle t \le 4 \end{cases}$$



Σήματα Διακριτού Χρόνου (ΣΔΧ)

- Ο χρόνος δέχεται μόνο διακριτές τιμές
- Τα σήματα συμβολίζονται ως ακολουθίες
- Αναλογικά ΣΔΧ: Η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει συνεχείς τιμές
  - x(n)=sqrt(n)
- Διακριτά ΣΔΧ: Η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές
- Ψηφιακό Σήμα

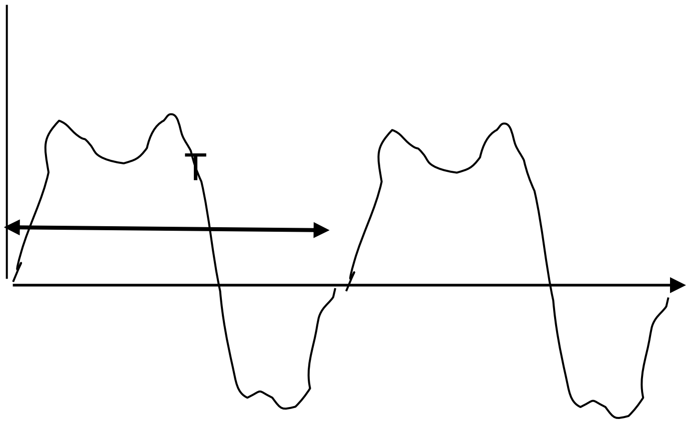


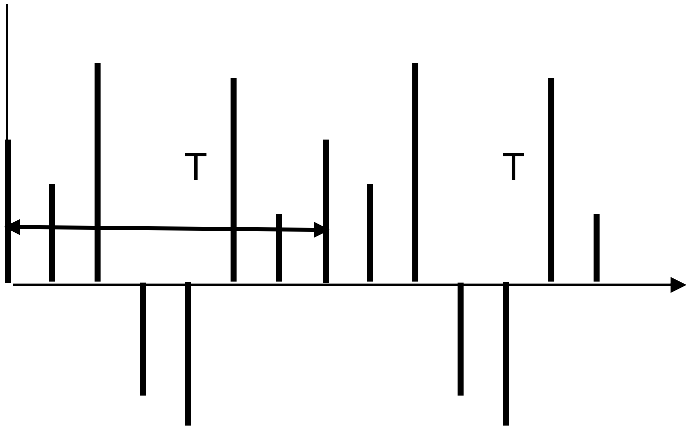


Example_0

Περιοδικά Σήματα

- Αναλογικό Σήμα
  - Ισχύει η σχέση y(t)=y(t+T)
  - T είναι περίοδος και ορίζει τη μικρότερη χρονική διάρκεια μετά την οποία επιλαμβάνεται
- Διακριτό Σήμα
  - Ισχύει y(n)=y(n+N) για όλα τα n
  - N περίοδος



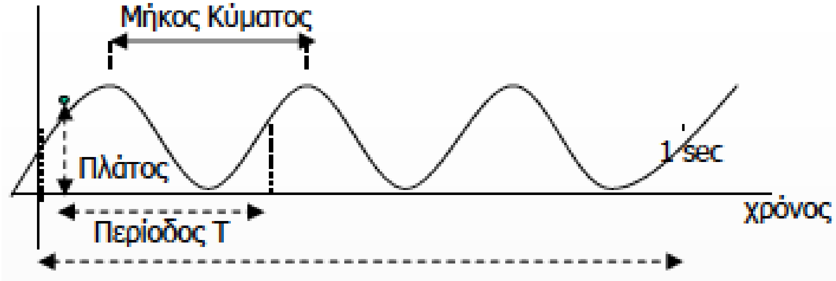


Ημιτονοειδή Σήματα (1)

- Ειδική κατηγορία περιοδικών σημάτων
- Αναλογικού χρόνου
  - Παράσταση

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

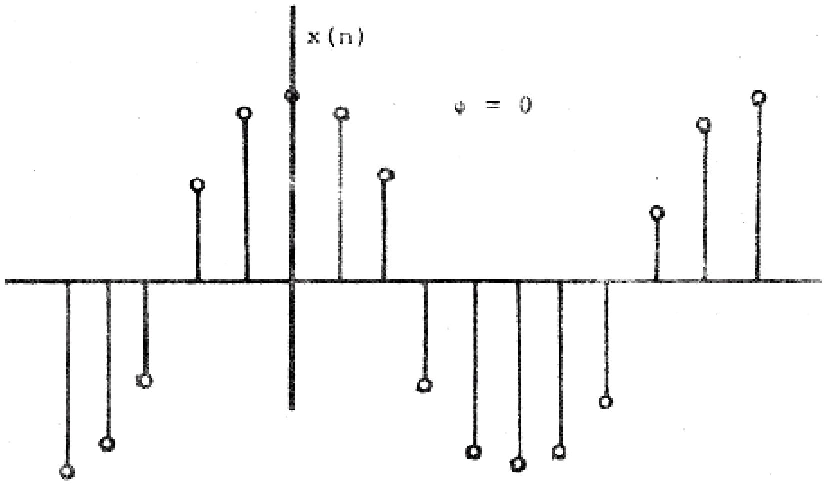
  - φ → γωνία φάσης
  - T → περίοδος
  - ω=2πf → κυκλική συχνότητα



- Διακριτού χρόνου
  - Παράσταση

$$x(n) = cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$$

  - N → Περίοδος
  - θ → γωνία φάσης



Ημιτονοειδή Σήματα (2)

- **Συχνότητα f:** Αριθμός πλήρων ταλαντώσεων (κύκλοι) ανά δευτερόλεπτο (σε Hertz - Hz).
  - $f = 1 / T$
- **Περίοδος T:** Διάρκεια πλήρους ταλάντωσης (sec)
  - $T = 1 / f$
- **Μήκος λ:** Η απόσταση στην οποία μεταδίδεται το σήμα σε χρόνο T (σε μέτρα).
- **Ταχύτητα μετάδοσης υ:** Η ταχύτητα με την οποία ο σήμα διαπερνά το μέσο μετάδοσης
  - $\upsilon = \lambda \cdot f$
- Στο κενό, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν την ταχύτητα του φωτός
  - $3 \cdot 10^8$ m/sec
- **Πλάτος α:** Η τιμή του σήματος μια χρονική στιγμή.

Example 1

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$$

Γενίκευση:

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2, ..., T_N θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$$

Παράδειγμα

Βασικά Ζητήματα ΠΛΗ22 8/31

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5\pi t)$ η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}\sec$

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=1,β=10 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \beta T_1 = \alpha T_2 = 4\sec$

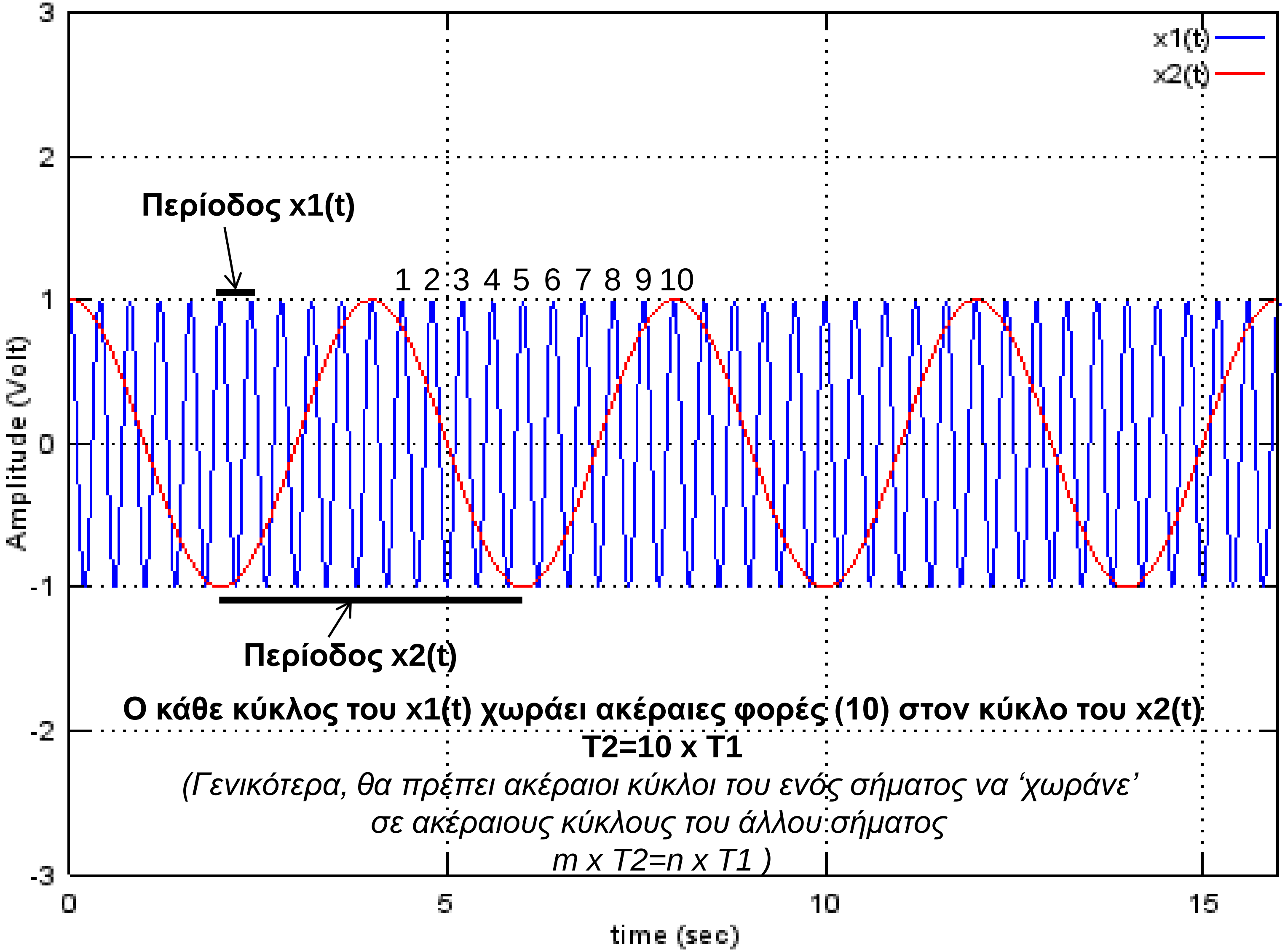
Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25$ Hz

Examples1a,1b

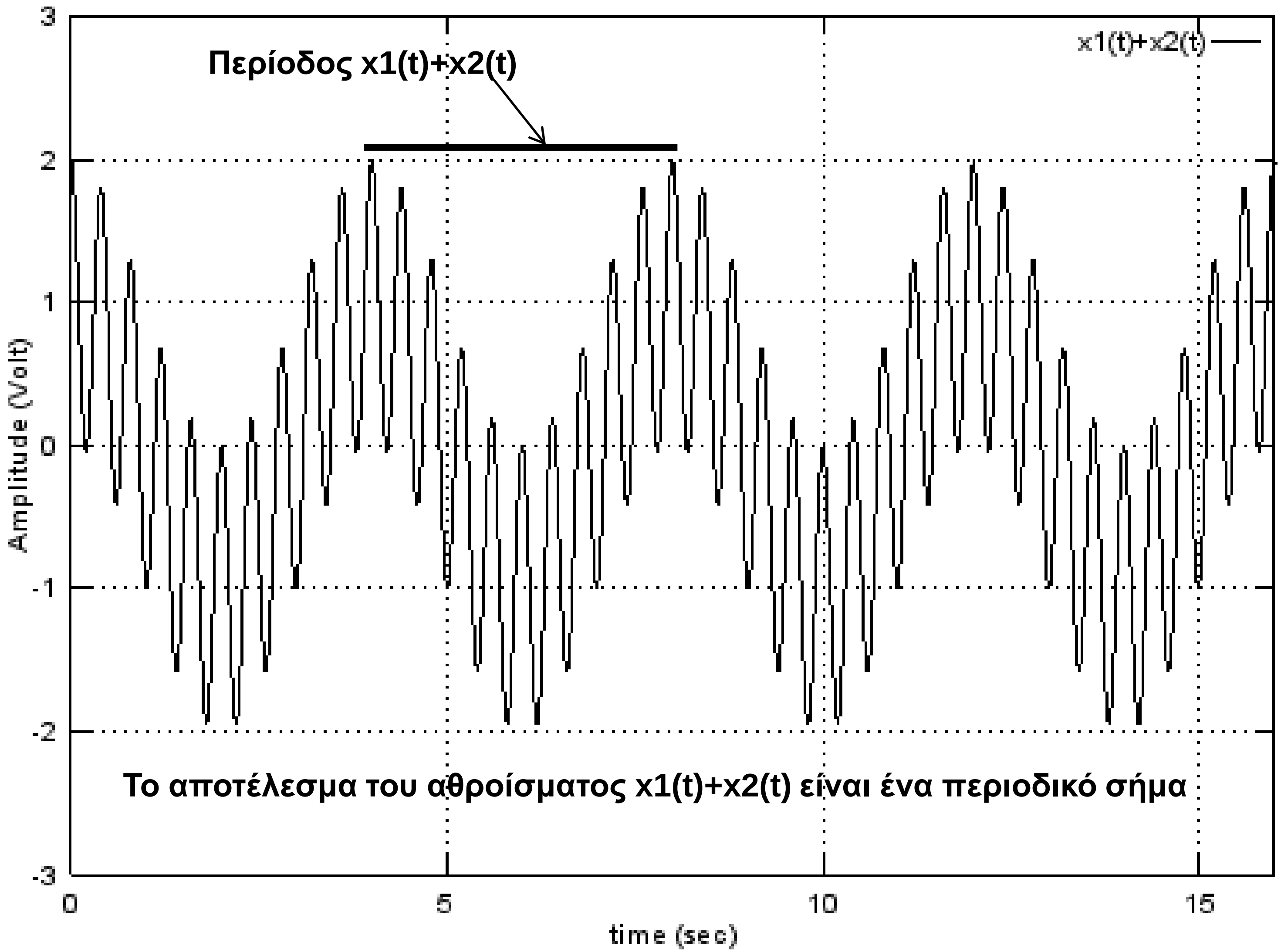
Example 1a

```
figure;  % figure creation
Ts=1./50;  % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
x1=cos(5.*pi.*t); % 1st signal with frequency 2.5Hz
x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal ‘b’ is for blue line
xlabel('time (sec)');  % label of x- axis
ylabel('Amplitude (Volt)');  % label of y-axis
hold; %hold the first plot
plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal ‘r’ is for red line
legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
grid; % show a rectangular grid
axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16]  and y axis between [-3,3]
figure; % figure creation
plot(t,x1+x2,'k'); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
legend('x1(t)+x2(t)'); % show  to which signal the plot corresponds
axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16]  and y axis between [-3,3]
grid % show a rectangular grid
```

Example 1a


x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) χωράει ακέραιες φορές (10) στον κύκλο του x2(t)
T2=10 x T1
(Γενικότερα, θα πρέπει ακέραιοι κύκλοι του ενός σήματος να 'χωράνε'
σε ακέραιους κύκλους του άλλου σήματος
m x T2=n x T1)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Example 1a



Περίοδος x1(t)+x2(t)
x1(t)+x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) είναι ένα περιοδικό σήμα

Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \boxed{\textbf{\textit{cos(5t)}}} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το ***cos(5t)*** η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5}$ ***sec***

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} =$ π/10

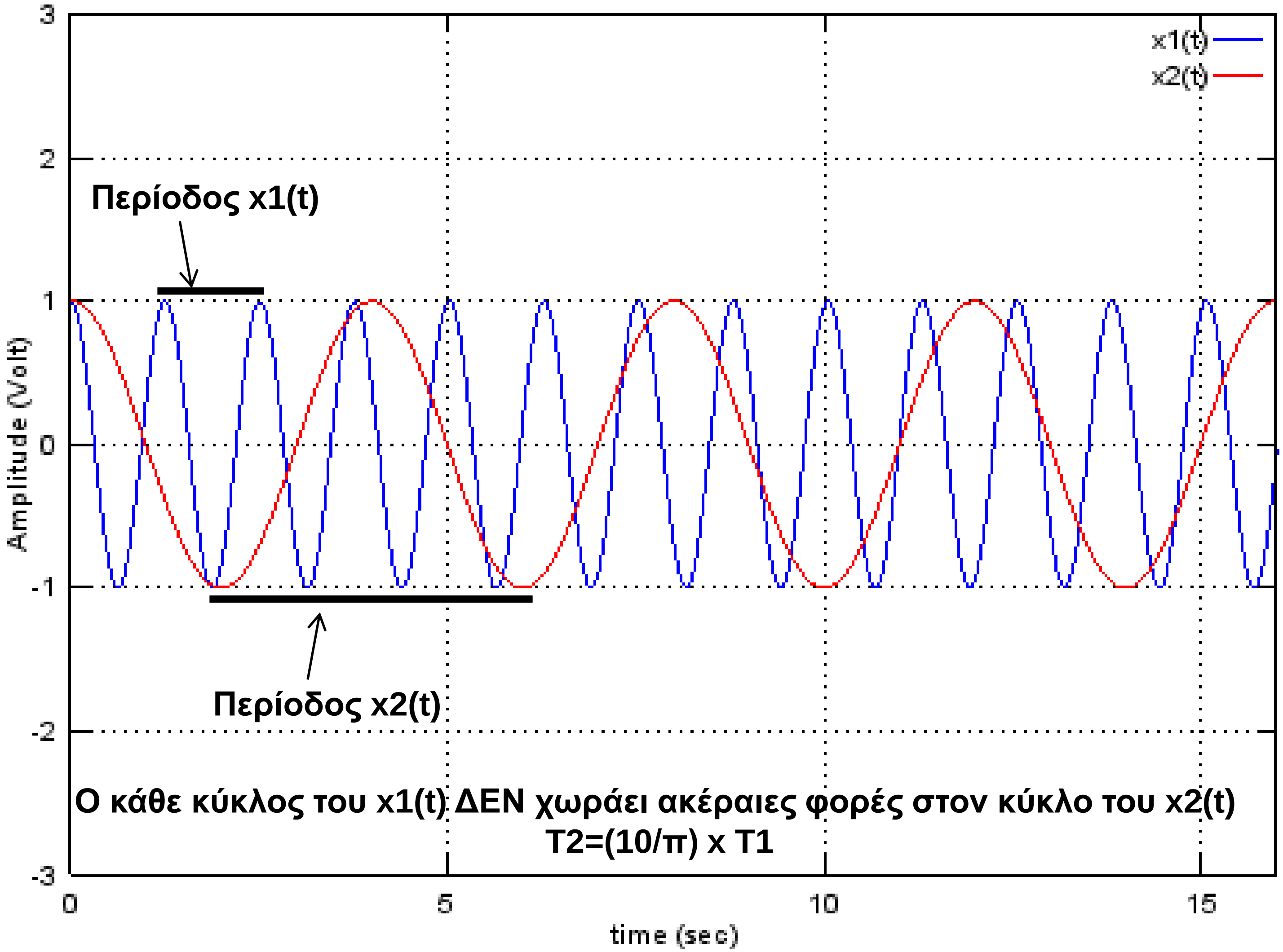
Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

Example 1b

```
figure;  % figure creation
Ts=1./50;  % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz
x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal 'b' is for blue line
xlabel('time (sec)');  % label of x- axis
ylabel('Amplitude (Volt)');  % label of y-axis
hold; %hold the first plot
plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal 'r' is for red line
legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
grid; % show a rectangular grid
axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16]  and y axis between [-3,3]
figure; % figure creation
plot(t,x1+x2,'k'); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
legend('x1(t)+x2(t)'); % show  to which signal the plot corresponds
axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16]  and y axis between [-3,3]
grid % show a rectangular grid
```

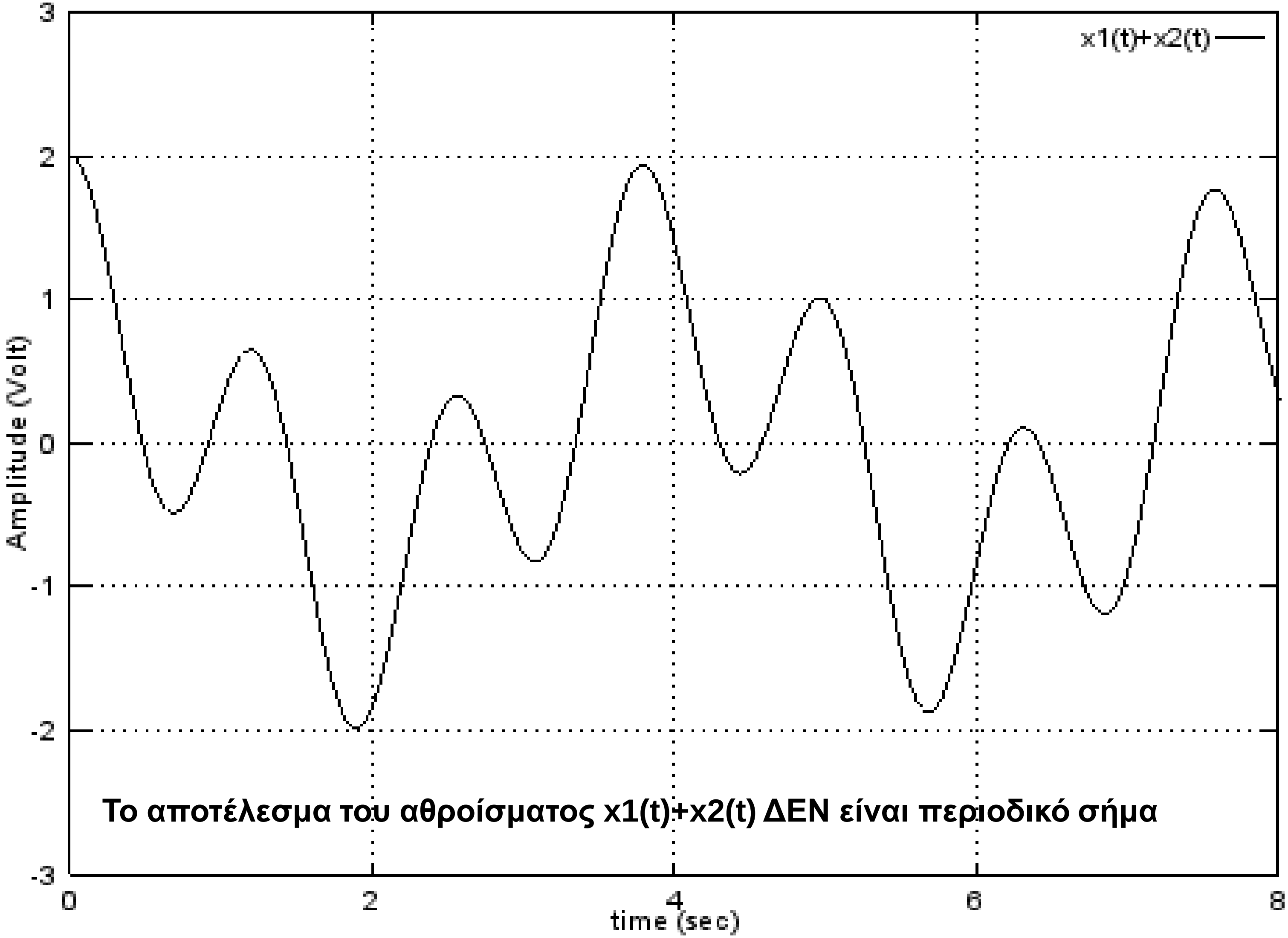
Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a

Example 1b



x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
Περίοδος x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15
Ο κάθε κύκλος του x1(t) ΔΕΝ χωράει ακέραιες φορές στον κύκλο του x2(t)
T2=(10/π) x T1

Example 1b



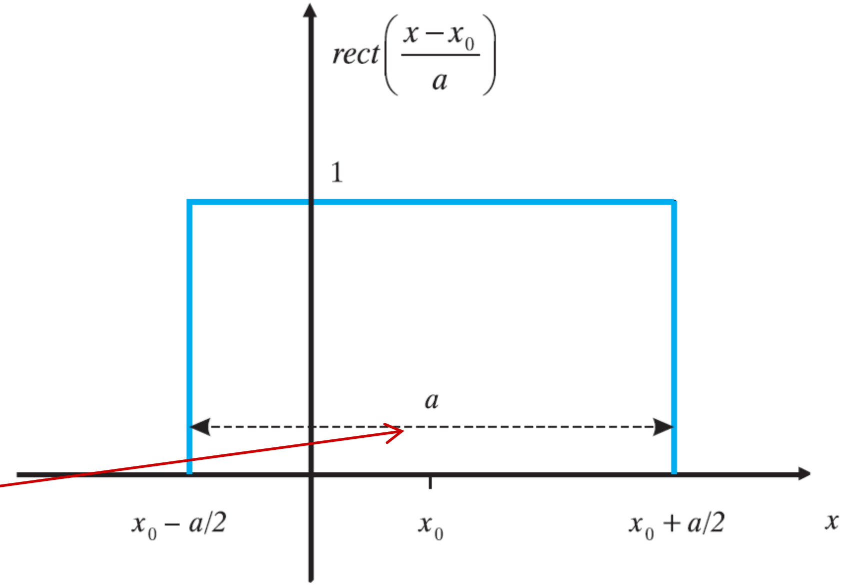
x1(t)+x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) ΔΕΝ είναι περιοδικό σήμα

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1,\ \text{όταν}\ |x-x_0|<\dfrac{a}{2},\ \text{δηλ.}\ x_0-\dfrac{a}{2}<x<x_0+\dfrac{a}{2}\\[2ex] 0,\ \text{όταν}\ |x-x_0|>\dfrac{a}{2},\ \text{δηλ.}\ \begin{cases}x<x_0-\dfrac{a}{2}\\ \text{ή}\\ x>x_0+\dfrac{a}{2}\end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$



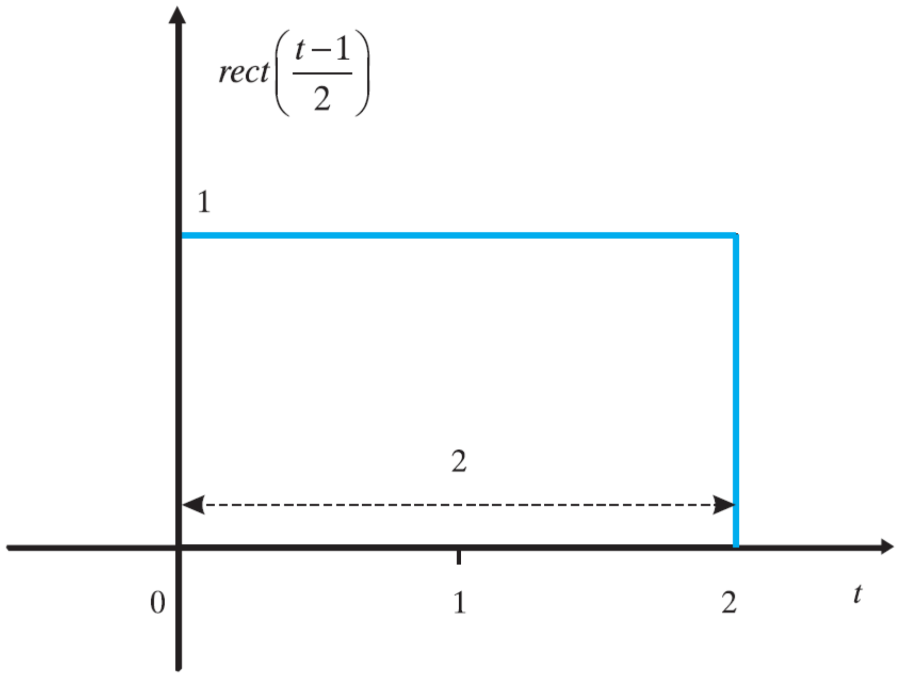
Σχεδιαστικό Εύρος

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (2)

- Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0,2)$.

- $x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$



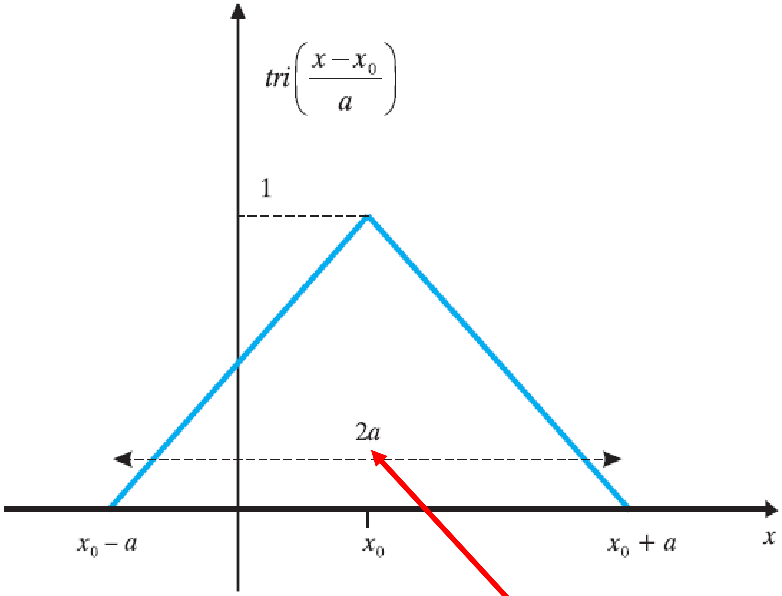
Example 3

Σήμα Τριγωνικός Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1-\dfrac{|x-x_0|}{a}, \text{ όταν } |x-x_0|<a, \text{ δηλ.} x_0-a<x<x_0+a \\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>a, \text{ δηλ.} \begin{cases} x<x_0-a \\ \text{ή} \\ x>x_0+a \end{cases} \end{cases}$$

όπου $a>0$



Προσοχή στην αναλυτική έκφραση για τα ολοκληρώματα

Εύρος

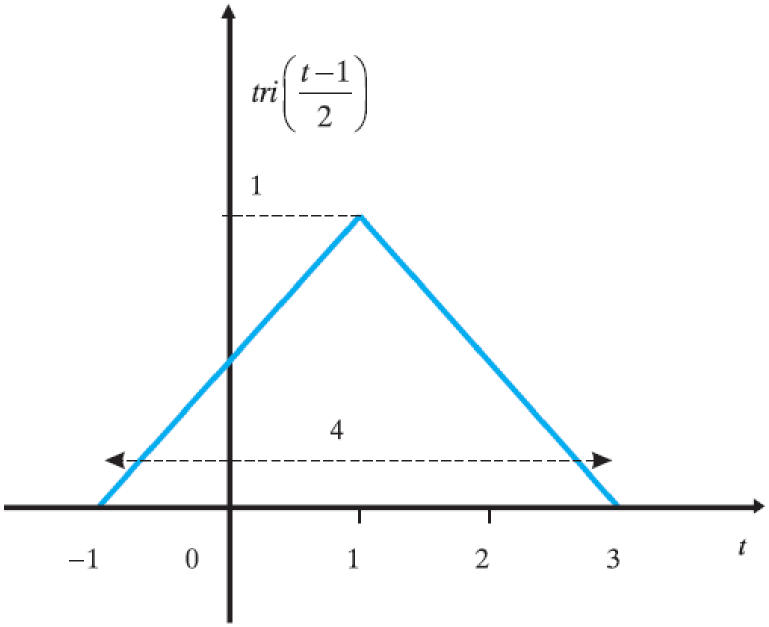
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (2)

- Παραδείγματα

- $x(t) = tri\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2},\ t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$.



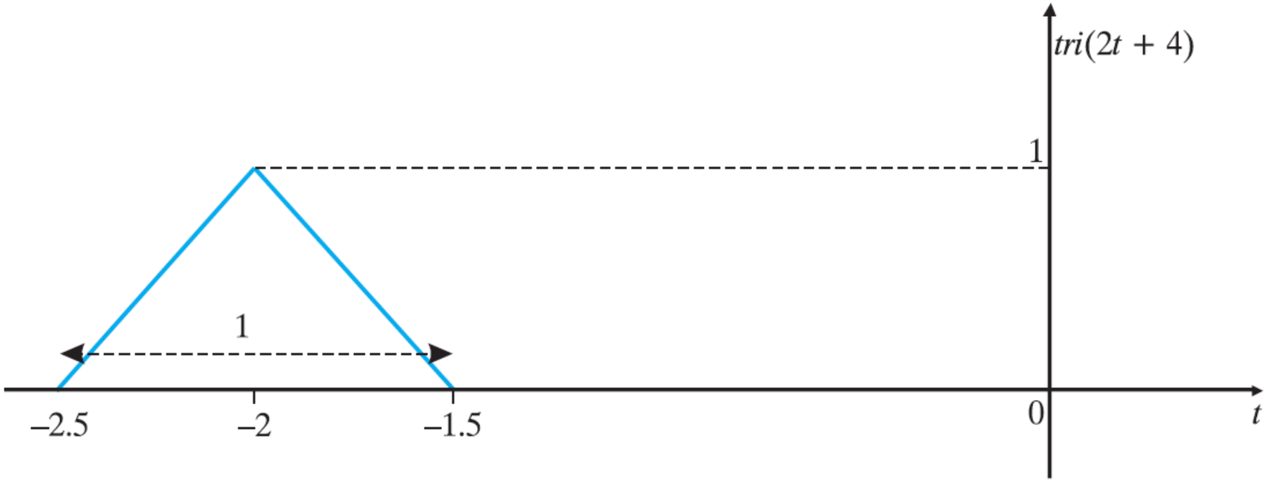
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (3)

- $x(t) = tri(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $tri\left(\dfrac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι: $x(t) = tri(2t+4) = tri(2(t+2)) = tri\left(\dfrac{t+2}{1/2}\right) = tri\left(\dfrac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \dfrac{1}{2}, t_0 + \dfrac{1}{2}) = (-2.5, -1.5)$.



2.2.7.6 Κρουστική Συνάρτηση $\delta(x)$ (Dirac)

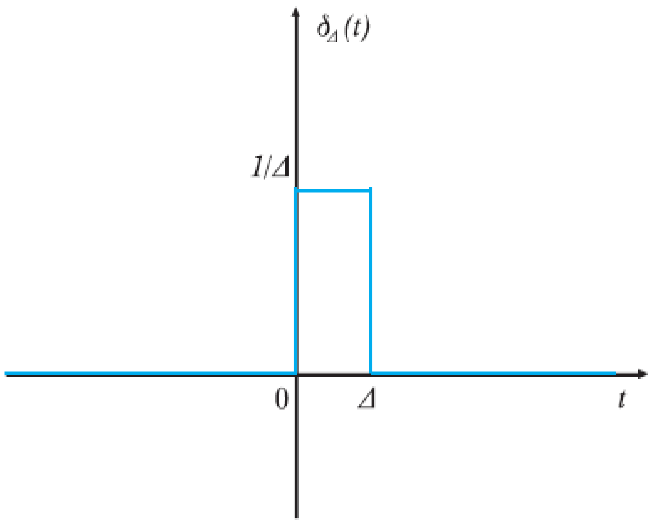
Λαμβάνεται ένας ορθογωνικός παλμός (μοναδιαίου εμβαδού) της εξής μορφής:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 0, \text{ οταν } t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, \text{ οταν } 0 < t < \Delta \\ 0, \text{ οταν } t > \Delta \end{cases}$$

όπου $\Delta > 0$.

Δηλαδή, ισχύει ότι

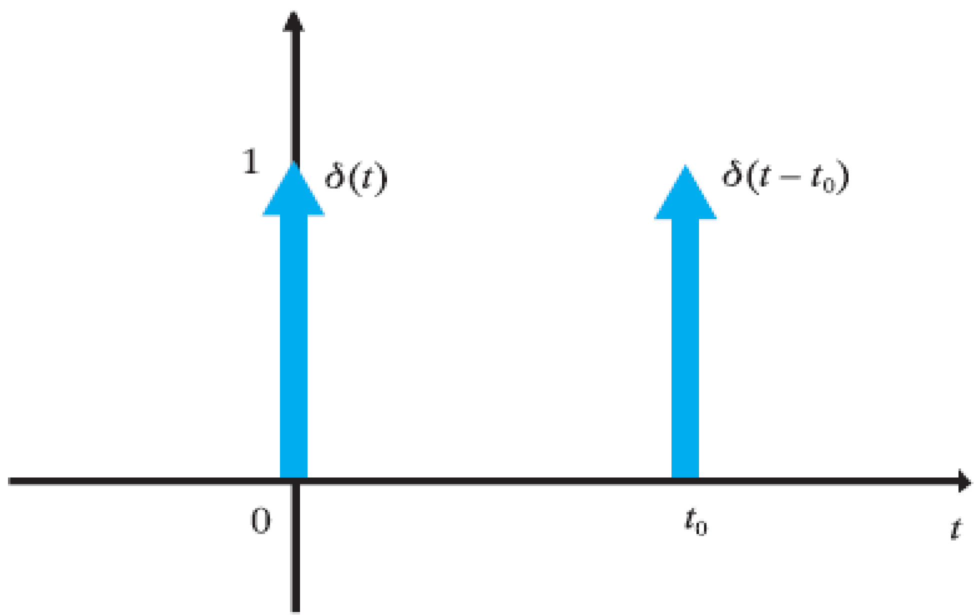
$$\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} rect\left(\frac{t - \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \right)$$



Σχήμα 2.19

Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \to 0$), η χρονική διάρκεια του παλμο
μηδενίζεται και το πλάτος του απειρίζεται, ενώ το εμβαδό του παραμένει ίσο με 1.
κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim\limits_{\Delta \to 0}\left[\delta_{\Delta}(t)\right]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες

- $\delta(t) = 0,\ \text{οταν } t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0,\ \text{οταν } t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)\,dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0)$
- $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

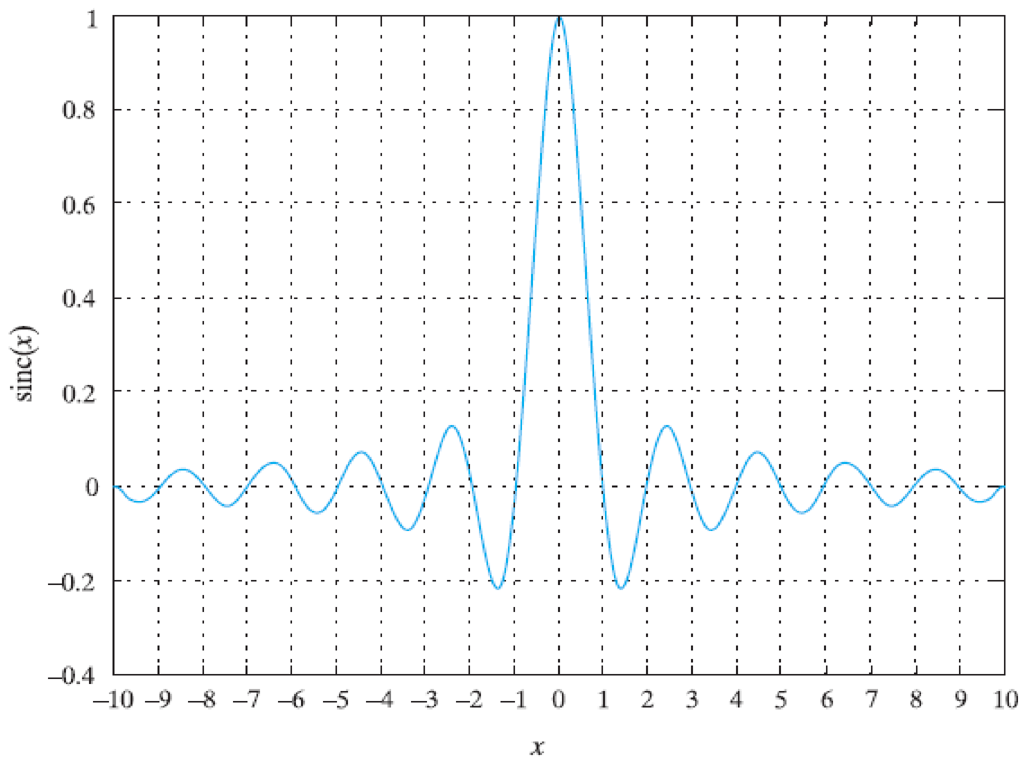
2.2.7.3 Συνάρτηση sinc

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:

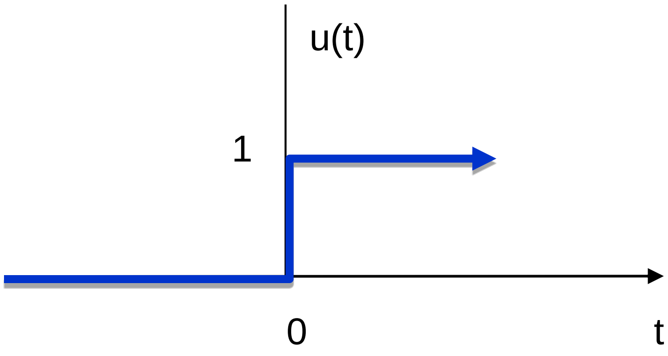


Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

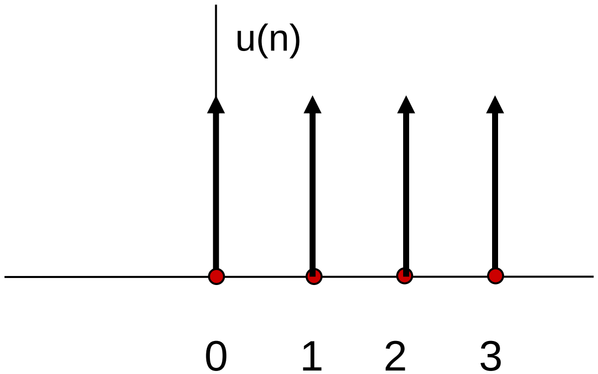
Σήμα Βήματος (1)

- Αναλογικό Σήμα
  - Ορισμός $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ N/A & t = 0 \end{cases}$
  - Ιδιότητες
    - Παραγώγιση $\frac{d}{dt}[u(t)] = \delta(t)$
    - Ολοκλήρωση $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)$



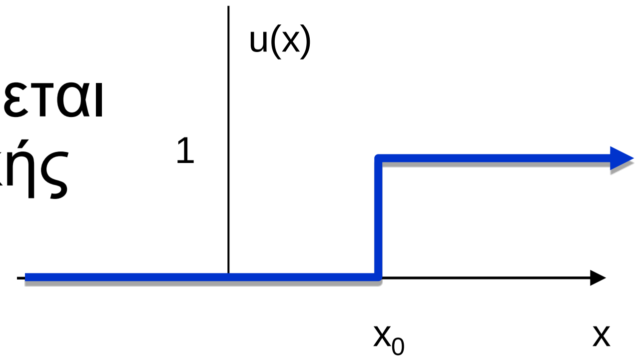
- Διακριτό Σήμα
  - Ορισμός

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

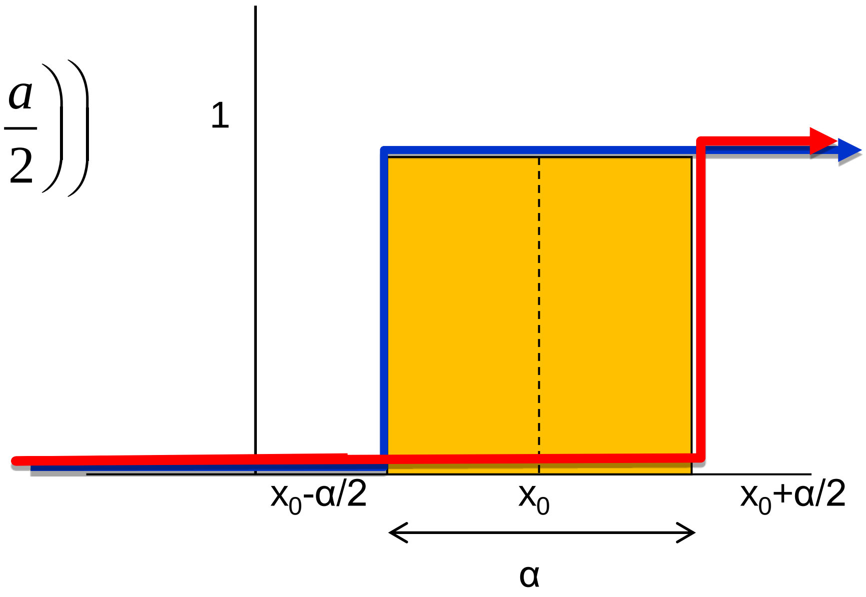


Σήμα Βήματος (2)

- Ο ορθογώνιος παλμός περιγράφεται και μέσω της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

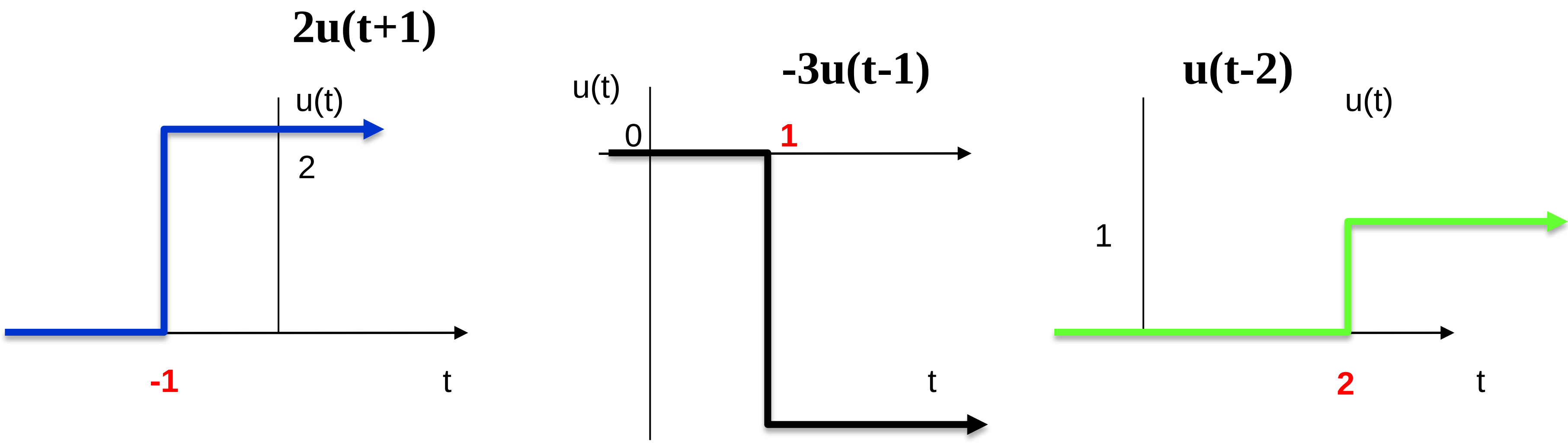


$$rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=u\left(x-\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right)-u\left(x-\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right)$$



Σήμα Βήματος (3)

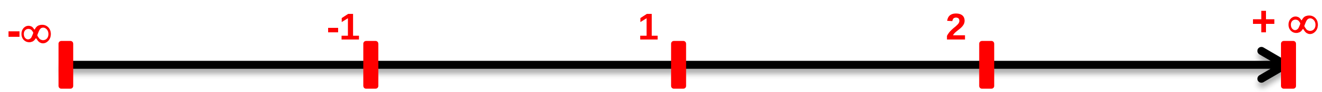
- Παραδείγματα
  - Να σχεδιαστεί το σήμα x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)
- Μέθοδος
- Βήμα 1: Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους



- Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1** και **2**

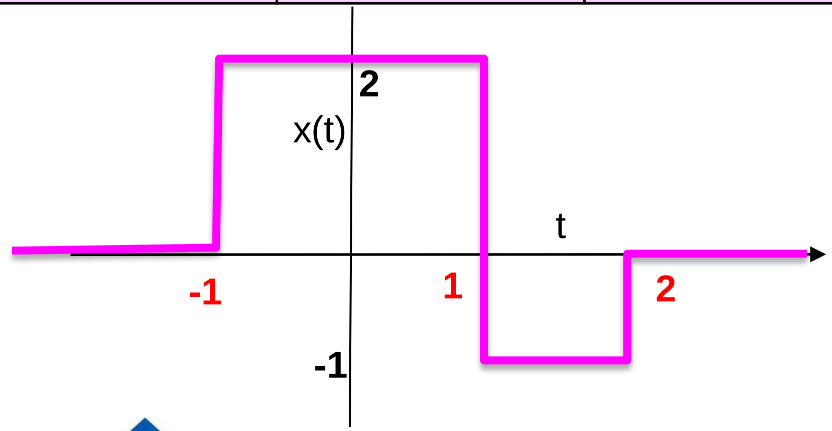
Σήμα Βήματος (4)

- Βήμα 3: Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



2u(t+1)	0	2	2	2
-3u(t-1)	0	0	-3	-3
u(t-2)	0	0	0	1
x(t)	0	2	-1	0

  - Βήμα 4:
  - Γραφική Παράσταση



Υπέρθεση Σημάτων (1)

- Εργασία 1η, (2009), Θέμα 4

- Δίνεται το σήμα

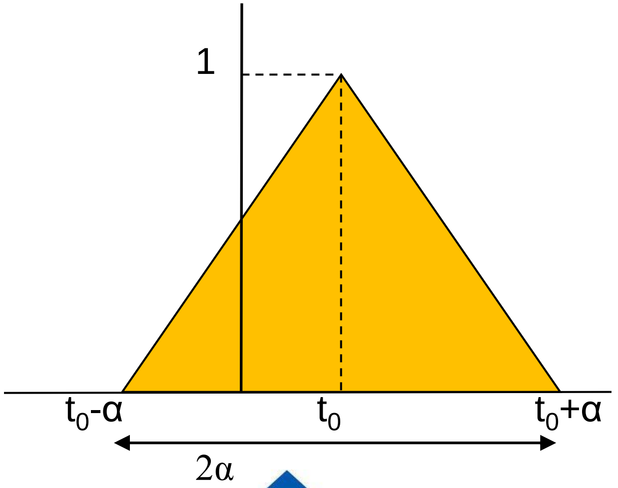
$$x(t) = -2\Lambda(\frac{t+2}{2}) + 2\Lambda(\frac{t}{2}) - 2\Lambda(\frac{t-2}{2})$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα *x(t)*.

Υπέρθεση Σημάτων (2)

- <u>Βήμα 1ο</u>: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

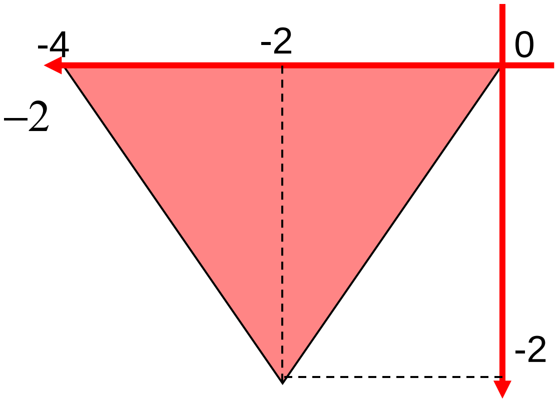
$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases} 1-\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad t_0<t<a+t_0 \\ 1-\dfrac{-(t-t_0)}{a}=1+\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad -a+t_0<t<t_0 \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad |t-t_0|>a \quad \acute{\eta} \quad -a+t_0>t\ \&\ t>t_0+a \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (3)

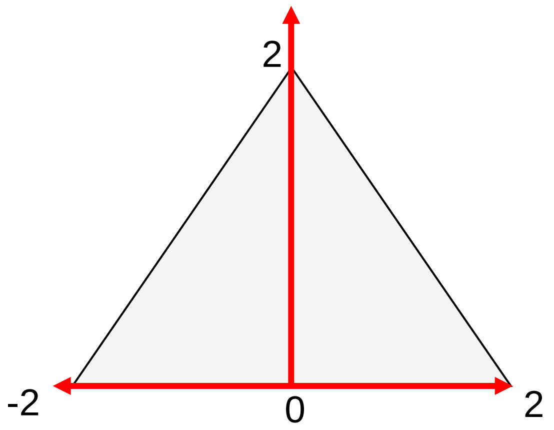
- Αρα 1ο σήμα

$$-2\Lambda(\frac{t+2}{2}) = \begin{cases} -2\left[1-\frac{-(t+2)}{2}\right] = -4-t, \text{όταν -2<} t+2<0 \Rightarrow -4<t<-2 \\ -2\left[1-\frac{(t+2)}{2}\right] = t, \text{όταν 0<} t+2<2 \Rightarrow -2<t<0 \\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0 \end{cases}$$



2ο σήμα

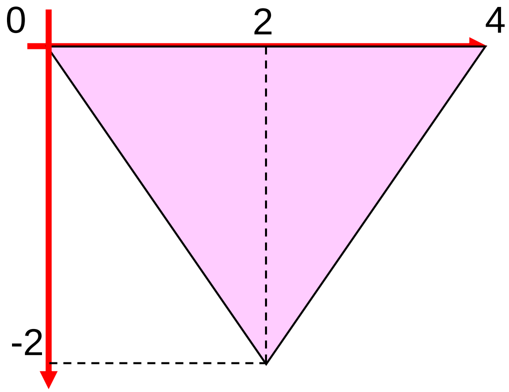
$$2\Lambda(\frac{t}{2}) = \begin{cases} 2\left[1-\frac{-(t)}{2}\right] = 2+t, \text{όταν -2<} t<0 \\ 2\left[1-\frac{(t)}{2}\right] = 2-t, \text{όταν 0<} t<2 \\ 0, \text{όταν } t<-2 \text{ ή } t>2 \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (4)

- 3ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t-2)}{2}\right]=-t, \text{όταν } -2<t-2<0 \Rightarrow 0<t<2\\ -2\left[1-\frac{(t-2)}{2}\right]=t-4, \text{όταν } 0<t-2<2 \Rightarrow 2<t<4\\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0\end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (5)

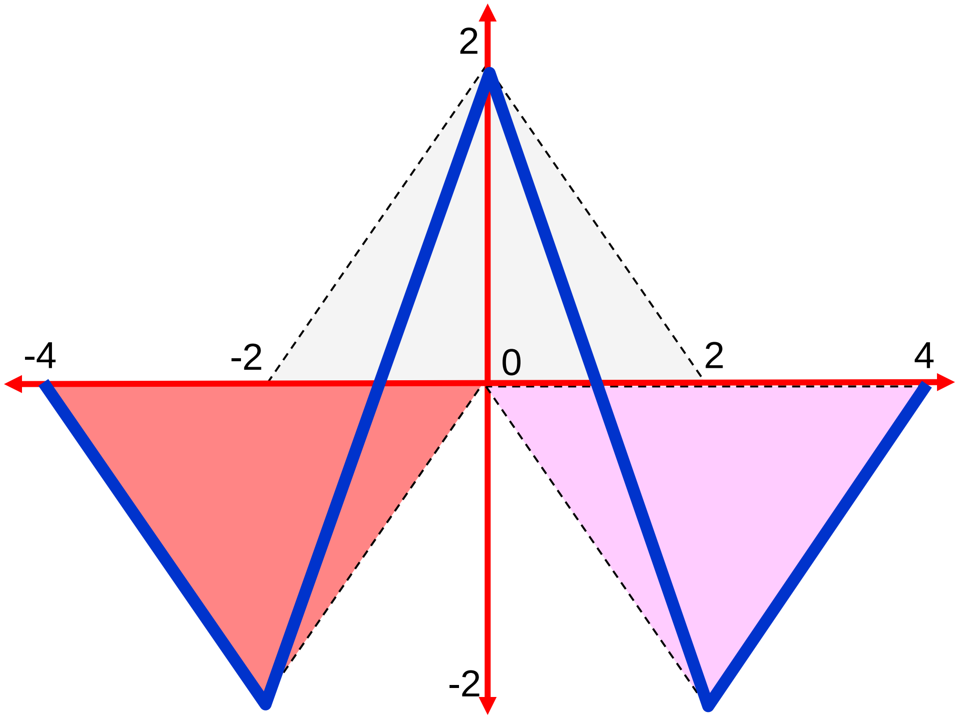
- Βήμα 2ο: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα

-∞ -4 -2 0 2 4

$-2\Lambda(\frac{t+2}{2})$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda(\frac{t}{2})$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})$	0	0	0	-t	t-4
x(t)	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

Υπέρθεση Σημάτων (6)

- <u>Βήμα 3ο</u>: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα



Υπέρθεση Σημάτων (7)

- Από Εργασία 1η, (2009), Θέμα 6(β)

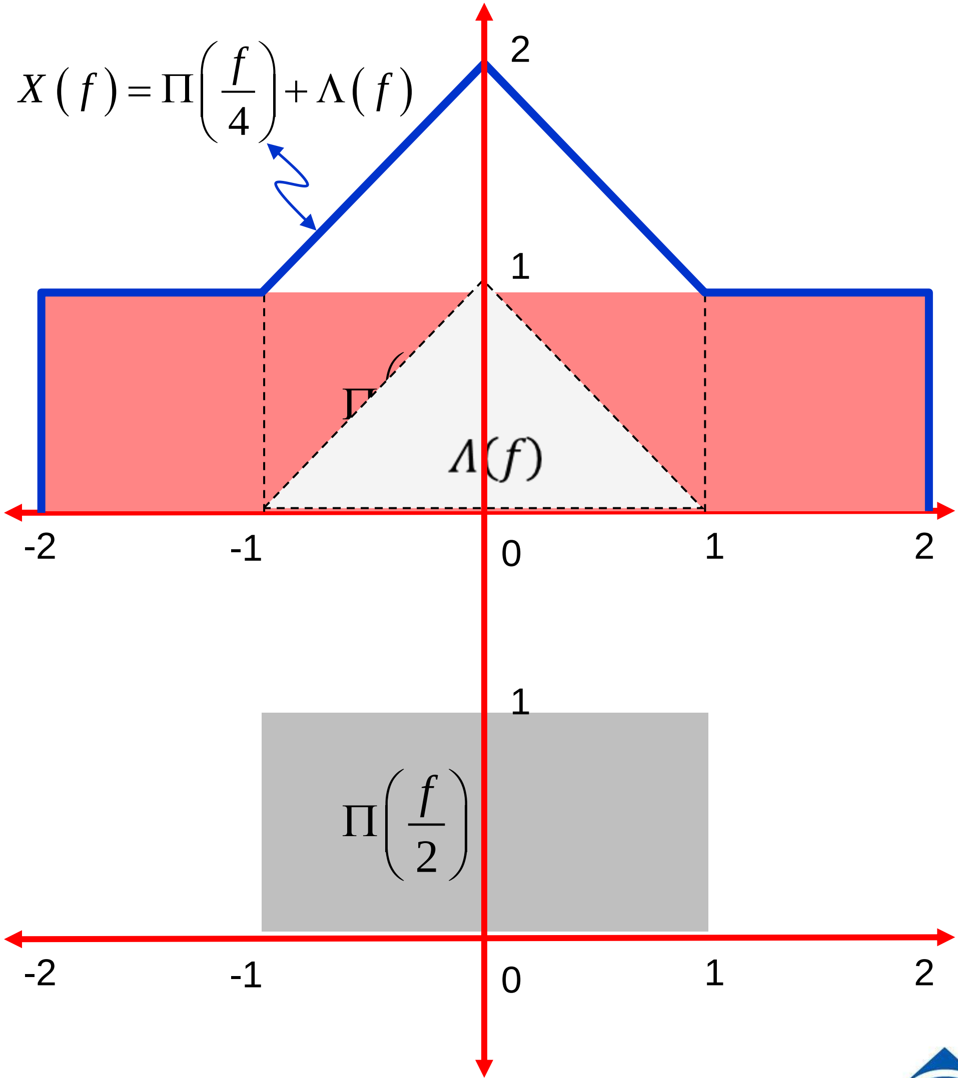
- Δίνεται το X(f) και H(f) που είναι
- $X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)$ και $\mathrm{H}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$

- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Υπέρθεση Σημάτων (8)

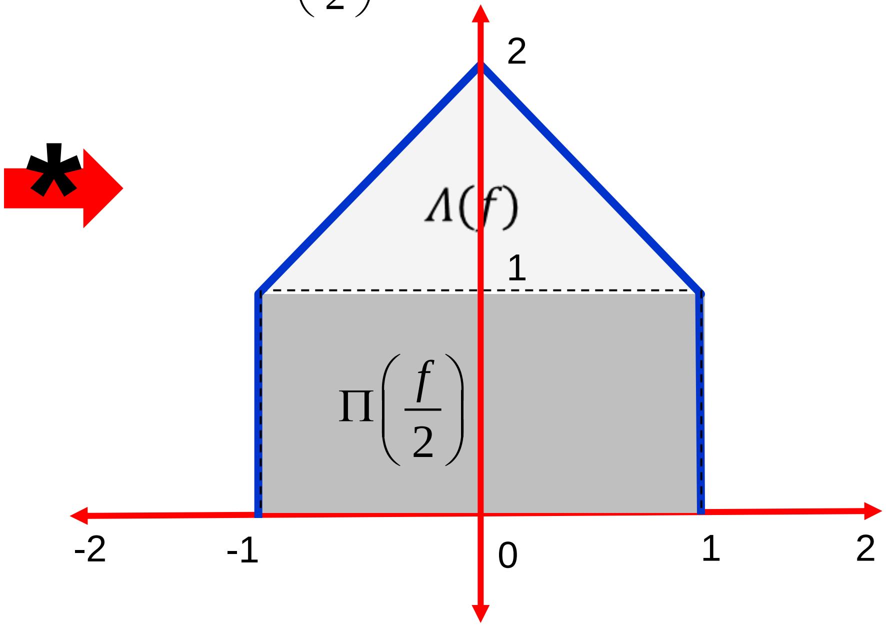
$$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)$$



$$Y(f) = \left[\Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)\right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

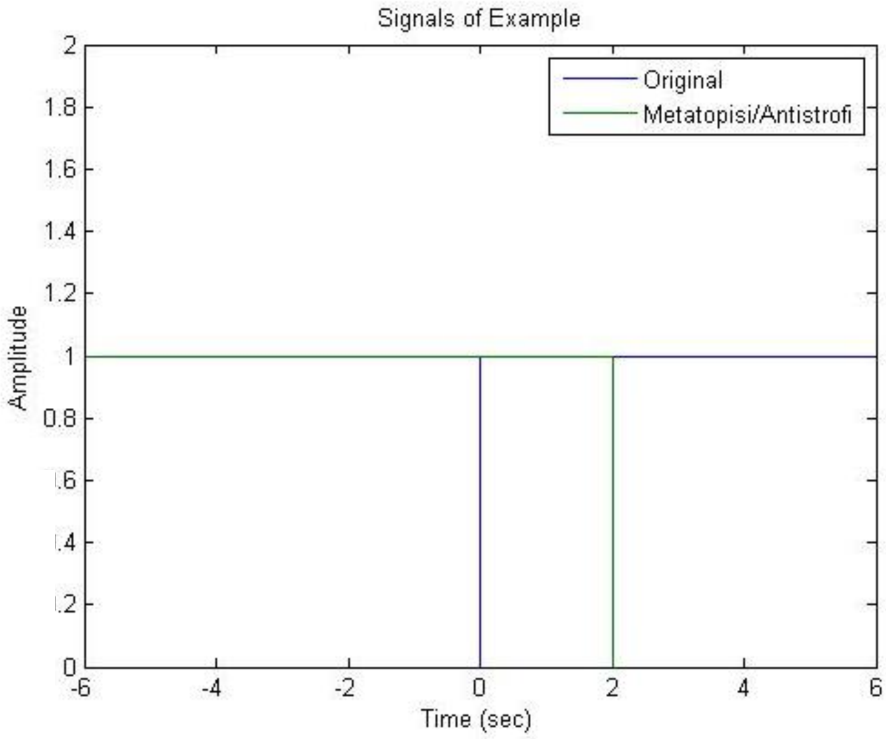
$$= \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$= \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f)$$



Δημιουργία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (1)

```
function y=un_step(t)
%Unit step
%y=un_step(t)
%y signal
y=  (t>=0);
end
```

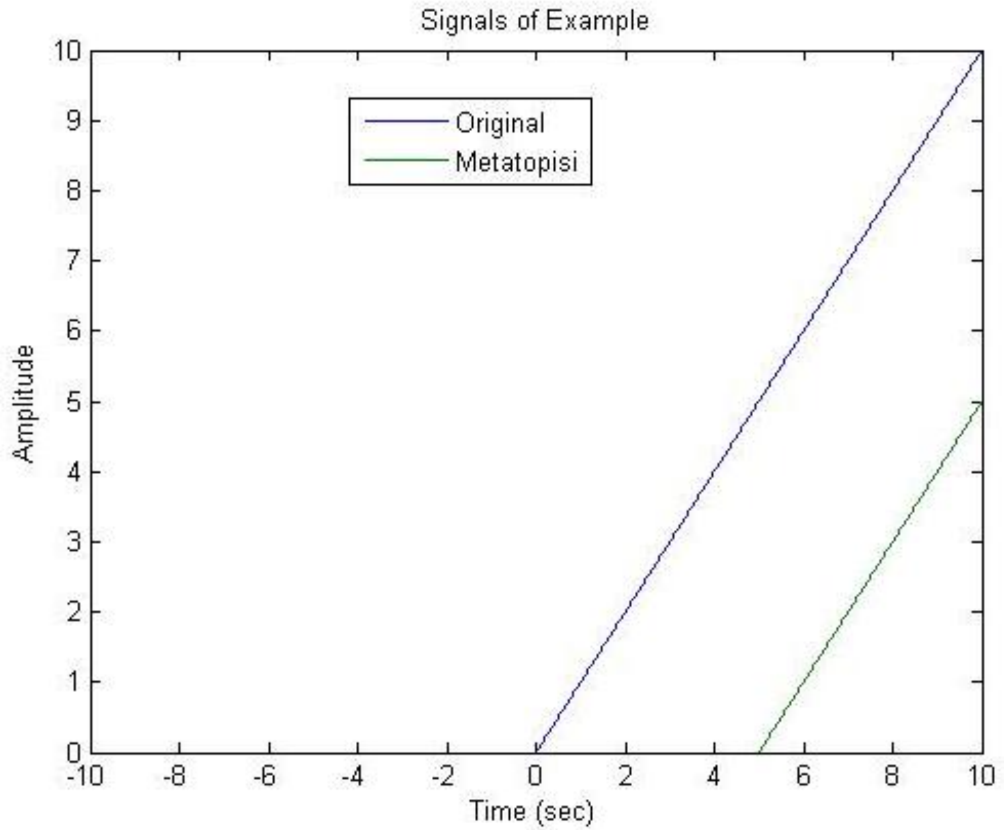



```
t = -6:0.001:6;
y = un_step(t);
y=double(y);
w=un_step(2-t);
w=double(w);
plot(t,y,t,w); % Plot the result
xlabel('Time (sec)'); % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude'); % Make plot pretty :-)
title('Signals of Example'); % Make plot pretty :-)
legend('Original', 'Metatopisi/Antistrofi'); % Make plot pretty :-)
axis([-6 6 0 2])
```

Δημιουργία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (2)

```
function y = ur(t)
%Ramp Function
% y = ur(t)
% t: time index
% y: signal
y1= (t>=0);
y = t.*y1;
end
```

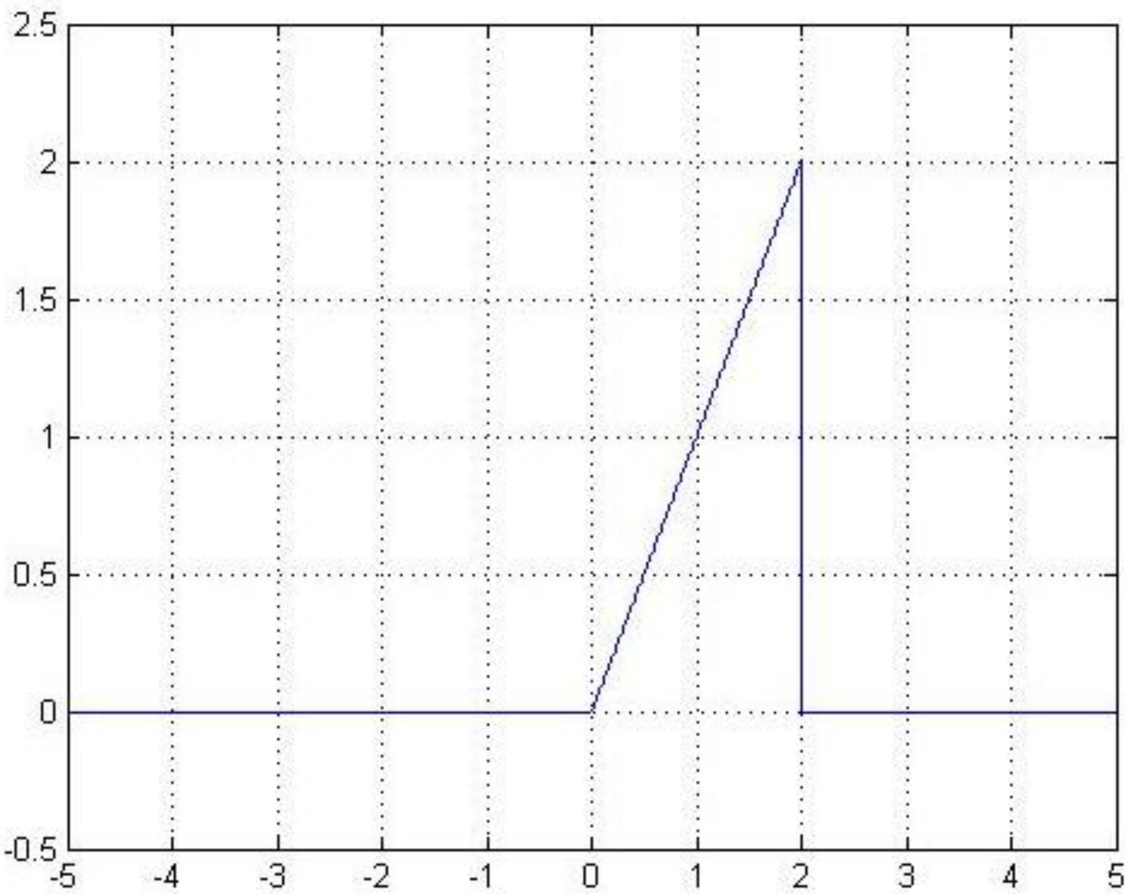
```
t = -10:0.001:10;
y = ur(t);
z=ur(t-5);
plot(t,y,t,z); % Plot the result
xlabel('Time (sec)'); % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude'); % Make plot pretty :-)
title('Signals of Example'); % Make plot pre..., . ,
legend(Original, 'Metatopisi'); % Make plot pretty :-)
```



Δημιουργία Σύνθετων Σημάτων

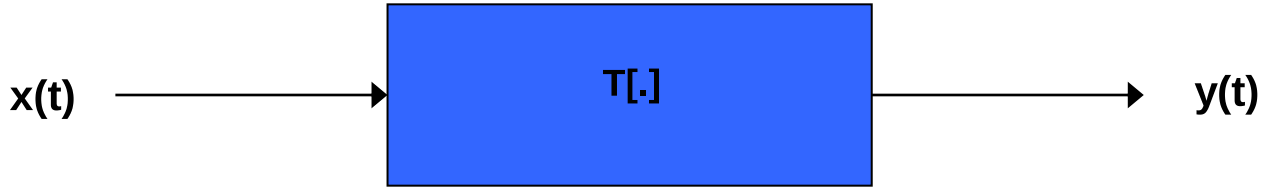
```
function y = ur(t)
%Ramp Function
% y = ur(t)
% t: time index
% y: signal
y1= (t>=0);
y = t.*y1;
end
function y=un_step(t)
%Unit step
%y=un_step(t)
%y signal
y=  (t>=0);
end
```

```
t = -5:0.001:5;
y = un_step(-t+2) .* ur(t);
plot(t,y)
grid on
axis([-5 5 -.5 2.5])
```



Σύστημα

- Ως σύστημα χαρακτηρίζεται οποιαδήποτε διαδικασία μετασχηματισμού ενός αρχικού σήματος x(t) σε ένα άλλο σήμα y(t) το οποίο και χαρακτηρίζεται ως απόκριση του συστήματος
- T[.]: τελεστής που δηλώνει το μετασχηματισμό που εκτελείται επί της εισόδου x(t)



Ταξινόμηση Συστημάτων (1)

- Συστήματα Συνεχούς ή Διακριτού Χρόνου
  - Αν τα σήματα εισόδου και εξόδου, x(t) και y(t) είναι σήματα συνεχούς χρόνου, τότε το σύστημα ονομάζεται σύστημα συνεχούς χρόνου
  - Αν τα σήματα εισόδου και εξόδου, x(t) και y(t) είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε το σύστημα ονομάζεται σύστημα διακριτού χρόνου
- Γραμμικά Συστήματα
  - Ο τελεστής T[.] ικανοποιεί τις συνθήκες της γραμμικότητας και ομοιογένειας
    - Αθροιστικότητα $T[x_1(t)+x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$
    - Ομοιογένεια: $T[\alpha \cdot x(t)] = a \cdot T[x(t)]$

Ταξινόμηση Συστημάτων (2)

- Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα
  - Ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη: $Εάν\ y(t) = T[x(t)]\ τότε\ ισχύει\ y(t-\alpha) = T[x(t-\alpha)]$
    - **α:** σταθερά
- Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα (LTI)
  - Αν το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, τότε το σύστημα ονομάζεται **γραμμικό χρονικά αμετάβλητο**

Χαρακτηριστικά Σήματος

- Στην πράξη, κάθε ηλεκτρομαγνητικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σε (περισσότερα από ένα) περιοδικά αναλογικά σήματα διαφορετικής συχνότητας, πλάτους και φάσης
- Ανάλυση Fourier

Μετασχηματισμός Fourier

Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορει να θεωρηθει σαν ενας εργαλειο με το οποιο βλεπουμε ενα σημα απο μια αλλη οπτικη γωνια:
  - Κοιτάξτε πόσο διαφορετική μπορει να φανει μια καρεκλα οτα την βλέπουμε απο διαφορες γωνιες

- Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σηματος:
  - Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολής συναρτήσει του χρόνου
  - Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

Παράδειγμα.

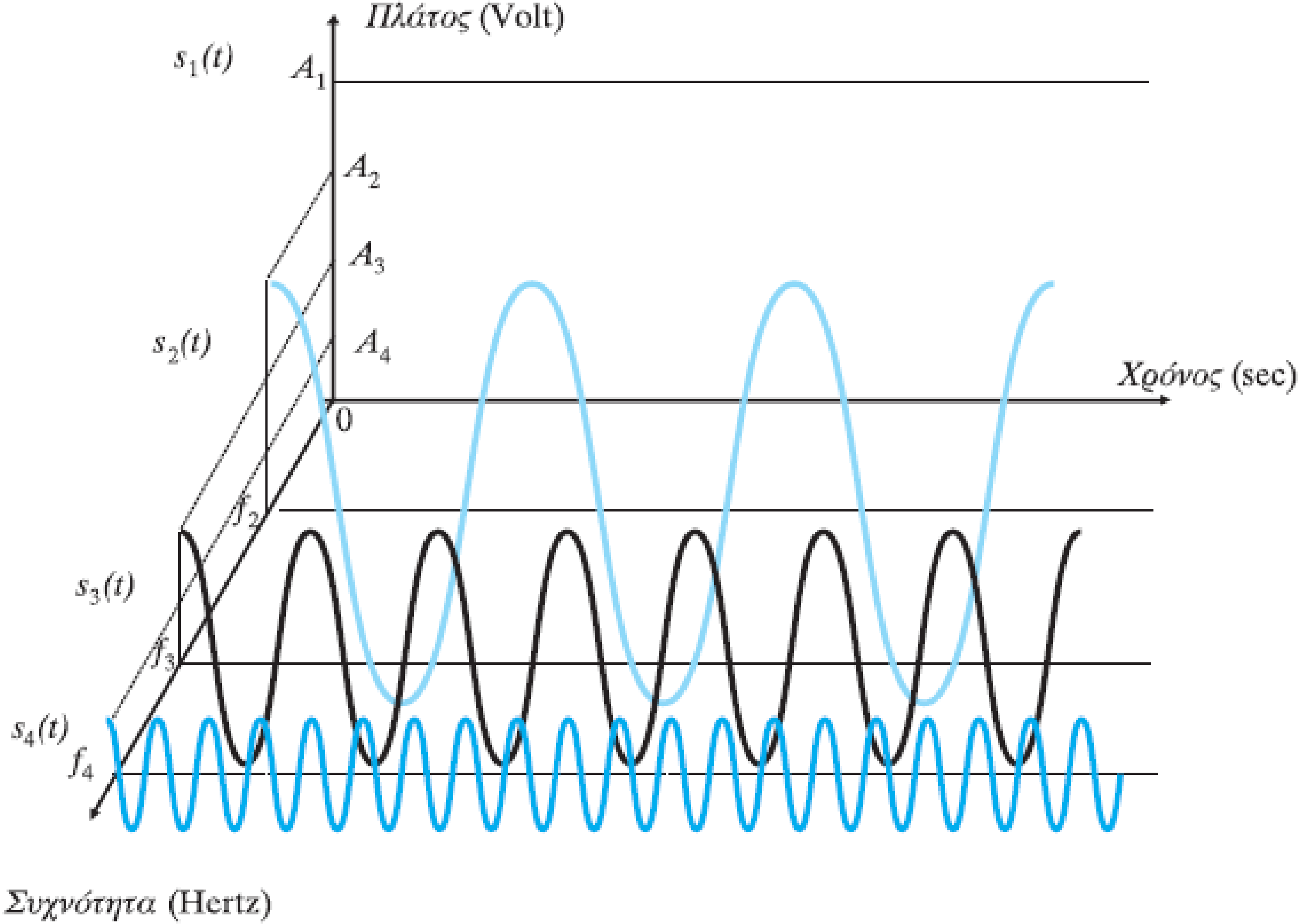
Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$
$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$
$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$
$$f_2 < f_3 < f_4$$
$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

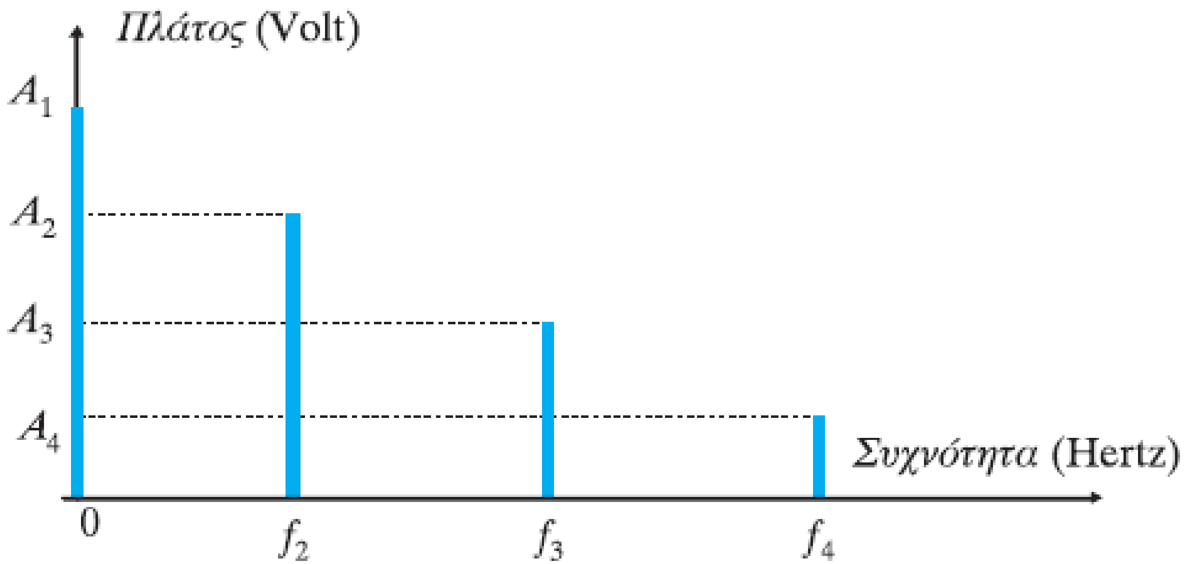
Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

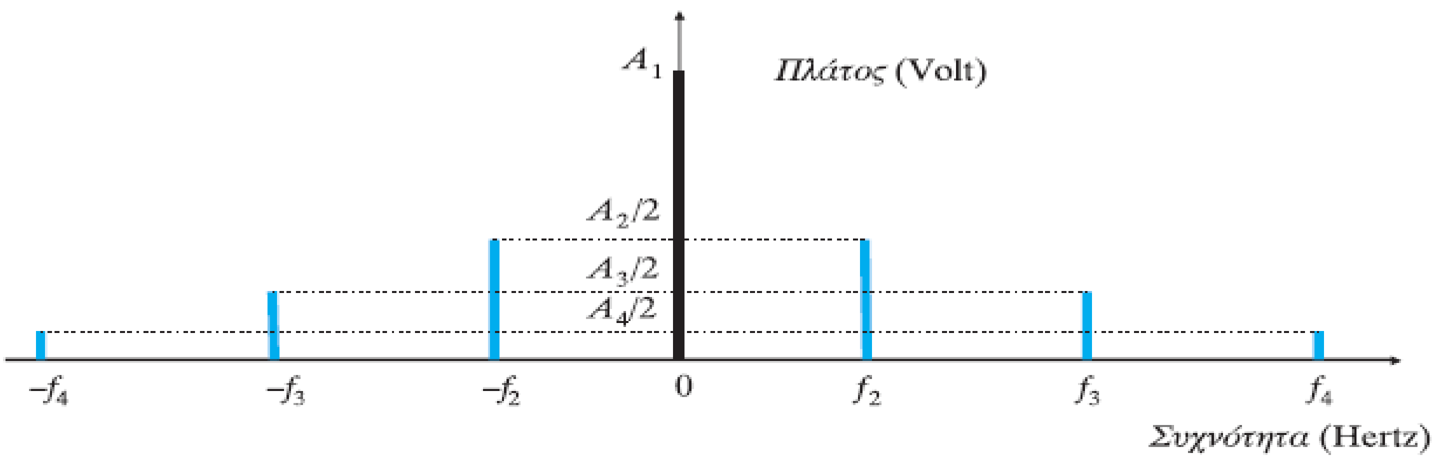
Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

$$s(t) = A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} =$$

$$= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t}$$

Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.

Examples 10,10a

2.3.1 Περιοδικά Σήματα - Σειρές Fourier

Ορισμός-Τριγωνομετρική-Εκθετική

Βασική Ιδιότητα:

Όλα τα περιοδικά σήματα αποτελούνται από αθροίσματα συνημιτόνων και ημιτόνων ορισμένων συχνοτήτων.

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos(2\pi n f t) + B_n \sin(2\pi n f t) \right\},$$

όπου ισχύει $f = \frac{1}{T}$ («f» η συχνότητα και «T» η περίοδος του σήματος αντίστοιχα).

Η παραπάνω σχέση αντιπροσωπεύει την τριγωνομετρική σειρά Fourier. Εαν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις Euler, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

βλ. διαφάνεια 47 για τις σχέσεις Euler

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft}$, που αντιπροσωπεύει τη μιγαδική σειρά Fourier.

Οι συχνότητες που περιέχονται στα παραπάνω αθροίσματα είναι οι εξής:

Για $n=1$, $f_1=f$, $T_1=1/f$

Για $n=2$, $f_2=2f$, $T_2=1/2f$

…

Για $n=k$, $f_k=kf$, $T_k=1/kf$

…

Ισχύει ότι $T_1=2T_2=3T_3=\ldots=kT_k=\ldots$, $k \in \mathbb{N}$, που συμπίπτει με το κριτήριο περιοδικότητας που παρουσιάστηκε σε την ενότητα 2.2.6

Οι συντελεστές Fourier απεικονίζουν το σήμα (πλάτος και φάση) σε καθεμιά από τις συνιστώσες συχνότητες.

π.χ. για τη συχνότητα $f_k=kf$ έχουμε $V_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi kft}dt=|V_k|e^{j\phi_k}$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος $|V_k|$ αντιπροσωπεύει το φάσμα πλάτους και ο όρος ϕ_k το φάσμα φάσης του σήματος για τη συγκεκριμένη συχνότητα.

2.3.2 Γενίκευση: Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός-Επέκταση Ανάλυσης Fourier για μη περιοδικά σήματα

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.3.1, το πλάτος και η φάση ενός περιοδικού σήματος με περίοδο Τ σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k=kf$ προσδιορίζεται με τον υπολογισμό του αντίστοιχου συντελεστή Fourier $V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi nft}dt = |V_k|e^{j\phi_k}$. Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η περίοδος μπορεί να υποτεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \to +\infty$), και το φάσμα του σήματος θα είναι συνεχές και όχι διακριτό ($nf \to f$). Συνεπώς, με τη γενίκευση των εκφράσεων για τις σειρές Fourier προκύπτει η έκφραση του φάσματος μη περιοδικών σημάτων , δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier:

$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ (το μέτρο της $G(f)$ έχει μονάδες $Volt/Hz$)

Αντίστοιχα, η σχέση που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του φάσματος ενός σήματος δίνεται παρακάτω:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν και με βάση την έκφραση του φάσματος του σήματος στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας $\omega=2\pi f$:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Χρειάζεται προσοχή, όταν εργάζεται κανείς στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας, διότι σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζεται σε σχέσεις και ιδιότητες μετασχηματισμών ο παράγοντας 2π ή 1/2π .

Όταν ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier το φάσμα $G(f)$, μπορούμε να γράψουμε: $x(t)\xleftrightarrow{F}G(f)$. Ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει τη σχέση ισοδυναμίας των εκφράσεων του σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

- Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας:
  - Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT) = x(t)\ \text{για}\ k = 1, 2, \ldots$$

  - Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση
  - Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από διακριτούς παλμούς σε συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση

$$f = k_1 f_1 = k_2 f_2 = \ldots = k_N f_N \ ,\ k_1, k_2 \ldots k_N$$

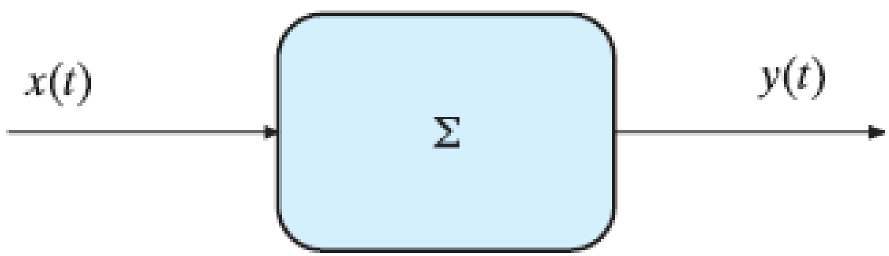
$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N \quad m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

2.3.3.7 *Συνέλιξη*

Η έννοια της συνέλιξης σχετίζεται με τη χαρακτηριστική σχέση εισόδου-εξόδου σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα $y(t)$.



Σχήμα 2.24

Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου

Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S\left(x(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:

Αν

$y_1(t) = S(x_1(t))$

και

$y_2(t) = S(x_2(t))$

τότε:

$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι

Αν

$y_1(t) = S(x_1(t)),\ y_2(t) = S(x_2(t)), \ldots,\ y_k(t) = S(x_k(t))$

τότε:

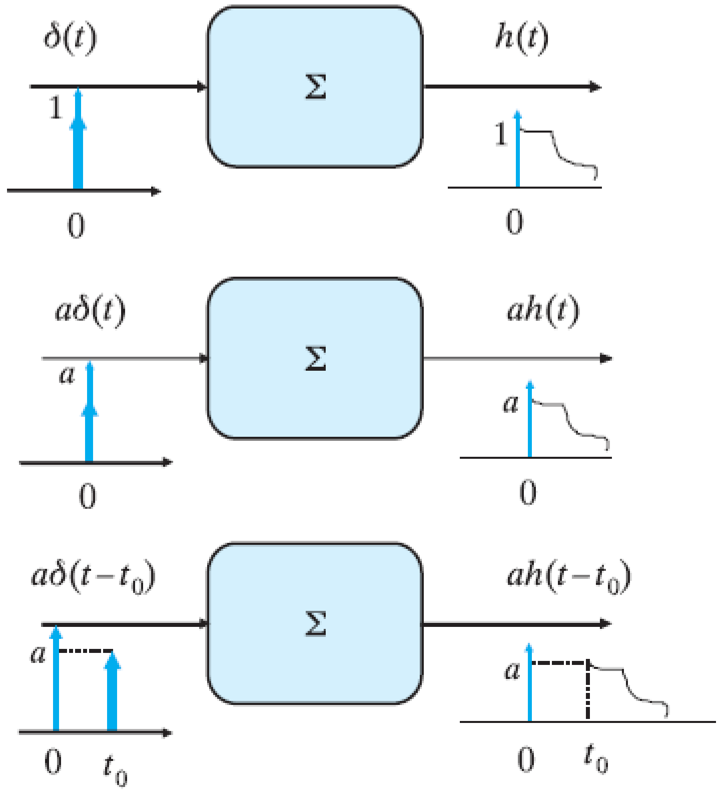
$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_k y_k(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(t) =$$

$$= S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \ldots + \alpha_k x_k(t)) = S\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, εαν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0, το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0.

Δηλαδή, αν $y(t) = S[x(t)]$ τότε $y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$.

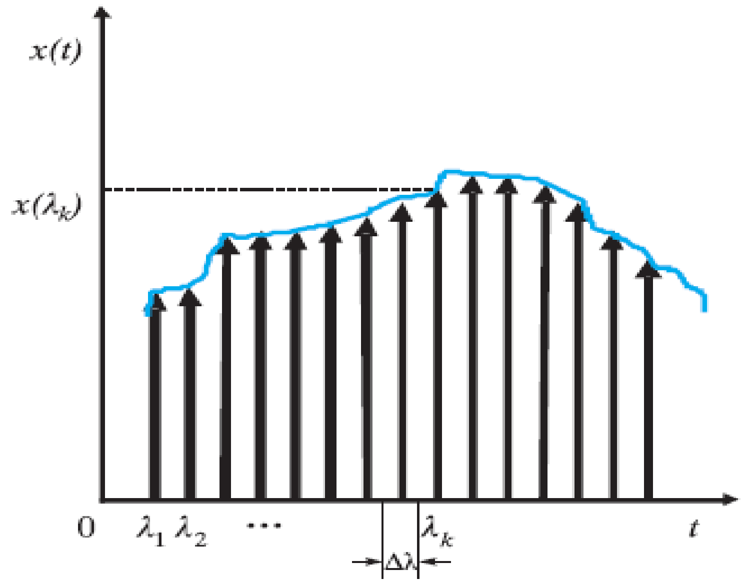
Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος $h(t)$ είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



Σχήμα 2.25

Κρουστική απόκριση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



Σχήμα 2.26

Αναπαράσταση σήματος εισόδου ως αθροίσματος παλμών

οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}x(\lambda_i)\delta(t-\lambda_i)$$

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\xrightarrow{\Delta\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda=x(t)*h(t)$$

Η πράξη $x(t)*h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t),h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Δηλαδή, αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(f)$ και $y(t)\xleftrightarrow{F}Y(f)$

τότε:

$x(t)*y(t)\xleftrightarrow{F}X(f)\cdot Y(f)$ (A)

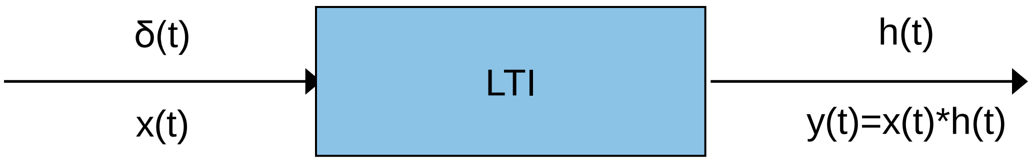
και

$x(t)\cdot y(t)\xleftrightarrow{F}X(f)*Y(f)$ (B)

http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

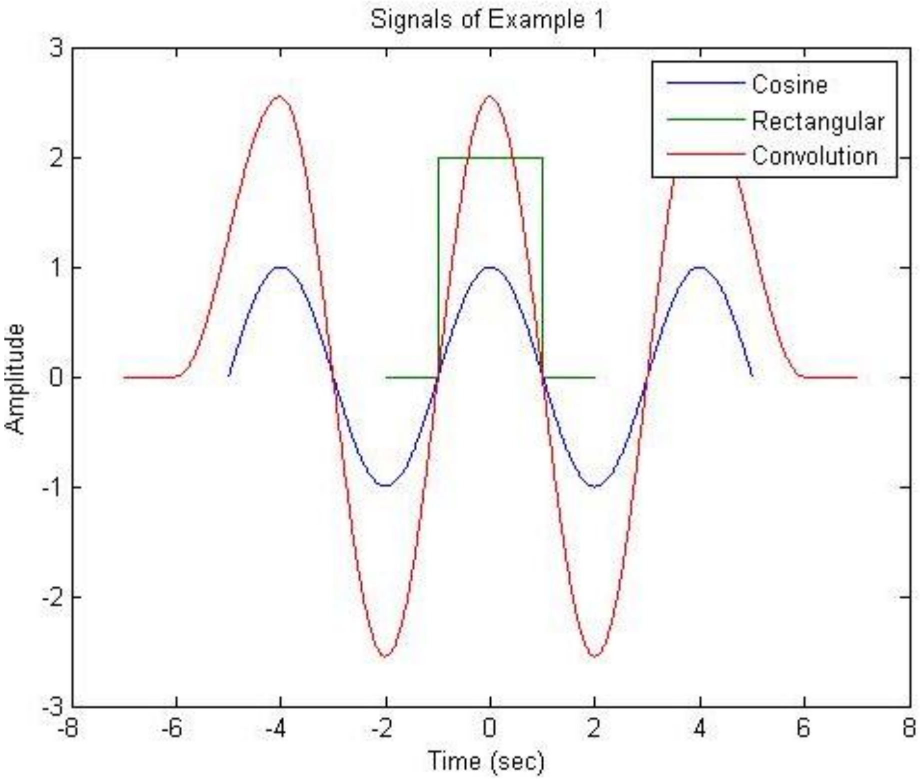
Κρουστική Απόκριση

- Κρουστική Απόκριση
  - Η απόκριση του συστήματος (h(t)) όταν η είσοδος είναι η δ(t)
- Απόκριση σε Αυθαίρετη Είσοδο
  - Η απόκριση του συστήματος σε αυθαίρετη είσοδο x(t) μπορεί να εκφρασθεί σαν η συνέλιξη του x(t) και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος h(t)
  - $y(t)=x(t)*h(t)$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Εφαρμογή της συνέλιξης στο πεδίο της συχνότητας $Y(f)=X(f)H(f)$
  - H(f) ονομάζεται απόκριση συχνότητας



Δημιουργία Σύνθετων Σημάτων

```
ts = 0.01; % Sampling step
tx = -5:ts:5; % Time vector for x(t)
x = cos(pi * tx/ 2); % x(t)
th = -2:ts:2; % Time vector for h(t)
h = 2*rectpuls(th/2); % h(t)
ty = -7:ts:7; % Convolution time vector
y = ts*conv(x,h); % Convolution approximation
plot(tx, x, th, h, ty, y); % Plot the result
xlabel('Time (sec)'); % Make plot pretty :-)
ylabel('Amplitude'); % Make plot pretty :-)
title('Signals of Example'); % Make plot pretty :-)
legend('Cosine', 'Rectangular', 'Convolution'); % Make plot pretty :-)
```



Example 9

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (1)

Σημείωση: δείτε τον πίνακα 2.3.5Α, σελ. 54-55 (τόμος Β, μέρος Β)

- Γραμμικότητα

$$x_1(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_1(f), \quad x_2(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_2(f) \Leftrightarrow a x_1(t) + b x_2(t) \leftrightarrow a\mathrm{X}_1(f) + b\mathrm{X}_2(f)$$

- Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου και Συχνότητας

$$x_1(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \qquad \frac{1}{|a|} x_1\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow X_1(af)$$

- Χρονική καθυστέρηση

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)\exp(-j2\pi f t_0)$$

- Δυϊσμός

Αν x(t) ⇔ X(f) => X(-t) ⇔ x(f) & X(t) ⇔ x(-f)

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (2)

- Συνδυασμός Αλλαγής Κλίμακας & Χρονικής Ολίσθησης

$$x_1\left(at-t_0\right)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X_1\left(\frac{f}{a}\right)\exp\left(-j2\pi\ f\ \frac{t_0}{a}\right)$$

- Ολίσθηση Συχνότητας

$$\exp\left(j2\pi\ f_c t\right)x(t)\leftrightarrow X\left(f-f_c\right)$$

- Συνέλιξη σημάτων στο πεδίο του χρόνου

$$\mathrm{y(t)}=\mathrm{x(t)}*\mathrm{g(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$\mathrm{y(t)}=\mathrm{x(t)}*\mathrm{g(t)}\xleftrightarrow{F}Y(f)=X(f)G(f)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (3)

- Παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)X(f)$$

- Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

- Διαμόρφωση

$$x(t)\cdot\cos(2\pi f t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f-f_c) + \frac{1}{2}X(f+f_c)$$

- Θεώρημα Parseval $E = \int_{-\infty}^{\infty}(x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2 df$

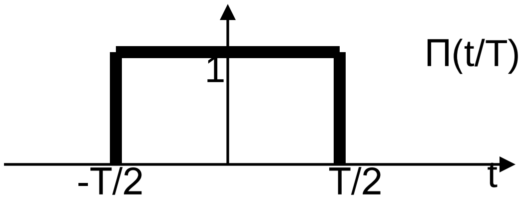
Μετασχηματισμός Fourier Βασικών Σημάτων

Σημείωση: δείτε τον πίνακα 2.3.5Β, σελ. 56-57 (τόμος Β, μέρος Β)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (t)	**ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (f)**
δ(t)	1
δ(t-a)	e^{-j2pfa}
1	δ(f)
$e^{j2\pi fa}$	δ(f-a)
$\cos 2\pi f_o t$	$½(\delta(f-f_o)+\delta(f+f_o))$
$\sin 2\pi f_o t$	$1/2j\ (\delta(f-f_o)-\delta(f+f_o))$
rect(t)	sinc(f)
sinc(t)	rect(f)
tri(t)	$\text{sinc}^2(f)$
$\text{sinc}^2(f)$	tri(f)

Παραδείγματα (1)

- Τετραγωνικός Παλμός



$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \le T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

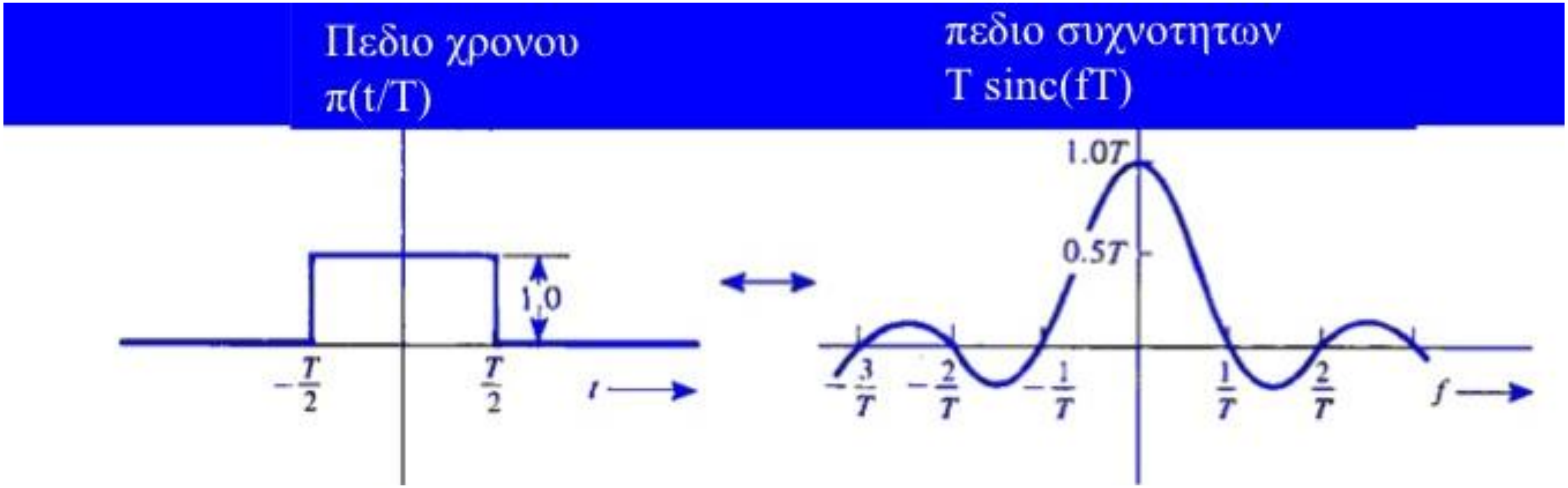
$$F[\Pi(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f}$$

- Αλλά $\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)/2j = \sin(x)$
- Αποτέλεσμα:

$$\Pi(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \cdot \sin c(fT)$$

Παραδείγματα (2)

- Ειδαμε οτι Π(t/T)⇔ Tsinc(fT)
- Παρατηρησεις:
  - Η διαρκεια του παλμου ειναι αντιστροφως αναλογη του ευρους φασματος
  - Η ασυνεχεια στο πεδιο του χρονου οδηγει σε απεριοριστο φασμα



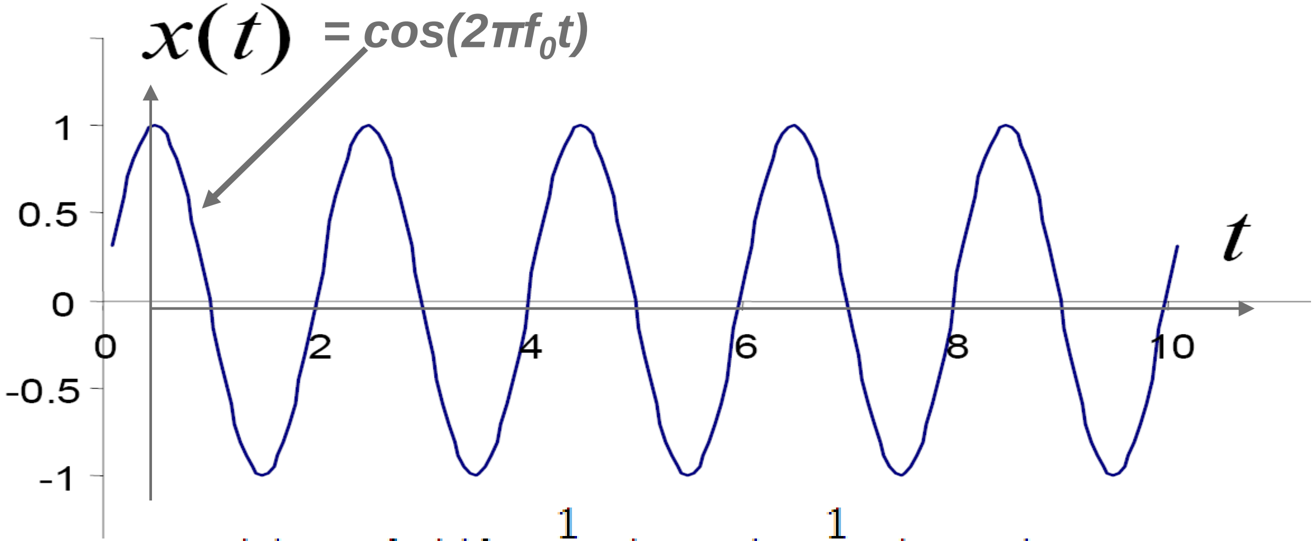
Παραδείγματα (3)

- Μερικές φορές ειναι ευκολότερο να βρουμε ενα σήμα στο χρόνο υπολογιζοντας τον αντιστροφο Μ/Σ
  - Δίνεται $X(f) = \frac{1}{2} d\left(f - f_c\right) + \frac{1}{2} d\left(f + f_c\right)$
  - Βρίσκουμε

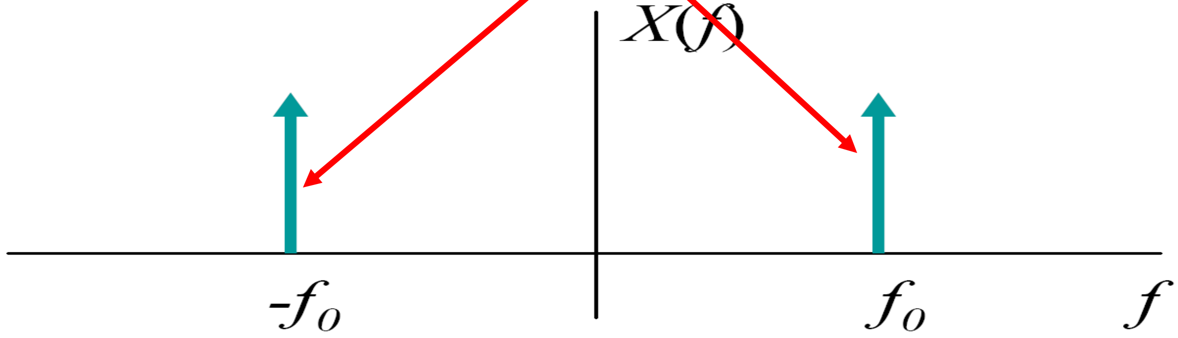
$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f - f_c)e^{j2\pi ft}\,df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f + f_c)e^{j2\pi ft}\,df$$

$$= \frac{e^{j2\pi ft +} e^{-j2\pi ft +}}{2} = cos(2\pi f_c t)$$

Παραδείγματα (4)

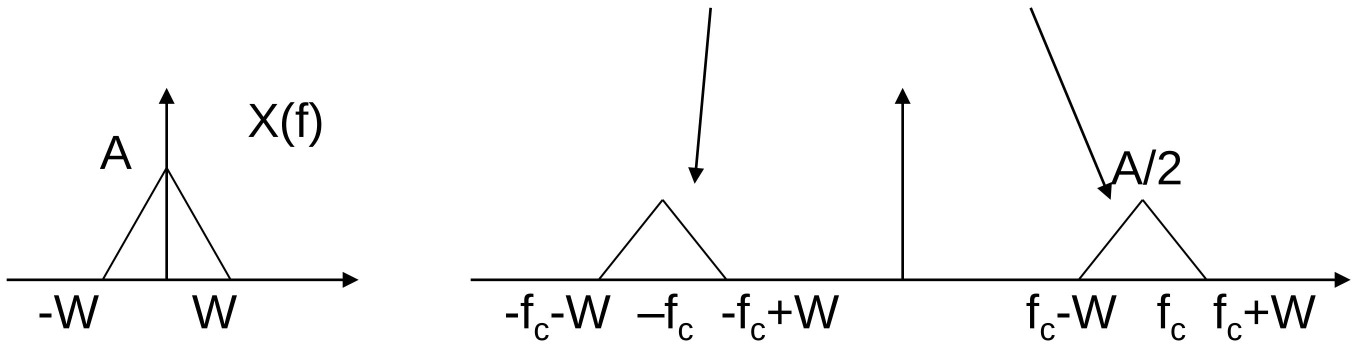


$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$$



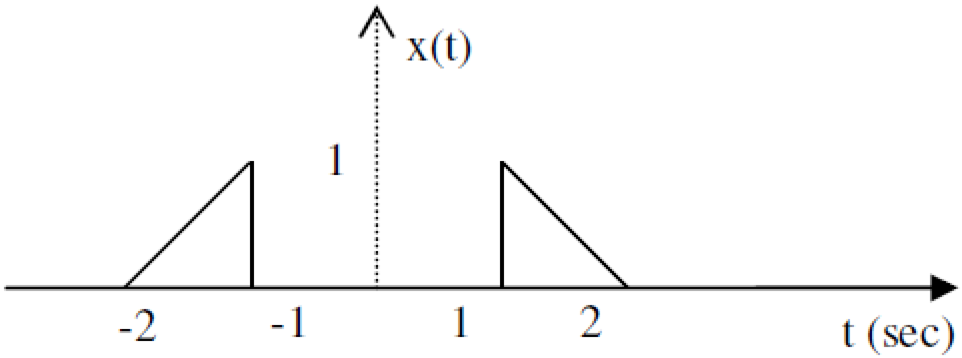
Παραδείγματα (5)

- $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$



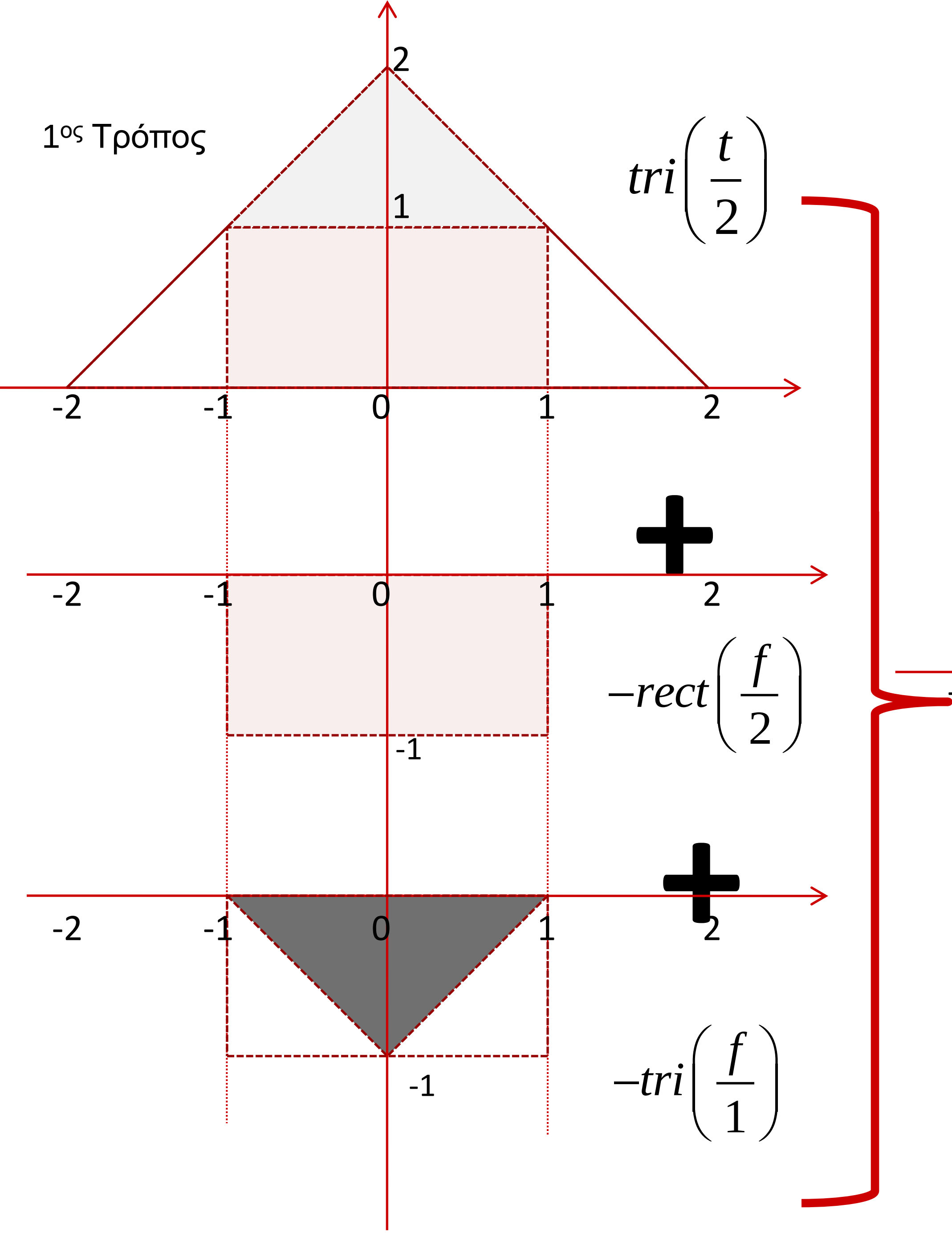
ΘΕΜΑ 2 ΓΕ1/0708

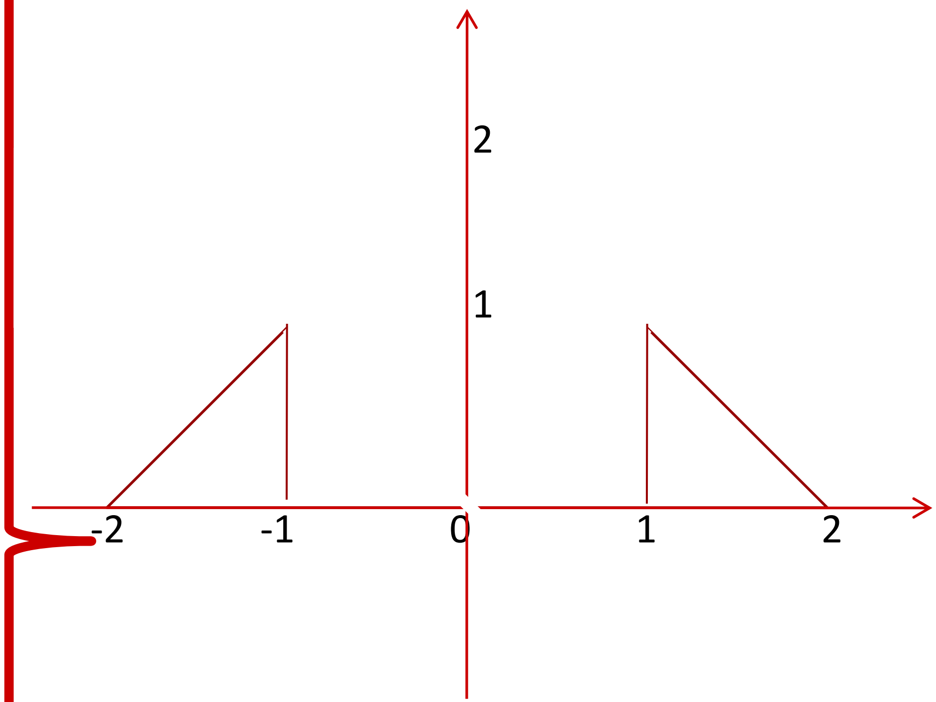
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ που δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Υπόδειξη: Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier είτε απευθείας από τον ορισμό με ολοκλήρωση, είτε εκφράζοντας κατάλληλα το σήμα ως άθροισμα τετραγωνικών (Π(t)) και τριγωνικών παλμών (Λ(t)).

1ος Τρόπος



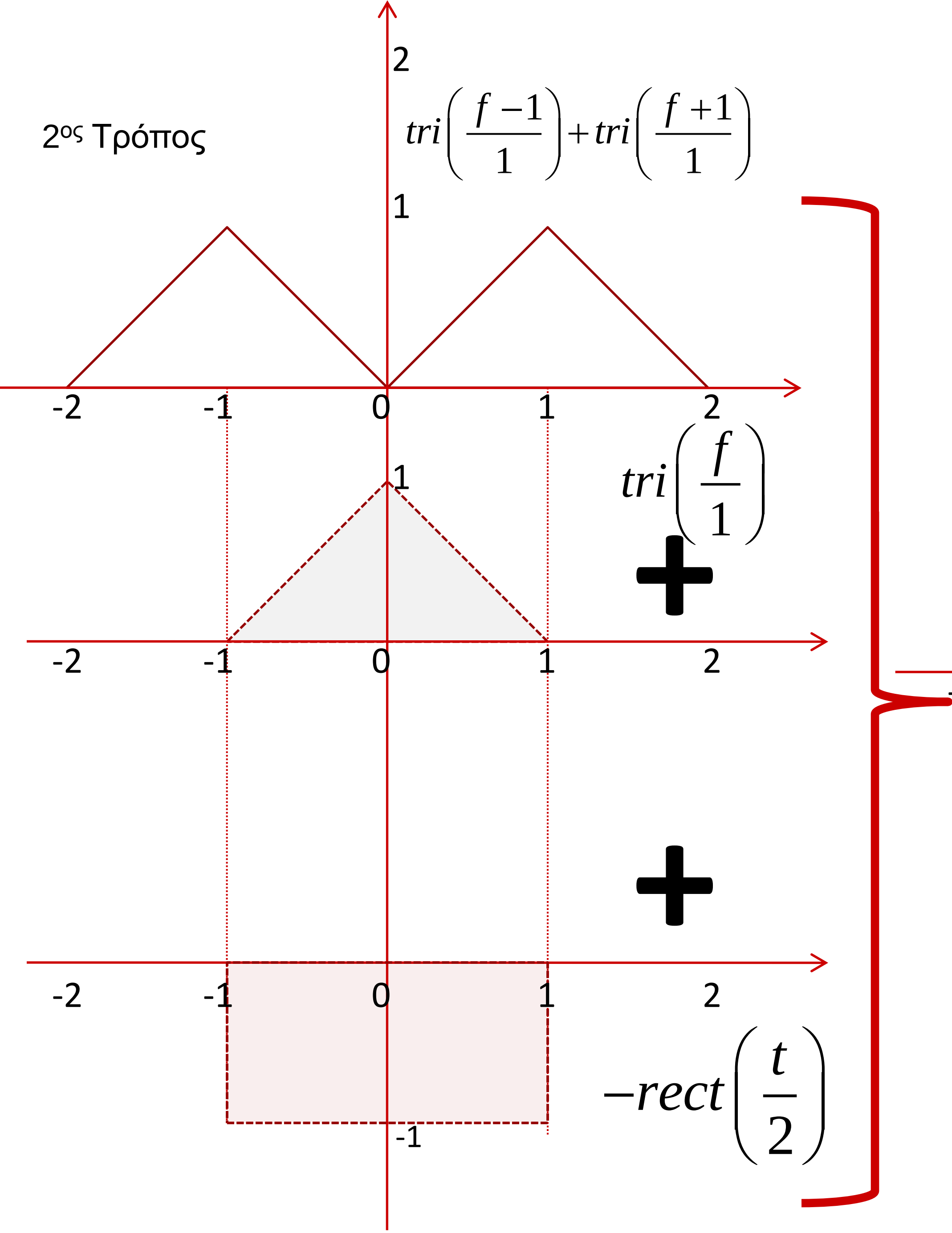


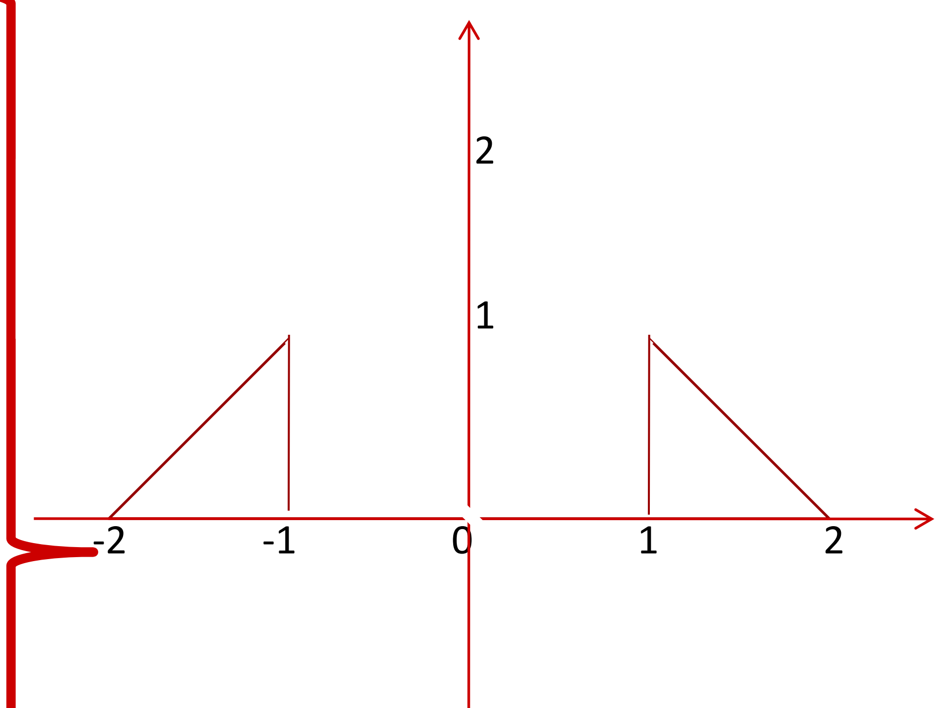
$$2tri\left(\frac{t}{2}\right)-rect\left(\frac{t}{2}\right)-tri(t)$$

$$\updownarrow$$

$$4\sin c^2(2f)-2\sin c(2f)-\sin c^2 f$$

2ος Τρόπος





$$tri\left(\frac{t-1}{1}\right)+tri\left(\frac{t+1}{1}\right)+tri(t)-rect\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
&tri\left(\frac{t-1}{1}\right)\xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}^2(f)\\
&tri\left(\frac{t+1}{1}\right)\xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f}\mathrm{sinc}^2(f)\\
&tri(t)\xleftrightarrow{F}\mathrm{sinc}^2(f)\\
&-rect\left(\frac{t}{2}\right)\xleftrightarrow{F}\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$tri\left(\frac{t-1}{1}\right)+tri\left(\frac{t+1}{1}\right)+tri(t)-rect\left(\frac{t}{2}\right)\xleftrightarrow{F}\left[e^{-j2\pi f}+e^{j2\pi f}\right]\mathrm{sinc}^2(f)+\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)=$$

$$=2\cos(2\pi f)\mathrm{sinc}^2(f)+\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)=2\left[2\cos^2(\pi f)-1\right]\mathrm{sinc}^2(f)+\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)=$$

$$=4\cos^2(\pi f)\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}^2(f)+\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)=$$

$$=4\cos^2(\pi f)\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}-\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)=4\frac{\left[2\cos(\pi f)\sin(\pi f)\right]^2}{(2\pi f)^2}-\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)=$$

$$=4\frac{\left[\sin(2\pi f)\right]^2}{(2\pi f)^2}-\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)=4\mathrm{sinc}^2(2f)-\mathrm{sinc}^2(f)\text{-}2\mathrm{sinc}(2f)$$

Φίλτρα

Φίλτρα

- Το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας H(f) παίρνει σημαντικές τιμές μόνο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων
- Κατηγορίες Φίλτρων
  – Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (LPF): επιτρέπει τη διέλευση όλων των συνιστωσών του σήματος εισόδου με συχνότητες κάτω από ένα όριο b
  – Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (HPF): Το ιδανικό HPF αποκόπτει όλες τις συνιστώσες του σήματος εισόδου με συχνότητες μικρότερες από b και αφήνει τη διέλευση όλων των συνιστωσών πάνω από b χωρίς παραμόρφωση
  – Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (BPF): Διέλευση μιας συγκεκριμένης ζώνης συχνότητας

Φίλτρα

- Βαθυπερατά
  - Χαμηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Υψιπερατό
  - Υψηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Ζωνοπερατό
  - Συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζωνοφρακτικό
  - Φράση συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζώνες διέλευσης και αποκοπής

Τύποι Φίλτρων

- Ιδανικό Βαθυπερατό (Low Pass)

$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|\leq f_c\\ 0, & |f|>f_c\end{cases}$$

- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

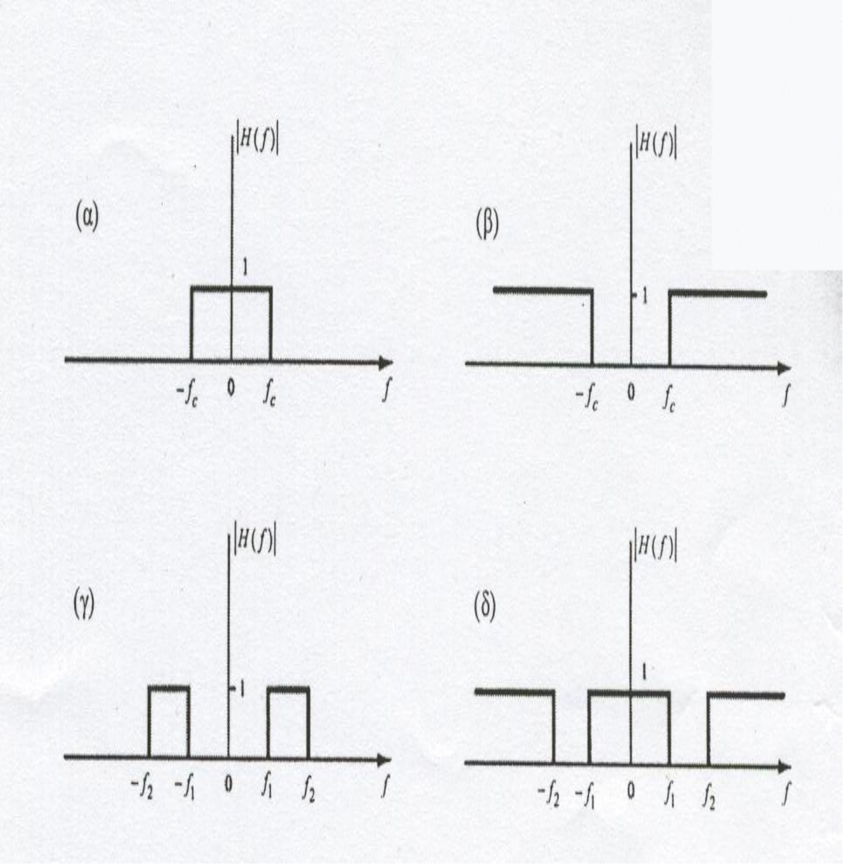
$$H(f)=\begin{cases}0, & |f|\leq f_c\\ 1, & |f|>f_c\end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

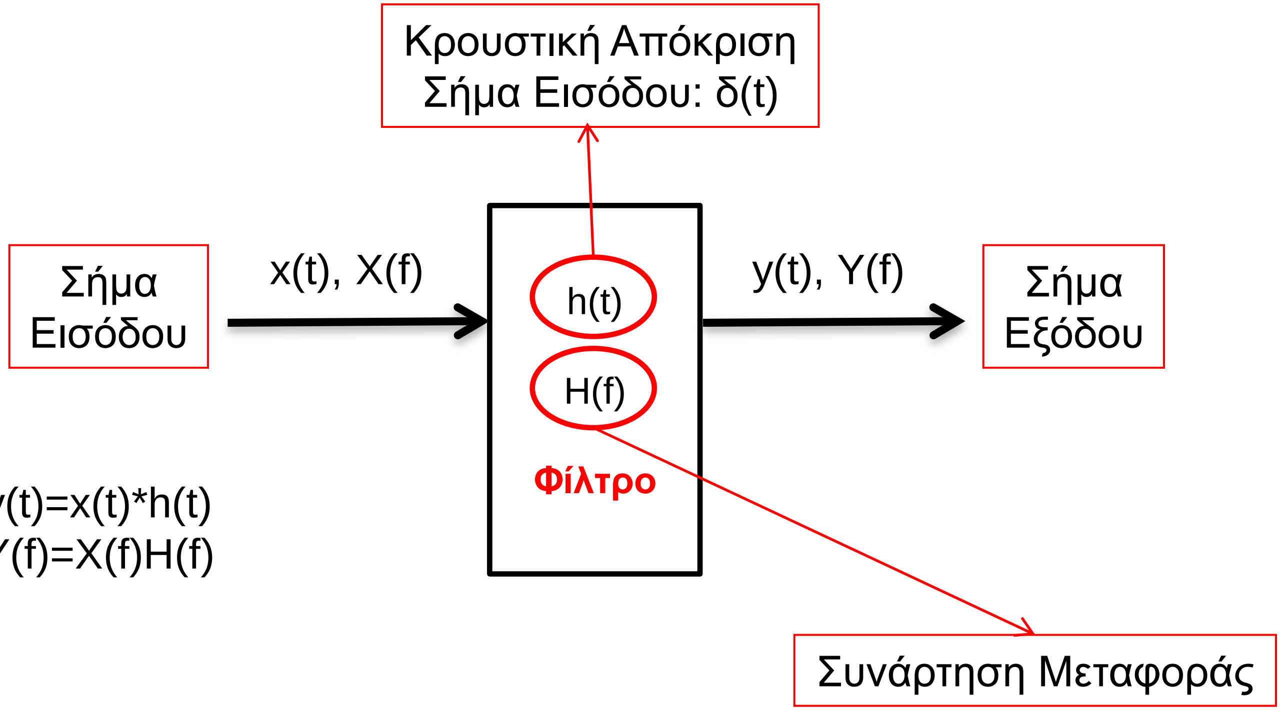
$$H(f)=\begin{cases}1, & f_1\leq|f|\leq f_2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}0, & f_1\leq|f|\leq f_2\\ 1, & \text{αλλού}\end{cases}$$



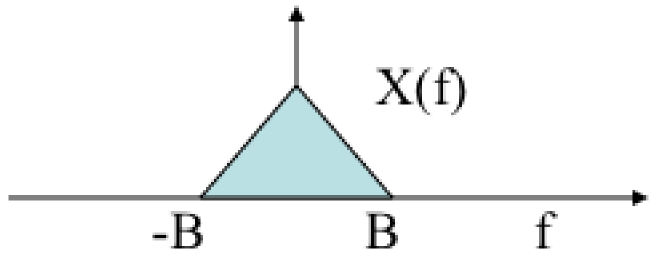
Ορολογία Φίλτρων



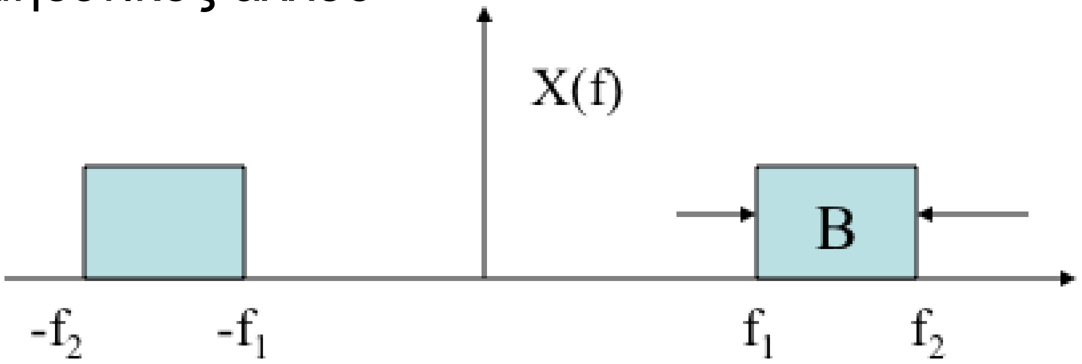
$y(t)=x(t)*h(t)$
$Y(f)=X(f)H(f)$

Σηματα Βασικης Ζωνης και Ζωνοπερατα Baseband and Bandpass Signals

- ‘Ενα σήμα x(t) Βασικής Ζώνης με εύρος φάσματος B είναι ένα σήμα για το οποίο ο Μ/Σ Fourier X(f) ειναι μη μηδενικός για $|f| \le B$, και ειναι μηδενικός X(f) = 0 για |f| > B.



- Ένα ζωνοπερατό σήμα x(t) με εύρος φάσματος B = f2 – f1 είναι ένα σήμα για το οποίο ο X(f) ειναι μη μηδενικός για $0 < f_1 < |f| < f_2$, και είναι μηδενικός αλλού



Μέσα μετάδοσης - Κανάλι

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (1)

- Κάθε πληροφορία, προκειμένου να μεταδοθεί από την πηγή στον προορισμό της, πρέπει να χρησιμοποιήσει ένα ελαστικό μέσο, το μέσο μετάδοσης.
- Κάθε πηγή εκπέμπει σε ορισμένες συχνότητες, οι οποίες καθορίζουν τη ζώνη εκπομπής ή φάσμα (spectrum): η μέγιστη και ελάχιστη συχνότητα που μπορεί να εκπέμψει).
  - Spectrum σήματος: Το εύρος των συχνοτήτων που περιέχει το σήμα
- Εύρος ζώνης (bandwidth): Το «μέγεθος» του spectrum
  - Εύρος ζώνης= Μέγιστη Συχνότητα – Ελάχιστη Συχνότητα
- Εύρος ζώνης και μέσο μετάδοσης
  - Κάθε μέσο μετάδοσης είναι κατάλληλο για συγκεκριμένα εύρη (ώστε το σήμα να μεταδίδεται ικανοποιητικά – χωρίς σημαντικά σφάλματα)

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (2)

- Κατά τη μετάδοση φωνής (και δεδομένων) στο τηλεφωνικό, τα τηλεφωνικά καλώδια χαλκού υποστηρίζουν συχνότητες από 300 ως 3.300 Hz, Εύρος ζώνης = 3 KHz.
- Εύρος ζώνης και Ρυθμός Μετάδοσης
  - Το Εύρος Ζώνης σχετίζεται άμεσα με την «ποσότητα» πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διατρέχει το μέσο.

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (3)

- Το φυσικό μέσο μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών σημάτων
- Τύποι καναλιών
  - Ενσύρματα : Καλώδια Χαλκού
  - Ενσύρματα : Οπτικές Ίνες
  - Ασύρματα : Αέρας, Κενό

Κανάλι Μετάδοσης (1)

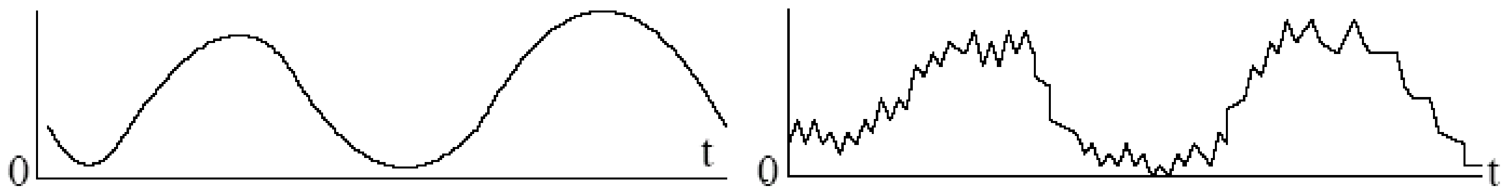
- Χαρακτηριστικά καναλιού
  - Διαθέσιμο Εύρος ζώνης συχνοτήτων
  - Απόκριση πλάτους και φάσης
  - Ευαισθησία σε θόρυβο
- Επηρεάζουν
  - Μέγιστο ρυθμό μετάδοσης
  - Εξασθένιση σήματος - μέγιστη απόσταση
  - Παραμόρφωση πλάτους, φάσης
  - Πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος

Κανάλι Μετάδοσης (2)

- Κάθε κανάλι αλλοιώνει τα μεταδιδόμενα σήματα
  - Εξασθένιση: Είναι η απώλεια της ισχύος καθώς το σήμα διαδίδεται και μετράται σε dB. Ο λογαριθμικός λόγος της ισχύς του σήματος εισόδου προς την έξοδο 10log(Pout/Pin)
    - Στα ενσύρματα μέσα το σήμα εξασθενεί λογαριθμικά με την απόσταση
    - Η απώλεια εκφράζεται σε decibel ανά χιλιόμετρο
    - Η ποσότητα της απωλεσθήσας ισχύος εξαρτάται από τη συχνότητα
    - Εάν η εξασθένιση είναι πολύ μεγάλη ο δέκτης πιθανόν να μη μπορεί να ανιχνεύσει το σήμα
  - Παραμόρφωση καθυστέρησης: Προκαλείται από το γεγονός οτι διαφορετικές συνιστώσες οδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες

Κανάλι Μετάδοσης (3)

- Εισαγωγή θορύβου
  - Εσωτερικός θόρυβος (π.χ, θερμικός θόρυβος ηλεκτρονικών κυκλωμάτων)
  - Εξωτερικός θόρυβος (π.χ, παρεμβολές, κοσμική ακτινοβολία)
  - Επίδραση του θορύβου στην ισχύ του σήματος-Signal-to-Noise Ration: SNR=(Average Signal Power/Noise Power)=10log(P/N)



Κανάλι Μετάδοσης (4)

- Τα τηλεπικοινωνιακά σήματα μεταδίδονται δια μέσου του αέρα με τη χρήση κεραίας κατάλληλου μεγέθους
- Στο κενό όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα ανεξάρτητα από τη συχνότητα τους
  - Ισχύει η σχέση λ=cf
  - c: ταχύτητα του φωτός 300000 Km/sec, λ: μήκος κύματος
- Η ποσότητα πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα σχετίζεται με το εύρος ζώνης του
- Για να αποτραπεί το πλήρες χάος, υπάρχουν διεθνείς συμφωνίες που αφορούν το ποιος χρησιμοποιεί ποιες συχνότητες
  - Οργανισμός ITU-R

Θόρυβος

- Ανεπιθύμητη ενέργεια που προέρχεται από πηγές εκτός πομπού
- Αφορά όλα τα συστήματα επικοινωνίας (Ασύρματα-Ενσύρματα)
- Εσωτερικός Θόρυβος
  - Θερμικός θόρυβος (thermal noise, white noise)
    - Κίνηση ηλεκτρονίων
  - Θόρυβος Ενδοδιαμόρφωσης (inter-modulation noise)
    - Συνύπαρξη σημάτων διαφορετικών συχνοτήτων στο ίδιο μέσο
  - Συνακρόαση (crosstalk)
    - Παρεμβολές μεταξύ μεταδόσεων κοντινών μεταξύ τους
  - Παλμικός θόρυβος (impulse)
    - Αστάθειες ηλεκτρικού ρεύματος
  - Εξωτερικοί Θόρυβοι
    - Βιομηχανικά και Ατμοσφαιρικά παράσιτα

Γραμμικές και Μη Γραμμικές Διαμορφώσεις

Διαμόρφωση

- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Modulation)= Η μεταβολη, συμφωνα με το σημα πληροφοριας, των παραμετρων ενος φεροντος κυματος (carrier wave) που ειναι καταλληλο για την μεταδοση μεσα απο το δεδομενο καναλι
- ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Demodulation) ειναι η αντιστροφη διαδικασια
  - Το ειδος της διαμορφωσης καθοριζει:
  - Την αντοχη στο θορυβο και την παραμορφωση του καναλιου
  - Την πιστοτητα αναπαραγωγης του αρχικου σηματος πληροφοριας
  - Το ευρος του απαιτουμενου για την μεταδοση φασματος
  - Την πολυπλοκοτητα των συστηματων εκπομπης και ληψης

Τι επιτυγχάνουμε με την Διαμόρφωση

- Τα περισσότερα σήματα μεταδίδονται με την διαμόρφωση ενός κατάλληλου φέροντος διότι:
  - Τα διαμορφωμένα σήματα εκπέμπονται ευκολότερα
  - Η διαμόρφωση επιτρέπει την συνύπαρξη στον ίδιο γεωγραφικό χώρο πολλών σημάτων με διαφορετικές συχνότητες φέροντος που μοιράζονται το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα
- Την ελαττωση των απαιτησεων στα χαρακτηριστικα των συστηματων εκπομπης
- Την εκμεταλλευση περιοχων του φασματος που εχουν καλλιτερες συνθηκες μεταδοσης

Συγκριση Αναλογικων και Ψηφιακων συστηματων Επικοινωνιας

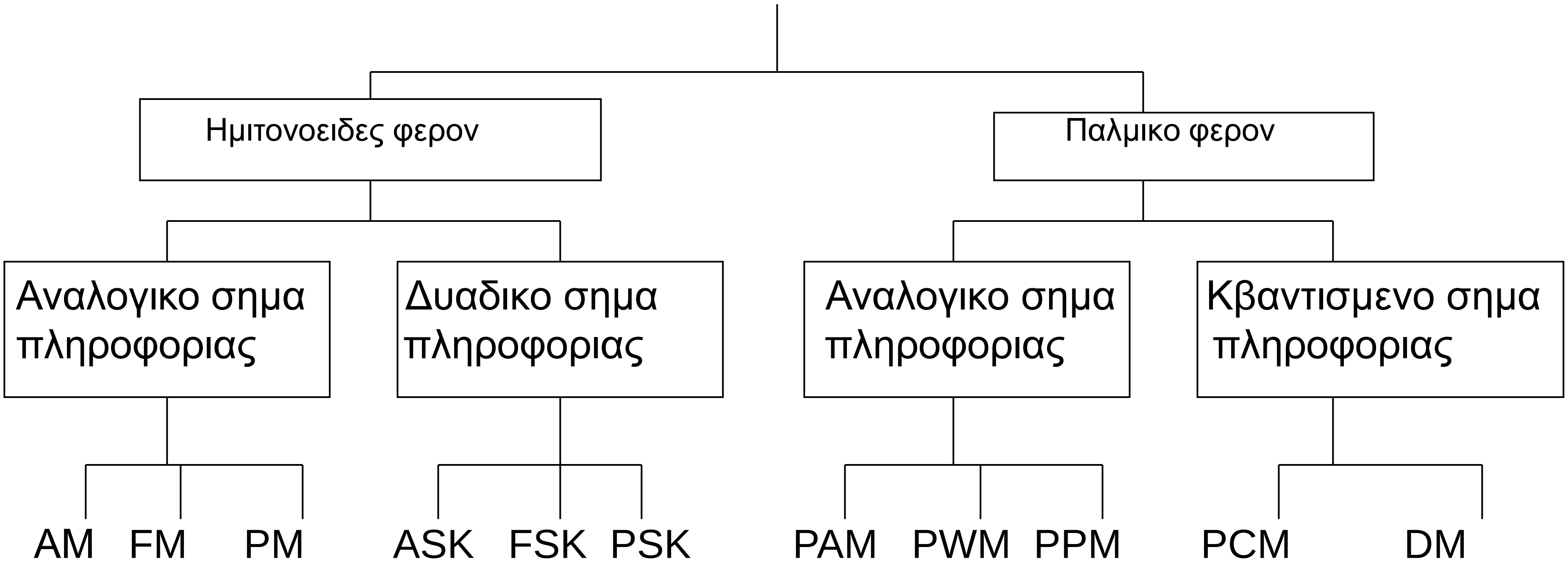
Αναλογικα Συστηματα

- Απλουστερη δομη
- Δυσκολοτερη σχεδιαση
- Ελαχιστες δυνατοτητες υλοποιησης βελτιστων διαταξεων
- Δυσκολότερη υλοποιηση και συντηρηση
  - Ανάγκη συνεχων ρυθμισεων
  - Απαιτησεις γραμμικοτητας εξαρτηματων
  - Εξαρτηση απο τις θερμοκρασιακες μεταβολες των εξαρτηματων
  - Εξαρτηση απο την γηρανση του υλικου

Ψηφιακα Συστηματα

- Πολυπλοκοτερη δομη
- Ευκολότερη σχεδιαση
- Δυνατοτητα υλοποιησης βελτιστων διαταξεων
- Ευκολοτερη υλοποιηση και συντηρηση
- Καλυτερη προσαρμογη προς το καναλι
- Ευελιξια κατασκευης
  - DSPs, μPs
  - FPGAs, ASICs
- Μικροτερο κοστος

Είδη Διαμόρφωσης

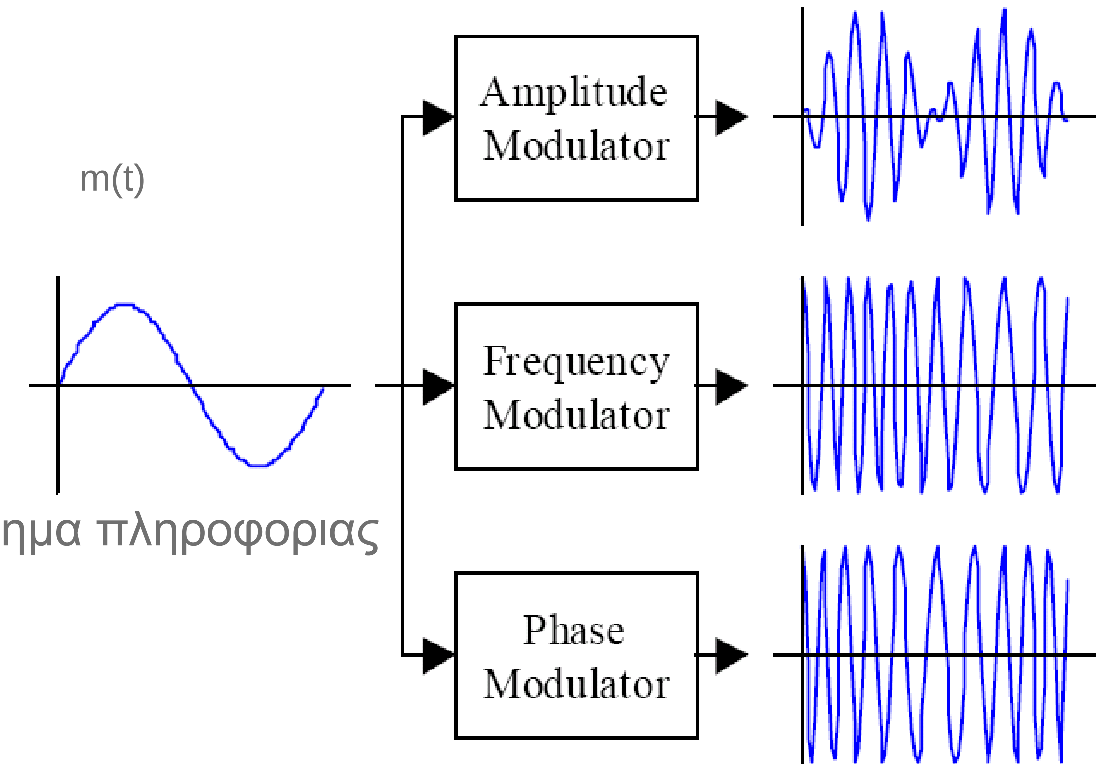


A=Amplitude, F=Frequency, P=Phase, M= Modulation
K=Keying, W=Width, P=Pulse, Position, D=Delta

Βασικοί Τύποι Αναλογικής Διαμόρφωσης

Διαμορφωμενο σημα

m(t)



Σημα πληροφοριας

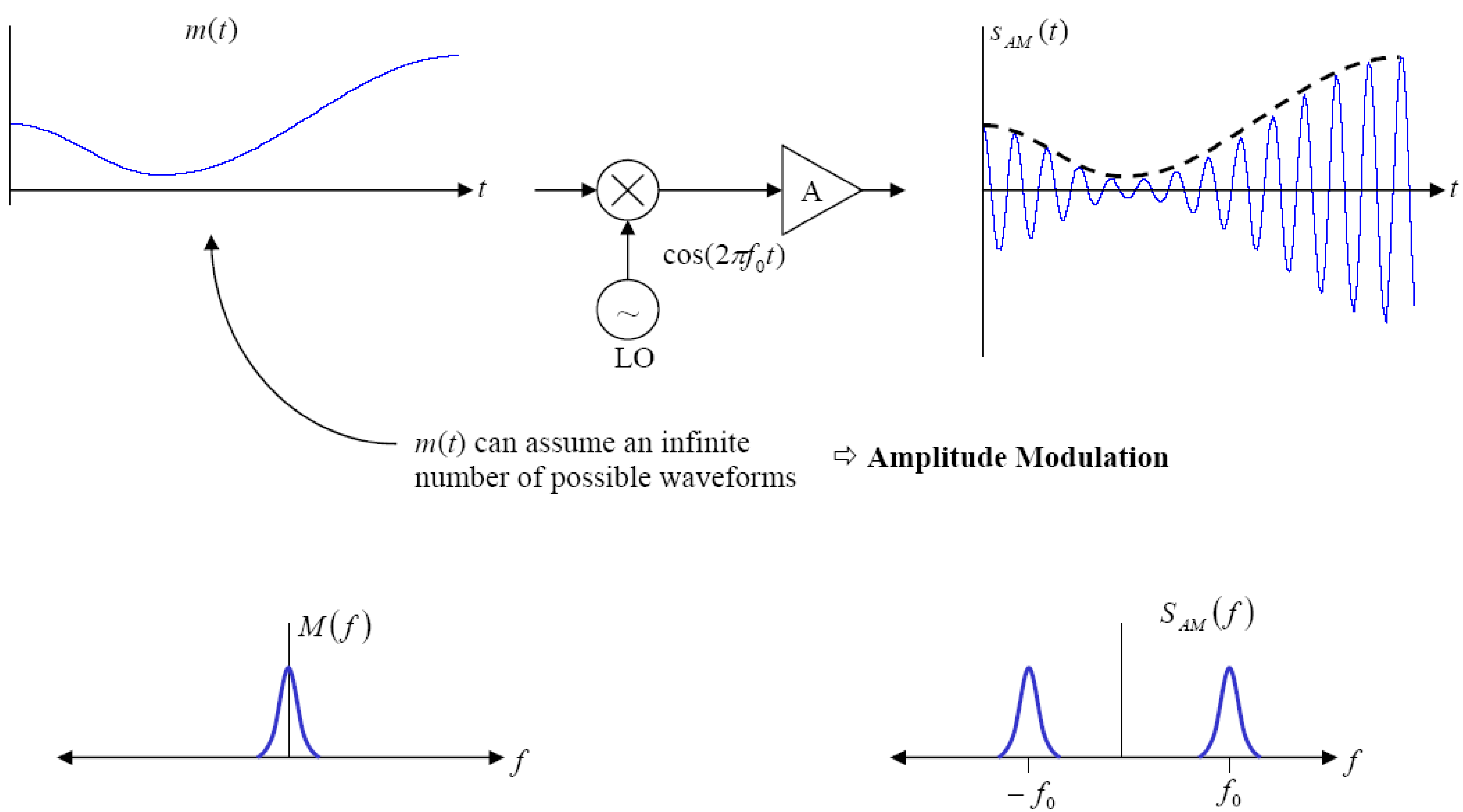
$$x_c(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int m(\tau)d\tau\right)$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p m(t)\right)$$

Γραμμική Διαμόρφωση Πλάτους : Γενική Αρχή

Mathematical Representation: $s_{AM}(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$



Διαμόρφωση Διπλο-πλευρικής Ζώνης (DSB)

- Το σήμα μηνύματος x(t) πολλαπλασιάζεται με το φέρον σήμα $\cos 2\pi f_c t$

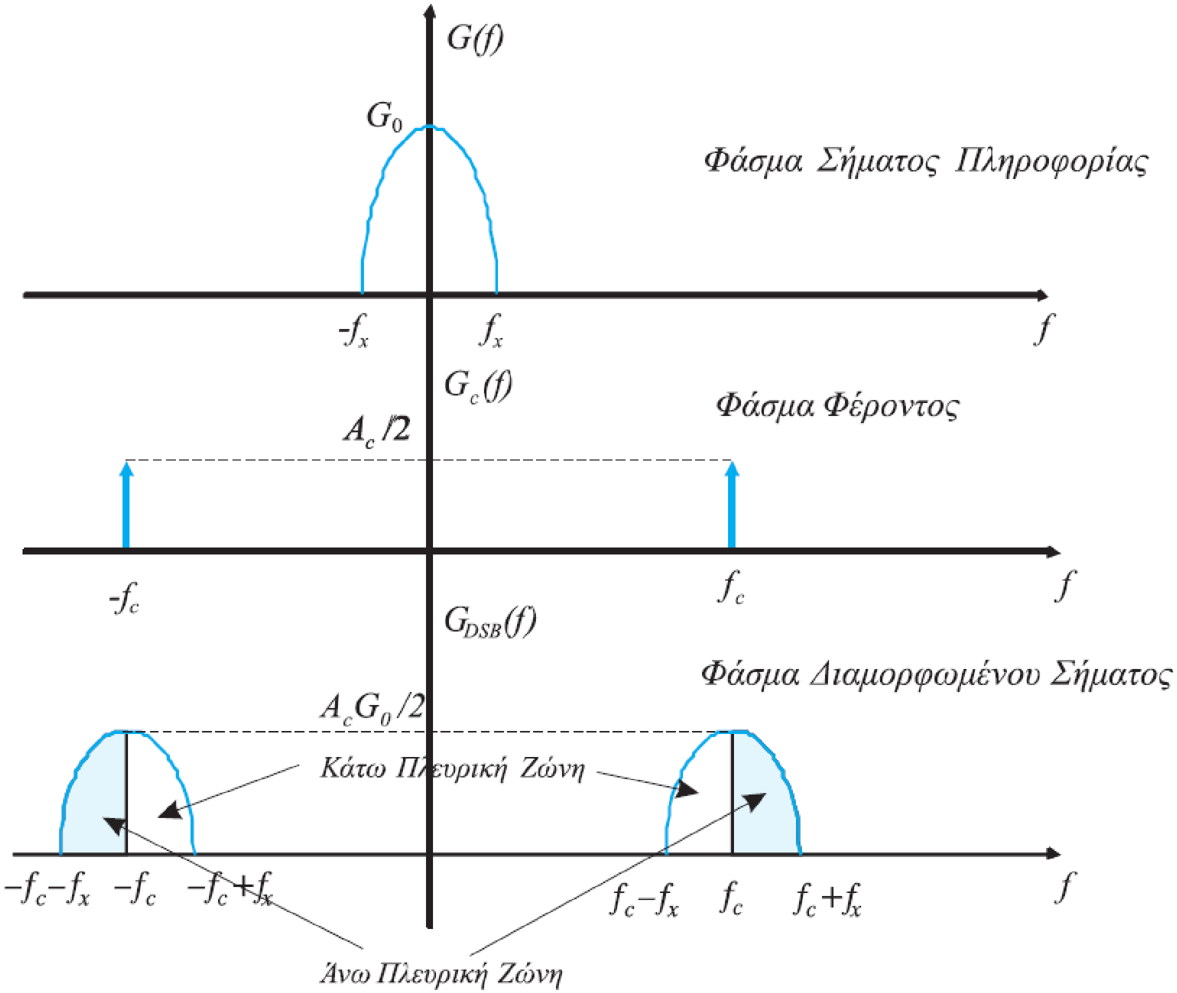
$$y_{DSB}(t) = x(t) \cdot cos(2\pi f_c t)$$

- Στο πεδίο της συχνότητας αυτό ανάγεται σε

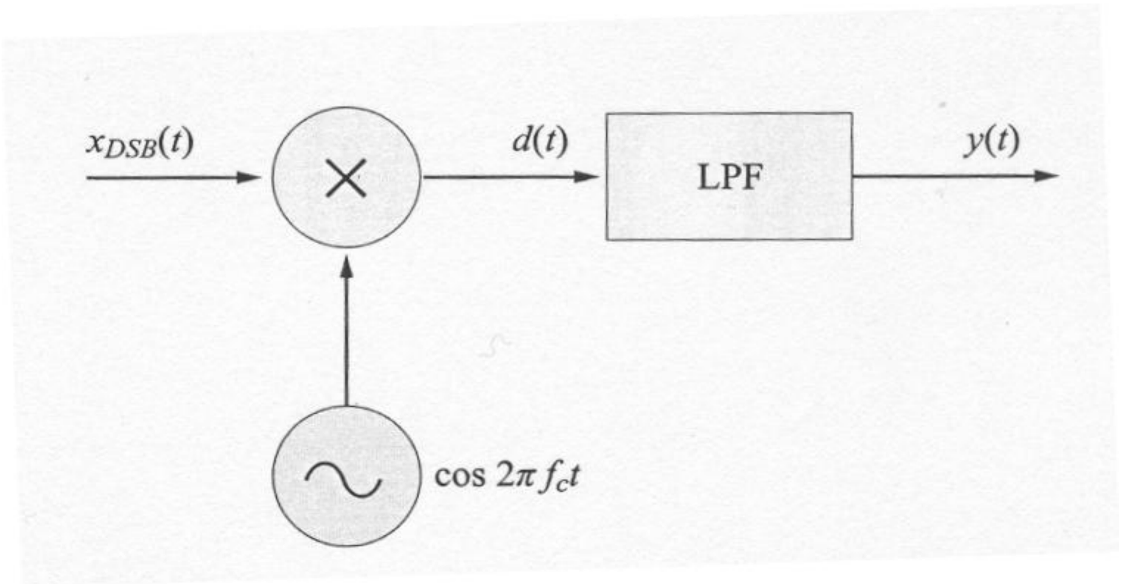
$$Y(f) = \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c)$$

- Δύο φάσματα Συχνοτήτων
  - Πάνω Πλευρική Ζώνη f>fc
  - Κάτω Πλευρική Ζώνη f<fc

Διαμόρφωση DSB : Πεδίο συχνότητας



Αποδιαμόρφωση DSB



Πεδίο χρόνου

$$d(t) = x_{DSB}(t)\cos 2\pi f_c t \Leftrightarrow d(t) = x(t)\cos^2 2\pi f_c t \Leftrightarrow$$

$$d(t) = \frac{1}{2}x(t)\left(1+\cos 4\pi f_c t\right) \Leftrightarrow d(t) = \frac{x(t)}{2} + \cancelto{0}{\frac{x(t)}{2}\cos 4\pi f_c t}$$

Πεδίο συχνότητας

$$d(t) = \frac{1}{2}x(t)\left(1+\cos 4\pi f_c t\right) \xleftrightarrow{\text{Fourier Transform}} D(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X(f)\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-2f_c)+\delta\left(f+2f_c\right)\right]\right\} \Leftrightarrow$$

$$D(f) = \frac{1}{2}X(f) + \cancelto{0}{\frac{1}{4}\left[X\left(f-2f_c\right)+X\left(f+2f_c\right)\right]}$$

Διαμόρφωση AM (1)

- Το σήμα AM δημιουργείται με την προσθήκη ενός ισχυρού φέροντος σε ένα σήμα DSB

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + x(t)]\cos 2\pi f_c t = A(t)\cos 2\pi f_c t$$

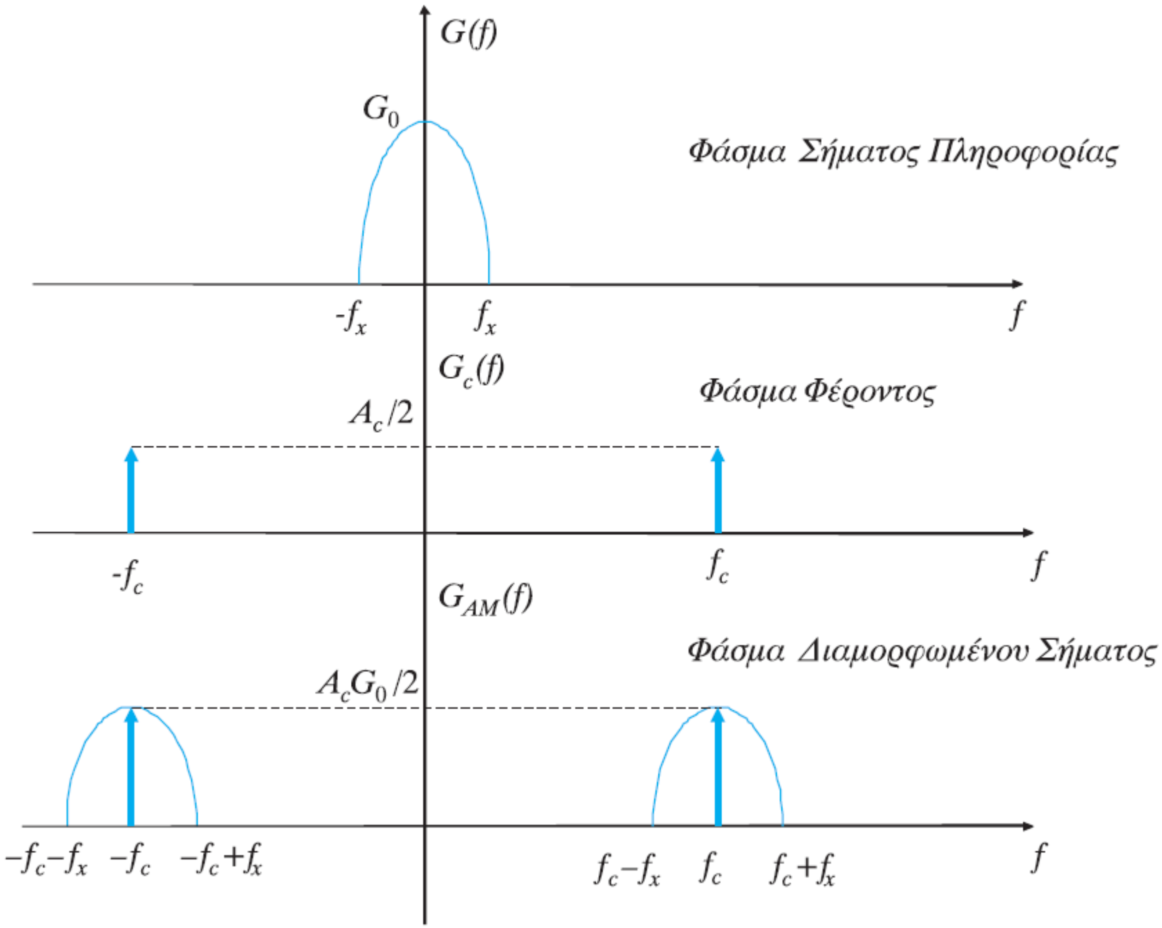
  – x(t) σήμα μηνύματος
  – Ac, fc πλάτος και συχνότητα φέροντος σήματος
  – A(t) περιβάλλουσα του διαμορφωμένου σήματος

- Στο πεδίο της συχνότητας το προηγούμενο ανάγεται σε

$$X_{AM}(f) = \frac{1}{2}A_c[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{1}{2}A_c[X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

Δεδομένου ότι $A_c \cos 2\pi f_c t \xleftrightarrow{\text{Fourier transform}} \frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$

Διαμόρφωση AM: Πεδίο της συχνότητας



Το φάσμα του σήματος AM είναι πανομοιότυπο με το φάσμα του σήματος DSB, διαφέροντας μόνο στην προσθήκη της φασματικής συνιστώσας του φέροντος

Γωνιακή Διαμόρφωση – Βασικοί Ορισμοί

Μορφή Διαμορφωμένου Σήματος

$$x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

Πλάτος Φέροντος

Φέρον

$$A_c \cos 2\pi f_c t$$

Συχνότητα Φέροντος

$$x(t)$$

Σήμα Μηνύματος

$$\phi(t)$$

Φασματική Γωνία

Η Φασματική Γωνία είναι συνάρτηση του Σήματος Μηνύματος

$$\omega_i(t) = \frac{d\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]}{dt} = \omega_c + \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία Συχνότητα, f_i ή
Στιγμιαία Κυκλική Συχνότητα ω_i

$$\phi(t), \quad \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία Απόκλιση Φάσης

Στιγμιαία Απόκλιση Συχνότητας

Γωνιακή Διαμόρφωση

- Στη γωνιακή διαμόρφωση, το διαμορφωμένο σήμα έχει τη μορφή

$$x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

- Η φασματική γωνία φ(t) είναι συνάρτηση του σήματος μηνύματος x(t)
- Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι γωνιακής διαμόρφωσης, οι οποίοι διαφέρουν στη σχέση μεταξύ των φ(t) και x(t)
  - Διαμόρφωση φάσης (phase modulation – PM)
  - Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency modulation – FM)

Διαμόρφωση φάσης PM – Διαμόρφωση συχνότητας FM

$$x_{PM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + k_p x(t)\right]$$

kp : Σταθερά απόκλισης φάσης

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda\right]$$

kf : Σταθερά απόκλισης φάσης

3.3 Διαμόρφωση Γωνίας

Έστω σήμα μηνύματος/πληροφορίας $x(t)$ με φάσμα περιορισμένου εύρους ζώνης $G(f)=\Im\left[x(t)\right]$ διαμορφώνει κατά γωνία το φέρον σήμα

$$x_c(t)=A_c\cos\left(2\pi f_c t+\phi(t)\right)$$

Η στιγμιαία γωνία του φέροντος ισούται με:

$$\theta(t)=2\pi f_c t+\phi(t)$$

όπου $\phi(t)$ είναι η στιγμιαία απόκλιση φάσης του.

Η στιγμιαία κυκλική συχνότητα του φέροντος σήματος ισούται με:

$$\omega(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{d\left(2\pi f_c t+\phi(t)\right)}{dt}=2\pi f_c+\frac{d\phi(t)}{dt}$$

και η στιγμιαία συχνότητα του θα είναι

$$f(t)=\frac{\omega(t)}{2\pi}=f_c+\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

όπου

$\Delta\omega(t)=\dfrac{d\phi(t)}{dt}$ είναι η στιγμιαία απόκλιση συχνότητάς του.

3.3.2 Λόγος απόκλισης γωνιακά διαμορφωμένου σήματος:

Για τη διαμόρφωση ενός τυχαίου σήματος πληροφορίας απλού τόνου, ορίζεται ο λόγος απόκλισης ως το πηλίκο της μέγιστης απόκλισης συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος προς το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας, δηλαδή:

$$D = \frac{\max\left(|\Delta\omega|\right)}{2\pi f_x} = \frac{\max\left(|\Delta f|\right)}{f_x} = \frac{\max\left(\left|\frac{d\phi(t)}{dt}\right|\right)}{2\pi f_x}$$

3.3.3 Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος

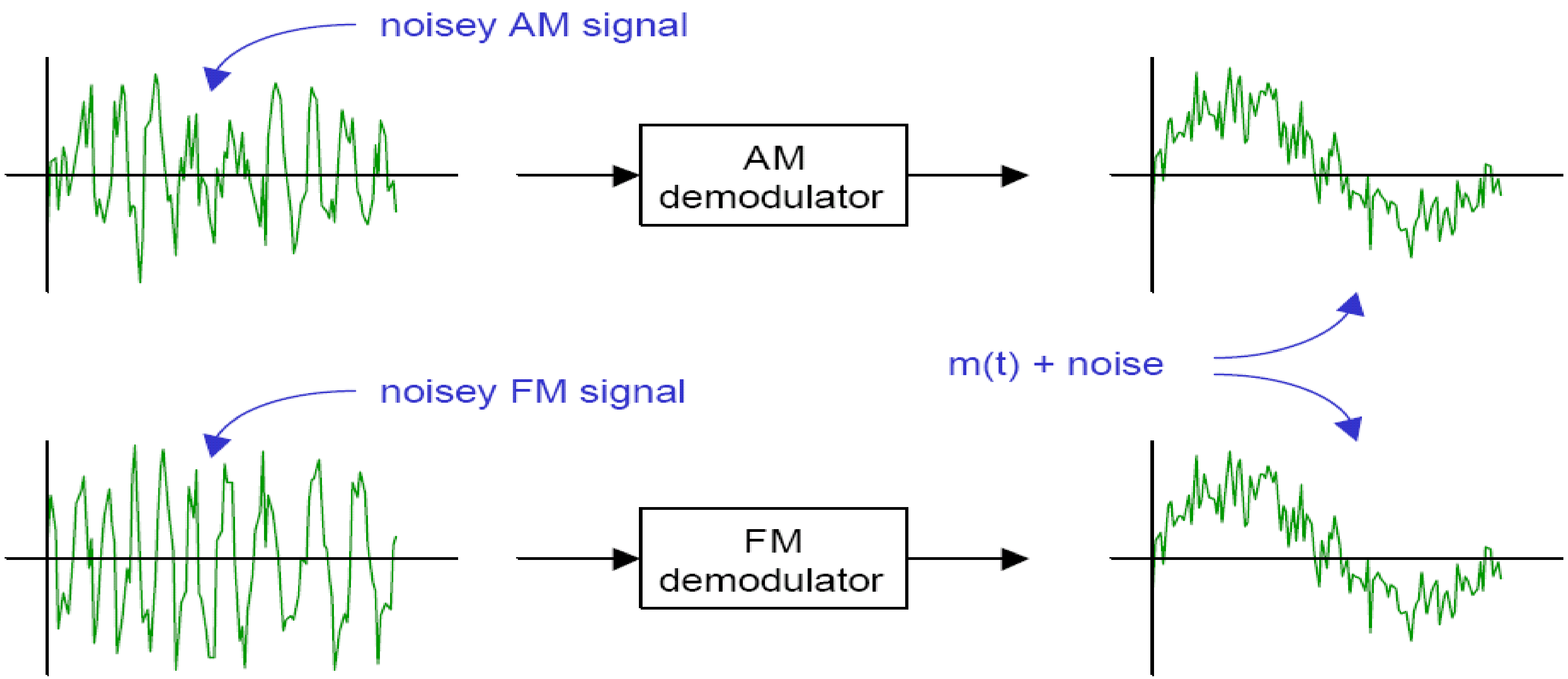
Γενικά ισχύει ο κανόνας του Carson, σύμφωνα με τον οποίο το 98% της ισχύος του σήματος βρίσκεται σε ζώνη του φάσματος με εύρος ίσο με

$$W \approx 2(D+1) f_x = 2\left(\max\left(|\Delta f|\right) + f_x\right)$$

Αναλογική Έναντι Ψηφιακών Διαμορφώσεων (1)

Αναλογικη διαμορφωση

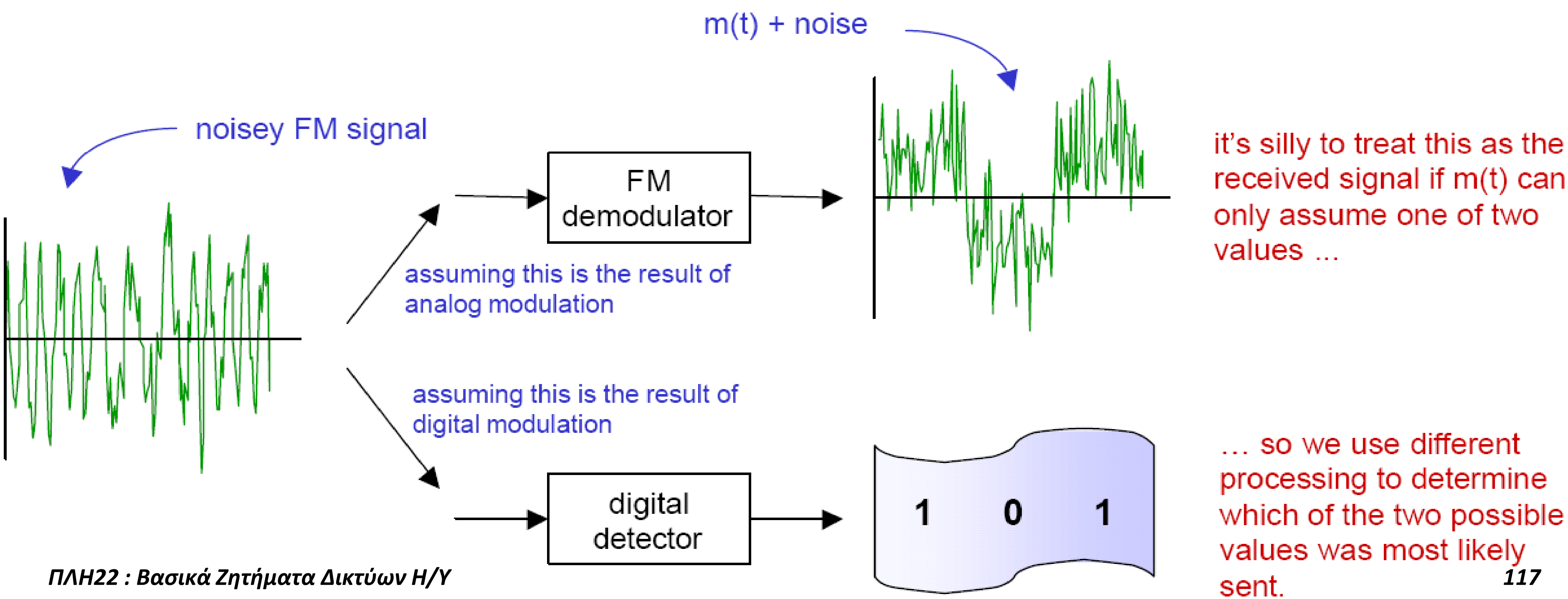
1. Το σήμα m(t) είναι αναλογικό
2. Ο αποδιαμορφωτής πρέπει να αναπαραγάγει το m(t)



Αναλογική Έναντι Ψηφιακών Διαμορφώσεων (2)

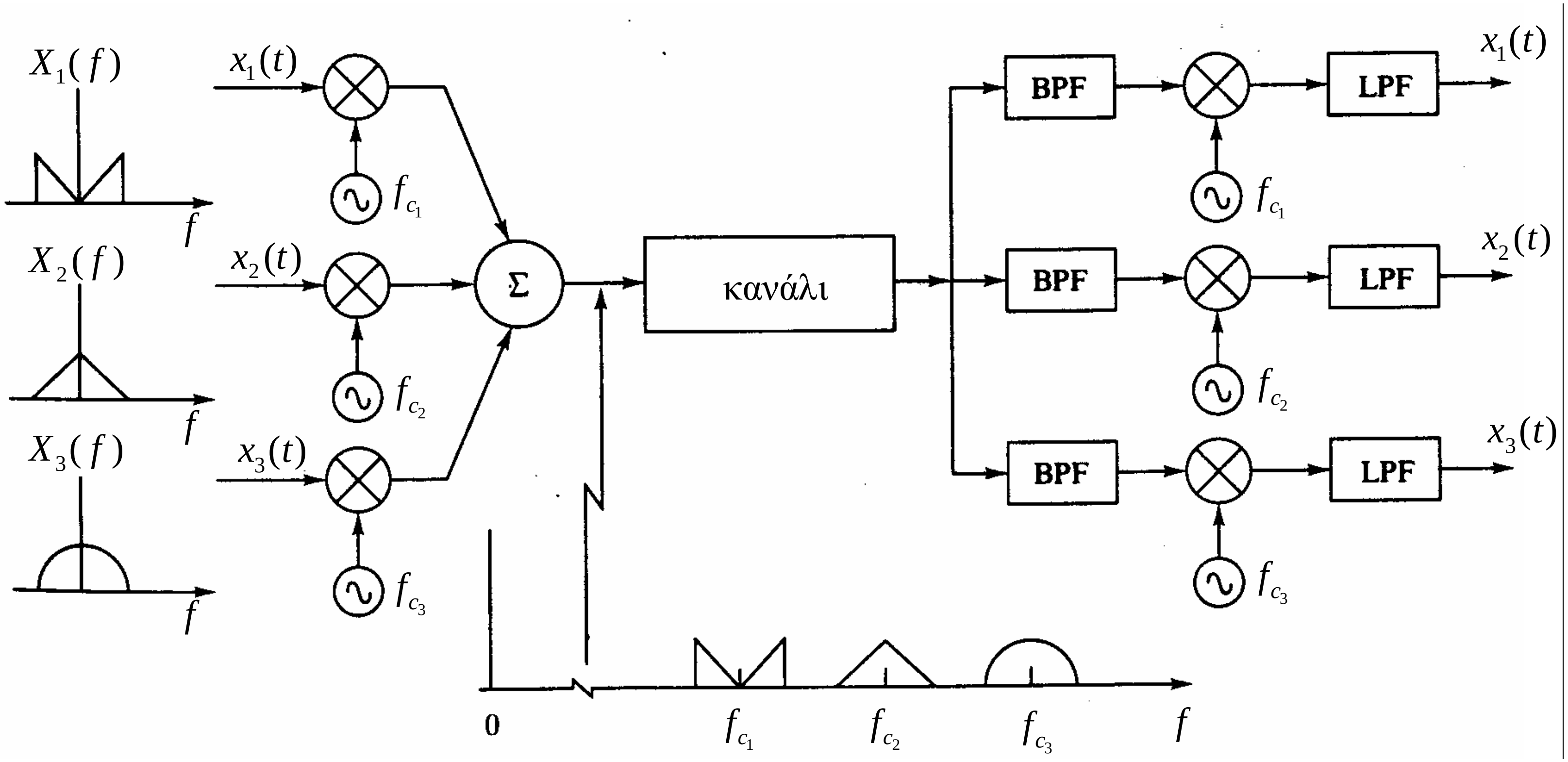
Ψηφιακη διαμορφωση

1. Το m(t) παιρνει μια τιμη απο ενα πεπερασμενο συνολο τιμων
2. Ο αποδιαμορφωτης πρεπει να αποφασισει ποια απο τις πιθανες τιμες εχει μεταδοθει – δεν υπαρχει αναγκη πιστης αναπαραγωγης του m(t)



Πολυπλεξία Συχνότητας

Πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας



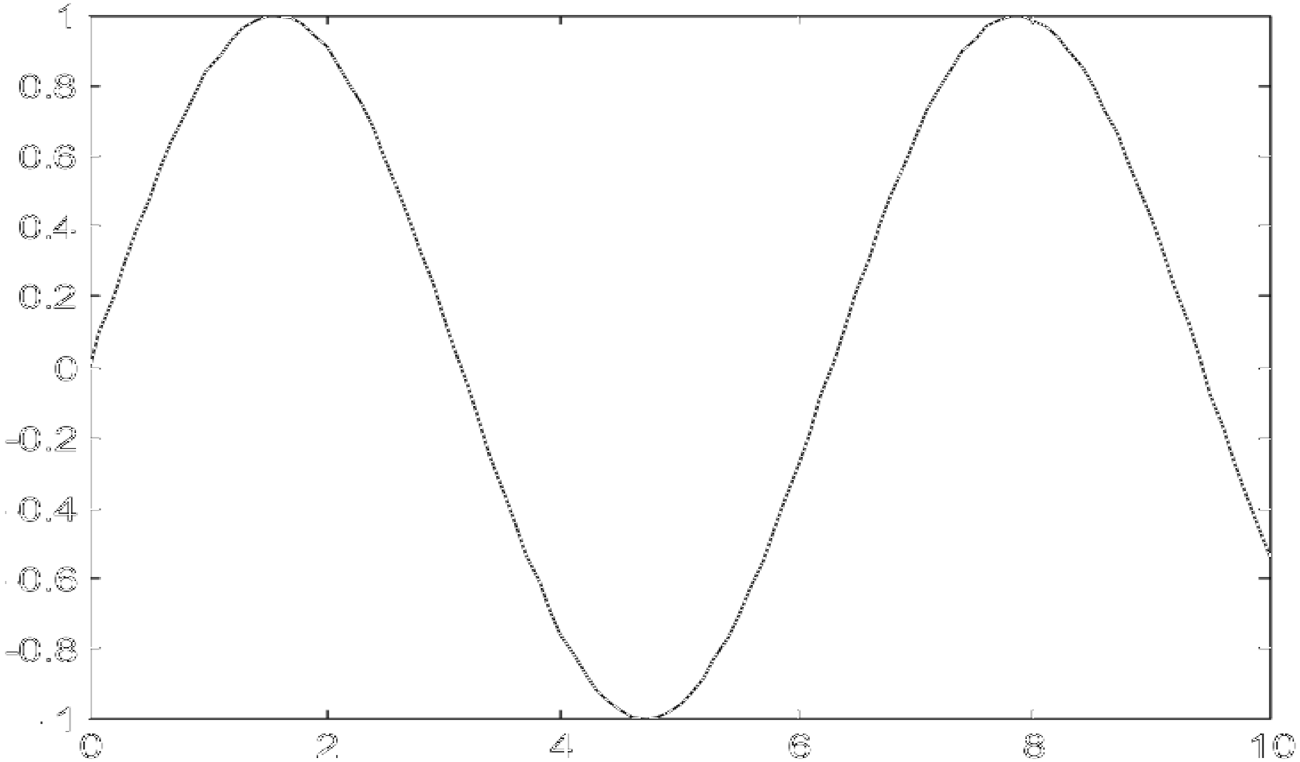
Κεφάλαια Για Μελέτη από τα Βιβλία

- Ν. Δημητρίου, “Ψηφιακές ΕπικοινωνίεςII- Σήματα”
  - Κεφάλαια 2.2
  - Κεφάλαια 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4
  - Κεφάλαιο 3.1
  - Κεφάλαιο 3.2
  - Κεφάλαιο 3.3

Βασικές Αρχές Δειγματοληψίας

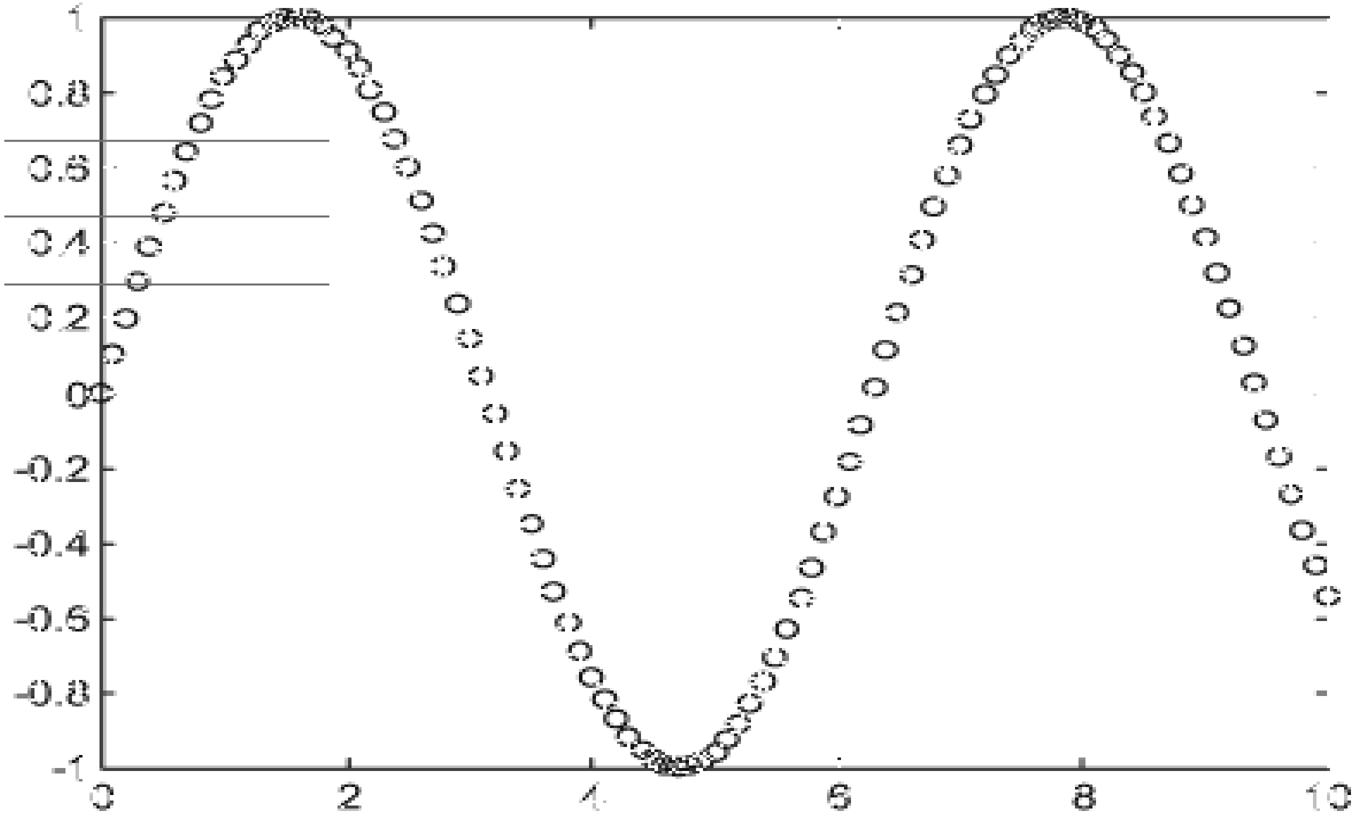
Ψηφιακή παράσταση Αναλογικών σημάτων (1)

- Τα αναλογικά σήματα (π.χ. η φωνή, το video) είναι σήματα συνεχή στον χρόνο και στο μέγεθος (amplitude) τους



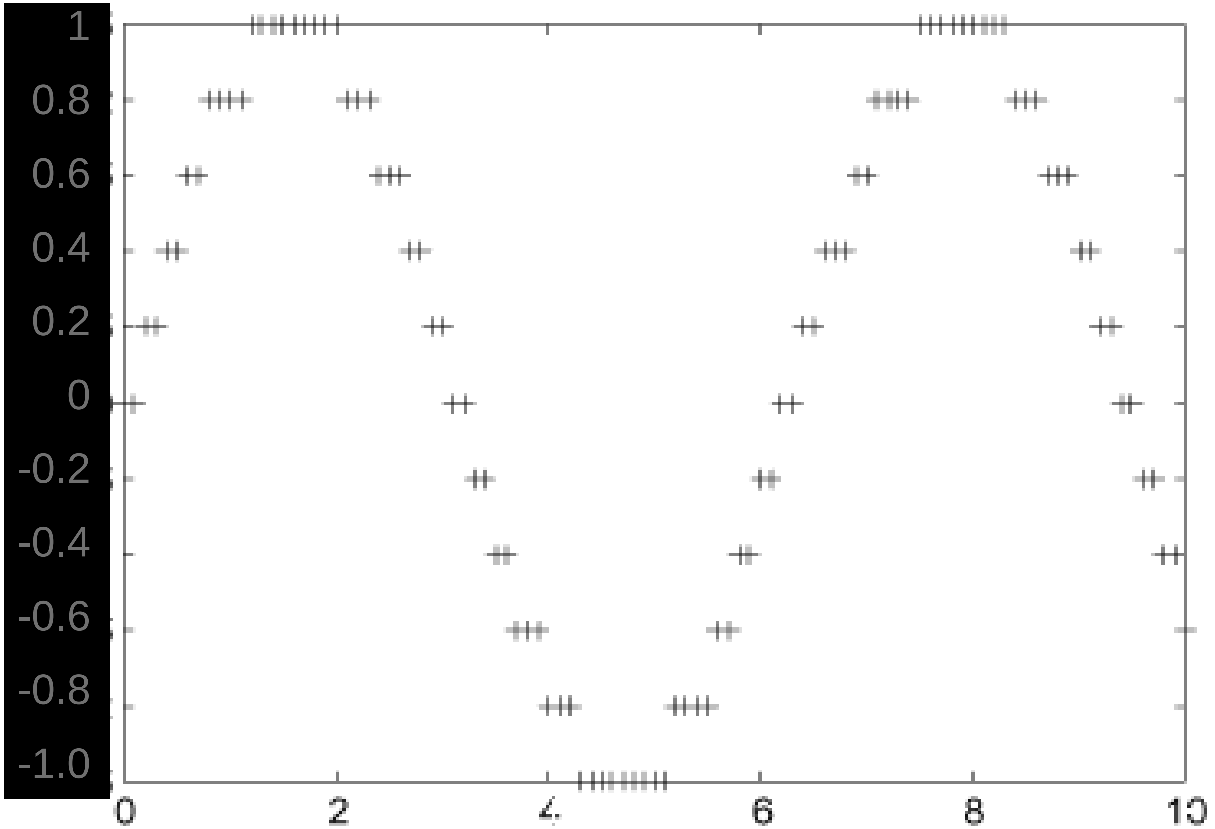
Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών σημάτων (2)

- Με την **<u>δειγματοληψία</u>** τα αναλογικά σήματα μετατρέπονται σε σήματα **διακριτού χρόνου**



Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών σημάτων (3)

- Με τον **κβαντισμο (Quantization)** τα δείγματα ενός σήματος γίνονται διακριτά ως προς την τιμή τους

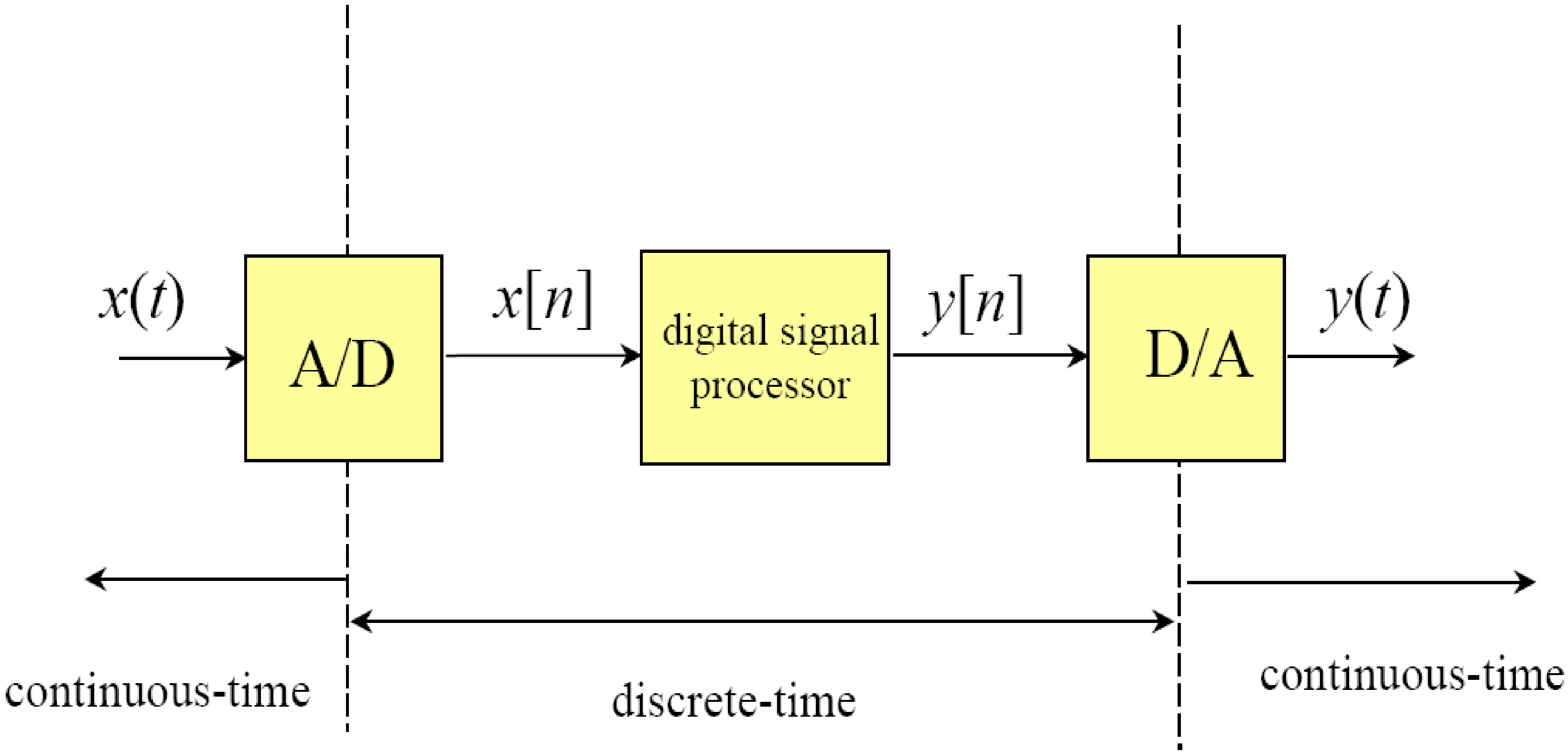


Επίπεδα κβαντισμού = 11

Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (4)

- Εάν γίνει όπως πρέπει (= με την σωστη συχνοτητα δειγματοληψιας), η δειγματοληψία αυτη καθ’ εαυτη δεν εισάγει παραμόρφωση στο σήμα.
- Ο Κβαντισμος ομως εισάγει πάντοτε κάποια παραμόρφωση.
  – Η παραμορφωση μειωνεται αν αυξηθει ο αριθμος των επιπεδων κβαντισμου (= ο αριθμος των απαιτουμενων bits για την κωδικοποιηση)
  – Μπορεί να γίνει ανταλλαγή μεταξύ της παραμόρφωσης και του ρυθμου παραγωγης bits/sec (= των απαιτήσεων σε φάσμα για την μετάδοση του κβαντισμένου σήματος)
- Θα ασχοληθούμε αρχικά με την δειγματοληψία
- και κατόπιν με τον κβαντισμό

Μετατροπείς A/D και D/A (1)

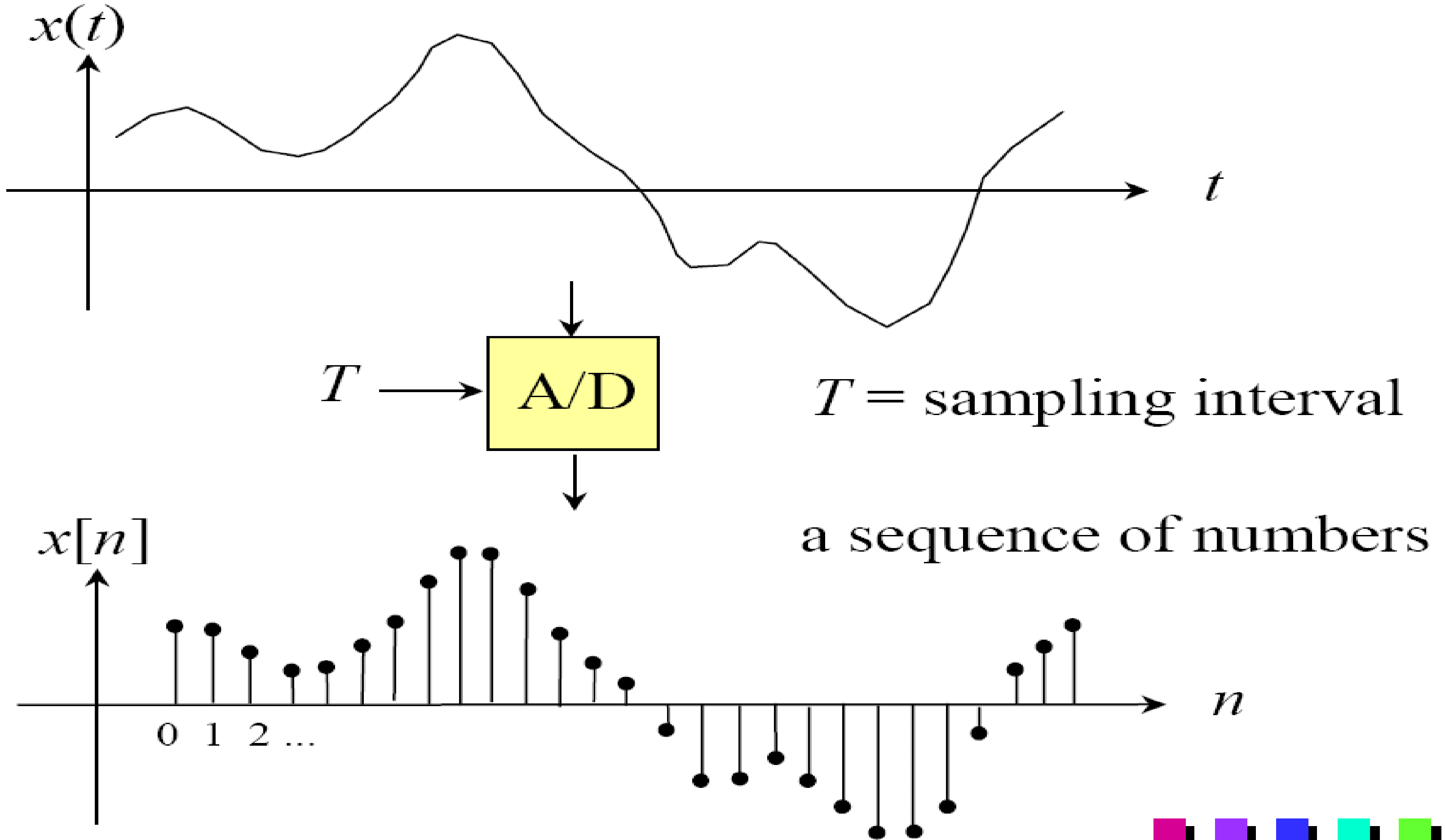


Μετατροπείς A/D και D/A (2)

- **Ο μετατροπεας Αναλογικου-σε-Ψηφιακο** (Analog to Digital - A/D) κωδικοποιει την τιμη του δειγματος ενος σηματος σε δυαδικο αριθμο αναλογο της τιμης αυτης.

- **Ο μετατροπεας Ψηφιακου-σε-Αναλογικο** (Digital to Analog (D/A) μετατρεπει εναν δυαδικο αριθμο σε ταση (ή ενταση) αναλογη της τιμης του αριθμου αυτου.

Διαδικασία A/D



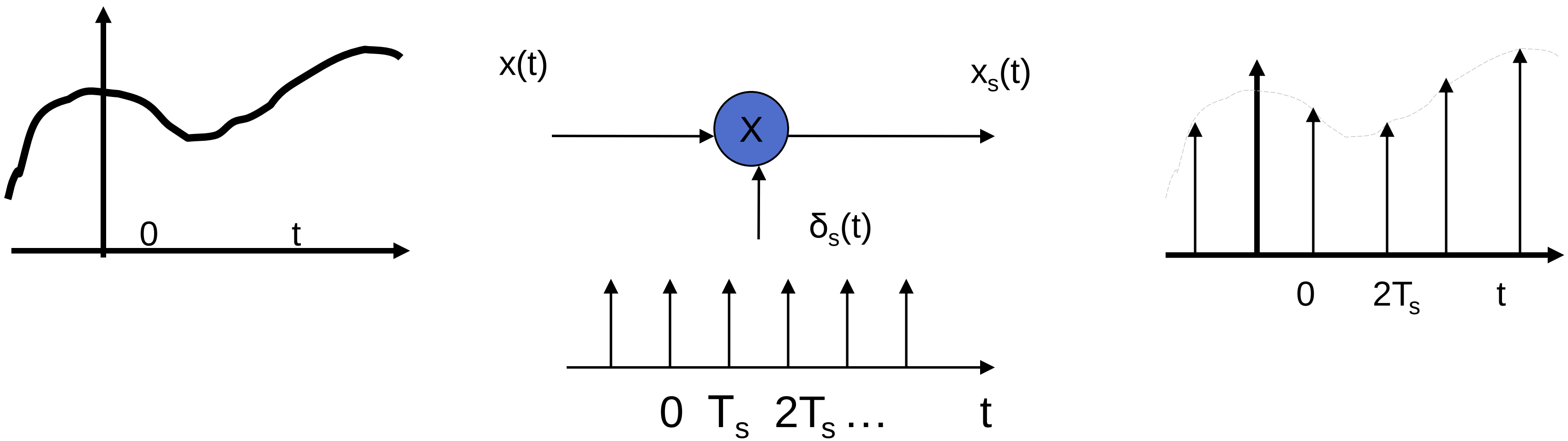
Ιδανικη Δειγματοληψία (1)

- Ιδανική δειγματοληψία (Impulse Samling) είναι η διαδικασία πολλαπλασιασμού ενός σήματος x(t) με μια ακολουθία συναρτήσεων delta $\delta_s(t)$

$$\delta_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$$

- Το σήμα $x_s(t)$ που προκύπτει από την ιδανική δειγματοληψία είναι:

$$x_S(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S) \cdot \delta(t - nT_S)$$



Ιδανική Δειγματοληψία (2)

- Θεωρούμε το σήμα ιδανικής δειγματοληψίας ενός σήματος

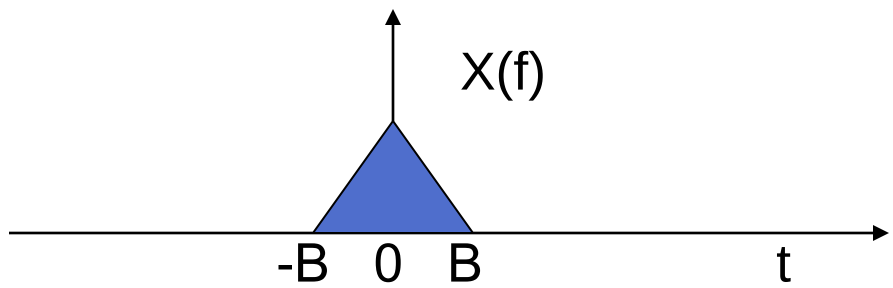
$$x_S(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S) \cdot \delta(t - nT_S)$$

- Η ακολουθία των συναρτήσεων delta επιλέγει τις τιμές του x(t) σε τακτά διαστήματα που απέχουν T_s seconds.
  - Η **περίοδος δειγματοληψίας** είναι T_s και
  - η **συχνότητα δειγματοληψίας** $f_s = 1/T_s$
- Φάσμα σήματος δειγματοληψίας

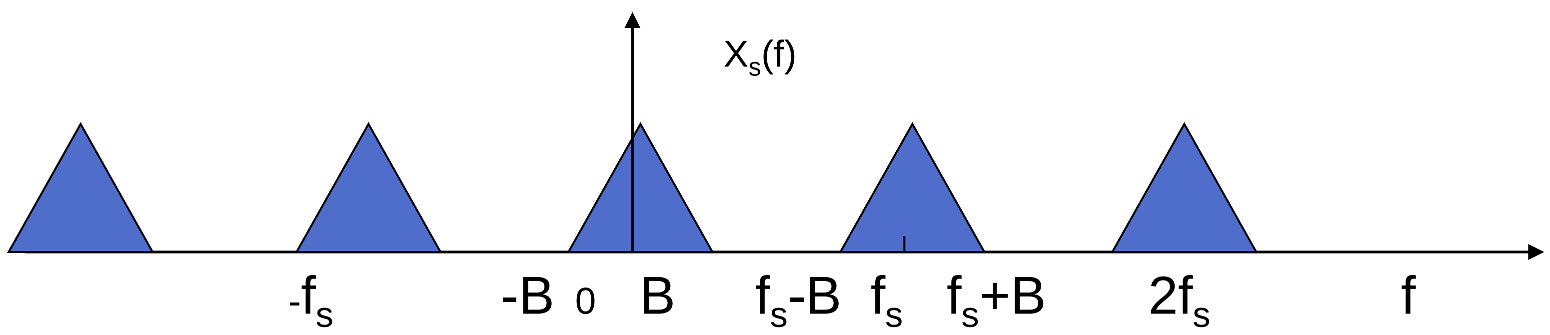
$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Ο Μ/Σ Fourier του σηματος εκ δειγματοληψιας

- Αν ο Μ/Σ Fourier του x(t) εχει την μορφή



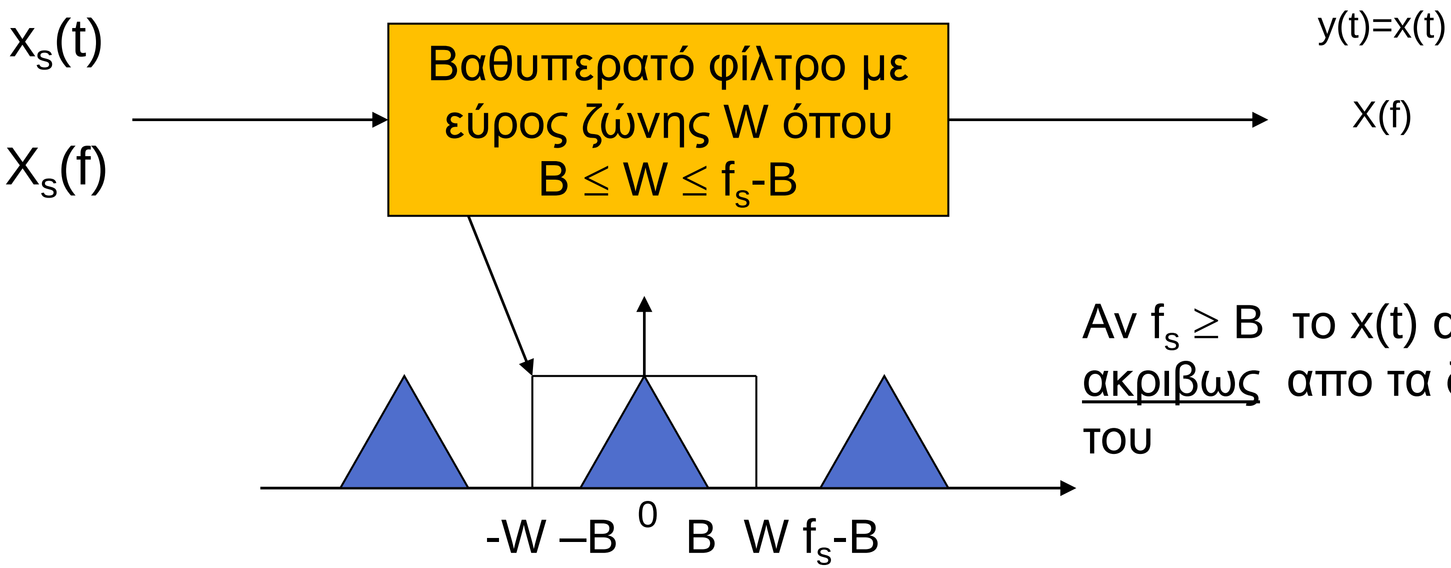
- Τότε ο Μ/Σ Fourier του $x_s(t)$ θα εχει την μορφή



- Υπόθεση: $f_s \geq 2B$

Ανάκτηση του αρχικού σήματος από τα δείγματά του

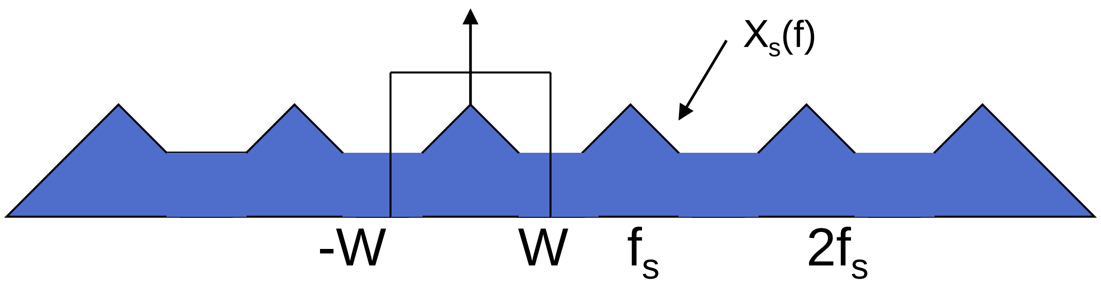
- Το περνάμε μέσα από ένα κατωδιαβατό φίλτρο το οποίο επιτρέπει την διέλευση μόνο του φάσματος γύρω από το f=0.



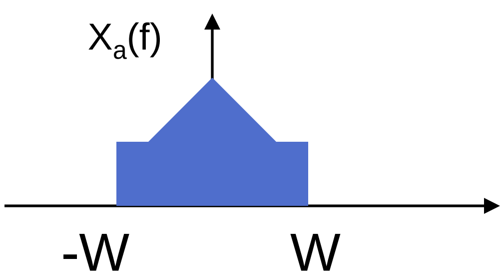
Αν $f_s \geq$ B το x(t) ανακτάται <u>ακριβως</u> απο τα δειγματα του

Υποδειγματοληψία και aliasing

- Αν το σήμα υποστεί δειγματοληψία με συχνότητα $f_s \leq 2B$ τότε θα έχουμε υπερκάλυψη των περιοδικά επαναλαμβανόμενων φασμάτων $X(f-nf_s)$ στο φάσμα του $X_s(f)$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



- Το σημα στην εξοδο του κατωδιαβατου φιλτρου θα διαφερει απο το αρχικο σημα (aliasing)



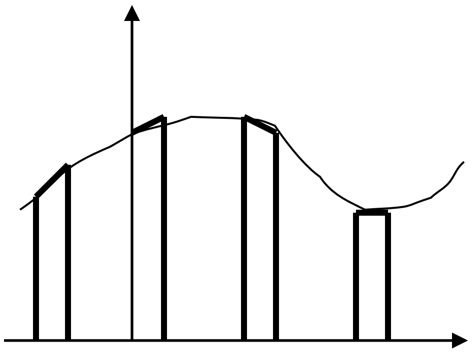
Το Θεώρημα της Δειγματοληψίας

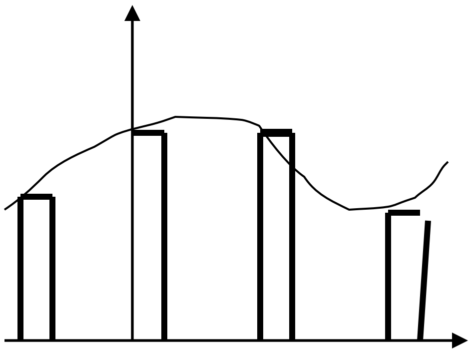
- Έστω σήμα x(t) με περιορισμένο εύρος φάσματος και Μ/Σ Fourier: X(f) = 0, για |f| > B
  - Εάν το σήμα δεν είναι αυστηρά περιορισμένου φάσματος, τότε πρέπει να περάσει μέσα από ένα κατωδιαβατό φίλτρο πριν την δειγματοληψία

- Το x(t) μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματα του που λαμβάνονται με συχνότητα δειγματοληψίας fs, εάν fs > 2B.
  - Η συχνότητα 2B ονομάζεται **<u>συχνότητα Nyquist.</u>**
  - Αν $f_s < 2B$ εμφανίζεται το φαινόμενο του **<u>aliasing.</u>**

Αλλες μορφες του Θεωρηματος Δειγματοληψιας

- Στην πράξη η δειγματοληψία γίνεται
  – Με δείγματα πεπερασμένης διάρκειας (αντί για ακολουθία συναρτήσεων delta χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διάρκειας)
  – Με δείγματα με επίπεδη κορυφή όπου και πάλι χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διάρκειας με ύψος όσο η τιμή του σήματος κατά την αρχή του παλμού
  – Συγκλίνουν στην ιδανική δειγματοληψία όταν η διάρκεια μικραίνει.





Τυπικές συχνότητες δειγματοληψίας

- Σήματα φωνής:
  - Τηλεφωνικής ποιότητας φωνή έχει εύρος φάσματος 300 Hz εως 4000 Hz
  - Τα περισσότερα συστήματα ψηφιακής τηλεφωνίας κάνουν δειγματοληψία με 8000 samples/ sec.
- Ακουστικά σήματα:
  - Η υψηλότερη συχνότητα που αντιλαμβάνεται το ανθρώπινο αυτί είναι περίπου 15 kHz.
  - Στα CDs η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44000 samples/sec.
- Σήματα Video:
  - Το μάτι χρειάζεται δείγματα με ρυθμό τουλάχιστον 20 πλαίσια/sec για να δημιουργηθεί η εντύπωση ομαλής κίνησης

Παραδείγματα

ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0=\dfrac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t)=x(t)*\left[2a\cdot\operatorname{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha>f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \Im\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

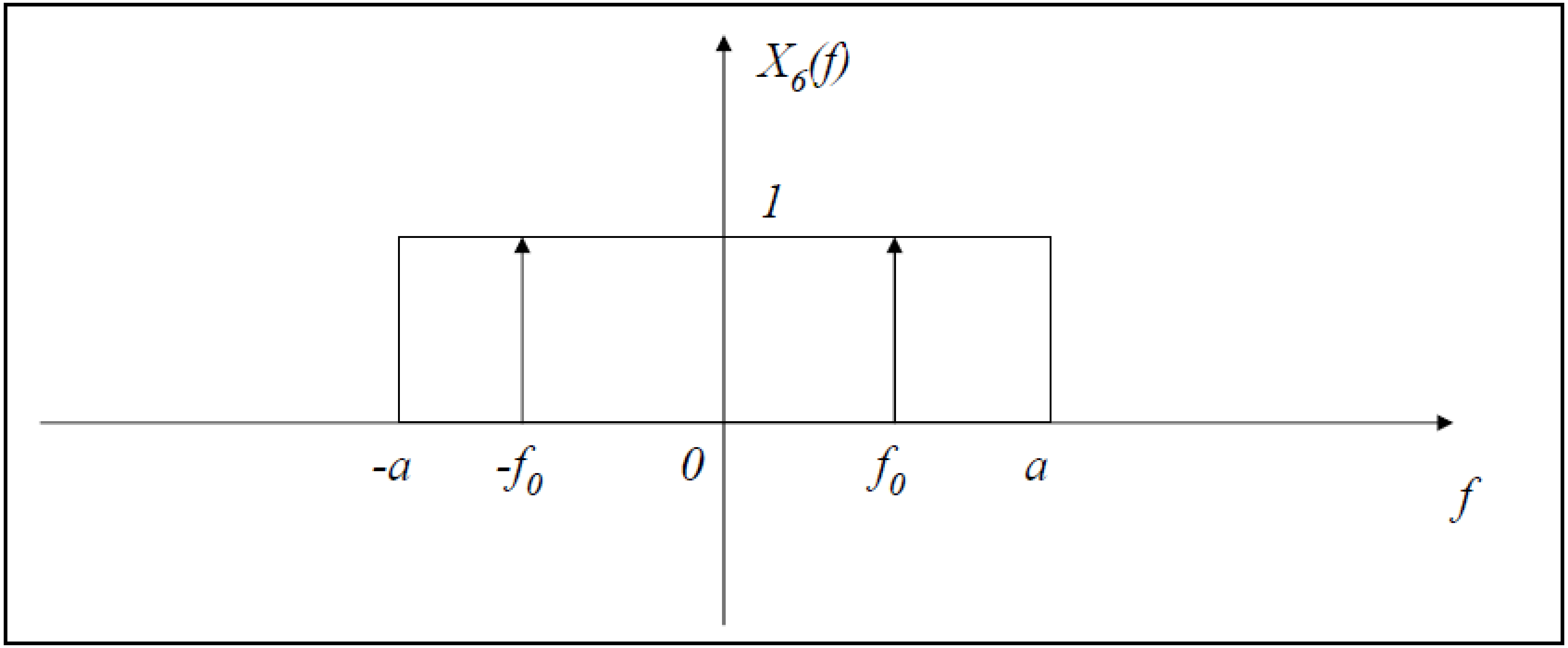
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] = X(f)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

και $\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2a} rect\left(\dfrac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

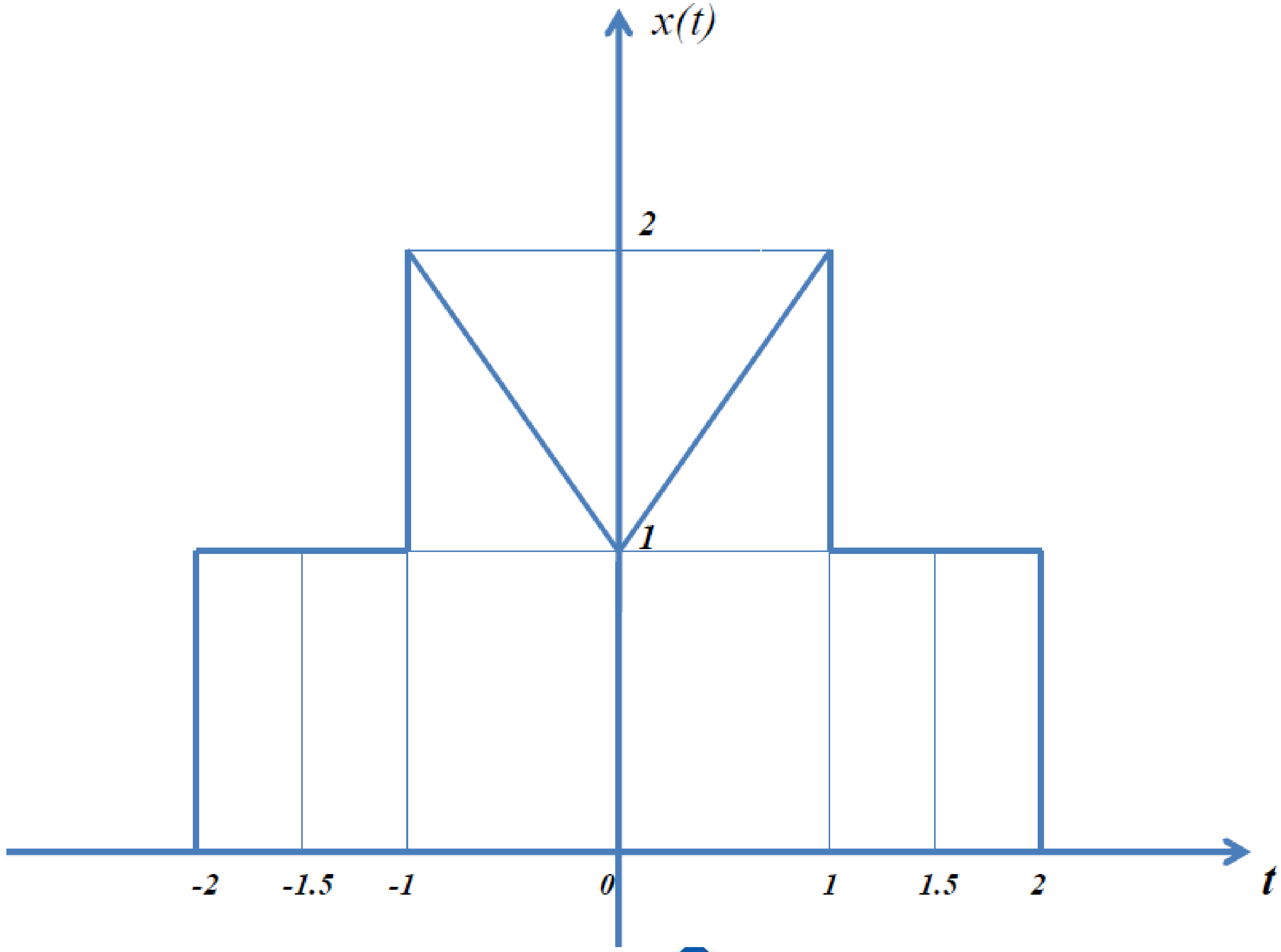
Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $\left[2a \cdot \operatorname{sinc}(2at)\right]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

ΕΞ2011Α/Θ1

Δίνεται το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος $X(f)$

(β) Το $x(t)$ πολλαπλασιάζεται στο πεδίο του χρόνου με κατάλληλο σήμα άπειρης χρονικής διάρκειας $g(t)$ για το οποίο ισχύει ότι $g(t) \neq 0$ όταν $t \to \pm\infty$ και προκύπτει το σήμα $y(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5)$. Να υπολογιστεί η χρονική έκφραση του $g(t)$ και το φάσμα πλάτους του $G(f)$.

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του προκύπτοντος σήματος $Y(f)$.

(δ) Το σήμα $y(t)$ διέρχεται από ένα σύστημα στην έξοδο του οποίου προκύπτει το σήμα $z(t)$ με φάσμα $Z(f) = [1+\cos(6\pi f)] \cdot \text{sinc}(f)$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f) = \cos(3\pi f)$.

Από το σχήμα αναγνωρίζουμε τους στοιχειώδεις παλμούς κι έχουμε:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) + rect\left(\frac{t}{2}\right) - tri(t)$$

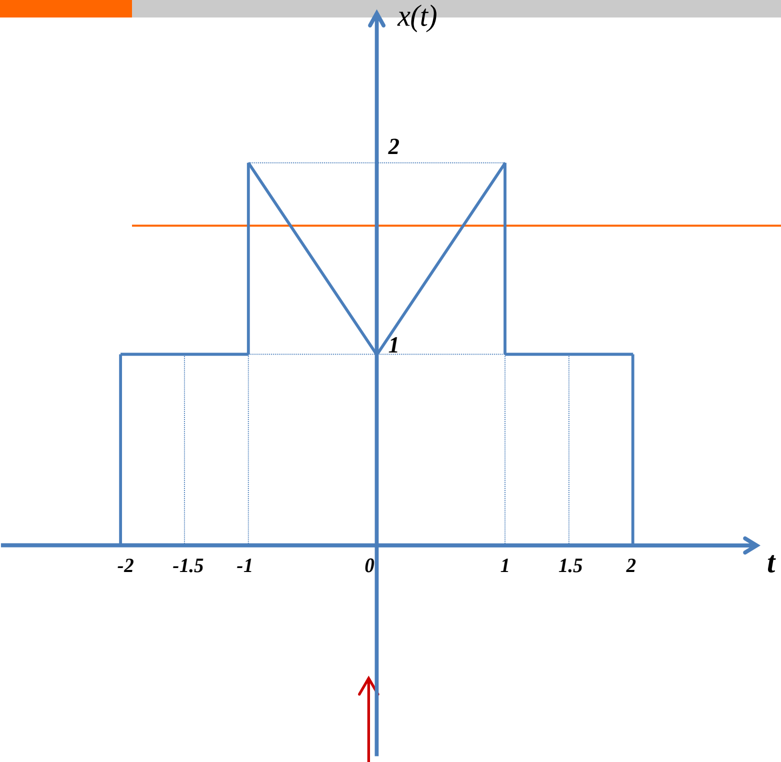
Υπολογίζουμε διαδοχικά τους ΜΣ Fourier κάθε όρου του αθροίσματος με χρήση γνωστών ΜΣ Fourier και ιδιοτήτων:

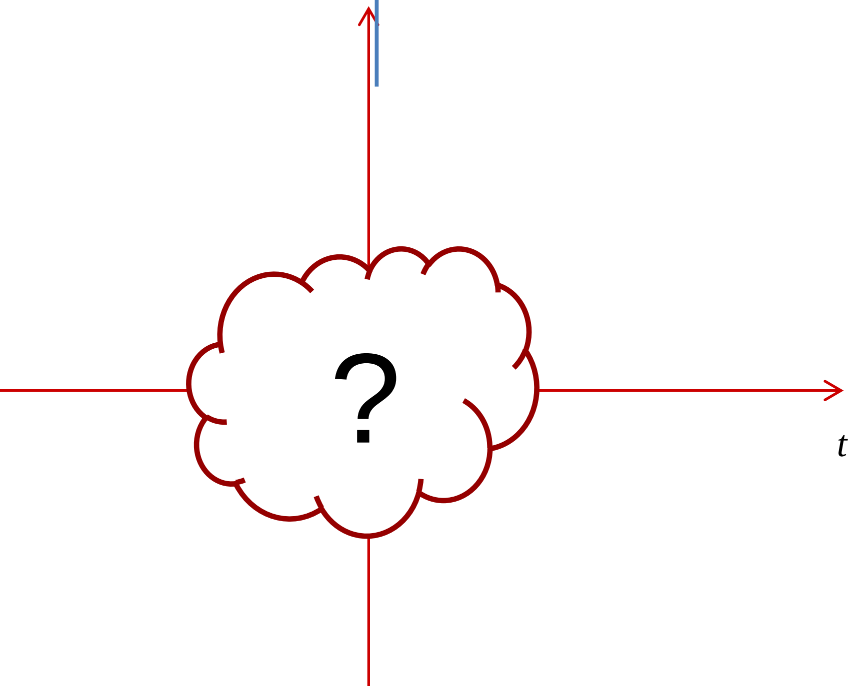
$$\boxed{rect(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f) \Leftrightarrow} \begin{cases} rect\left(\frac{t}{4}\right) \xleftrightarrow{F} 4\mathrm{sinc}(4f) \\ rect\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\mathrm{sinc}(2f) \end{cases}$$

$$\boxed{tri(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}^2(f)}$$

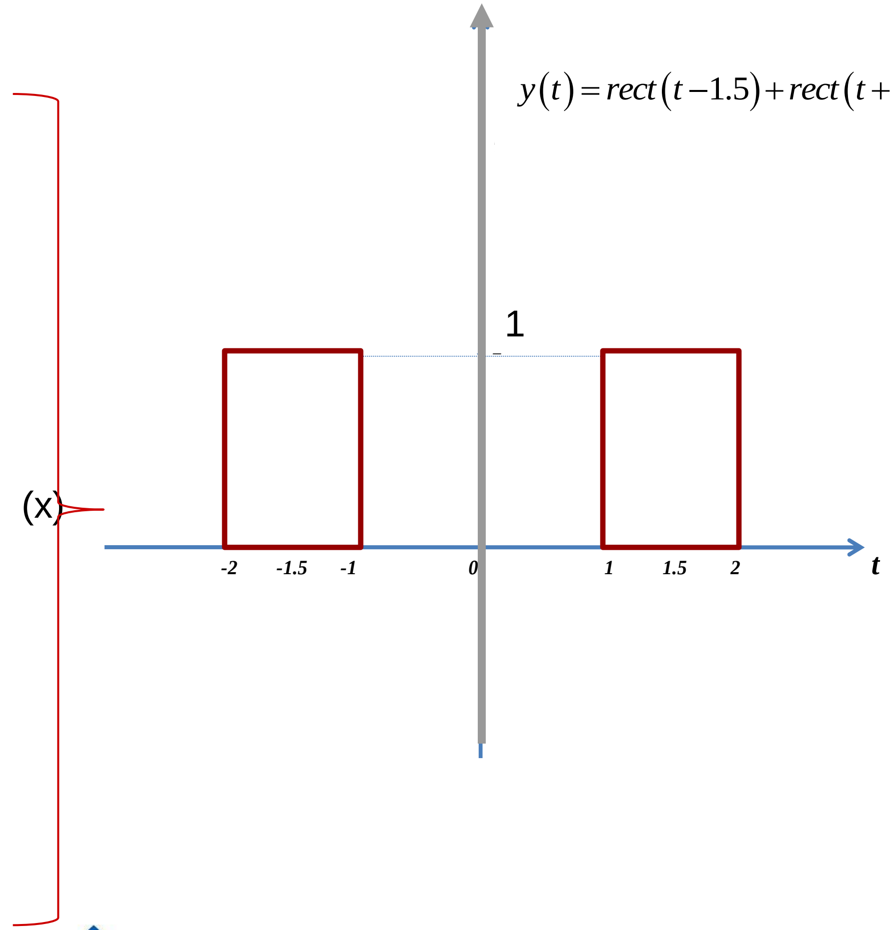
Αθροίζουμε τα επιμέρους αποτελέσματα που βρήκαμε κι έχουμε το ζητούμενο ΜΣ Fourier:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) + rect\left(\frac{t}{2}\right) - tri(t) \xleftrightarrow{F} 4\mathrm{sinc}(4f) + 2\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) = X(f)$$





$$y(t)=rect(t-1.5)+rect(t+1.5)$$



(β)

Το $x(t)$ πολλαπλασιάζεται στο πεδίο του χρόνου με κατάλληλο σήμα $g(t)$ και προκύπτει το σήμα $y(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5)$. Για να γίνει αυτό θα πρέπει το σήμα $g(t)$ να λειτουργεί ως υψιπερατό φίλτρο στο πεδίο του χρόνου με την κρουστική απόκριση να ισούται με $g(t) = 1 - rect\left(\frac{t}{2}\right)$ ενώ το φάσμα του θα ισούται με $G(f) = \delta(f) - 2\text{sinc}(2f)$.

(γ)

Έχουμε $y(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5)$.

Το φάσμα του ισούται με

$$Y(f) = e^{-j2\pi f 1.5}\cdot \mathrm{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5}\cdot \mathrm{sinc}(f) =$$

$$= \left[e^{-j2\pi f 1.5} + e^{j2\pi f 1.5}\right]\cdot \mathrm{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f)\cdot \mathrm{sinc}(f)$$

(δ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right]\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)} .$$

Κι επειδή ισχύει ότι

$$1+\cos(6\pi f) = 2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

$$H(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{2\cos^2(3\pi f)\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)} = \cos(3\pi f)$$

Παράδειγμα με φίλτρα.

Ποιά η σχέση των a, b ώστε $(\alpha, b > 0)$

να ισχύει $\alpha\,\mathrm{sinc}(\alpha t) * b\,\mathrm{sinc}^2(bt) = b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$?

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \qquad y(t) = x(t)$$

$x(t) = b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$

$h(t) = \alpha \cdot \mathrm{sinc}(at)$ $\qquad \alpha, b > 0$

Υπολογισμός $X(f)$

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{tri}(f)$

αλλ. κλίμακας $\mathrm{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

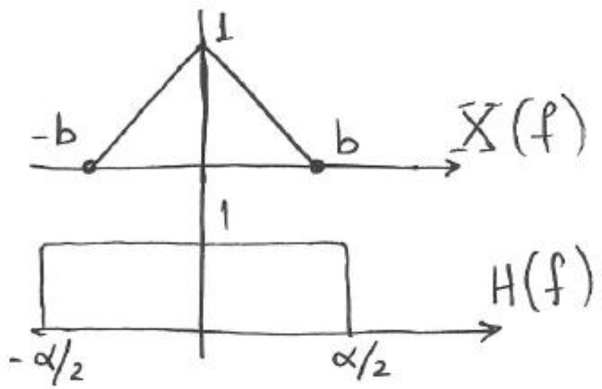
$\Rightarrow b\,\mathrm{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \mathrm{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

Υπολογισμός $H(f)$.

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}(f)$

αλλ. κλίμακας $\mathrm{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow \alpha\,\mathrm{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

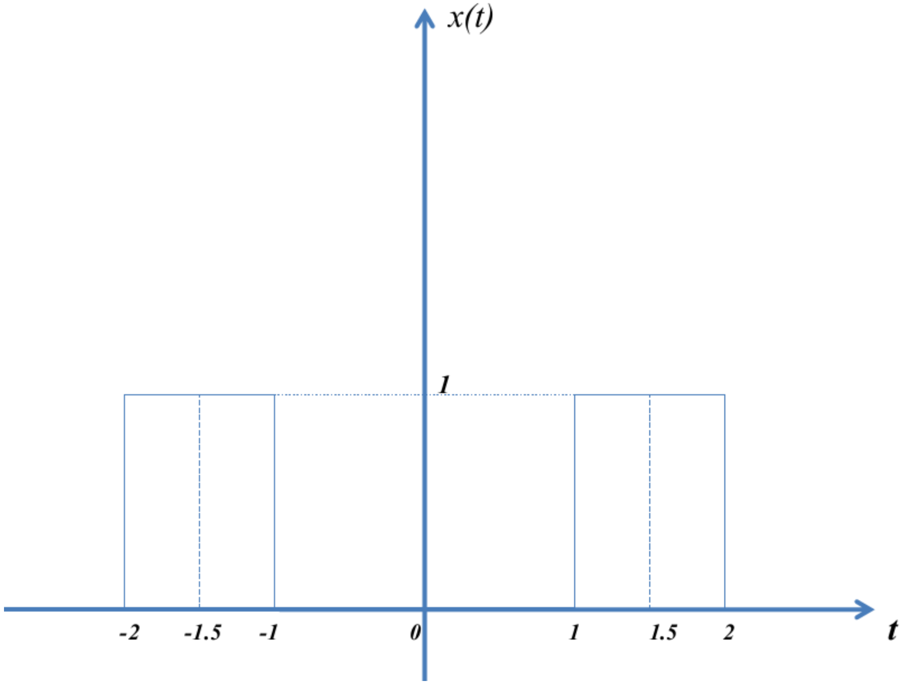


Εμείς θέλουμε $X(f)\cdot H(f) = X(f)$

οπότε $b \leq \frac{a}{2}$

ΘΕΜΑ 4 /ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής συνέλιξη: $y(t)=\left\{\delta(t)+\frac{1}{2}\left[\delta(t-3)+\delta(t+3)\right]\right\}*rect(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f)=\cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5) \; .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f) \; .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} * rect(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$Y(f) = \Im\left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} \cdot \Im\left[rect(t)\right] =$$

$$= \left[1 + \cos(6\pi f)\right] \cdot \mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \mathrm{sinc}(f)$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right]\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

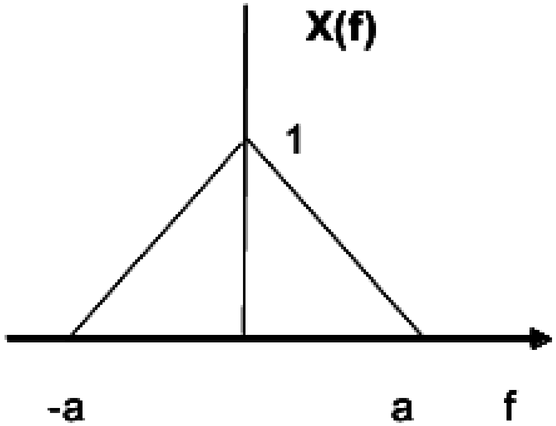
$$1+\cos(6\pi f) = 2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

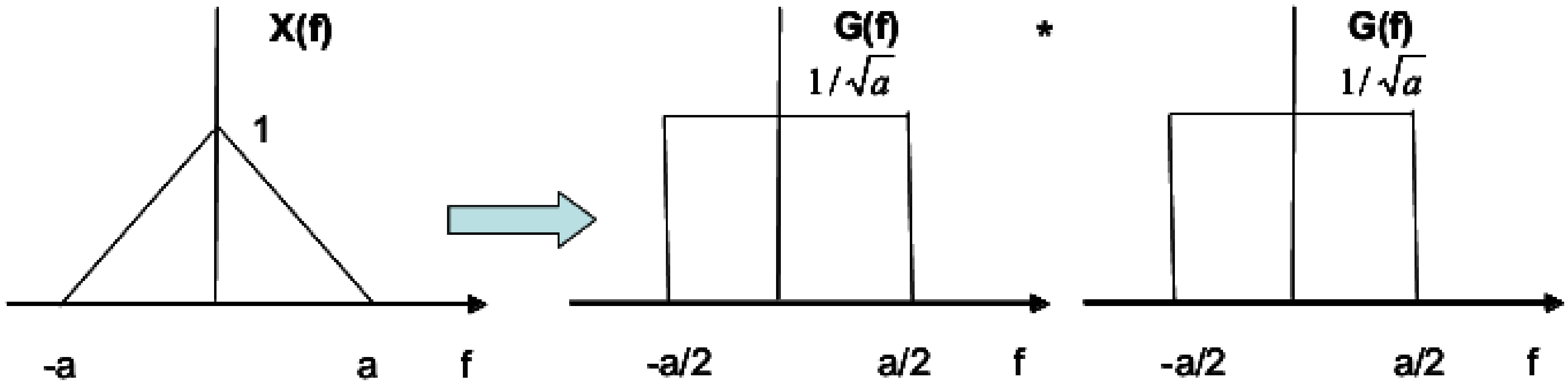
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2\cos^2(3\pi f)\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)} = \cos(3\pi f)$$

Θέμα 5 ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα x(t) στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) [X(f)] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα x(t) προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier X(f) προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος G(f) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση g(t) με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a}\,\sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \sin c^2(at)$$

Άσκηση 4 (επαναληπτική, ΓΕ5/1112/Θ6)

Δίνεται το σήμα $x_1(t) = a \cdot \text{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \text{sinc}(2a \cdot t)$, $a > 0$. Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους *2V* και συχνότητας $f_c = a\ Hz$ και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα $x_2(t)$.

1. Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του αρχικού σήματος $X_1(f)$ και του διαμορφωμένου DSB σήματος $X_2(f)$.
2. Να υποθέσετε ότι το σήμα $x_2(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 10\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους A_0 και συχνότητας $f_0 = b\ Hz$, $b >> a$. Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος.

1. Δίνεται ότι $x_1(t) = a \cdot \mathrm{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \mathrm{sinc}(2a \cdot t),\ a > 0$

Έχουμε:

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} tri\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} rect\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a\mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

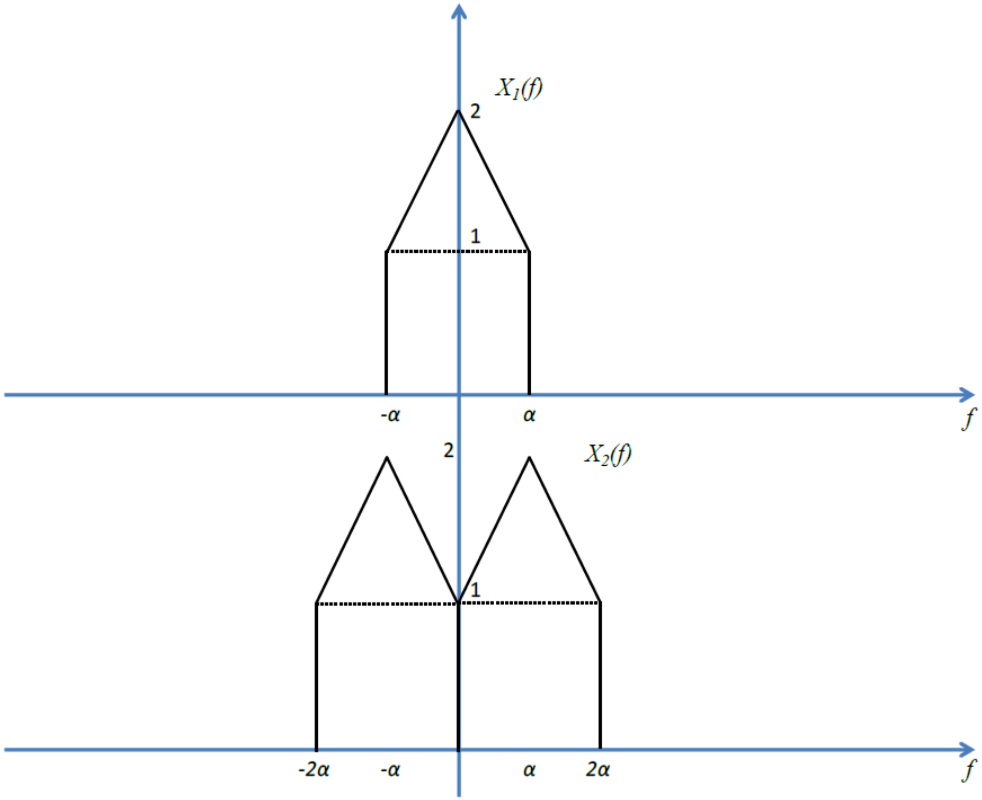
$$\Rightarrow x_1(t) = a\mathrm{sinc}^2(at) + 2a\mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right) + rect\left(\frac{f}{2a}\right) = X_1(f)$$

Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $A_c = 2V$ και συχνότητας $f_c = a\ Hz$ και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα $x_2(t)$.
Το φάσμα πλάτους του είναι το εξής:

$$X_2(f) = \frac{1}{2} A_c \left\{ X_1(f - f_c) + X_1(f + f_c) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \left\{ X_1(f - a) + X_1(f + a) \right\} = tri\left(\frac{f-a}{a}\right) + rect\left(\frac{f-a}{2a}\right) + tri\left(\frac{f+a}{a}\right) + rect\left(\frac{f+a}{2a}\right)$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα φάσματα πλάτους $X_1(f)$ και $X_2(f)$.



2.

Έχουμε ότι $x_2(t) = [2\cos(2\pi at)][a\text{sinc}^2(at) + 2a\text{sinc}(2at)]$

Το σήμα $x_2(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 10\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους A_0 και συχνότητας $f_0 = b\ Hz,\ b >> a$.

Το διαμορφωμένο σήμα FM γράφεται:

$$x_{FM}(t) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + k_f \int_{-\infty}^{t} x_2(\lambda)\, d\lambda\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi bt + 10\pi \int_{-\infty}^{t} \left\{[2\cos(2\pi a\lambda)][a\text{sinc}^2(a\lambda) + 2a\text{sinc}(2a\lambda)]\right\} d\lambda\right)$$

Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W = 2(D+1) f_x$$

όπου $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_x}$

Το σήμα πληροφορίας $x_2(t)$ έχει εύρος ζώνης ίσο με $f_x = f_{\max} = 2aHz$

Επίσης,

$$\max|x_2(t)| = \max\left|\left[2\cos(2\pi at)\right]\left[a\text{sinc}^2(at) + 2a\text{sinc}(2at)\right]\right| = 2\cdot(a+2a) = 6a$$

επειδή

ισχύει ότι $\max\left|a\text{sinc}^2(at)\right| = a, \text{ όταν } t = 0$

$$\max\left|2a\text{sinc}(2at)\right| = 2a, \text{ όταν } t = 0$$

$$2\cos(2\pi at) = 2, \text{ όταν } t = 0$$

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(|x_2(t)|\right) = \frac{10\pi}{2\pi}(6a) = 30aHz$$

οπότε, $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_x} = \dfrac{30a}{2a} = 15$

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:

$W = 2(15+1)\cdot 2a\ Hz = 64a\ Hz$

ΕΞ2007Α/Θ2

ΘΕΜΑ 2 - Δίνεται το σήμα περιορισμένου εύρους ζώνης $x(t) = a \cdot \mathrm{sinc}(at), (\text{όπου } a > 1)$. Το σήμα δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας 10πλάσια της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας Nyquist. Στη συνέχεια το δειγματισμένο σήμα διέρχεται από κατάλληλο φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(t) = b \cdot \mathrm{sinc}(bt), (\text{όπου } b > 1)$, προκειμένου να ληφθεί το αρχικό σήμα .

Ζητούνται τα εξής:

(α) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$, η μέγιστη συχνότητά του και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist.

(β) Η έκφραση στο πεδίο του χρόνου του δειγματισμένου σήματος $x(n)$, $n = 1,2,3,\ldots$.

(γ) Η έκφραση στο πεδίο των συχνοτήτων του φάσματος του δειγματισμένου σήματος $X_\delta(f)$

(δ) Να βρεθεί το πεδίο τιμών του b (συναρτήσει του α) για τις οποίες δεν υπάρχει παραμόρφωση του ανακτώμενου σήματος στην έξοδο του φίλτρου.

(Σημείωση: Δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f)$ *και υπενθυμίζεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος με φάσμα X(f) που δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας* f_s *ισούται με*

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{X}(f - mf_s) \right].$$

Επίσης, όπου χρειάζεστε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη τις ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier και τους μετασχηματισμούς Fourier χαρακτηριστικών σημάτων από πίνακες)

(α)

Από πίνακες ΜΣ Fourier,

$$\operatorname{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sinc}(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} rect\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \operatorname{sinc}(at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

Μέγιστη συχνότητα του σήματος: $f_{\max} = \frac{a}{2}$ Hz.

Άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,\min} = a$ Hz.

και η συχνότητα δειγματοληψίας της άσκησης είναι $f_s = 10 \cdot f_{s,\min} = 10a$ Hz.

(β)

Η περίοδος δειγματοληψίας της άσκησης είναι $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{10a}$ sec.

Άρα, το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου θα γράφεται:

$$x(n) \overset{t \to nT_s}{=} a \cdot \text{sinc}(a \cdot nT_s) = a \cdot \text{sinc}\left(a \cdot n \frac{1}{10a}\right) = a \cdot \text{sinc}\left(\frac{n}{10}\right), n = 0,1,2,\ldots$$

(γ)

Το ζητούμενο φάσμα του δειγματισμένου σήματος θα ισούται με:

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{X}(f - mf_s)\right] = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[rect\left(\frac{f - mf_s}{a}\right)\right] =$$

$$= 10a \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[rect\left(\frac{f - m \cdot 10a}{a}\right)\right]$$

(δ)

Ο ΜΣ Fourier της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου είναι:

$$\operatorname{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sinc}(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b} rect\left(\frac{f}{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b\operatorname{sinc}(bt) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{b}\right)$$

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{b}\right)$$

δηλ. το φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής $f_{cutoff} = \frac{b}{2}$ Hz.

Για να μην έχουμε παραμόρφωση (δηλ. το αρχικό σήμα να ανακτάται πλήρως) θα πρέπει η συχνότητα αποκοπής του φίλτρου να βρίσκεται μεταξύ της μέγιστης συχνότητας του σήματος και της ελάχιστης συχνότητας των όρων για $m = \pm 1$, δηλαδή:

$$f_{\max} \le f_{cutoff} \le f_s - f_{\max} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \le \frac{b}{2} \le 10a - \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \le b \le 20a - a \Leftrightarrow a \le b \le 19a$$