ΕΑΠ/ΠΛΗ-22/ΑΘΗ.3
1η τηλεδιάσκεψη
03/11/2013

επικαιροποιημένη έκδοση

Ν.Δημητρίου

Συμπληρωματικές υποδείξεις Octave

- Εκκίνηση με την εντολή
  - `octave -i --line-editing`
- Μετατροπή γραφήματος σε ‘name.jpg’
  - `print -djpg '/Octave/name.jpg'`
- Αντιγραφή εντολών από παράθυρο στον editor
  - Δεξί κλικ στο παράθυρο, επιλογή Mark , επισήμανση εντολών, <Enter> και paste ή CTRL-V στον editor.
- Επανάληψη γραμμής εντολής στο παράθυρο
  - Γράφουμε τα πρώτα γράμματα και διαδοχικά πατάμε το πάνω βελάκι μέχρι να εμφανιστεί η επιθυμητή γραμμή
- Διακοπή εκτέλεσης κώδικα στο παράθυρο
  - CTRL-C

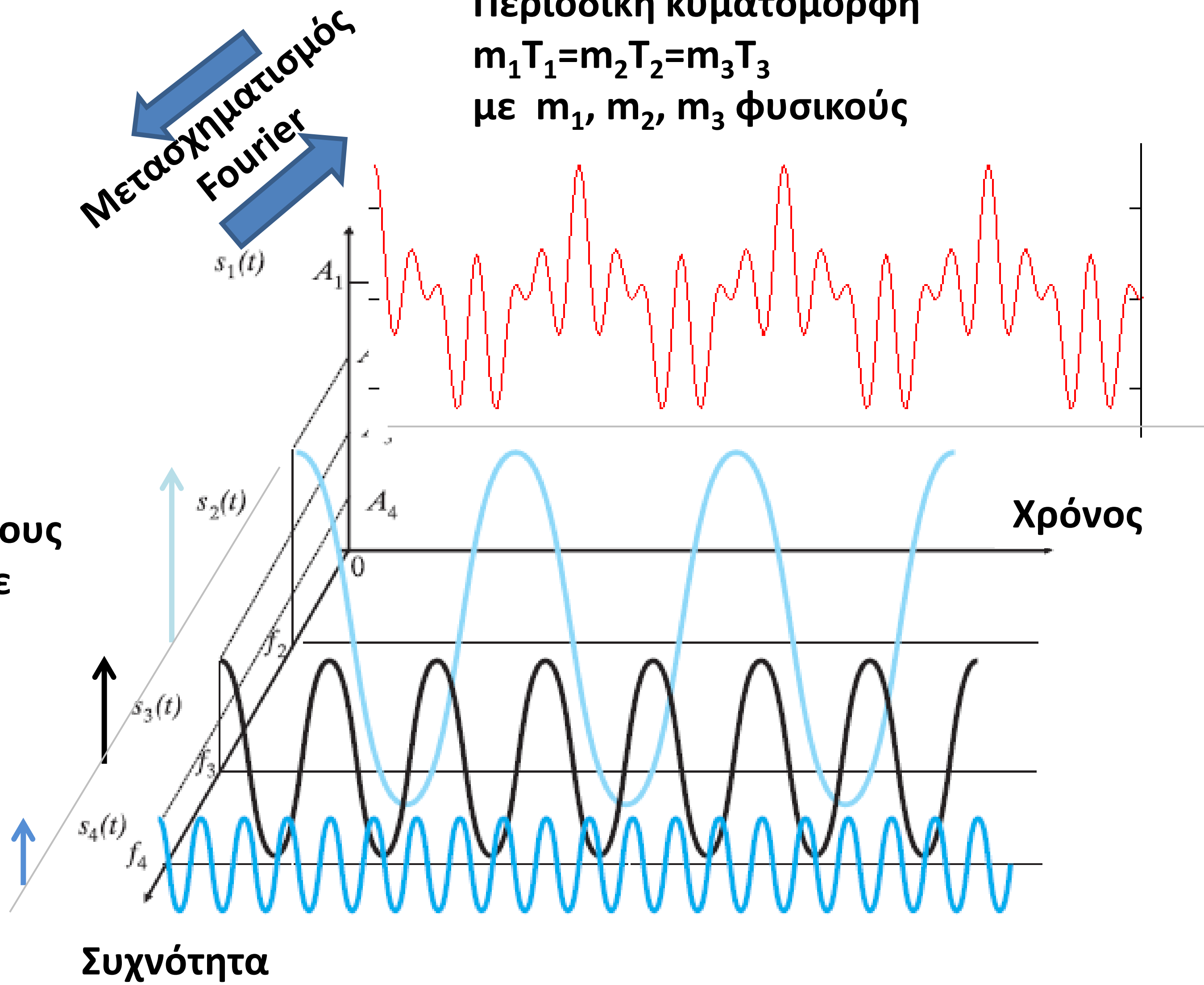
Πεδίο χρόνου/συχνοτήτων

- Κάθε σήμα μπορεί να περιγραφεί είτε στο πεδίο του χρόνου (κυματομορφή) είτε στο πεδίο των συχνοτήτων (φάσμα)
- Για τη μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο χρησιμοποιείται ο ΜΣ Fourier

Περιοδικά σήματα

Περιοδική κυματομορφή
$m_1T_1=m_2T_2=m_3T_3$
με m_1, m_2, m_3 φυσικούς

Διακριτό Φάσμα Πλάτους ισχύει $n_1f_1=n_2f_2=n_3f_3$ με n_1, n_2, n_3 φυσικούς



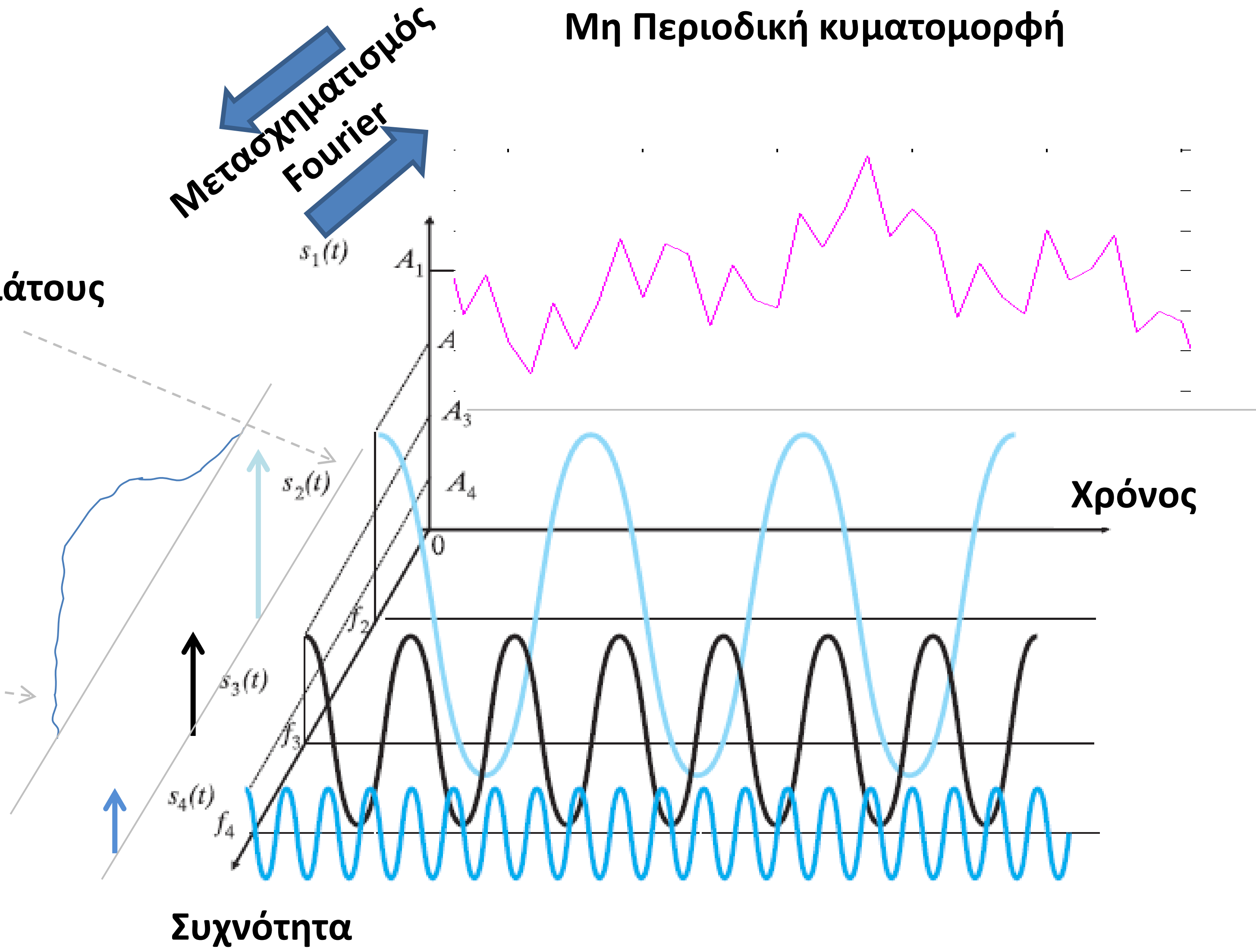
Σχήμα 2.21
Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Μη Περιοδικά σήματα

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΦΑΣΜΑ Πλάτους χωρίς να ισχύει $n_1f_1=n_2f_2=n_3f_3$ με n_1, n_2, n_3 φυσικούς

Ή

ΣΥΝΕΧΕΣ ΦΑΣΜΑ ΠΛΑΤΟΥΣ



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

ΜΣ Fourier

- Σχέσεις Υπολογισμού με ολοκληρώματα
  - Διαφάνεια 61
- ΜΣ Fourier βασικών σημάτων - ιδιότητες
  - Διαφάνειες 71,74 και πίνακες 2.3.5Α-Β τόμου Β/Β
- Πιο συχνοί μετασχηματισμοί
  - Τετραγωνικοί/τριγωνικοί παλμοί, συναρτήσεις sinc, sinc^2 , τριγωνομετρικές (cos – sin) , συνάρτηση dirac (δ(t), δ(f))
- Πιο συχνές ιδιότητες
  - Γραμμικότητα, αλλαγή κλίμακας, χρονική μετατόπιση, ολίσθηση συχνότητας, δυϊσμός,συνέλιξη

ΠΙΝΑΚΑΣ Α Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier			
Ιδιότητα	**Πεδίο χρόνου (t)**	**Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
Αρχική συνθήκη	$x(t)$		$X(f)$
Γραμμικότητα	$ax_1(t)+bx_2(t)$		$aX_1(f)+bX_2(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$		$e^{-j2\pi f t_0}X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t}x(t)=e^{j2\pi f_0 t}x(t)$		$X(f-f_0)$
Δυϊσμός αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(\Omega)$ ή $x(t)\xleftrightarrow{F}X(f)$	$y(t)=X(t)$		$Y(f)=x(-f)$
Συνέλιξη	$x(t)*h(t)$		$X(f)H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$		$[X(f)*Y(f)]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$		$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$

$\Omega=2\pi f$	ΠΙΝΑΚΑΣ Β Μετασχηματισμοί Fourier μερικών βασικών συναρτήσεων	
Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο κυκλικής συχνότητας (Ω)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$		1
$x(t)=1$		$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$		$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j\Omega_0 t}$		$\delta(f-f_0)$
$\cos(\Omega_0 t)=\cos(2\pi f_0 t)$		$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(\Omega_0 t)=\sin(2\pi f_0 t)$		$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
tri(t)	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

Παράδειγμα

$$x(t) = A\operatorname{sinc}\left(Bt\right)$$

$$\operatorname{sinc}\left(t\right) \xleftrightarrow{F} rect\left(f\right) \Rightarrow$$ Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$\Rightarrow \operatorname{sinc}\left(Bt\right) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right) \Rightarrow$$ Γραμμικότητα

$$\Rightarrow x(t) = A\operatorname{sinc}\left(Bt\right) \xleftrightarrow{F} \frac{A}{B} rect\left(\frac{f}{B}\right)$$

Παράδειγμα

$$y(t) = a\left[\sin c^2(at) + 6\sin c(6at)\right]$$

Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

Και

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$\Leftrightarrow 6a \cdot \text{sinc}(6at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{6a}\right)$$

Άρα έχουμε ότι

Γραμμικότητα

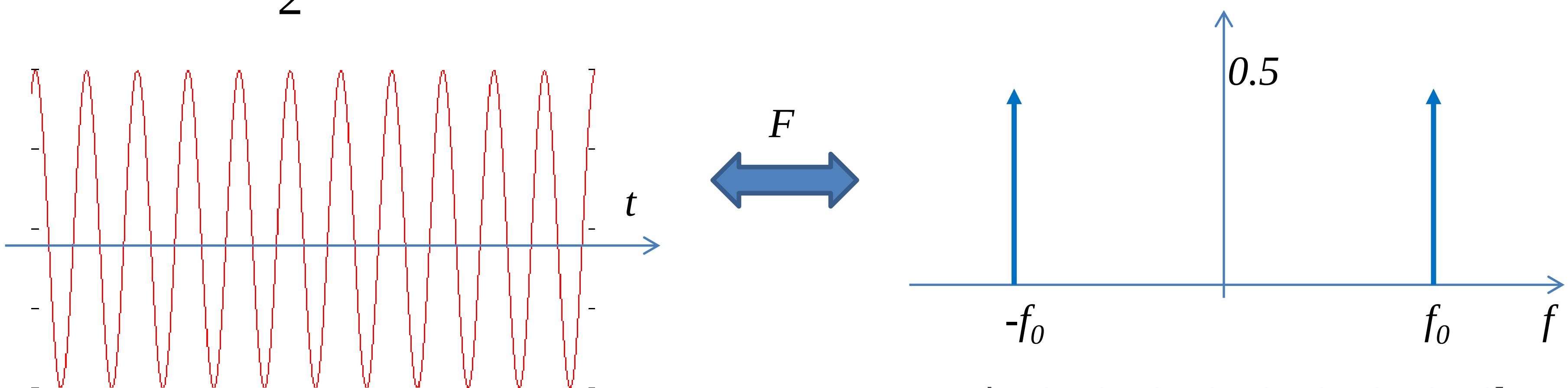
$$Y(f) = tri\left(\frac{f}{a}\right) + rect\left(\frac{f}{6a}\right)$$

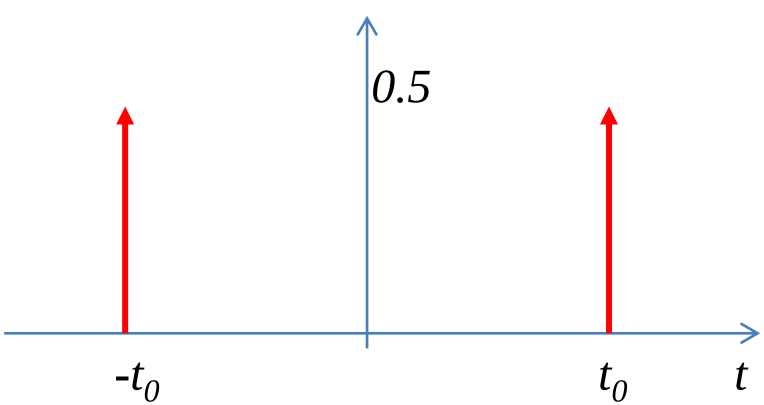
Παράδειγμα με συνημίτονο (1)

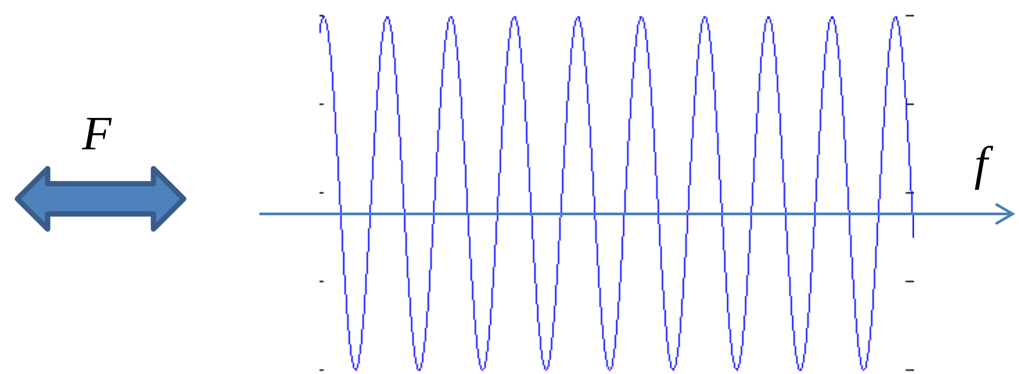
$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

Δυϊσμός

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)\right] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi f t_0)$$







Παράδειγμα με συνημίτονο (2)

Εναλλακτικός τρόπος

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \Leftrightarrow$$ Χρονική Μετατόπιση

$$\Leftrightarrow \delta(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f t_0} \cdot 1 = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \Leftrightarrow$$ Χρονική Μετατόπιση

$$\delta(t+t_0) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f t_0} \cdot 1 = e^{j2\pi f t_0}$$

Γραμμικότητα

$$\Leftrightarrow \delta(t-t_0) + \delta(t+t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f t_0} + e^{j2\pi f t_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(t-t_0) + \delta(t+t_0)\right] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left(e^{-j2\pi f t_0} + e^{j2\pi f t_0}\right) = \cos(2\pi f t_0)$$

Σχέση Euler

Συστήματα - Συνέλιξη

- Διαφάνειες 64-69

Κρουστική Απόκριση

Σήμα Εισόδου $h(t)$ *Σήμα Εξόδου*

Σχήμα 2.24

Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$ φάσμα εισόδου

$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$ συνάρτηση μεταφοράς

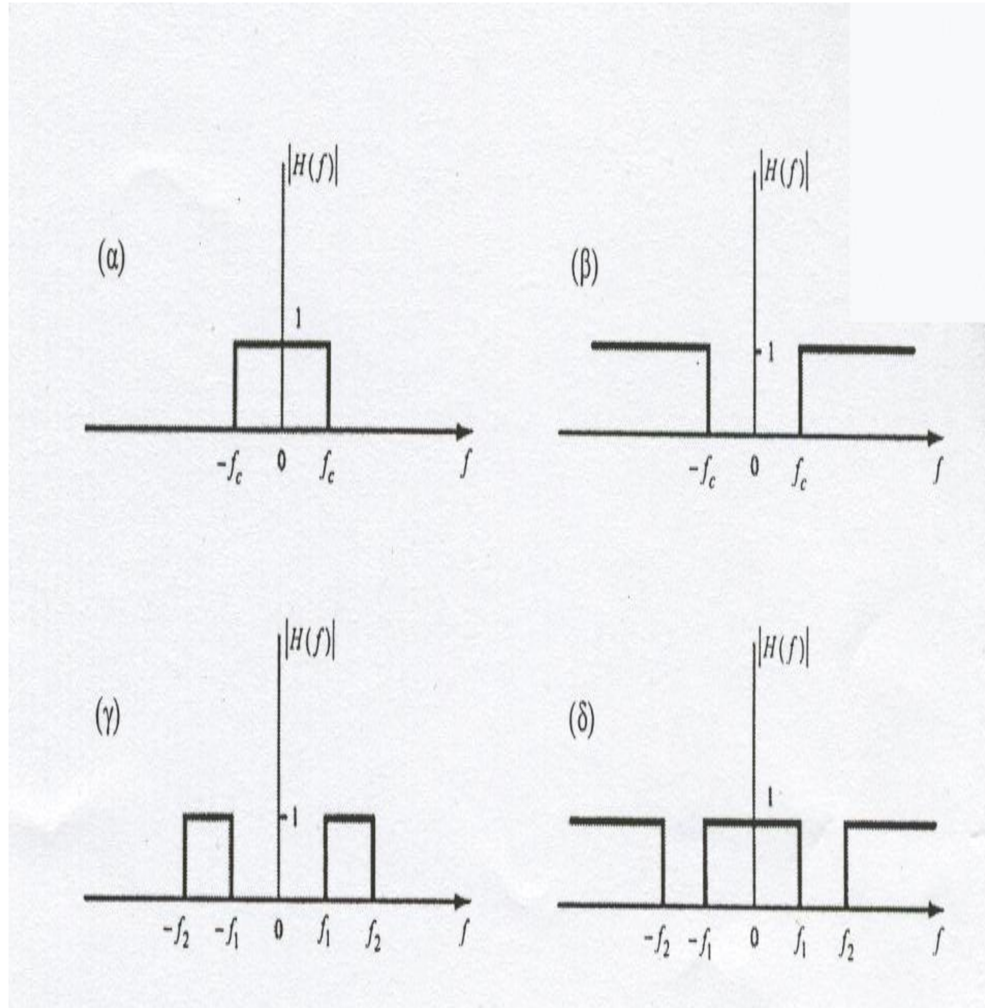
$y(t) \xleftrightarrow{F} Y(f)$ φάσμα εξόδου

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Φίλτρα

- Διαφάνειες 84-88



Παράδειγμα-Φίλτρα

- Διαφάνειες 141-146

Δειγματοληψία

- Διαφάνειες 121-136

Παράδειγμα

Δίνεται

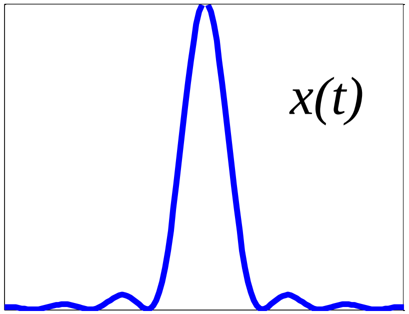
$$x(t) = B\operatorname{sinc}^2(Bt)$$

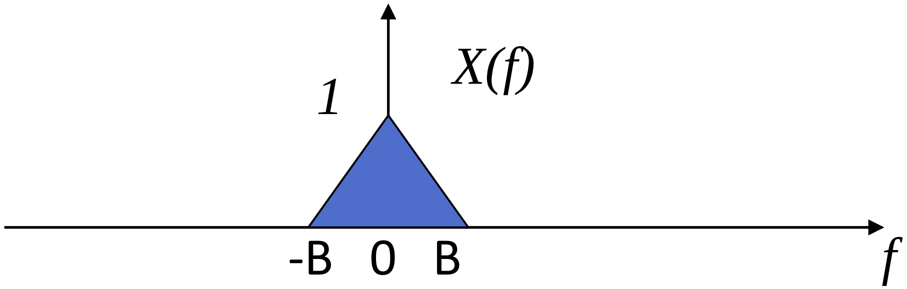
Εύρεση φάσματος

$$\operatorname{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sinc}^2(Bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{B} tri\left(\frac{f}{B}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(t) = B\operatorname{sinc}^2(Bt) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{B}\right) = X(f)$$



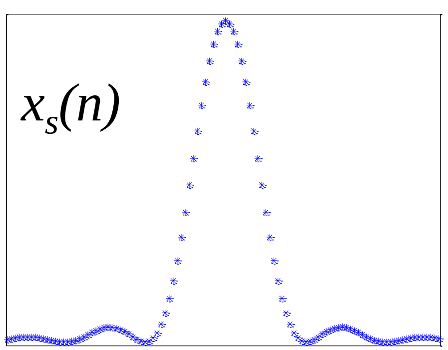


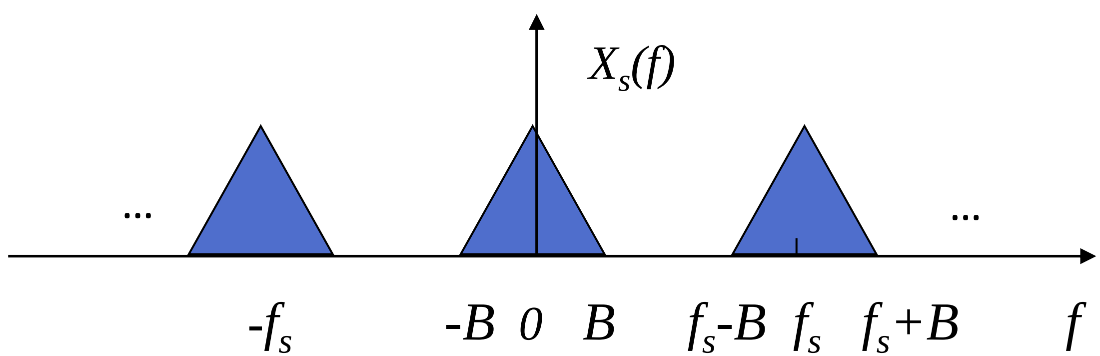
- Δειγματοληψία του $x(t)$ με συχνότητα f_s
- Περίοδος Δειγματοληψίας $T_s = 1/f_s$
- Χρονική έκφραση δειγματισμένου σήματος

$$x_s(n) = x(t)\big|_{t=nT_s} = B\mathrm{sinc}^2(BnT_s),\ n \text{ ακέραιος}$$

- Φάσμα δειγματισμένου σήματος

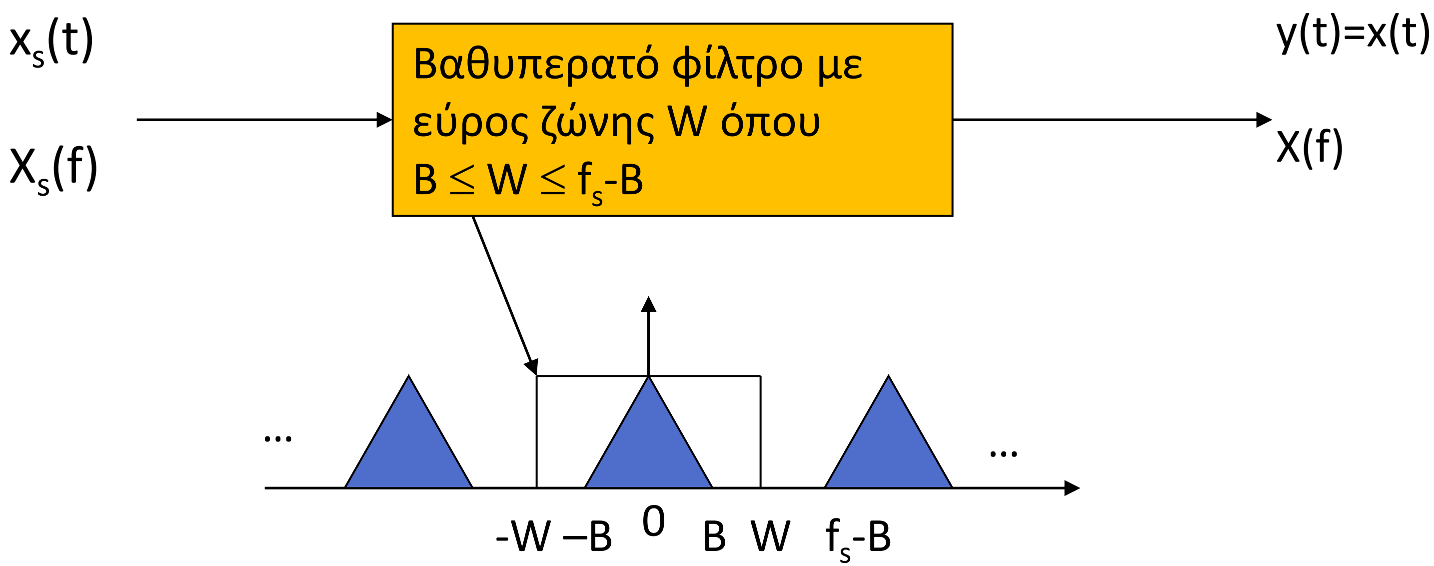
$$\mathrm{X}_s(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} tri\left(\frac{f - mf_s}{B}\right),\ m \text{ ακέραιος}$$





Ανάκτηση του αρχικού σήματος από τα δείγματά του

- Το περνάμε μέσα από ένα βαθυπερατό φίλτρο το οποίο επιτρέπει την διέλευση μόνο του φάσματος γύρω από το f=0.

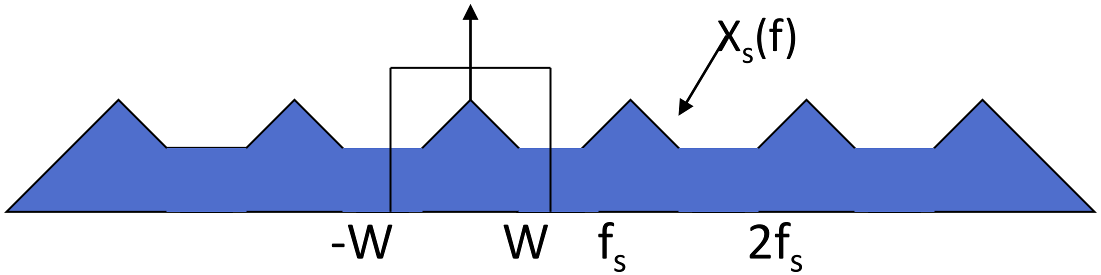


Αν f_s -B≥ B δηλ. $f_s \geq 2B$ το x(t) ανακτάται <u>ακριβως</u> απο τα δειγματα του

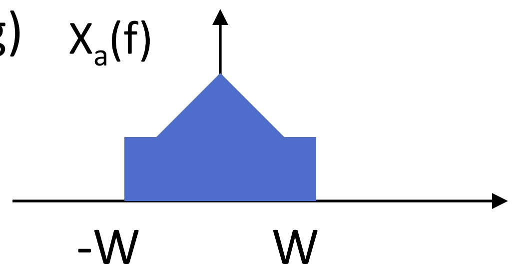
ΚΡΙΤΗΡΙΟ NYQUIST

Υποδειγματοληψία και aliasing

- Αν το σήμα υποστεί δειγματοληψία με συχνότητα $f_s \leq 2B$ τότε θα έχουμε υπερκάλυψη των περιοδικά επαναλαμβανόμενων φασμάτων $X(f-nf_s)$ στο φάσμα του $X_s(f)$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



- Το σημα στην εξοδο του κατωδιαβατου φιλτρου θα διαφερει απο το αρχικο σημα (aliasing)



Παράδειγμα Διαφάνειες 159-162

Διαμορφώσεις

- DSB Διαφάνειες 106-107
- FM Διαφάνειες 114-115

- Παράδειγμα Διαφάνειες 154-158

Επιπλέον σχόλια

Διερεύνηση περιοδικότητας

Για περισσότερες από 2 περιόδους, έστω T_1, T_2,…, T_N ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Θέτουμε $\kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \ldots = \kappa_N T_N$

2. Απλοποιούμε την παρακάτω έκφραση με απαλοιφή κοινών παραγόντων και τη φέρνουμε στη μορφή
   $\kappa_1/A_1 = \kappa_2/A_2 = \ldots = \kappa_N/A_N$ δηλ. τα κλάσματα να έχουν ως αριθμητές μόνο τα κ_1, κ_2,…,κ_N

3. Από την παραπάνω σχέση θα ισχύει ότι $\kappa_1=A_1$, $\kappa_2=A_2$,…,$\kappa_N=A_N$, κι εφόσον τα A_1,A_2 , … , A_N είναι ακέραιοι

το σήμα θα είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_{ολ}=\kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \ldots = \kappa_N T_N$

Παραδείγματα στις επόμενες διαφάνειες:

$$T_1 = \frac{3}{4}, T_2 = \frac{5}{14},\ T_3 = \frac{1}{2}$$

Θέτουμε

$$\kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \kappa_3 T_3 \Rightarrow \kappa_1 \frac{3}{4} = \kappa_2 \frac{5}{14} = \kappa_3 \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa_1 \frac{3}{2} = \kappa_2 \frac{5}{7} = \kappa_3 \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 3}{\Longrightarrow} \frac{\kappa_1}{2} = \kappa_2 \frac{5}{21} = \frac{\kappa_3}{3} \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 5}{\Longrightarrow} \frac{\kappa_1}{10} = \frac{\kappa_2}{21} = \frac{\kappa_3}{15} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 10 \\ \kappa_2 = 21 \\ \kappa_3 = 15 \end{cases}$$

$$T_{o\lambda} = \kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \kappa_3 T_3 = 10\frac{3}{4} = 21\frac{5}{14} = 15\frac{1}{2} = 7.5$$

$$T_1 = 2\sqrt{2}, T_2 = \frac{\sqrt{2}}{3},\ T_3 = \sqrt{2}$$

Θέτουμε

$$\kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \kappa_3 T_3 \Rightarrow \kappa_1 2\sqrt{2} = \kappa_2 \frac{\sqrt{2}}{3} = \kappa_3 \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa_1 2 = \kappa_2 \frac{1}{3} = \kappa_3 \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 2}{\Longrightarrow} \kappa_1 = \frac{\kappa_2}{6} = \frac{\kappa_3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 1 \\ \kappa_2 = 6 \\ \kappa_3 = 2 \end{cases}$$

$$T_{o\lambda} = \kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \kappa_3 T_3 = 2\sqrt{2} = 6\frac{\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$T_1 = 2\pi, T_2 = \frac{\sqrt{5}}{3},\ T_3 = \sqrt{2}$$

Θέτουμε

$$\kappa_1 T_1 = \kappa_2 T_2 = \kappa_3 T_3 \Rightarrow \kappa_1 2\pi = \kappa_2 \frac{\sqrt{5}}{3} = \kappa_3 \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ 2\pi}{\Rightarrow} \kappa_1 = \kappa_2 \frac{\sqrt{5}}{6\pi} = \kappa_3 \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ \sqrt{5}}{\Rightarrow} \frac{\kappa_1}{\sqrt{5}} = \frac{\kappa_2}{6\pi} = \kappa_3 \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{5}} \overset{\delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\eta\ /\ \sqrt{2}}{\Rightarrow} \frac{\kappa_1}{\sqrt{10}} = \frac{\kappa_2}{6\pi\sqrt{2}} = \frac{\kappa_3}{2\pi\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \sqrt{10} \\ \kappa_2 = 6\pi\sqrt{2}, \\ \kappa_3 = 2\pi\sqrt{5} \end{cases}$$

Τα $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ δεν είναι φυσικοί αριθμοί (θετικοί ακέραιοι), άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Ορισμός διαστημάτων στο Octave

- Γενικά εάν έχουμε ένα διάστημα με όρια A,B και ορίζουμε ισομήκη διαστήματα με N συνολικά σημεία (που συμπεριλαμβάνουν τα A,B) καθένα από τα οποία (διαστήματα) έχει μήκος Δ, τότε ισχύει η σχέση Δ=(B-A)/(N-1).
- Το διάστημα αυτό μπορεί να οριστεί στο MATLAB
  - είτε ως t=A:Δ:B
  - είτε ως t=linspace(A,B,N).