ΓΕ4/1112/Θ1

Δίδεται η τυχαία μεταβλητή X, η οποία αναπαριστά το επίπεδο χοληστερίνης ενός ατόμου, με δύο δυνατά αποτελέσματα, x_1= «χοληστερίνη εντός επιτρεπτών ορίων» και x_2= «υψηλή χοληστερίνη». Επίσης, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή W, η οποία αναπαριστά το αν το άτομο ασκείται σωματικά, με $w_{1=}$ «επιδίδεται σε σωματική άσκηση» και $w_{2=}$ «δεν ασκείται σωματικά», την Y για το είδος της εργασίας του με $y_{1=}$ «δεν κάνει δουλειά γραφείου» και $y_{2=}$ «κάνει δουλειά γραφείου» και, τέλος, τη Z για το είδος διατροφής που ακολουθεί, με $z_{1=}$ «μεσογειακή διατροφή» και $z_{2=}$ «διατροφή πλούσια σε ζωϊκά λίπη». Οι πιθανότητες $p(x_i, w_j, y_k)$ του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών (X, (W, Y)) και $p(x_i, y_k, z_l)$ του (X, (Y, Z)) περιέχονται στους κατωτέρω πίνακες.

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

Ζητείται να υπολογίσετε

1. Τις $H(X)$, $H(W)$, $H(Y)$ και $H(Z)$,
2. Τις συνδυασμένες ποσότητες πληροφορίας $H(X, Y)$, $H(X, Z)$, $H(X,W)$, $H(X, W, Z)$ και $H(X,Y, Z)$,
3. Τις υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας $H(X/W)$, $H(X/Y)$, $H(X/Z)$, $H(X/(W,Y))$, και $H(X/(Y,Z))$.

Επίσης, ζητείται

4. να επιλέξετε εκείνη την τυχαία μεταβλητή εκ των W, Y, Z, ή εκείνον τον συνδυασμό δύο τυχαίων μεταβλητών εκ των (W, Y) και (Y, Z) που επιτρέπει την καλύτερη πρόβλεψη της X, όταν γίνεται γνωστή η τιμή της τυχαίας αυτής μεταβλητής ή οι τιμές του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

$p(w1,y1)=1/4+1/16=5/16$

$p(w1,y2)=1/16+1/8=3/16$

$p(w2,y1)=1/8+1/16=3/16$

$p(w2,y2)=0+5/16=5/16$

$p(w1)=5/16+3/16=8/16$

$p(y1)=5/16+3/16=8/16$

$p(w2)=3/16+5/16=8/16$

$p(y2)=5/16+3/16=8/16$

$p(x2)=1/16+1/8+1/16+5/16=9/16$

$p(x1)=1/4+1/16+1/8=7/16$

$p(x1,w1)=1/4+1/16=5/16$

$p(x1,w2)=1/8+0=1/8$

$p(x2,w1)=1/16+1/8=3/16$

$p(x2,w2)=1/16+5/16=6/16$

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

$p(y1,z1)=1/4+1/16=5/16$

$p(y1,z2)=1/8+1/16=3/16$

$p(y2,z1)=1/16+3/16=4/16$

$p(y2,z2)=0+1/4=1/4$

$p(z1)=5/16+4/16=9/16$

$p(z2)=3/16+1/4=7/16$

ΓΕ4/1112/Θ1

Από τους πίνακες και τους υπολογισμούς έχουν προκύψει τα εξής.

$P(x_i, y_j, z_k)$ από το δεδομένο πίνακα

$P(x_i, w_j, y_k)$ από το δεδομένο πίνακα.

$P(w_i, y_j)$ από υπολογισμούς με βάση τους πίνακες

$P(x_i, y_j)$ -"- -"-

$P(y_j, z_k)$ -"- -"-

$P(x_i, w_j)$ -"- -"-

$P(x_i)$

$P(y_j)$

$P(w_k)$

$P(z_l)$

2

Υπολογισμός Ποσοτήτων Πληροφορίας

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) \log[P(x_i)]$$

$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) \log[P(y_j)]$$

$$H(W) = -\sum_k p(w_k) \log[P(w_k)]$$

$$H(Z) = -\sum_l p(z_l) \log[P(z_l)]$$

$$H(X,Z) = -\sum_i \sum_j p(x_i, z_j) \log[P(x_i, z_j)]$$

$$H(X,W) = -\sum_i \sum_j p(x_i, w_j) \log[P(x_i, w_j)]$$

$$H(X,Y) = -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log[P(x_i, y_j)]$$

στοιχεία πίνακα

$$H(X,W,Y) = -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i, w_j, y_k) \log[P(x_i, w_j, y_k)]$$

στοιχεία πίνακα

$$H(X,Y,Z) = -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i, y_j, z_k) \log[P(x_i, y_j, z_k)]$$

3.

Υπό συνθήκη ποσότητες Π Πληροφορίας

$$H(X/W) = \sum_j p(w_j)\, H(X/w_j) =$$

$$= -\sum_j p(w_j) \sum_i p(x_i/w_j) \log\left[P(x_i/w_j)\right] =$$

$$= -\sum_j \sum_i p(w_j)\, p(x_i/w_j) \log\left[P(x_i/w_j)\right] =$$

$$= -\sum_j \sum_j \underbrace{p(x_i, w_j)}_{\text{έχει υπολογιστεί}} \log P(x_i/w_j)$$

$$p(x_i/w_j) = \frac{P(x_i, w_j)}{P(w_j)}$$

Όμοια

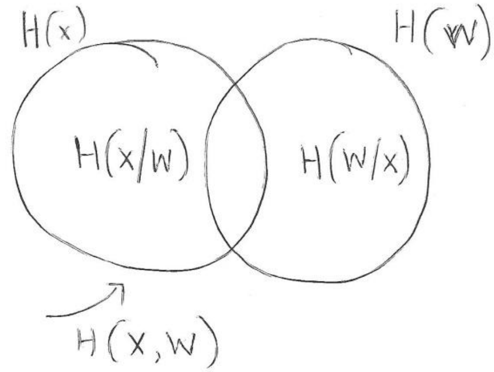
$$H(X/Y) = -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log P(x_i/y_j)$$

$$p(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

$$H(X/Z) = -\sum_i \sum_j p(x_i, z_j) \log P(x_i/z_j)$$

$$p(x_i/z_j) = \frac{P(x_i, z_j)}{P(z_j)}$$

Πιο σύντομοι υπολογισμοί



$$H(X/W) = H(X,W) - H(W)$$

$$H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

$$H(X/Z) = H(X,Z) - H(Z)$$

$$H(X/(W,Y)) = H(X,W,Y) - H(W,Y)^{*}$$

$$H(X/(Y,Z)) = H(X,Y,Z) - H(Y,Z)^{*}$$

$$^{*}H(W,Y) = -\sum_i \sum_j p(w_i, y_j) \log[p(w_j, y_j)]$$

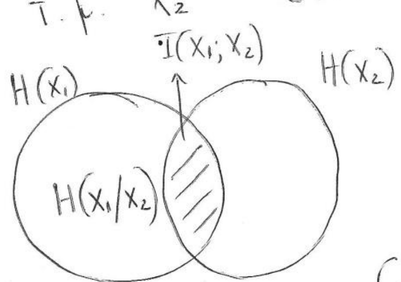
$$H(Y,Z) = -\sum_i \sum_j p(y_i, z_j) \log[p(y_j, z_j)]$$

5.

Με ποια τ.μ. ή με ποιό συνδυασμό τους (από τις W, Y, Z) γίνεται καλύτερη πρόβλεψη της X;

Γενικά το ερώτημα αφορά το βαθμό εξάρτησης της X από τις υπόλοιπες τ.μ.

Μια τ.μ. X_1 έχει μεγάλη εξάρτηση από μια τ.μ. X_2 όταν



$I(X_1;X_2) \to H(X_1)$

$H(X_1/X_2) \to 0$

(τα δύο σύνολα τείνουν να ταυτιστούν)

$I(X;W) = H(X) - H(X/W) = 0{,}1059$

$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 0{,}3105$ $\longrightarrow$ Η Y είναι καλύτερη από τις W, Z για την πρόβλεψη της X

$I(X;Z) = H(X) - H(X/Z) = 0{,}0537$

$I(X;(W,Y)) = H(X) - H(X/(W,Y)) = 0{,}4179$ $\to$ Ο συνδυασμός W, Y είναι ο καλύτερος όλων

$I(X;(Y,Z)) = H(X) - H(X/(Y,Z)) = 0{,}3879$

ΓΕ4/1011/Θ4β

ΘΕΜΑ 4

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τους αλγόριθμους κωδικοποίησης και με τις σχέσεις μεταξύ μήκους κωδικών λέξεων και μέσου μήκους κωδικών λέξεων. Σχετικές ασκήσεις:μερικώς οι ΓΕ4/2009-10/ Θ2.Β και /ΓΕ4/2008-9/ Θ2*

(α) Να βρείτε τον κώδικα Shannon για την κατανομή πιθανοτήτων τεσσάρων συμβόλων $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{12}\right\}$ καθώς και το μέσο μήκος του.

(β) Να βρείτε **όλα** τα δυνατά μήκη κωδικών λέξεων που μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman για την ίδια κατανομή πιθανοτήτων του ερωτήματος (α). Τί παρατηρείτε σχετικά με τα μήκη των κωδικών λέξεων που αντιστοιχούν σε κάθε σύμβολο σε σχέση με τον κώδικα Shannon; Ποιός κώδικας είναι βέλτιστος;

ΓΕ4 / Θ4 / 1011 6

Κώδικας Shannon.

p_i	Κώδικας
1/3	00
1/3	01
1/4	10
1/12	1110

Μέσο μήκος $E(l_i) = \sum_{i=1}^{4} p_i l_i = 2{,}1667$

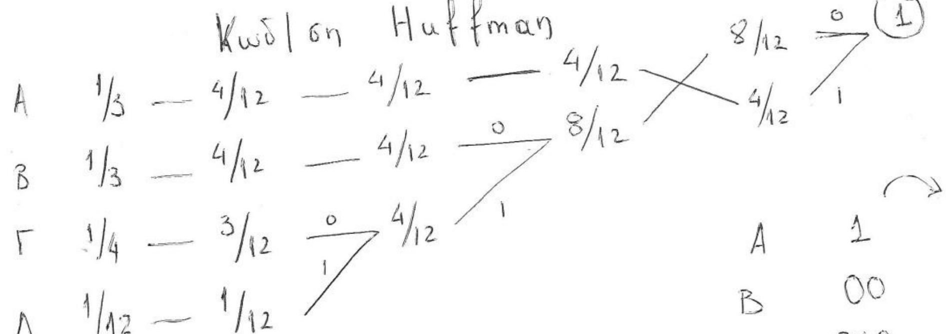
Ανισότητα Kraft. Αν $\sum_i 2^{-l_i} \leq 1 \Rightarrow$ άμεσος κώδικας

(η ισότητα ισχύει για βέλτιστο κώδικα)

Για το παράδειγμα του κωδ. Shannon.

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-l_i} = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-4} = 0{,}8125 < 1$$

Κωδ/ση Huffman



A	1	1
B	00	00
Γ	010	010
Δ	110	011

Μέσο μήκος: $E(l) = 1 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{4}{12} + 3 \cdot \frac{3}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{24}{12} = \underline{2}.$

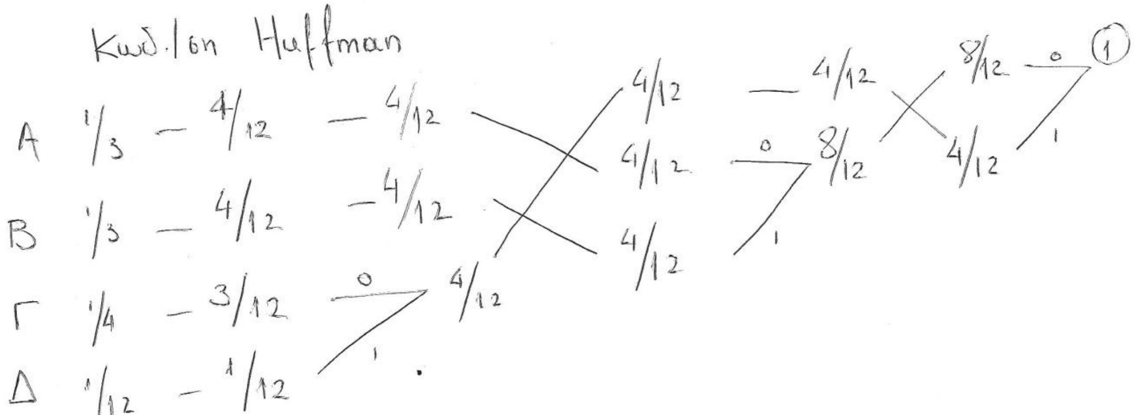
7

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-l_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 1$$

βέλτιστος

Εναλλακτική

Κωδ/ση Huffman



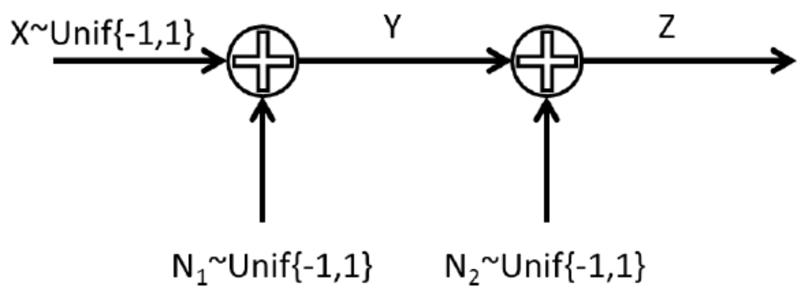
A	00	00
B	10	01
Γ	01	10
Δ	11	11

Μέσο μήκος $E(l) = 2 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot \frac{3}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} = 2$

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-l_i} = 4 \times 2^{-2} = 1$$

Παρά τα διαφορετικά επιμέρους μήκη, και οι δύο κώδικες Huffman έχουν το ίδιο ελάχιστο μήκος και ικανοποιούν την ανισότητα Kraft με το σύμβολο της ισότητας.

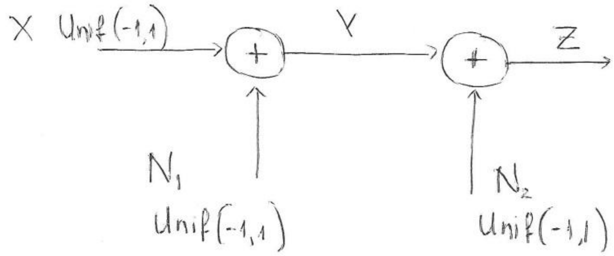
ΓΕ4/1112/Θ7



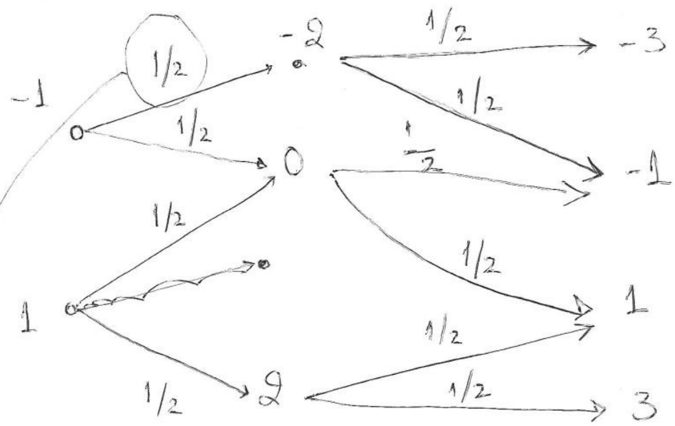
Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε το συνδυασμό 2 καναλιών. Το πρώτο κανάλι C_1 έχει ως είσοδο την τυχαία μεταβλητή X={-1,1} με ίσες πιθανότητες εμφάνισης για κάθε τιμή, ενώ η τυχαία μεταβλητή Y στην έξοδό του είναι αποτέλεσμα του αθροίσματος $Y=X+N_1$ όπου N_1 τυχαία μεταβλητή με τιμές {-1,1} και πιθανότητες επίσης ίσες. Το δεύτερο κανάλι C_2 παίρνει ως είσοδο την έξοδο του πρώτου, δηλαδή την Y, ενώ η τυχαία μεταβλητή Z στην έξοδό του είναι αποτέλεσμα του αθροίσματος $Z=Y+N_2=X+N_1+N_2$ όπου N_2 τυχαία μεταβλητή με τιμές {-1,1} και πιθανότητες επίσης ίσες. Οι τ.μ X, N_1 και N_2 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ο συνδυασμός των δύο καναλιών C_1 και C_2 θεωρείται ότι δημιουργεί ένα σύνθετο κανάλι C_{1+2} το οποίο έχει σαν είσοδο την τυχαία μεταβλητή X και έξοδο την Z σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις.

1. Να βρείτε τους πίνακες μετάβασης P_{XY} για το κανάλι C_1 και P_{XZ} για το κανάλι C_{1+2} και να απεικονίσετε κάθε ένα από τα δύο αυτά κανάλια.
2. Να βρείτε την εντροπία της Y και να υπολογίσετε την H(Z).
3. Υπολογίστε τις I(X;Y) και I(X;Z). Ποια από τις δύο μεταφέρει μεγαλύτερη πληροφορία για την X;
4. Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού C_1 και στη συνέχεια του C_{1+2}

ΓΕ4 / 1112 / Θ7 8



$$\text{Unif} \Longrightarrow \begin{cases} P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2} \\ P(N_1=-1) = P(N_1=1) = 1/2 \\ P(N_2=-1) = P(N_2=1) = 1/2 \end{cases}$$



π.χ.

$$P(Y=-2 / X=-1) = P(N_1=-1 / X=-1) = \underbrace{P(N_1=-1)}_{\text{επειδή τα } X, N_1 \text{ ανεξάρτητα}} = 1/2$$

9

Πινακας Μεταβασης C_1 $X \to Y$

$$P_{XY} = P(Y/X) = \begin{array}{c|ccc} & -2 & 0 & 2 \leftarrow Y \\ \hline -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$\nearrow X$

Δυαδικό κανάλι με αποσβέσεις/διαγραφής

Πινακας Μεταβασης C_{1+2} $X \to Z$

1ος τροπος Υπολογιζουμε τις $P(Z_j/X_i) = \sum_i P(Z_j/Y_k) \cdot P(Y_k/X_i)$

π.χ. $P(Z=-1/X=-1) =$

$= P(Z=-1/Y=-2) \cdot P(Y=-2/X=-1) +$

$+ P(Z=-1/Y=0) \cdot P(Y=0/X=-1) = \dfrac{1}{2}$

2ος τροπος

Υπολογιζουμε τον πινακα μεταβασης για το C_2 $Y \to Z$

$$P_{YZ} = P(Z/Y) = \begin{array}{c|cccc} & -3 & -1 & 1 & 3 \leftarrow Z \\ \hline -2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$\nearrow$

Y

10

Ο τελικός πίνακας μετάβασης για το C_{12} ισούται με:

$$P_{XZ} = P_{XY} \cdot P_{YZ} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \overbrace{\begin{array}{cccc} -3 & -1 & 1 & 3 \end{array}}^{Z} \\ X \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Υπολογισμός $H(Y)$, $H(Z)$

$$H(Y) = -\sum_i p(y_i) \log\left[p(y_i)\right], \quad H(Z) = -\sum_i p(z_i) \log\left[p(z_i)\right]$$

$$p(y_i) = \sum_j p(y_i, x_j) = \sum_j \overbrace{p(y_i / x_j)}^{\text{πιν μετάβασης } P_{XY}} \cdot p(x_j)$$

$p(x_j) = \frac{1}{2}$ εφόσον $X \sim Unif(-1,1)$

Αντίστοιχα

$$p(z_i) = \sum_j p(z_i, y_j) = \sum_j \underbrace{p(z_i / y_j)}_{\text{πιν μετάβασης } P_{YZ}} \cdot p(y_j)$$

ή

$$p(z_i) = \sum_j p(z_i, x_j) = \sum_j \underbrace{p(z_i / x_j)}_{\text{πιν. μετάβασης } P_{XZ}} \cdot p(x_j)$$

11.

Υπολογισμός Αμοιβαίας πληροφορίας

$$I(X;Y) \qquad I(X;Z)$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(Y/X) = H\left(X+N_1 / \cancel{X}\right) = H(N_1) = 1 \text{ bit}$$

Οι X, N_1 είναι ανεξάρτητες

(η γνώση της X δεν αλλάζει την αβεβαιότητα που έχουμε για την $X+N_1$, που ταυτίζεται με την αβεβαιότητα της N_1)

$$I(X;Z) = H(Z) - H(Z/X)$$

$$H(Z/X) = -\sum_i \sum_j \underbrace{p(z_i/x_j)}_{\text{πίνακας μετάβασης } P_{XZ}} \cdot \log \underbrace{p(z_i/x_j)}_{\text{πίνακας μετάβασης } P_{XZ}} \cdot \overbrace{p(x_j)}^{\text{Unif}(-1,1)\ (=1/2)}$$

Παρατήρηση: $I(X;Z) < I(X;Y)$

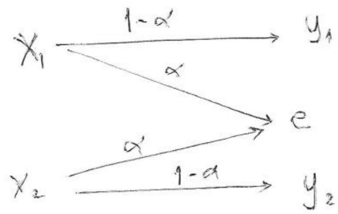
Το κανάλι C_{1+2} έχει περισσότερο θόρυβο από το C_1

12.

Χωρητικότητα Καναλιών.

για το C_1:

Κανάλι απόσβεσης



για την άσκηση $a=\frac{1}{2}$ $\quad C=1-a$

άρα $C=1-a=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0,5$ bit

Άλλη εξήγηση:

Το κανάλι είναι μερικώς συμμετρικό άρα

$$H(Y/X)=\sum_j P(y_j/X_i)\cdot\log P(y_j/X_i)$$

για μια οποιαδήποτε γραμμή του P_{XY}

$$=-\left[\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right]=1 \text{ bit}$$

Άρα $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=1,5-1=0,5$ bit

Σημ.: Παρακάτω παρατίθεται η ενδεικτική λύση για το ερώτημα με κάποια πρόσθετα σχόλια

1. Επειδή το κανάλι C_1 είναι κανάλι απόσβεσης με παράμετρο α ξέρουμε ότι η χωρητικότητα του καναλιού αυτού είναι 1-α. Στην περίπτωσή μας έχουμε ότι α=1/2 άρα η χωρητικότητα του καναλιού αυτού είναι ίση με την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) που βρήκαμε παραπάνω.

Σχόλιο: Εναλλακτικά θα μπορούσε να ακολουθηθεί η μεθοδολογία προσδιορισμού της χωρητικότητας του καναλιού υποθέτοντας παραμετρικές πιθανότητες των συμβόλων εισόδου.
Δείτε παρακάτω τη σχετική ανάλυση βάσει της διαφάνειας 124 της 2ης ΟΣΣ:

- **max I(X;Y)=max(H(Y)-H(Y/X))**

=max(H(Y)-H(α))
=maxH(Y)-H(α)

- **Θα μπορούσε να είναι max H(Y)=log3 αλλά αυτή η τιμή δεν είναι εφικτή για καμμία τιμή της $p_X(x_i)$, i=1,2**
- **Αν θέσουμε $p_X(x_1)$=1-π, και $p_X(x_2)$=π, τότε από τα $p_Y(y_i)$, i=1,e,2 δίνονται από τους τύπους (βλ. διαφάνεια 129) τότε**
  - **maxH(Y)=max H((1-α)π,α,(1-α)(1-π))=max[(1-α)*H(π)+H(α)]=(1-α)*maxH(π)+H(α)**
- **Άρα max I(X;Y)=μαxH(Y)-H(α)=(1-α)*maxH(π)+H(α)-H(α)=1-α**

Για το κανάλι C_{1+2} παρατηρούμε τα εξής

$$I(X;Z)=H(Z)-H(Z/X)= H(Z)-H(X+N_1+N_2/X)=H(Z)-H(N_1+N_2)=H(Z)-H(Y)$$

Άρα η I(X;Z) μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η H(Z). Αυτό είναι δυνατόν να συμβαίνει όταν όλες οι έξοδοι είναι ισοπίθανες δηλαδή όταν P(Z=z)=1/4 για κάθε z=-3,-1,1,3.

Πρέπει όμως να εξετάσουμε ότι υπάρχει κατανομή της X τέτοια ώστε να καταλήγει σε ισοπίθανες εξόδους. Έστω λοιπόν π_{-1} και π_1 οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της X οι οποίες μεγιστοποιούν την H(Z) δηλαδή δίνουν P(Z=-3)=P(Z=-1)=P(Z=1)=P(Z=3)=1/4

Γνωρίζουμε όμως ότι οι $p_Z\left(z_j\right)=\sum_{i=\{-1,1\}} p_X\left(x_i\right)p_{ij},\ j=-3,-1,1,3$ και με δεδομένο ότι $p_Z\left(z_j\right)=$ 1/4 έχουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
p_Z\left(z_{-3}\right)&=\frac{1}{4}=p_X\left(x_{-1}\right)p_{-1,-3}=\pi_{-1}p_{-1,-3}=\pi_{-1}\frac{1}{4}\\
p_Z\left(z_{-1}\right)&=\frac{1}{4}=p_X\left(x_{-1}\right)p_{-1,-1}+p_X\left(x_1\right)p_{1,-1}=\pi_{-1}\frac{1}{2}+\pi_1\frac{1}{4}\\
p_Z\left(z_1\right)&=\frac{1}{4}=p_X\left(x_{-1}\right)p_{-1,1}+p_X\left(x_1\right)p_{1,1}=\pi_{-1}\frac{1}{4}+\pi_1\frac{1}{2}\\
p_Z\left(z_3\right)&=\frac{1}{4}=p_X\left(x_1\right)p_{1,3}=\pi_1 p_{1,3}=\pi_1\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει κατανομή η οποία να δίνει ισοπίθανες εξόδους και άρα θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την I(X;Z) ως προς την P(X). Επειδή έχουμε δύο πιθανότητες εισόδου μπορούμε να θέσουμε π_{-1}=x και π_1=(1-x). Οπότε αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην H(Z) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}(Z)=-\sum_{z\in Z}p(z)\log\left(p(z)\right)\\
&=-x\frac{1}{4}\log\left(x\frac{1}{4}\right)-\left(x\frac{1}{2}+(1-x)\frac{1}{4}\right)\log\left(x\frac{1}{2}+(1-x)\frac{1}{4}\right)-\left(x\frac{1}{4}+(1-x)\frac{1}{2}\right)\log\left(x\frac{1}{4}+(1-x)\frac{1}{2}\right)-(1-x)\frac{1}{4}\log\left((1-x)\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

η οποία μετά από πράξεις απλουστεύεται ως ακολούθως:

$$
\mathrm{H}(Z)=-\frac{x}{4}\log x-\frac{x+1}{4}\log(x+1)-\frac{2-x}{4}\log(2-x)-\frac{(1-x)}{4}\log(1-x)+2
$$

Άρα θα πρέπει να βρούμε για ποια τιμή του x μεγιστοποιείται η παραπάνω συνάρτηση δηλαδή θα την παραγοντοποιήσουμε και μετά θα λύσουμε ως προς x την εξίσωση Η΄(Ζ)=0

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}'(Z)=-\frac{1}{4}\left[\log x+\log(x+1)\right]+\frac{1}{4}\left[\log(2-x)+\log(1-x)\right]=0\Rightarrow\\
&\log\left[(2-x)(1-x)\right]=\log\left[x(x+1)\right]\Rightarrow(2-x)(1-x)=x(x+1)\Rightarrow\\
&x=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Άρα και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η αμοιβαία πληροφορία που βρήκαμε είναι ίση με την χωρητικότητα του καναλιού C_{1+2}=0.3113 bits

Σχόλιο: Εδώ εφαρμόστηκε η μεθοδολογία προσδιορισμού της χωρητικότητας υποθέτοντας παραμετρικές πιθανότητες των συμβόλων εισόδου