Υπολογισμοί Παραδείγματος 6. (Διαφάνεια 59)

$P(Y,X)$ πίνακας συνδυασμένης πιθανότητας μάζας

Y \ X	x_1	x_2	x_3	x_4	
y_1	1/8	1/16	1/32	1/32	$p(y_1)=\sum_{i=1}^{4} p(y_1,x_i)=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$
y_2	1/16	1/8	1/32	1/32	$p(y_2)=1/4$
y_3	1/16	1/16	1/16	1/16	$p(y_3)=1/4$
y_4	1/4	0	0	0	$p(y_4)=1/4$
	$p(x_1)$	$p(x_2)=1/4$	$p(x_3)=1/8$	$p(x_4)=1/8$	

$$p(x_1)=\sum_{j=1}^{4} p(y_j,x_1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{4} p(y_j) \qquad \sum_{i=1}^{4} p(x_i) \qquad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i,y_j) = 1$$

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{4} p(x_i)\log[p(x_i)]=\frac{7}{4}$$

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log[p(y_j)]=\frac{11}{8}$$

$$H(X/Y)=-\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i/y_j)\log[p(x_i/y_j)]\cdot p(y_j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(y_j,x_i)\log p(x_i/y_j)$$

από τον πίνακα $P(Y,X)$

Χρειάζεται υπολογισμός των $P(x_i/y_j)$

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(y_j, x_i)}{P(y_j)}$$

π.χ. $$P(x_1/y_1) = \frac{P(y_1, x_1)}{P(y_1)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{32}$$

$$P(x_2/y_4) = \frac{P(y_4, x_2)}{P(y_4)} = \frac{0}{1/4} = 0$$

Σημείωση: στον υπολογισμό του όρου

$$P(y_4, x_2) \cdot \log P(x_2/y_4) \quad \text{επειδή}$$

το ενδεχόμενο x_2/y_4 έχει μηδενική πιθανότητα

θα έχει και μηδενική ποσότητα πληροφορίας

οπότε θα έχουμε:

$$P(y_4, x_2) \cdot \log P(x_2/y_4) = P(y_4, x_2) \cdot 0 = 0$$

Τελικά προκύπτει η τιμή

$$H(X/Y) = 11/8$$

Ομοια: $$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i) \log\left[P(y_j/x_i)\right] \cdot P(x_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} P(y_j, x_i) \cdot \log\left[P(y_j/x_i)\right]$$

όπου

$$P(y_j/x_i) = \frac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)}$$

π.χ. $$P(y_3/x_2) = \frac{P(y_3, x_2)}{P(x_2)} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{64}$$

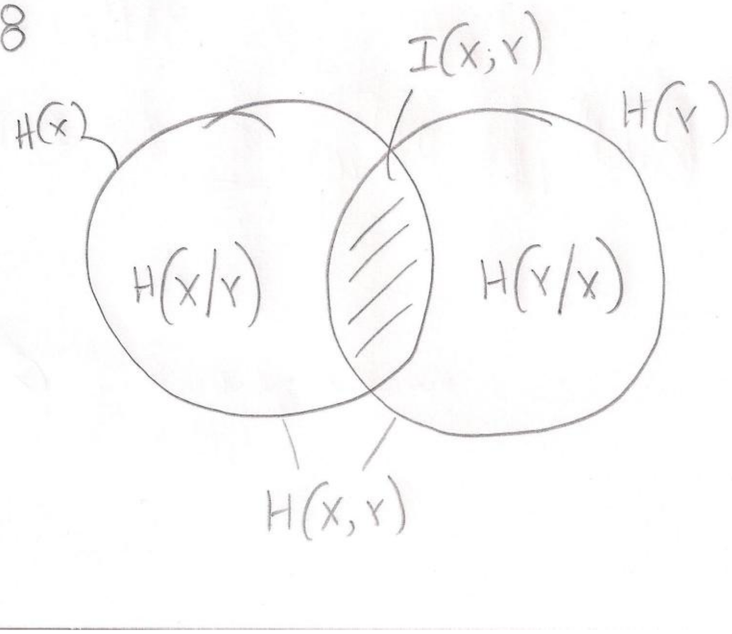
Τελικά $$H(Y/X) = \frac{13}{8}$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y) =$$

$$= \frac{27}{8}$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) =$$

$$= \frac{3}{8}$$

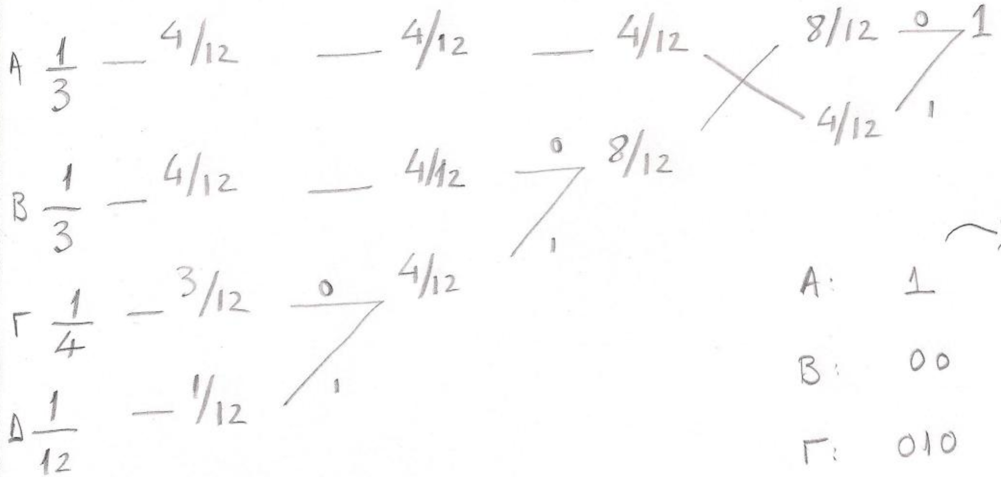


Παραδείγματα Κωδικοποίησης Huffman

ΓΕ4/1011/Θ4

Έστω τα σύμβολα με πιθανότητες

A	B	Γ	Δ
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$



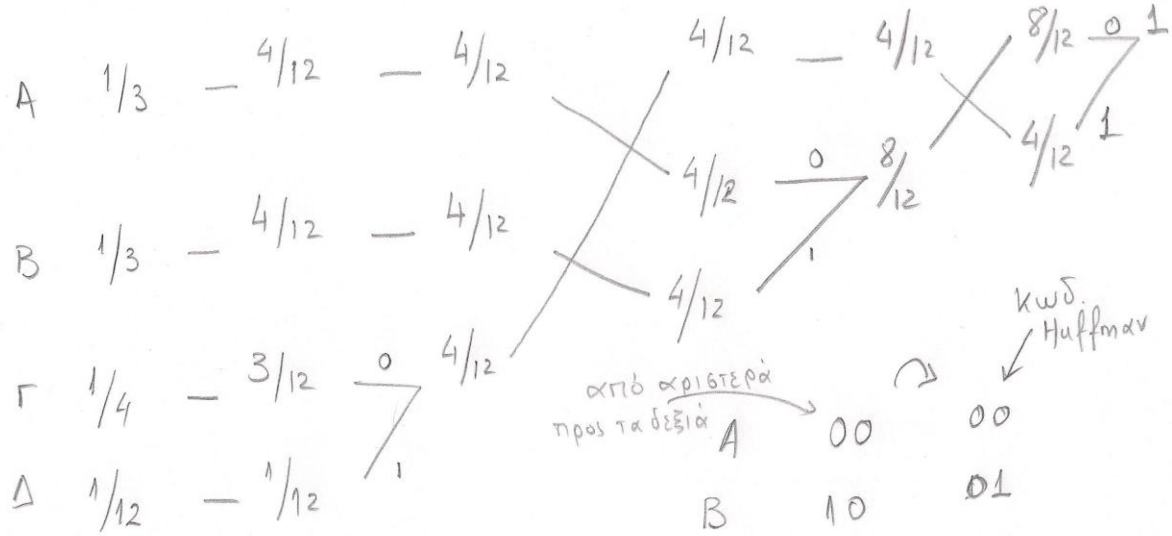
A:	1	1
B:	00	00
Γ:	010	010
Δ:	110	011

Κώδικας Huffman

Μέσο μήκος: $\sum_{i=1}^{4} p_i l_i = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{12}\cdot 3 =$

$= \underline{\underline{2}}.$

Με άλλο τρόπο αναδιάταξης έχουμε:



	από αριστερά προς τα δεξιά	κωδ. Huffman
A	00	00
B	10	01
Γ	01	10
Δ	11	11

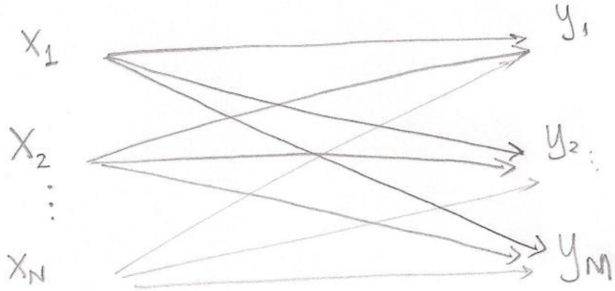
Μέσο μήκος: $\sum_{i=1}^{4} p_i l_i = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} 2 + \frac{1}{12} \cdot 2 =$

$= \underline{\underline{2}}$

Συμπέρασμα: Η κωδικοποίηση Huffman μπορεί να δώσει διαφορετικές κωδικολέξεις ανά σύμβολο (ανάλογα με την υλοποίηση) ακόμα και διαφορετικού μήκους. Πάντα όμως το τελικό μέσο μήκος των κωδικολέξεων θα είναι το ίδιο, ίσο με το ελάχιστο δυνατό.

Κανάλια Επικοινωνίας

Ν είσοδοι — Μ έξοδοι



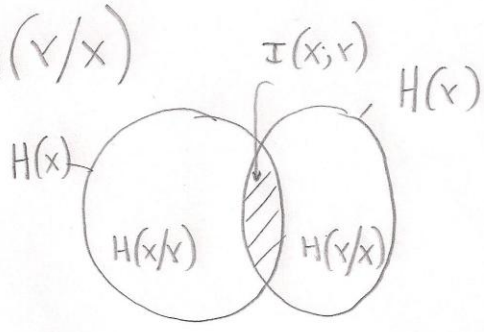
Πίνακας Μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{array} \\ \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_2) & \cdots & p(y_M/x_1) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ p(y_1/x_N) & & \cdots & p(y_M/x_N) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i) = 1$ (Το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα)

Αμοιβαία Πληροφορία:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



Χωρητικότητα:

$$C = \max\left[I(X;Y)\right]$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j)\cdot \log\left[p(y_j)\right]$$

στήλη j του πίνακα P(Y/X)

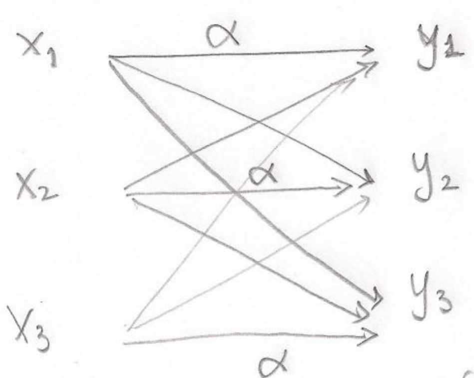
$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(y_j/x_i)\cdot p(x_i)$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left\{p(y_j/x_i)\cdot \log\left[p(y_j/x_i)\right]\cdot p(x_i)\right\}$$

Ειδικές Περιπτώσεις

Συμμετρικό Κανάλι $\rightarrow N = M$

$\rightarrow p(y_i/x_i) = \alpha \quad \forall i$



$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

συμμετρικό κανάλι 3 εισόδων - εξόδων

Μερικώς Συμμετρικό Κανάλι

Οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών.

π.χ. $P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \end{bmatrix}$

Ιδιότητα Συμμετρικών/ Μερικώς Συμμετρικών Καναλιών:

$$H(Y/X) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right] \quad \forall i$$

Εξήγηση: $\xrightarrow{(\text{μερικώς})}$ συμμετρικό κανάλι άρα N=M

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left\{p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right]p(x_i)\right\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{M}\left\{p(x_i)\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right]\right\}}\right\}$$

Το ίδιο άθροισμα δίνουν όλες οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αφού αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών

$$= -\underbrace{\sum_{i=1}^{M}\left[p(x_i)\right]}_{=1}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right]\right\}$$

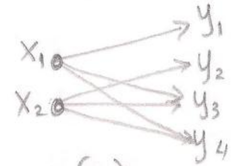
$$= -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right] \quad \forall i$$

Παράδειγμα διαφάνειας 130

παρατήρηση:

μερικώς συμμετρικό κανάλι.

$$P(Y/X) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$P(x_1) = a$

$P(x_2) = 1-a$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log p(y_j)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(y_j/x_i) \cdot p(x_i)$$

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) =$$

$$= p(y_1/x_1) \cdot p(x_1) + p(y_1/x_2) \cdot p(x_2) =$$

$$= 0,8 \cdot a + 0\,(1-a) = 0,8a$$

όμοια

$p(y_2) = 0,8(1-a)$

$p(y_3) = 0,1$

$p(y_4) = 0,1$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log p(y_j) = 0,66 - 0,8a \log(0,8a) -$$

$$-0,8(1-a) \log\left[0,8(1-a)\right]$$

Υπολογισμός $H(Y/X)$

στοιχεία πίνακα $P(Y/X)$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i) \log[P(y_j/x_i)] \cdot P(x_i) =$$

δεδομένο

$$= -\sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i) \log P(y_j/x_i)$$

$i=1$ ή 2 επειδή το κανάλι είναι μερικώς συμμετρικό

$$= -[0,8 \log(0,8) + 0,1 \log 0,1 + 0,1 \log 0,1] = 0,9219$$

Χωρητικότητα

$$C = \max[I(X;Y)] = \max[H(Y) - H(Y/X)]$$