

ΘΕΜΑ 4

Μια ψηφιακή πηγή **2** συμβόλων $X = \{0,1\}$ εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο 0 από την πηγή είναι $p_x(0) = \frac{1}{4}$. Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα αυτά πάνω από κανάλι όπου τα σύμβολα εξόδου Y προκύπτουν από τη σχέση $Y = X \oplus Z$ (γινόμενο) όπου $Z = \{1,2\}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή με κατανομή με $p_z(1) = \frac{1}{8}$. Ζητούνται τα παρακάτω:

- α)** Να υπολογίσετε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εξόδου της Y . (8 μονάδες)
- β)** Να βρείτε τον πίνακα μετάβασης του καναλιού και να σχεδιάσετε το κανάλι. (6 μονάδες)
- γ)** Να αποφανθείτε ως προς το είδος του καναλιού (π.χ χωρίς θόρυβο, ενθόρυβο δυαδικό, κλπ). Εξηγήστε την απάντησή σας. (3 μονάδες)
- δ)** Να βρείτε την χωρητικότητα C του καναλιού. (3 μονάδες)

Απάντηση

α)

Οι τιμές των συμβόλων της εξόδου του καναλιού καθώς και οι συνδυασμένες πιθανότητες (X,Z) προκύπτουν από το γινόμενο όλων των δυνατών ζευγών των τιμών των τ.μ. X και Z .

(X,Z)	Y=X.Z	P(x,z)
(0,1)	0	$P(X=0, Z=1) = p_x(0) \cdot p_z(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$
(0,2)	0	$P(X=0, Z=2) = p_x(0) \cdot p_z(2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$
(1,1)	1	$P(X=1, Z=1) = p_x(1) \cdot p_z(1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$
(1,2)	2	$P(X=1, Z=2) = p_x(1) \cdot p_z(2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{32}$

Από τις συνδυασμένες πιθανότητες προκύπτουν και οι πιθανότητες εξόδου της Y ως ακολούθως

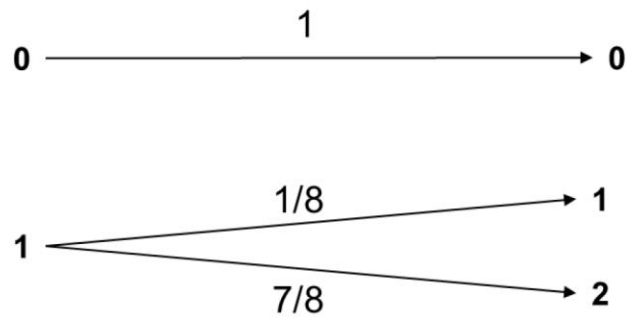
$$p_Y(0) = P(X=0, Z=1) + P(X=0, Z=2) = \frac{1}{32} + \frac{7}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p_Y(1) = P(X=1, Z=1) = \frac{3}{32}$$

$$p_Y(2) = P(X=1, Z=2) = \frac{21}{32}$$

β)

Με βάση τις πιθανότητες εμφάνισης της Y και την κατανομή της Z προκύπτει ότι το κανάλι μας είναι το παρακάτω



Και άρα ο πίνακας μετάβασης είναι

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y=0/x=0) & p(y=1/x=0) & p(y=2/x=0) \\ p(y=0/x=1) & p(y=1/x=1) & p(y=2/x=1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

Μια πιο αναλυτική εξήγηση για τον πίνακα μετάβασης προκύπτει από την παρατήρηση ότι

$p(y=1/x=0)=0$ διότι δεν υπάρχει γινόμενο με το 0 που να δίνει αποτέλεσμα διάφορο του μηδενός. Έτσι, $p(y=0/x=0)=1$ αφού με δεδομένο ότι το $X=0$ το αποτέλεσμα πάντα θα είναι 0 με πιθανότητα 1. Ομοίως η συνδυασμένη πιθανότητα $p(y=1/x=1)$ προκύπτει όταν $Z=1$ το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $1/8$.

γ)

Από τον πίνακα μετάβασης και από το σχήμα προκύπτει ότι το κανάλι μας είναι τελικά χωρίς θόρυβο αφού πάντα μπορούμε να συμπεράνουμε το σύμβολο εισόδου από το σύμβολο εξόδου.

δ)

Με δεδομένο λοιπόν ότι το κανάλι είναι χωρίς θόρυβο η χωρητικότητα του καναλιού με δύο εισόδους είναι ίση με τη μέγιστη τιμή της $H(X)$ άρα 1 bit.

ΘΕΜΑ 5

Δίδεται ένας γραμμικός και **συστηματικός κώδικας** C από τον οποίο γνωρίζουμε τα παρακάτω σύνδρομα με τους συνοδηγούς τους.

ΣΥΝΔΡΟΜΑ		
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0

ΣΥΝΟΔΗΓΟΣ					
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0

α) Βρείτε την επίδοση του κώδικα C, το πλήθος των κωδικών λέξεων που αποτελεί τον C, και συμπληρώστε μόνο τον πίνακα συνδρόμων (4 μονάδες)

β) Εξηγήστε γιατί τα παραπάνω σύνδρομα θα αντιστοιχούν σε γραμμές του πίνακα H και σε ποιες από αυτές (3 μονάδες).

γ) Βρείτε τον πίνακα ισοτιμίας H. (5 μονάδες)

δ) Αποκωδικοποιήστε τη λέξη 111000. (3 μονάδες)

Απάντηση

α)

Επειδή το μήκος του συνδρόμου είναι $n-k=3$ και το μήκος του πρότυπου σφάλματος είναι $n=6$ αυτό σημαίνει ότι το $k=3$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η επίδοση του κώδικα είναι $3/6=0,5$ ενώ το πλήθος των κωδικών λέξεων είναι $2^3=8$.

Το πλήθος των συνδρόμων είναι επίσης $2^{n-k}=2^3=8$

ΣΥΝΔΡΟΜΑ		
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	1	1
0	0	0

Προσοχή:

Ο κώδικας έχει $n=6$ και $k=3$

άρα τα δυνατά σύνδρομα είναι

$$2^{n-k}=2^3=8$$

Η σειρά με την οποία παρατίθενται

τα σύνδρομα δεν έχει σημασία

β)

Ξέρουμε ότι οι γραμμές του H αντιστοιχούν και σε σύνδρομα. Οπότε θα πρέπει να βρούμε σε ποιες γραμμές αντιστοιχούν τα σύνδρομα του ερωτήματος. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τους συνοδηγούς από τους οποίους μπορούμε να καταλάβουμε ότι τα σύνδρομα αυτά αποτελούν μέρος των τεσσάρων πρώτων γραμμών του πίνακα H αφού οι συνοδηγοί είναι πρότυπα σφάλματος βάρους 1 με τη θέση του μη μηδενικού bit να αντιστοιχεί σε γραμμή του H.

γ)

Επειδή το μήκος του συνδρόμου είναι $n-k=3$ και το μήκος του πρότυπου σφάλματος είναι $n=6$ αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας ισοτιμίας H θα έχει 6 γραμμές και 3 στήλες. Επιπλέον επειδή ο κώδικας είναι συστηματικός και λαμβάνοντας υπόψη την απάντηση του ερωτήματος (β) ο πίνακας H θα είναι της μορφής

$$H = \begin{bmatrix} M_{k \times n-k} \\ I_{n-k \times n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εδώ θα πρέπει να επιλεγούν τα σύνδρομα που –κατά την εκφώνηση– αντιστοιχούν σε πρότυπα σφάλματος 1 bit (δηλ. τα 111, 110, 101, 100) και στη συνέχεια να συμπληρωθούν οι επόμενες 2 γραμμές με τα σύνδρομα που ‘φτιάχνουν’ το μοναδιαίο I_3 , δηλ. τα 010 και 001

δ)

Πολλαπλασιάζοντας τη παραληφθείσα λέξη 111000 με τον H αντιστοιχεί στο άθροισμα των πρώτων τριών γραμμών το οποίο μας δίνει ως σύνδρομο 100 που το οποίο έχει ως συνοδηγό το πρότυπο σφάλματος 000100. Άρα ο κώδικας μας θα διορθώσει στη κωδική λέξη 111100.