ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ-4

3η ΟΣΣ

08.02.2015

Ν.Δημητρίου

Σημείωση: Η παρουσίαση αυτή είναι συμπληρωματική της ύλης των βιβλίων (τόμος Β / μέρη Α,Β και τόμος Α) καθώς και των 2 παρουσιάσεων στο study.eap.gr (oss3_PLH22_DigiComms_2015, oss3_PLH22_InfoTheory_2015) και περιέχει παραπομπές σε συγκεκριμένα σημεία της ύλης αυτής

Περιεχόμενα

- Ψηφιακές Επικοινωνίες
  - Διαμόρφωση FM (τόμος Β/ μέρος Β σελ.81-88)
  - Δειγματοληψία (τόμος Β/ μέρος Α σελ. 111-117)
  - Διαμόρφωση PCM (τόμος Β/ μέρος Α σελ. 118-131)
  - Παραδείγματα
- Θεωρία Πληροφορίας
  - Πιθανότητες, ΤΜ, Συναρτήσεις Μάζας/Πυκνότητας Πιθανότητας (τόμος Α σελ. 22-26)
  - Ποσότητες Πληροφορίας, Εντροπία (τόμος Α σελ. 27-43)
  - Πηγές Συμβόλων χωρίς μνήμη (τόμος Α σελ. 47-57)
  - Κωδικοποίηση Συμβόλων (Fano, Shannon, Huffmann) (τόμος Α σελ.58-68)
  - Πηγές με μνήμη (τόμος Α σελ.69-76)
  - Παραδείγματα

Ψηφιακές Επικοινωνίες

Διαμορφώσεις Γωνίας

1.

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda\right)$$

σήμα πληροφορίας

Στιγμιαία γωνία

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda$$

Στιγμιαία κυκλική συχνότητα

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 2\pi f_c + k_f\, x(t)$$

Στιγμιαία συχνότητα

$$f(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = f_c + \underbrace{\frac{k_f}{2\pi} x(t)}_{\text{απόκλιση συχνότητας } \Delta f(t)}$$

Διαφάνειες 3-7
Αρχείου oss3_PLH22_DigiComms_2015

Μέγιστη απόκλιση συχνότητας

$$\Delta f_{max} = \max\left|\frac{k_f}{2\pi}x(t)\right| = \frac{k_f}{2\pi}\max\{|x(t)|\}$$

$\max\{|x(t)|\} \rightarrow$ πεδίο χρόνου

Λόγος απόκλισης: $D = \frac{\Delta f_{max}}{f_x} = \frac{k_f}{2\pi f_x}\max\{|x(t)|\}$

Εύρος ζώνης FM σήματος

Κανόνας Carson $\quad W = 2(D+1)f_x$

f_x: εύρος ζώνης σήματος πληροφορίας

εξετάζουμε το σήμα πληροφορίας στο πεδίο του χρόνου για το $\max|x(t)|$

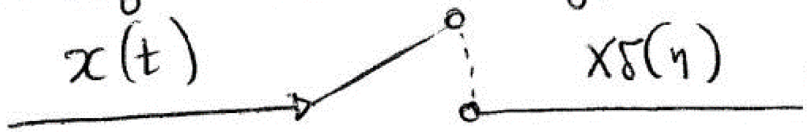
και στο πεδίο συχνοτήτων για το f_x

Δειγματοληψία

2.

Δειγματοληψία.

αναλογικό σήμα — δειγματισμένο σήμα (διακριτού χρόνου)



, n ακέραιος

Λήψη δειγμάτων ανά χρόνο T_δ (περίοδος δειγματοληψίας)

Συχνότητα δειγματοληψίας: $f_\delta = \frac{1}{T_\delta}$

Έκφραση δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου

$$x_\delta(n) = x(t)\Big|_{t=nT_\delta}$$

Διαφάνειες 15-29
Αρχείου oss3_PLH22_DigiComms_2015

Παράδειγμα

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10 t)$$

με $T_\delta = \frac{1}{20} \sec$

Το δειγματισμένο σήμα γράφεται:

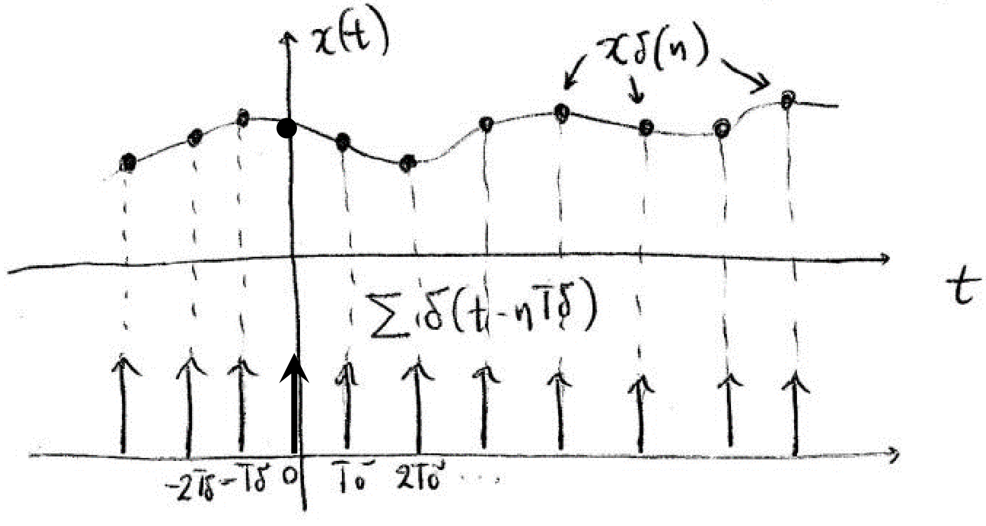
$$x_\delta(n) = x(t)\Big|_{t \to nT_\delta} = \cos\left(2\pi \cdot 10\, n \cdot \frac{1}{20}\right)$$, n ακέραιος

Φάσμα Δειγματισμένου σήματος

Δειγματοληψία: Γινόμενο με άπειρους παλμούς δ.

Αν έχουμε περίοδο δειγματοληψίας Τδ

τοτε $$x_\delta(t) = x(t) \cdot \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \delta(t - \eta T\delta)$$



ΜΣ Fourier:

συνέλιξη

$$X_\delta(f) = X(f) * F\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_\delta)\right)$$

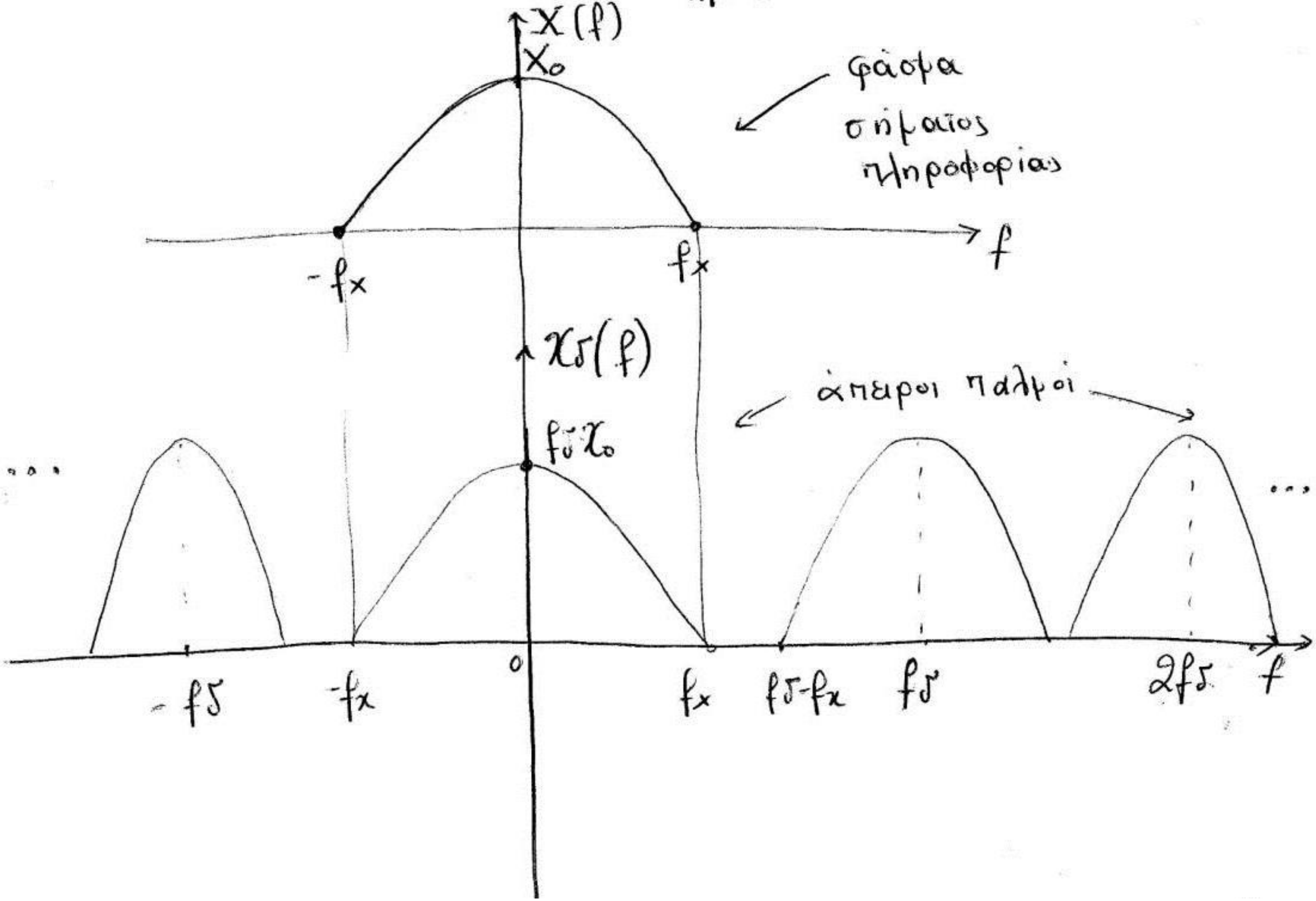
από πίνακες ΜΣ Fourier.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_\delta) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T_\delta} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_\delta}\right)$$

Άρα

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_\delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_\delta}\right) = \frac{1}{T_\delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{m}{T_\delta}\right)$$

Δηλ. $$x_\delta(t) \xleftrightarrow{F} f_\delta \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_\delta)$$



Για την ανακατασκευή του αρχικού φάσματος $X(f)$

- Θα πρέπει να μην υπάρχει αλληλοεπικάλυψη

$$f_\delta - f_x \geq f_x \Rightarrow f_{\delta\, min} = 2 f_x$$

ελάχιστη συχνότητα

δειγματοληψίας (κριτήριο Nyquist)

- Με χρήση βαθυπερατού φίλτρου με

$\left.\begin{array}{l}\text{συχνότητα αποκοπής } f_c \geq f_x \\ \text{και πλάτος } \frac{1}{f_\delta}\end{array}\right\}$ λαμβάνεται το αρχικό $X(f)$

Παράδειγμα

ΘΕΜΑ 3

ΓΕ2 / 1112

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με θέματα διαμόρφωσης FM, υπολογισμούς του φάσματος της συνέλιξης σημάτων, προσδιορισμού της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας, καθώς και διαμορφώσεων AM.*

Σχετικές ασκήσεις:*ΓΕ2/1011/Θ1,6 , ΕΞ2005Β/Θ4, ΓΕ2/1011/Θ4*

(α) Δίνεται το σήμα $x(t)=2a\cdot\mathrm{sinc}(2at)$ (όπου $a>0$), με φάσμα πλάτους $X(f)$.

Ζητούνται τα εξής:

Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας των σημάτων:

(i) $x(t)$.

(ii) $x_1(t)=\delta(t)+x(t)$.

(iii) $x_2(t)=x(t)\cdot x(2t)$.

(iv) Το σήμα $y(t)$ με φάσμα $Y(f)=X(f)*X(f)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) ένα συνημιτονικό φέρον με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f=30\pi$. Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος (*Υπόδειξη: Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας για διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από τυχαίο σήμα πληροφορίας z(t) δίνεται από τη σχέση:* $\Delta f_{\max}=\dfrac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|z(t)\right|\right)$*).*

(α-i) Έχουμε ότι:

$$x(t) = 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Δηλ. το φάσμα είναι τετραγωνικός παλμός με μέγιστη συχνότητα *α Hz* άρα $f_{s,min}=2\alpha$ *Hz*.

(α-ii) $x_1(t) = \delta(t) + x(t) \xleftrightarrow{F} 1 + rect\left(\frac{f}{2a}\right)$

Το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης, δεν ορίζεται μέγιστη συχνότητα συνεπώς δεν εφαρμόζεται το κριτήριο Nyquist.

(α-iii) $x_2(t) = x(t) \cdot x(2t) = 2a \sin c(2at) \cdot 2a \sin c(4at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right) * \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{4a}\right)$

Το φάσμα της συνέλιξης των 2 σημάτων έχει ως μέγιστη συχνότητα το άθροισμα των επιμέρους μέγιστων συχνοτήτων, δηλ. α+2α=3α Hz άρα $f_{s,min}=6\alpha$ *Hz*.

(α-iv) Το σήμα με φάσμα $Y(f)=X(f)*X(f)$ αντιστοιχεί στο πεδίο του χρόνου με το

$$y(t)=x(t)x(t)=2a\cdot\mathrm{sinc}(2at)\cdot 2a\cdot\mathrm{sinc}(2at)=$$

$$=4a^2\cdot\mathrm{sinc}^2(2at)\xleftrightarrow{F}4a^2\frac{1}{2a}tri\left(\frac{f}{2a}\right)=2a\cdot tri\left(\frac{f}{2a}\right)=Y(f)$$

Το διαμορφωμένο σήμα FM γράφεται:

$$y_{FM}(t)=A_c\cdot\cos\left(2\pi f_c t+k_f\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)=\cos\left(2\pi f_c t+k_f\int_{-\infty}^{t}4a^2\cdot\mathrm{sinc}^2(2a\lambda)d\lambda\right)$$

Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W=2(D+1)f_y$$

όπου $D=\dfrac{\Delta f_{\max}}{f_y}$

Το σήμα πληροφορίας $y(t)$ έχει εύρος ζώνης ίσο με $f_y=f_{\max}=2aHz$

$$y(t) = 4a^2 \cdot \mathrm{sinc}^2(2at)$$

ισχύει ότι $\max|y(t)| = \max|4a^2 \cdot \mathrm{sinc}^2(2at)| = 4a^2$ (η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $4a^2 \cdot \mathrm{sinc}^2(at)$ λαμβάνεται για $t = 0$).

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi} \max(|y(t)|) = \frac{30\pi}{2\pi}(4a^2) = 60a^2 Hz$$

οπότε, $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_y} = \dfrac{60a^2}{2a} = 30a$

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:

$W = 2(30a+1) \cdot 2a\ Hz = 120a^2 + 4a\ Hz$

Διαμόρφωση PCM

Διαμόρφωση PCM 5.

Δειγματοληψία - Κβάντιση - Κωδικοποίηση

- Δειγματοληψία → "Διακριτοποίηση" πεδίου ορισμού"
- Κβάντιση → "Διακριτοποίηση" πεδίου τιμών
- Κωδικοποίηση → Αποτύπωση σταθμών κβάντισης με δυαδικά bits

Διαφάνειες 30-33
Αρχείου oss3_PLH22_DigiComms_2015

Υποθέτοντας L στάθμες κβάντισης

Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης: $SNR_q = 10\log(L^2)$

Δυαδικά bits ανά στάθμη κβάντισης: $\eta = \lceil \log_2(L) \rceil$

Αν f_s η συχνότητα δειγματοληψίας $\left(\frac{\text{samples}}{\text{sec}}\right)$

ο ρυθμός μετάδοσης του δειγματισμένου σήματος είναι

$$f_s\left(\frac{\text{samples}}{\text{sec}}\right) \times \log_2 L\left(\frac{\text{bits}}{\text{sample}}\right) = f_s \cdot \log_2 L\left(\frac{\text{bits}}{\text{sec}}\right)$$

Στα δυαδικά συστήματα τα κανάλια βασικής ζώνης

μεταφέρουν $2\ \frac{\text{bits/sec}}{\text{Hz}}$

Άρα απαιτούμενο εύρος ζώνης PCM:

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L \ (\text{Hz})$$

Παράδειγμα

ΘΕΜΑ 7

ΓΕ2 / 1112

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις τεχνικές πολυπλεξίας σημάτων, με τις αναλογικές διαμορφώσεις πλάτους και την παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM).*

Σχετικές Ασκήσεις: *ΓΕ5/0809/Θ5, ΕΞ2009Α/Θ2, ΓΕ2/0910/Θ7, ΓΕ2/1011/Θ7*

Έξι ανεξάρτητα σήματα πληροφορίας με εύρος ζώνης W, W, 2W, 2W, 3W και 3W Hz, αντίστοιχα, απαιτείται να μεταδοθούν στον ίδιο δίαυλο από κοινού με πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (TDM). Το συνολικό σήμα m(t) που προκύπτει ως αποτέλεσμα μετατρέπεται εν συνεχεία σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 30dB.

(α) Να υπολογίσετε τον απαιτούμενο ελάχιστο ρυθμό δειγματοληψίας για καθένα από τα επιμέρους σήματα .

(β) Να προσδιορίσετε το ελάχιστο εύρος ζώνης του διαύλου μετάδοσης που απαιτείται να χρησιμοποιηθεί από κοινού για τη μετάδοση του ψηφιακού σήματος PCM για το συνολικό σήμα m(t).

(γ) Να προσδιορίσετε το ελάχιστο εύρος ζώνης που απαιτείται εάν τα αρχικά σήματα μετατραπούν πρώτα σε ψηφιακά σήματα PCM, και μεταδοθούν έπειτα με πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (TDM).

(δ) Σχολιάστε τη σχέση των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων (β) και (γ).

(α) Υποθέτοντας ότι κάθε ένα από τα σήματα πληροφορίας υφίσταται δειγματοληψία στον ρυθμό Nyquist που του αντιστοιχεί, μπορούμε να συνάγουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Σήμα πληροφορίας	Εύρος Ζώνης	Ρυθμός Δειγματοληψίας
$m_1(t)$	W	2W
$m_2(t)$	W	2W
$m_3(t)$	2W	4W
$m_4(t)$	2W	4W
$m_5(t)$	3W	6W
$m_6(t)$	3W	6W

(β) Το ελάχιστο εύρος ζώνης του συνολικού σήματος TDM είναι:

$$B = \frac{1}{2}(2W + 2W + 4W + 4W + 6W + 6W) = 12W.$$

Αυτό προϋποθέτει χρήση παλμών μορφής **sinc** για την αναπαράσταση των δειγμάτων των επιμέρους σημάτων.

Προκειμένου το συνολικό σήμα m(t) να μεταδοθεί με PCM και SNR≥30dB θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε: $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log L$.

Συνεπώς ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών ομοιόμορφης κβαντοποίησης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $20\log_{10} L \geq 30 \Rightarrow L \geq 10^{\frac{3}{2}} = 31.609$ άρα κατ' ελάχιστον απαιτούνται L=31.609 στάθμες και επειδή θα πρέπει να είναι δύναμη του 2 τελικά θα έχουμε 32 στάθμες κβάντισης.

Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για το PCM είναι $B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L$.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 12W Hz οπότε η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας θα ισούται με: $f_s = 24W$ Hz.

Συνεπώς, $W_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} 24\text{W}\, Hz \log_2 32 = 60W\ Hz$.

(γ) Το ελάχιστο εύρος ζώνης για κάθε ένα από τα επιμέρους PCM σήματα, εφόσον πρώτα υποστούν δειγματοληψία με τον αντίστοιχο για το καθένα ελάχιστο ρυθμό, και έπειτα μετατραπούν σε PCM με την ίδια σηματοθορυβική σχέση, SNR≥30dB, θα είναι:

$$W_{PCM,i} \geq \frac{1}{2} f_{s,i} \log_2 L = \mathrm{W}_i \ Hz \log_2 32 = 5W_i \ Hz$$

Άρα,

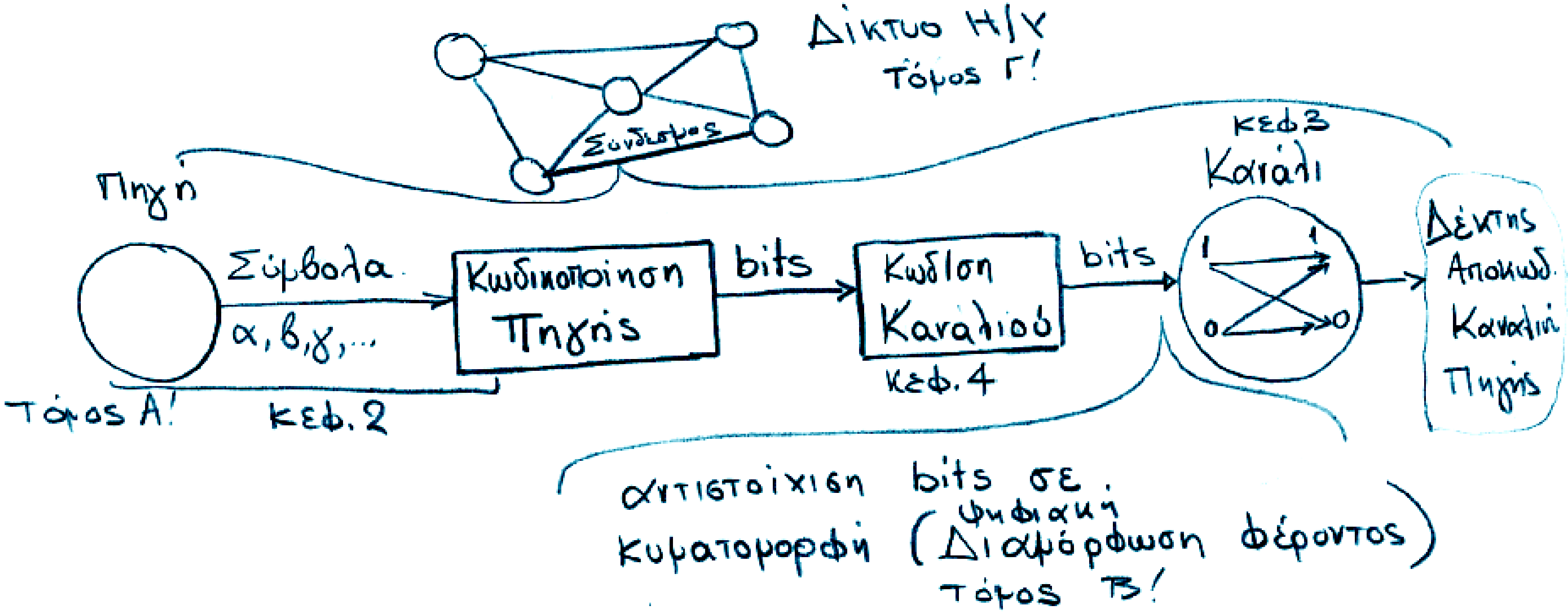
$$\sum_{i=1}^{6} W_{PCM,i} \geq 5 \sum_{i=1}^{6} W_i \ Hz = 60W \ Hz \ .$$

(δ) Επειδή η σχέση προσδιορισμού του αριθμού L των επιπέδων κβάντισης εξαρτάται μόνο από το σηματοθορυβικό λόγο, ο αριθμός L των επιπέδων κβάντισης παραμένει ανεξάρτητος του εύρους ζώνης του σήματος, και κατά συνέπεια είναι ο ίδιος για όλα τα σήματα υπό θεώρηση, επιμέρους και μη. Επίσης, η σχέση προσδιορισμού του εύρους ζώνης για PCM είναι γραμμική ως προς το ρυθμό δειγματοληψίας. Κατά συνέπεια, το συνολικό απαιτούμενο εύρος ζώνης που ζητείται στην ερώτηση (γ), όπου η μετατροπή των επιμέρους σημάτων σε ψηφιακά PCM, προηγείται της πολυπλεξίας με διαίρεση χρόνου (TDM), είναι το ίδιο με αυτό της ερώτησης (β).

Θεωρία Πληροφορίας

Επικοινωνιακό Μοντέλο

Επικοινωνία: Μεταβίβαση Πληροφορίας



Ειδικά θέματα:

1) Πιθανότητες- Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

2) Ποσότητα Πληροφορίας

3) Πηγές Συμβόλων με/χωρίς μνήμη

4) Κωδικοποίηση πηγής

- Σύμβολα Πηγής $\longrightarrow$ Δομικές μονάδες σήματος πληροφορίας

  ↳ Τυχαία η διαδοχή τους (τυχαία μεταβλητή)
- Σφάλματα λόγω θορύβου στο κανάλι $\longrightarrow$ τυχαία μεταβλητή

  $\Rightarrow$ Χρήση Πιθανοτήτων

  για την περιγραφή της ροής πληροφορίας

  από την πηγή διαμέσου του καναλιού στο δέκτη

Πιθανότητες. Εισαγωγή

Τυχαίο Πείραμα (Το αποτέλεσμά του δεν είναι εκ των προτέρων βέβαιο)

Π.χ. ρίψη νομίσματος, ζάρια, ορθή αποστολή πακέτου από κόμβο Α στον κόμβο Β.

$$\text{Πείραμα} \rightarrow \left.\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Ατομικά Αδιαίρετα Αποτελέσματα ή Ενδεχόμενα,} \\ \text{Δειγματικά Σημεία} \end{array}$$

Διαφάνειες 26-32
Αρχείου oss3_PLH22_InfoTheory_2015

Ο δειγματικός χώρος ορίζεται ως το σύνολο των ενδεχομένων $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$

και αντιστοιχίζεται σε μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με τη σχέση $\underbrace{P(S_i) = P(X=x_i) = P(x_i)}$

"πιθανότητα ενδεχομένου S_i"

"η τ.μ. X να ισούται με x_i"

Ιδιότητες Πιθανοτήτων

- Το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχομένων ισούται με 1 $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$.
- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου πάντα ανήκει στο διάστημα $[0,1]$ $0 \leq P(x_i) \leq 1$

↑ απίθανο ↑ βέβαιο

Συνάρτηση Συνδυασμένης Πιθανότητας δύο ενδεχομένων x_i, y_j δύο τ.μ. X, Y

$P(x_i, y_j)$: πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$ ταυτόχρονα

$\parallel$

$P(y_j, x_i)$

Υπό συνθήκη πιθανότητα : πιθανότητα $X = x_i$ με δεδομένο ότι $Y = y_j$

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

x_i ↑ ενδεχόμενο εμφάνισης

y_j ↑ δεδομένο

ισχύει επίσης ότι:

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)} = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

· Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i / y_j) P(y_j) = P(y_j / x_i) P(x_i)$

· Όταν τα x_i, y_j είναι μεταξύ τους <u>ανεξάρτητα</u>

(δηλ. το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του άλλου)

Έχουμε :

$$P(x_i / y_j) = P(x_i)$$

$$P(y_j / x_i) = P(y_j)$$

· Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$

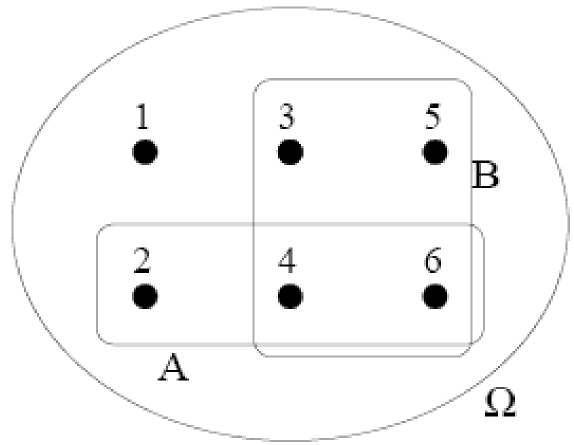
Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής X

Αν $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με $\{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\}$

ισχύει ότι

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i).$$

Παράδειγμα



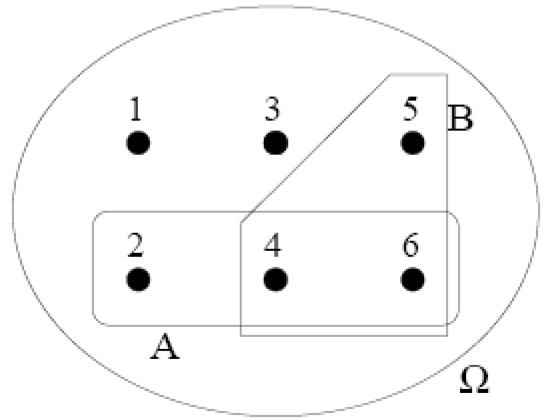
$A = \{\text{Το ζάρι φέρνει άρτιο}\}$

$B = \{\text{Το ζάρι φέρνει } \geq 3\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow A \& B \text{ είναι } \underline{\text{ανεξάρτητα}}$$

Πηγή http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/class_notes/TEL412_lecture02.pdf

Παράδειγμα



$A = \{\text{Το ζάρι φέρνει άρτιο}\}$

$B = \{\text{Το ζάρι φέρνει } \geq 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) > P(A)P(B) \Rightarrow A \& B \text{ δεν είναι } \underline{\text{ανεξάρτητα}}$$

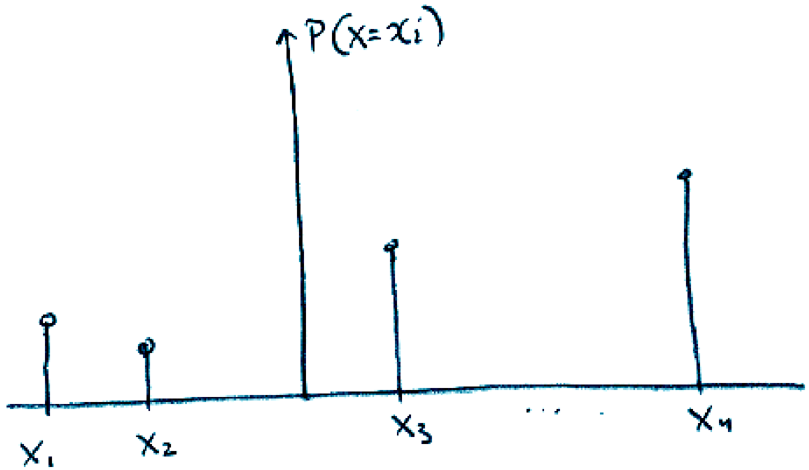
Επίσης $\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} > P(A) \Rightarrow \underbrace{P(A|B)}_{=\frac{2}{3}} > \underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{2}} \Rightarrow$ Η πραγματοποίηση του B αυξάνει την πιθανότητα για το A.

Πηγή http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/class_notes/TEL412_lecture02.pdf

Για 1 τυχαία μεταβλητή διακριτή

X με διακριτά ενδεχόμενα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

το σύνολο των πιθανοτήτων $P(X=x_i) = p(x_i) = \{p(x_1), p(x_2) \ldots, p(x_n)\}$
ορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας μάζας. (σελ. 23)



ιστόγραμμα
τ.μ. X

Ιδιότητες:
- $0 \leq p(x_i) \leq 1$
- $\sum^{n} p(x_i) = 1$

Συνάρτηση κατανομής αθροιστικής πιθανότητας τ.μ. X

$$F(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad 0 \leq F(X \leq x) \leq 1$$

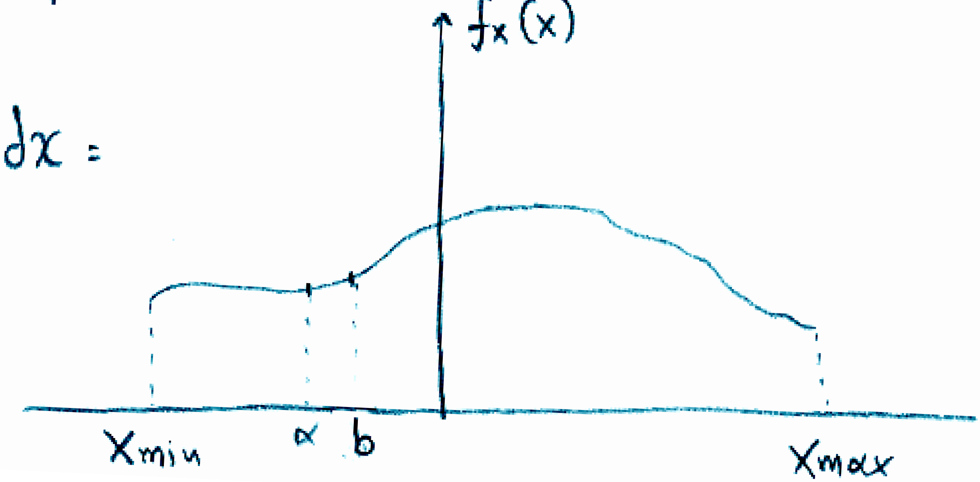
Για μια τ.μ X συνεχή (παίρνει τιμές από συνεχές διάστημα)

$X \in [x_{min}, X_{max}]$

Συνάρτηση κατανομής $F(X \le x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_x(x)\,dx$

$f_x(x)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$P(a \le X \le b) = \int_{\alpha}^{b} f_x(x)\,dx = F(X \le b) - F(X \le \alpha)$$



Για 2 διακριτές τ.μ.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

η συνδυασμένη πιθανότητα μάζας ορίζεται

ως: $P(X=x_i, Y=y_j)$ → ισοδυναμεί με πίνακα $n \times m$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς X:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \qquad i = 1, \dots, n$$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς Y

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) \qquad j = 1, \dots, m$$

→ Ποσότητα Πληροφορίας ή Πληροφοριακό Περιεχόμενο $H(x_i)$ γεγονότος x_i τυχαίας μεταβλητής X (σελ. 28)

Αν πιθανότητα εμφάνισης του x_i η $P(x_i)$

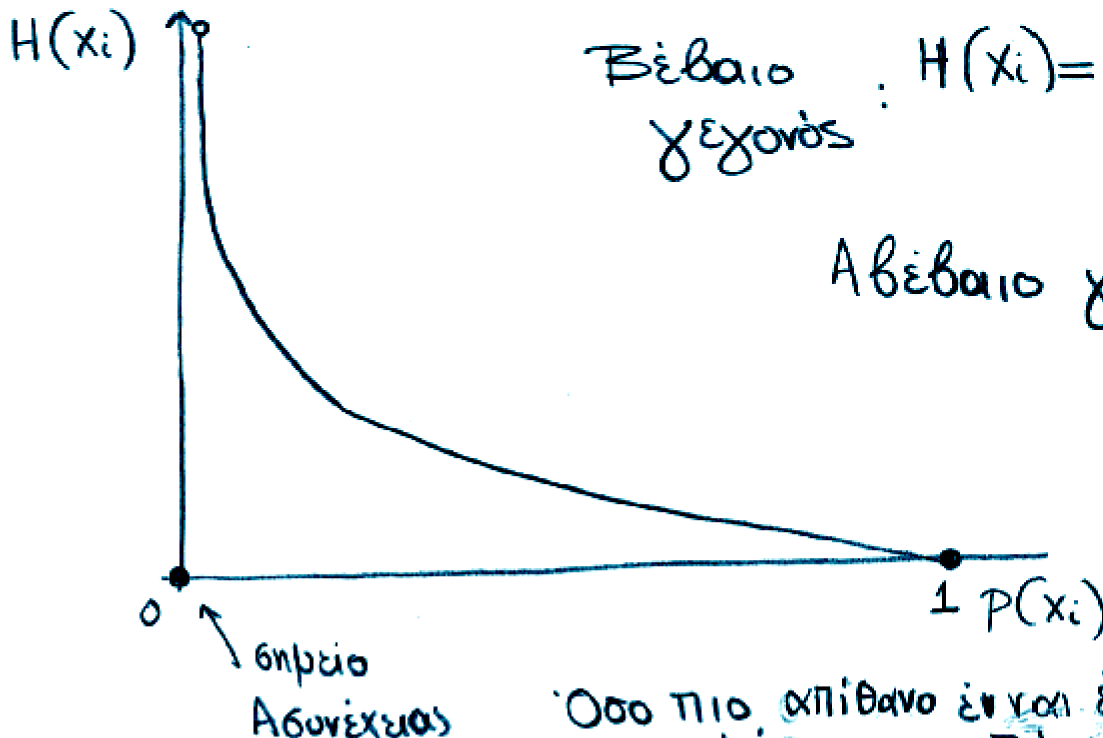
τότε $H(x_i) = -\log_2[P(x_i)]$ bits

* Παρακάτω όπου $\log(x)$ θα εννοείται ο δυαδικός λογάριθμος

$H(x_i) = 1$ bit όταν $P(x_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow H(x_i) = -\log\frac{1}{2} = -\cancel{\log 1}^{0} + \log 2 = 1$ bit

→ Ποσότητα πληροφορίας για αβεβαιότητα μεταξύ 2 ισοπίθανων γεγονότων

Διαφάνειες 48-61
Αρχείου oss3_PLH22_InfoTheory_2015



Βέβαιο γεγονός : $H(x_i)=0$ όταν $P(x_i)=0$

$P(x_i)=1$

Αβέβαιο γεγονός

$H(x_i)$ αντιστρόφως ανάλογο του $p(x_i)$

Όσο πιο απίθανο είναι ένα γεγονός τόσο μεγαλύτερο το πληροφοριακό περιεχόμενό του.

Σημείωση για $\log_{\alpha} x$:

Συνήθως $\alpha = 2, 10, e$

Σύμβαση $\log_e \to \ln$

Αν $a^y = x$ τότε $y = \log_{\alpha} x$ (όπου $x > 0$)

Ιδιότητες: $\log_{\alpha}(x \cdot y) = \log_{\alpha}(x) + \log_{\alpha}(y)$

$$\log_{\alpha}\left(\frac{x}{y}\right) = \log_{\alpha}(x) - \log_{\alpha}(y)$$

$$\log_{\alpha}(x^{b}) = b \cdot \log_{\alpha}(x)$$

$$\log_{\alpha}(1) = 0 \quad , \quad \log_{\alpha} \alpha = 1$$

Calculator

$$\log_{\alpha} x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} \alpha}$$

Διαφάνεια 46
Αρχείου oss3_PLH22_InfoTheory_2015

→ Μέση Ποσότητα Πληροφορίας ή μέση πληροφορία ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ή εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log\left[P(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\,H(x_i)$$

μέση τιμή, άθροισμα $H(x_i)$ με συντελεστές βαρύτητας τις πιθ. εμφάνισης $P(x_i)$

→ Για κάθε τ. μ. $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ισχύει ότι

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(n)$$

* $H(X)=0$ όταν έχουμε βέβαιο γεγονός $P(x_i)=1$

$P(x_j)=0 \ \forall j\neq i$

* H(X)=log(n) όταν έχουμε μέγιστη αβεβαιότητα

⇒ ομοιόμορφη κατανομή τ. μ.

δηλ. $P(x_i)=\frac{1}{n}$, $i=1,2,\dots,n$

π.χ. τ.μ. με 2 $\overset{\text{πιθανά}}{\text{γεγονότα}}$

σελ. 28 σχ. 1.4

$X = \{x_1, x_2\}$

Έστω $p(x_1) = \rho$

$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1-\rho$

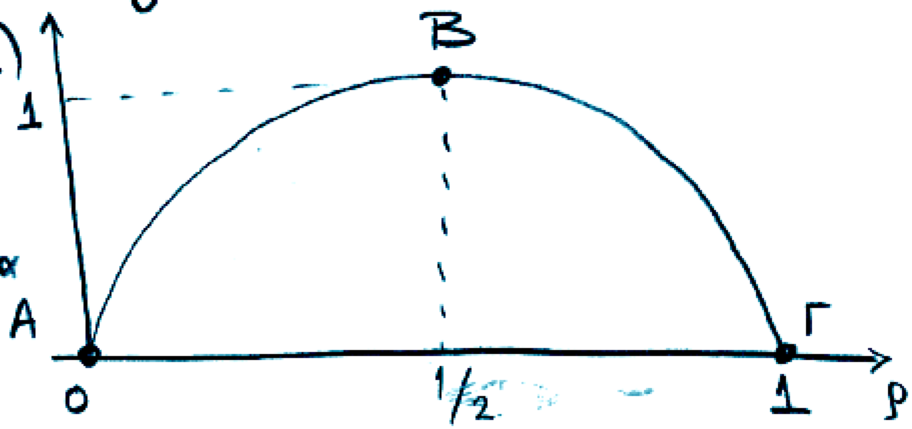
$$H(X) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) =$$

$$= -\rho\log\rho - (1-\rho)\log(1-\rho)$$

Σημεία Α, Γ βέβαιο γεγονός $H(x)=0$

Σημείο Β: μέγιστη αβεβαιότητα

$H(x) = \log 2 = 1$



Σχέσεις για 2 τ.μ. X, Y $\quad X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)\log\left[p(x_i, y_j)\right]$$

Υπο συνθήκη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X/Y) = +\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, H(X/y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p(y_j)\left[-\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)\log p(x_i/y_j)\right] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{p(y_j)\, p(x_i/y_j)}_{p(x_i,y_j)}\log p(x_i/y_j)$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)\cdot\log p(x_i/y_j)$$

Βασική σχέση: $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

Αμοιβαία Ποσότητα Πληροφορίας

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

$H(X)$: αβεβαιότητα της τ.μ. X

$H(X/Y)$: αβεβαιότητα της X δεδομένης της Y

⇓

διαφορά μεταξύ των X, Y

⇑

$H(Y/X)$: αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

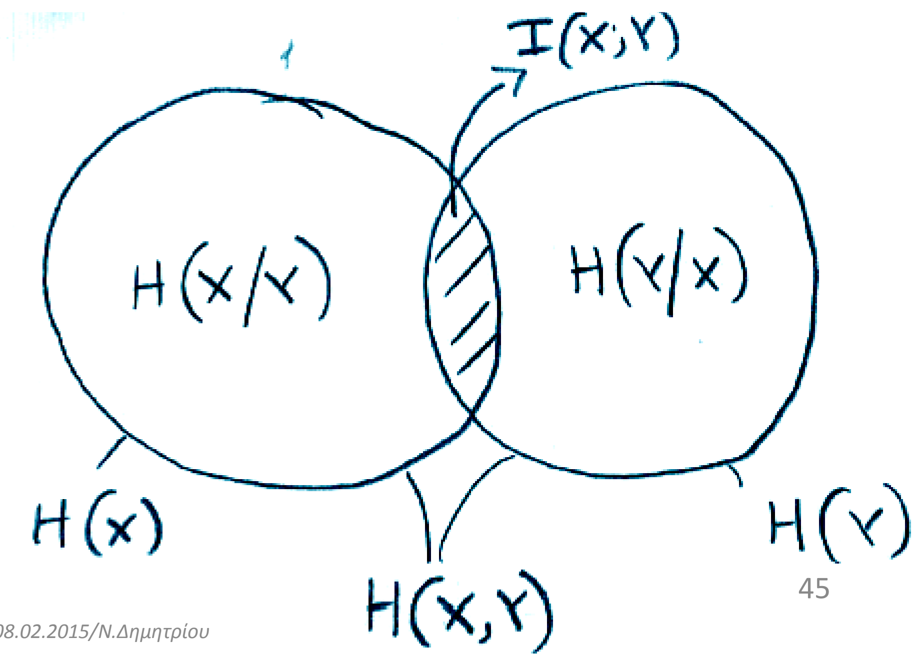
$I(X;Y)$: μέτρο εξάρτησης μεταξύ X, Y

Αν X και Y ανεξάρτητες

$H(X/Y) = H(X)$ $\quad H(Y/X) = H(Y)$

$I(X;Y) = 0$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$



→ Πηγές Συμβόλων

* Ισοπίθανα & Ανεξάρτητα Διαδοχικά Σύμβολα

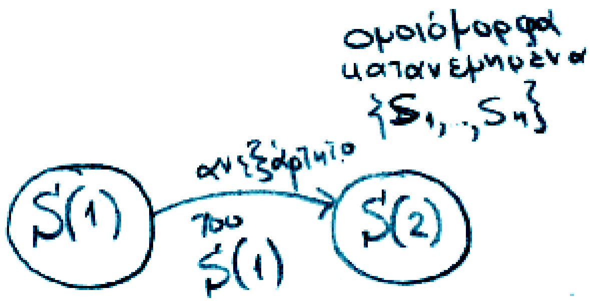
$$\text{τ.μ. } S = \{\overbrace{S_1, S_2, \ldots, S_n}^{n \text{ πιθανά σύμβολα}}\}$$

$$\bigcirc \longrightarrow \ldots S(i), S(i-1) \ldots \; S(3), S(2), S(1)$$

$$P(S(i) = s_1) = p(s_1) = p(s_2) = \ldots = P(s_n) = \frac{1}{n}$$

⇒ Εντροπία Πηγής $H_0(S) = \log(n)$ (μέγιστη)

⇒ Ομοιόμορφη Κωδικοποίηση συμβόλων· τέλεια εντροπία $H_0(S)$.



Διαφάνειες 62-29
Αρχείου oss3_PLH22_InfoTheory_2015

* Όχι ισοπίθανα αλλά διαδοχικά ανεξάρτητα (πηγή χωρίς μνήμη)

π.χ. αλφάβητο

$p(\text{'α'}) = 11{,}7\%$

$p(\text{'ψ'}) = 0{,}1\%$

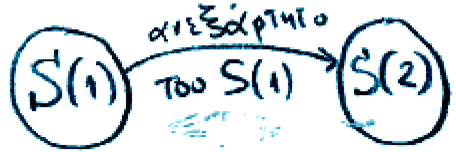
σύμβολα $p(S_i) \neq p(S_j)$ $\quad p(S(n+1)/S(n)) = p(S(n+1))$

$\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ ώστε

Εντροπία πηγής $H_1(S) < H_0(S)$

$\Rightarrow$ Με χρήση ανομοιόμορφης κωδικοποίησης (βασισμένης στις $p(S_i)$) επιτυγχάνεται η συμπίεση της εντροπίας των τελικών συμβόλων της πηγής

ανομοιόμορφα κατανεμημένα $\{s_1, \dots, s_n\}$



* Όχι ισοπίθανα αλλά εξαρτημένα διαδοχικά σύμβολα

$\exists_{i,j} \quad p(s_i) \neq p(s_j)$

Πηγές Markov

$$p\big(S(n+1)/S(n)\big) \neq p\big(S(n+1)\big)$$

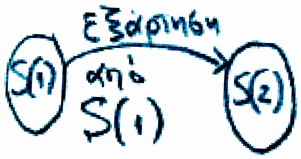
π.χ. αλφάβητο
$p(S(n+1)=\text{'α'}/S(n)=\text{'τ'}) > p(S(n+1)=\text{'π'}/S(n)=\text{'τ'})$

Εντροπία πηγής $\quad H_2(S) < H_1(S)$

(λιγότεροι βαθμοί ελευθερίας στην εκπομπή κάθε συμβόλου)

$\Rightarrow$ με χρήση ανομοιόμορφης κωδ/σης βασισμένης στις $P(S_i(k+1)/S_j(k))$
περαιτέρω συμπίεση
της εντροπίας
της πηγής

ανομοιόμορφα
κατανεμημένα $\{s_1,\ldots,s_n\}$



Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Ορισμοί**
  - **Μη ιδιάζων κώδικας**
    - Όταν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές
  - **Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος**
    - Όταν και οι ακολουθίες των κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές
  - **Άμεσος ή Μη Προθεματικός κώδικας**
    - Κάθε μοναδικά αποκωδικοποίησιμος κώδικας που επιτρέπει την άμεση αποκωδικοποίηση της κωδικής λέξης χωρίς να χρειάζεται να λάβει υπόψη του τις επόμενες κωδικές λέξεις.
    - Ο άμεσος κώδικας αποτελείται από κωδικές λέξεις οι οποίες δεν αποτελούν μέρος (προθέματα άλλων)

Διαφάνειες 75-106
Αρχείου oss3_PLH22_InfoTheory_2015

Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Παράδειγμα**
  - Μη ιδιάζων, I,II,III,IV
  - Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος, II,III,IV. Ο I δεν είναι αφού ΦΦΦΦ, ΦΦΨ, ΨΨ όλα έχουν κωδική λέξη την ίδια, 0000
  - Άμεσοι κώδικες, II και III
  - Ο κώδικας IV δεν είναι άμεσος αφού χρειάζεται να γνωρίζουμε ψηφία που ανήκουν στην επόμενη κωδική λέξη, π.χ. 011011100?

	I	II	III	IV
Φ	0	00	0	0
Χ	11	01	10	01
Ψ	00	10	110	011
Ω	01	11	1110	0111

Θ5 / ΓΕ 0203

Πηγή 8 συμβόλων

S_i	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ
$p(s_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

T.μ.

$$\sum_{i=1}^{8} P(S_i) = 1$$

Σύμβολα με χαμηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο:

↓

Σύμβολα με υψηλότερη πιθανότητα εμφάνισης E, B

$$H(s_i) = -\log[p(s_i)] \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}} = -\log\frac{1}{4} = -(\log 1 - \log 4) =$$

$$= -(0 - \log 2^2) = -(-2\log 2) = 2 \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}.$$

Σύμβολα με υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο

↓

Σύμβολα με χαμηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Δ, Z

$$H(s_i) = -\log\left(\frac{1}{32}\right) = -(\log 1 - \log 32) = -(0 - \log 2^5) =$$

$$= 5\log 2 = 5 \ \text{bits/symbol}$$

Μέσο Πληροφοριακό Περιεχόμενο Πηγής

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} p(s_i)\log[p(s_i)] = -p(A)\log[p(A)] - p(B)\log(p(B)) -$$

$$-p(\Gamma)\log(p(\Gamma)) - p(\Delta)\log(p(\Delta)) - p(E)\log(p(E)) - p(Z)\log(p(Z)) -$$

$$-p(H)\log(p(H)) - p(\Theta)\log(p(\Theta)) = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} -$$

$$-\frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\log 8 + \frac{2}{4}\log 4 + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{2}{32}\log 32 = \frac{3}{8}\cdot 3 + \frac{2}{4}\cdot 2 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{2}{32}\cdot 5 =$$

$$= \frac{36}{32} + \frac{32}{32} + \frac{8}{32} + \frac{10}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875 \text{ bits/symbol}$$

Αν τα σύμβολα ήταν ισοπίθανα (πιθανότητες εμφάνισης ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή)

$$p(S_i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{8}$$

$$H(S_i) = \log(n) = \log 8 = 3\ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{n}\cdot\log\frac{1}{n} = -n\cdot\frac{1}{n}\cdot\log\frac{1}{n} = \log n = \log 8 = 3\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

Τρόποι Κωδικοποίησης

Ⓐ Ομοιόμορφη (Θεωρώντας ίδιο αριθμό bits ανά σύμβολο)

Α	000 ← 3 bits/symbol → Μέσο μήκος κώδικα
Β	001
Γ	010
Δ	011
Ε	100
Ζ	101
Η	110
Θ	111

(B) Ανομοιόμορφη (βασισμένη στην εντροπία της πηγής)

Σκοπός: Κατασκευή κατάλληλου κώδικα του οποίου το μέσο μήκος να προσεγγίζει την εντροπία των συμβόλων της πηγής $H(S) < \bar{L} < \log n$

2.6875 bits/symbol

3 bits/symbol

Χαρακτηριστικά Κώδικα σελ. 52

1) Μη ιδιάζων: Όλες οι κωδικολέξεις διαφορετικές

2) Μοναδικά Αποκωδικοποιήσιμος: Όλες οι ακολουθίες κωδικών λέξεων διαφορετικές

π.χ. ο κώδικας

Φ	Χ	Υ	Ω
0	11	00	01

δεν είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος γιατί 0000 → ΦΦΦΦ, ΥΥ, ΦΦΨ

3) Άμεσος: Κάθε κωδική λέξη μπορεί να αποκωδικοποιηθεί με τη λήψη της. (δεν είναι προθεματικός)

π.χ. ο κώδικας

Φ	Χ	Υ	Ω
0	01	011	0111

δεν είναι άμεσος διότι είναι προθεματικός

Κωδικοποίηση Huffman
(JPEG, MPEG)

Άριστος κώδικας: max επίδοση

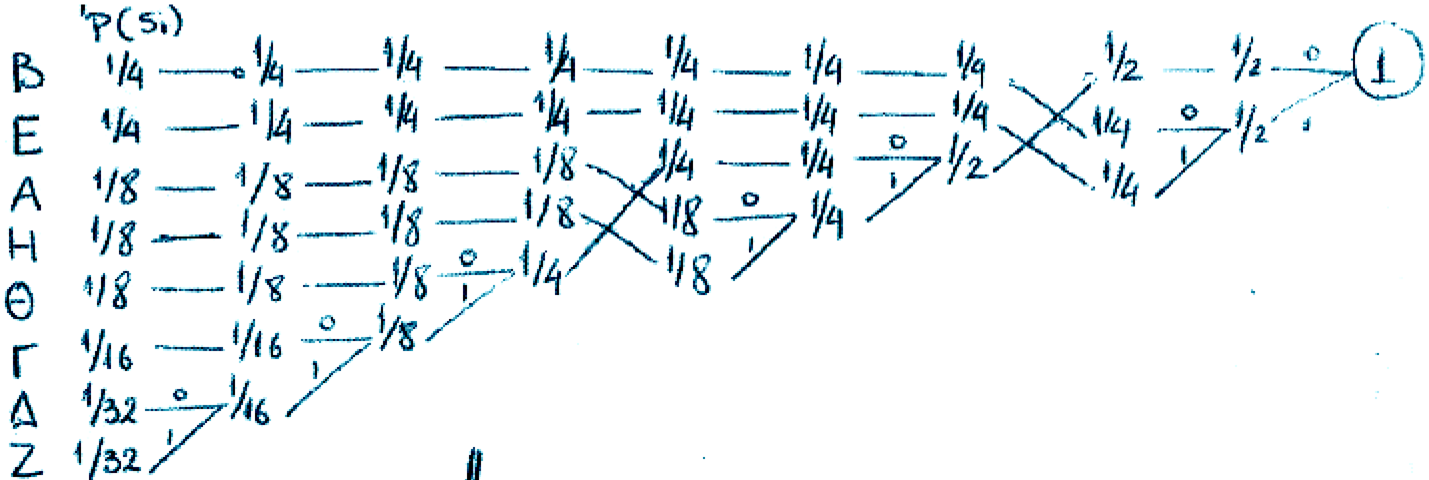
① Διάταξη κατά φθίνουσα $P(S_i)$

② Τα 2 τελευταία σύμβολα ενώνονται σε 1 με $P(\text{αθροιστική}) = P(S_i) + P(S_j)$

③ Αναδιάταξη Συμβόλων.

④ Επανάληψη του ② μέχρι να καταλήξουμε σε 2 σύμβολα.

⑤ Από το τέλος στην αρχή σχηματίζουμε τον κώδικα για κάθε σύμβολο.

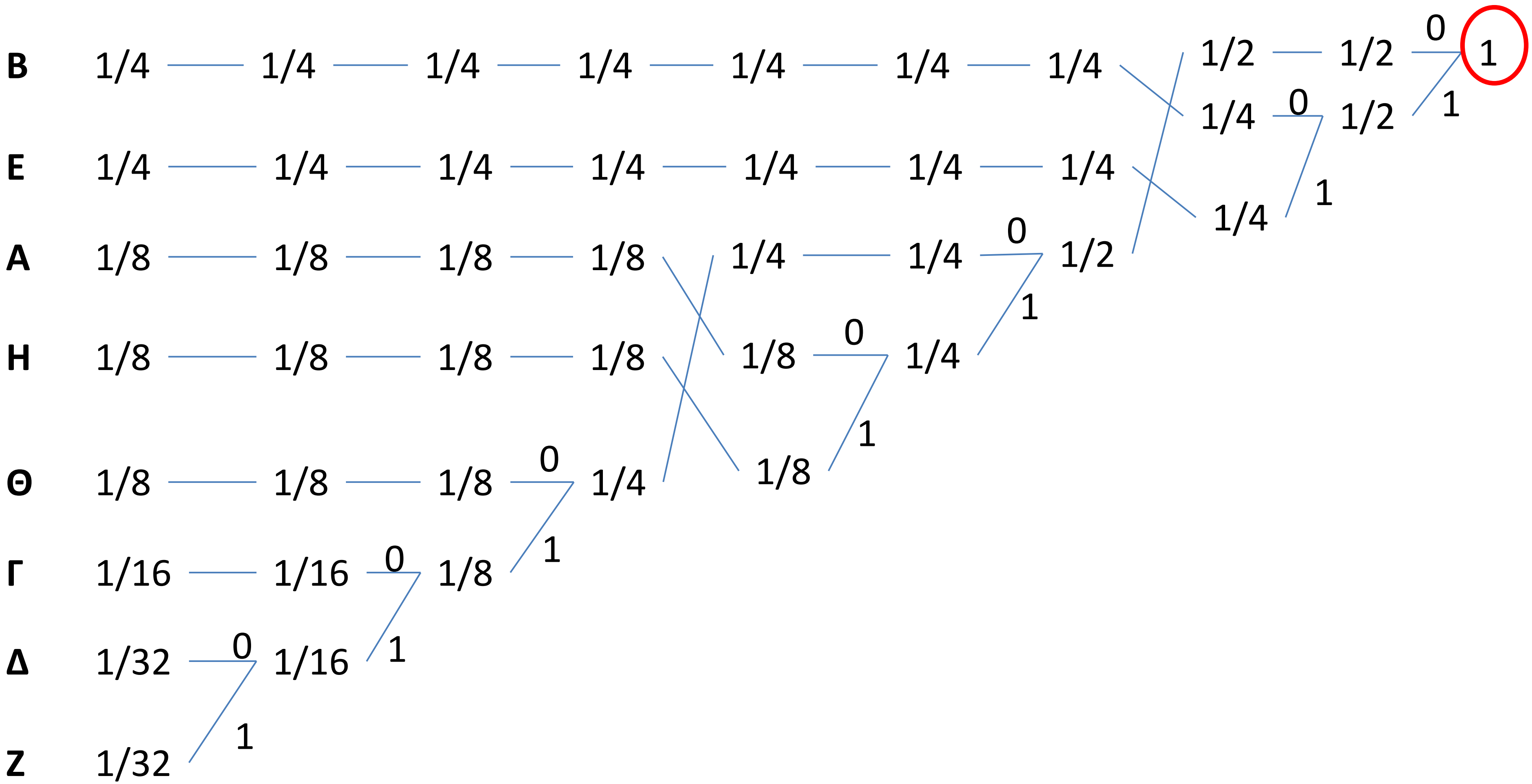


απο αριστερά προς δεξιά		
Β	01	10
Ε	11	11
Α	010	010
Η	110	011
Θ	000	000
Γ	0100	0010
Δ	01100	00110
Ζ	11100	00111

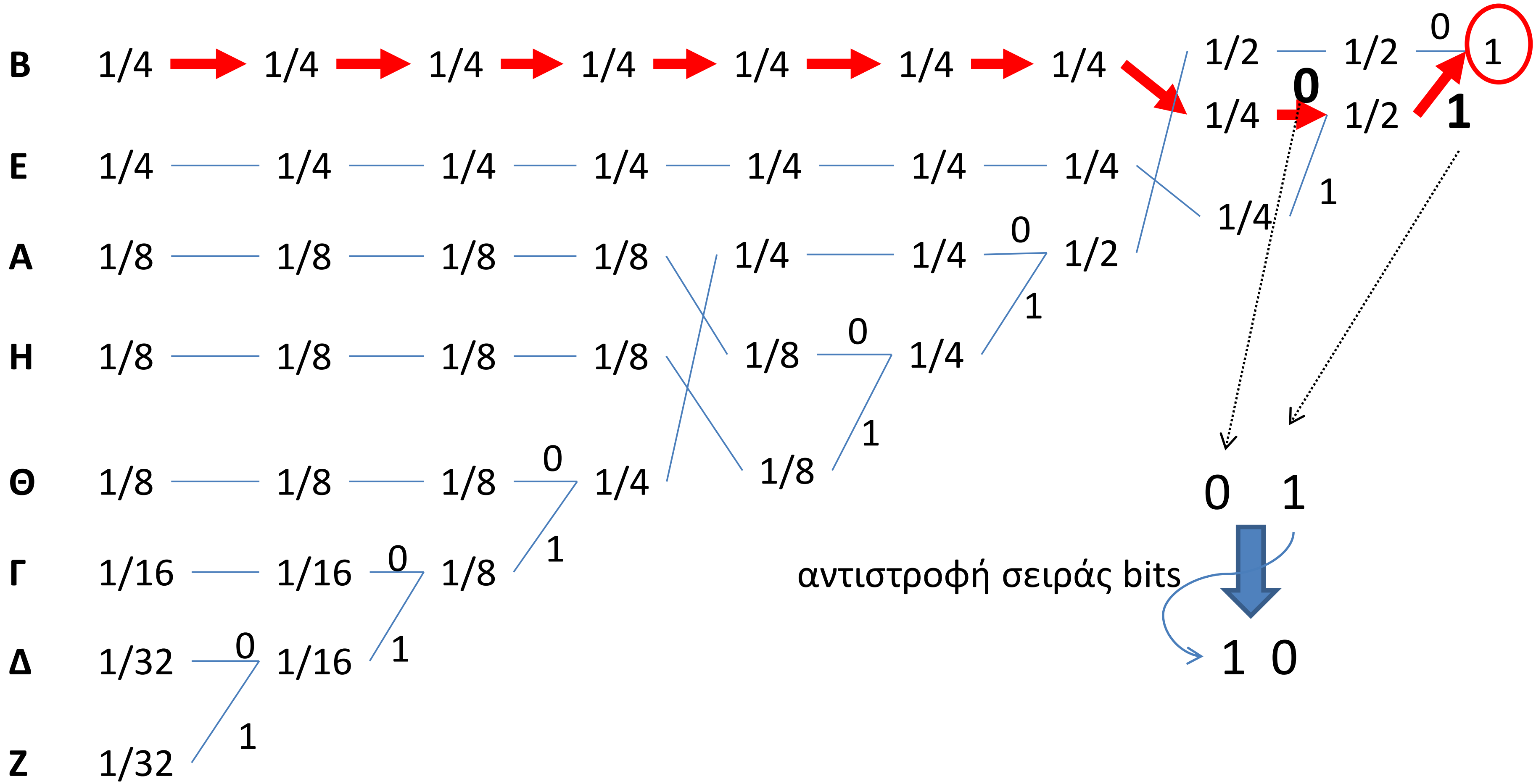
τελικός κώδικας

Καμμια κωδική λέξη δεν είναι πρόθεμα άλλης (άμεσος κώδικας)

Παράδειγμα κώδικα Huffman

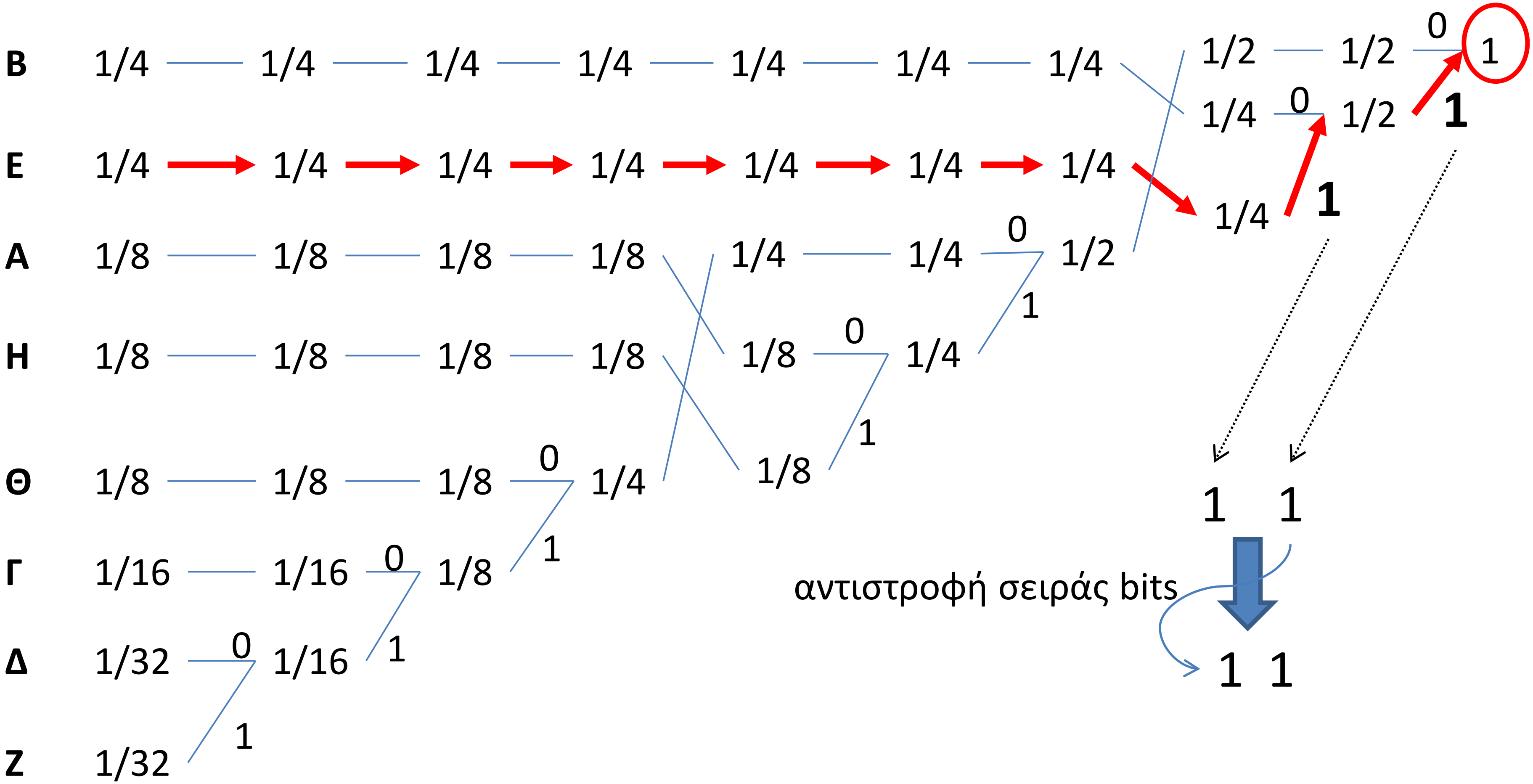

B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 1
1/4 1/2
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
A 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2
H 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Z 1/32
0
1

Σύμβολο Β

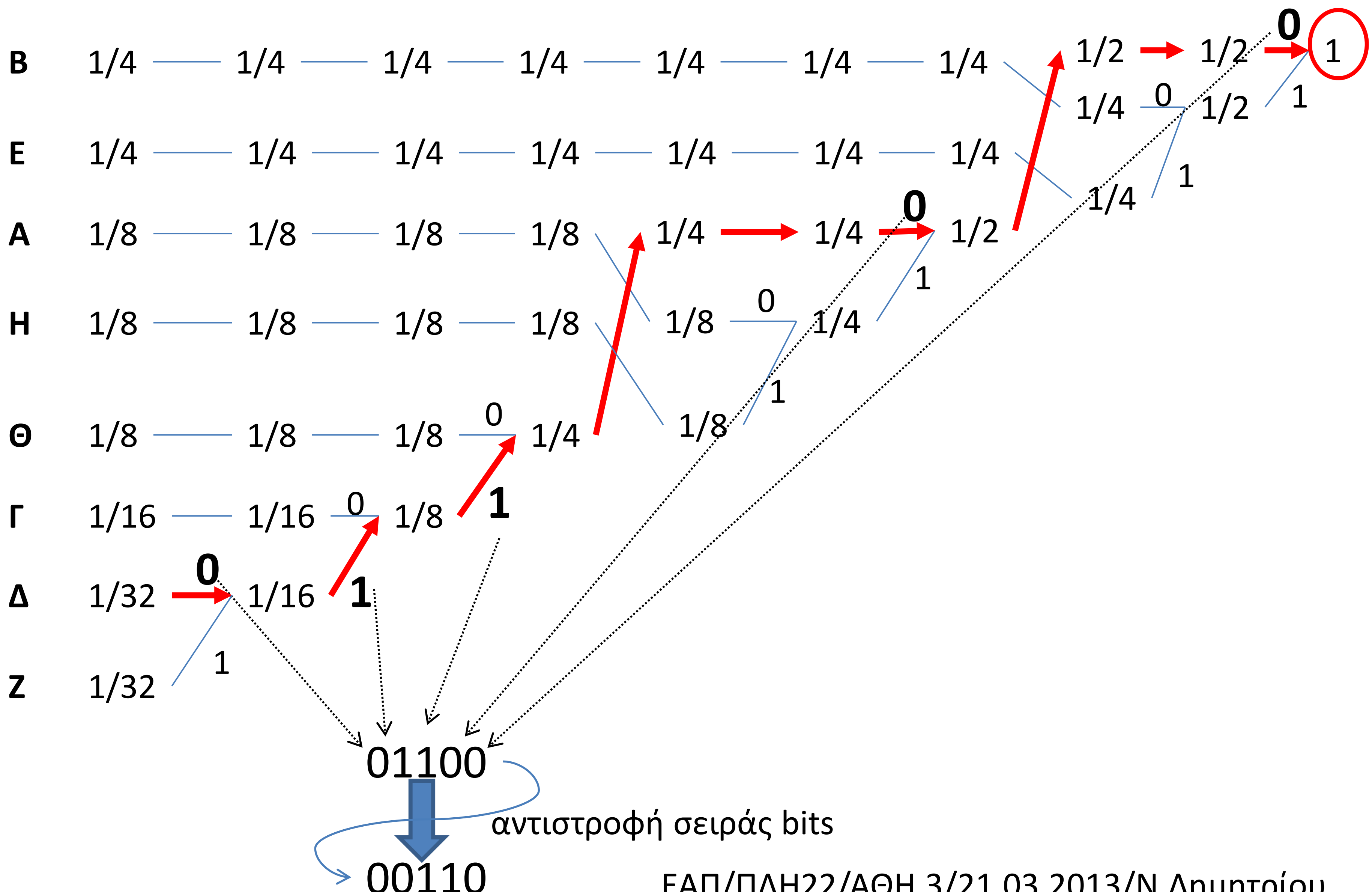


Β 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
Ε 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
Α 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2
Η 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Ζ 1/32
1/2 1/2 1
1/4 1/2
1/4
0 1
0 1
αντιστροφή σειράς bits
1 0

Σύμβολο Ε

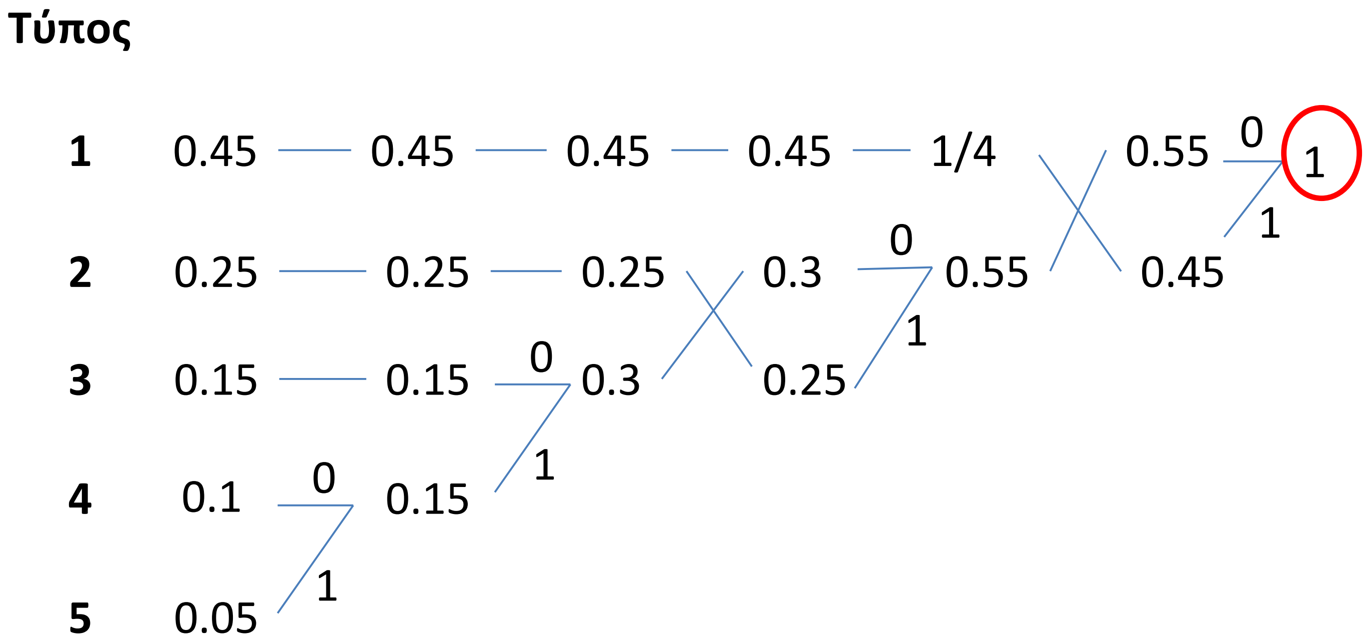

B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
A 1/8 1/8 1/8 1/8
H 1/8 1/8 1/8 1/8
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Z 1/32
1/4 1/4 1/2
1/8 1/4
1/8
1/2 1/2 1
1/4 1/2
1/4
0
1
1 1
αντιστροφή σειράς bits
1 1

Σύμβολο Δ

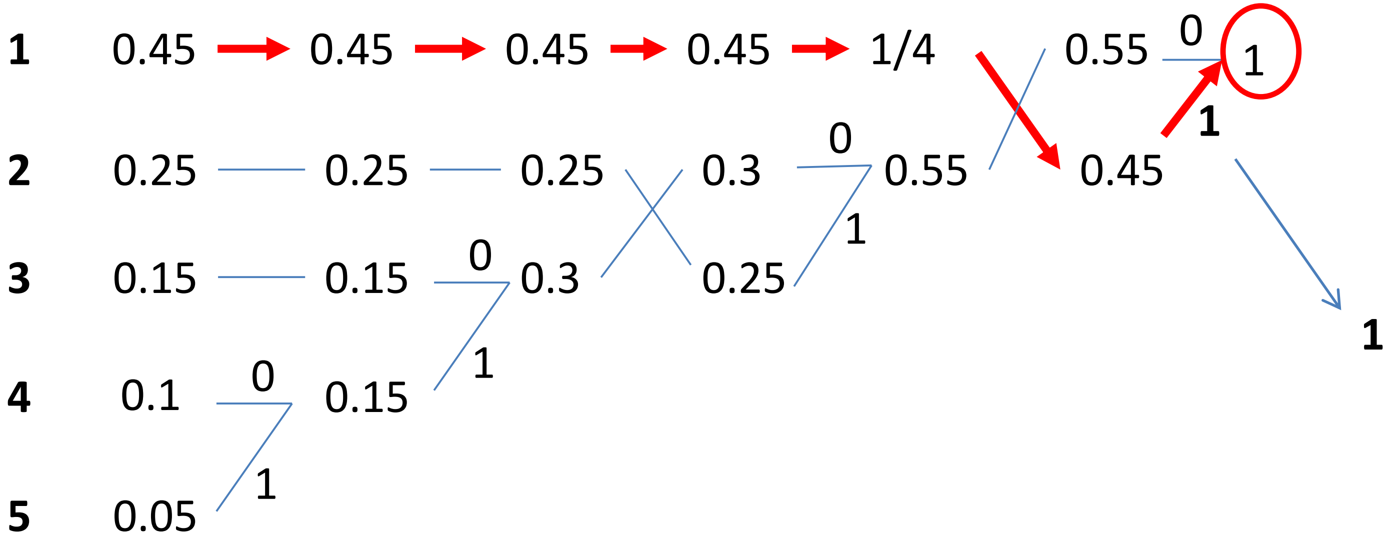


Β 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 1
Ε 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2
Α 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2 1/4
Η 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Ζ 1/32
0
1
01100
00110
αντιστροφή σειράς bits

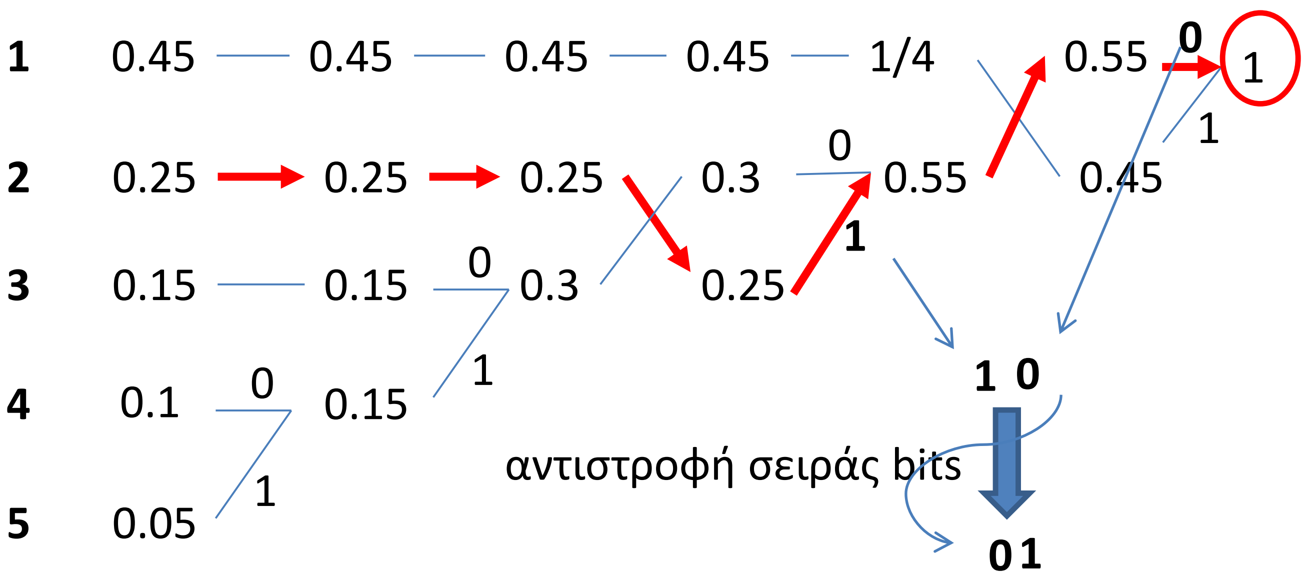
Πρόσθετο Παράδειγμα κωδικοποίησης Huffman



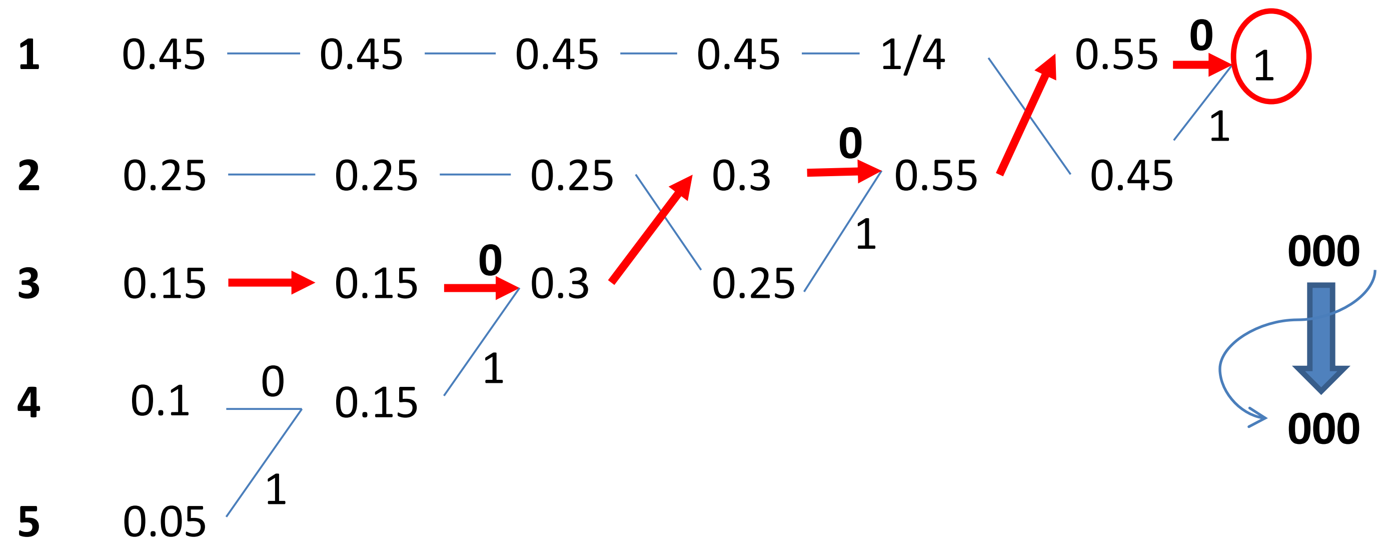
Τύπος 1



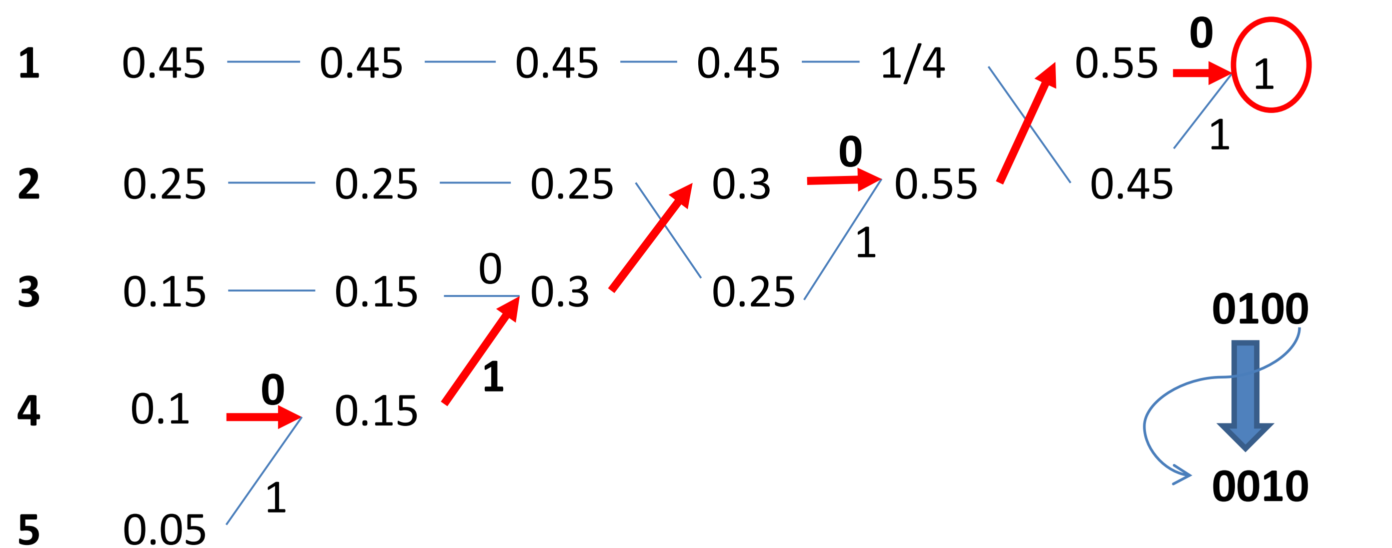
Τύπος 2



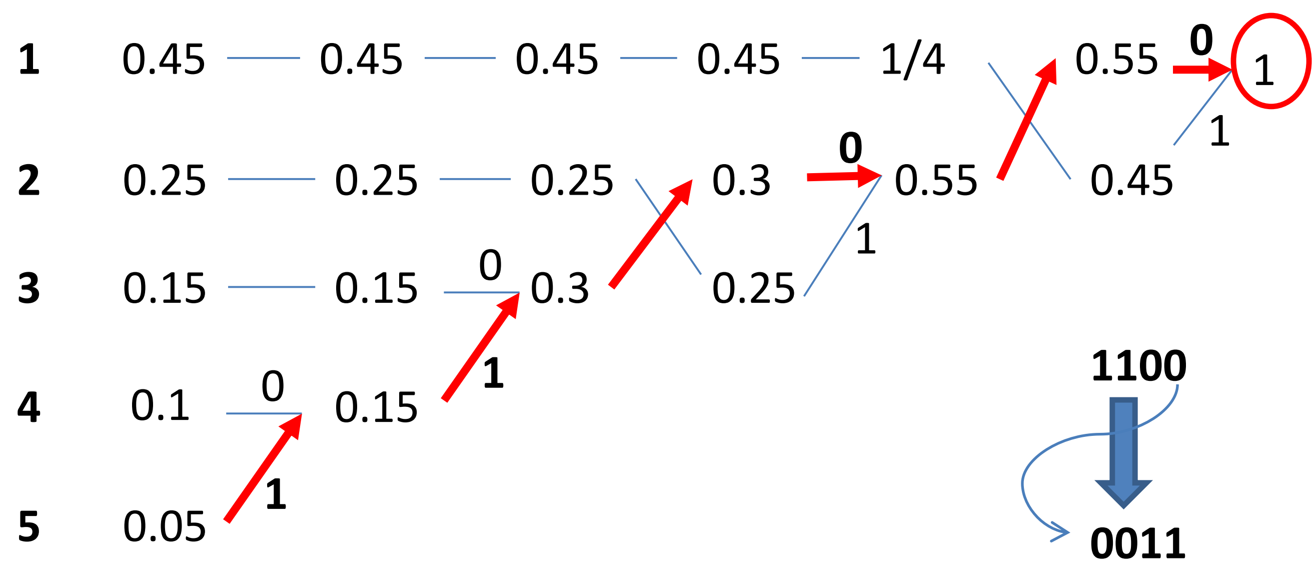
Τύπος 3



Τύπος 4



Τύπος 5



1
2
3
4
5
0.45
0.45
0.45
0.45
1/4
0.55
0
1
1
0.25
0.25
0.25
0.3
0
0.55
0.45
0.15
0.15
0
0.3
0.25
1
0.1
0
0.15
1
0.05
1
1100
0011

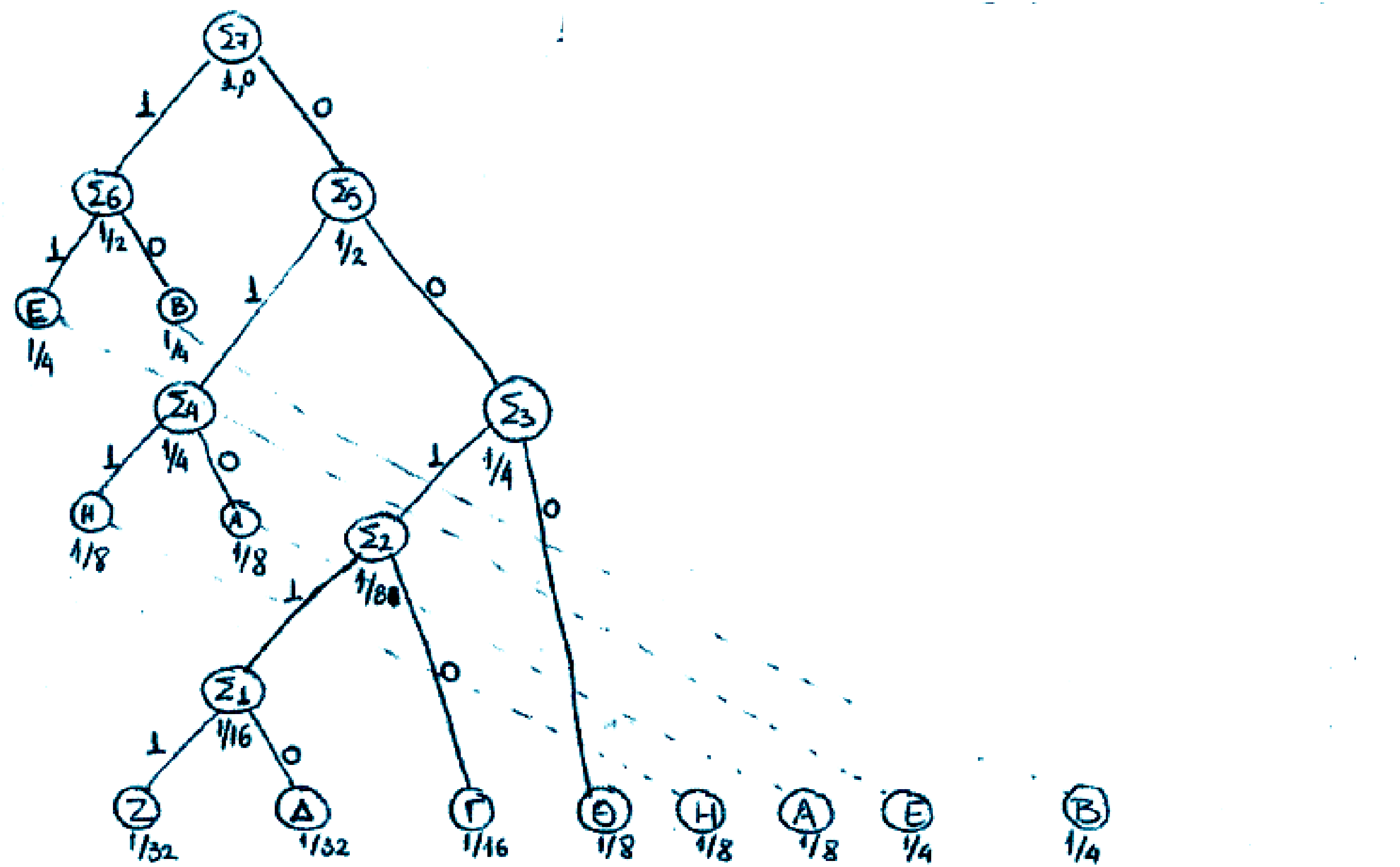
Κωδ. Huffmann με Χρήση δυαδικού δένδρου

1. Τοποθέτηση συμβόλων με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων: ΖΔΓΘΗΑΕΒ
2. Ομαδοποίηση Ζ, Δ στο $Σ_1$ $P_{Σ_1} = 1/32 + 1/32 = 1/16$
3. $Σ_1$ΓΘΗΑΕΒ σε αύξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση $Σ_1$, Γ στο $Σ_2$ $P_{Σ_2} = 1/16 + 1/16 = 1/8$
4. $Σ_2$ΘΗΑΕΒ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα ομαδοποίηση $Σ_2$, Θ στο $Σ_3$ $P_{Σ_3} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
5. $Σ_3$ΗΑΕΒ ΟΧΙ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων: Η Α $Σ_3$ Ε Β
   ομαδοποίηση Η, Α στο $Σ_4$ $P_{Σ_4} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
6. $Σ_4 Σ_3$ΕΒ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση $Σ_4$, $Σ_3$ στο $Σ_5$ $P_{Σ_5} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
7. $Σ_5$ ΕΒ ΟΧΙ σε αυξ σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων: Ε Β $Σ_5$
   ομαδοποίηση Ε, Β στο $Σ_6$ $P_{Σ_6} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
8. Ομαδοποίηση $Σ_6$, $Σ_5$ στο $Σ_7$ $P_{Σ_7} = 1{,}0$
9. Ανάθεση '1' στα αριστερά παιδιά και '0' στα δεξιά παιδιά κάθε κόμβου.
10. Αντιστοίχιση κωδ. λέξεων ανά σύμβολα.

Σε κάθε βήμα διατάσσουμε τα σύμβολα με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων και ομαδοποιούμε τα 2 αριστερότερα

B: Διαδρομή $Σ_7 \to Σ_6 \to B$: 10
E: Διαδρομή $Σ_7 \to Σ_6 \to E$: 11
A: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_4 \to A$: 010
H: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_4 \to H$: 011
Θ: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to Θ$: 000
Γ: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to Σ_2 \to Γ$: 0010
Δ: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to Σ_2 \to Σ_1 \to Δ$: 00110
Z: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to Σ_2 \to Σ_1 \to Z$: 00111

Στην επόμενη σελίδα παρατίθεται η κωδ/ση Huffman με τη χρήση δυαδικού δένδρου.


Σ7
1,0
Σ6
1/2
Σ5
1/2
E
1/4
B
1/4
Σ4
1/4
Σ3
1/4
H
1/8
A
1/8
Σ2
1/8
Σ1
1/16
Z
1/32
Δ
1/32
Γ
1/16
Θ
1/8
H
1/8
A
1/8
E
1/4
B
1/4

Πλεονασμός πηγής

$$r_{ed} = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log N} = 1 - \frac{2,6875}{3} = 10,4\%$$

Επίδοση Κώδικα

$$\alpha = \frac{H(C)}{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i \log q}$$ σελ. 57

$$H(C) = 2,6875 \frac{bits}{symbol}$$

$$\log q = \log 2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \frac{1}{4}2 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{16}4 + \frac{1}{32}\cdot 5 + \frac{1}{32}5 =$$

$$= 1 + \frac{9}{8} + \frac{18}{32} = \frac{86}{32} = 2,6875$$

Άρα $\alpha = 100\%$

$\alpha < 100\%$ όταν $l_i^* = -\log(p_i) \notin \mathbb{N}$

Κωδικοποίηση Αλγ. Fano.

① Διάταξη με φθίνουσα $P(S_i)$

② Διαχωρισμός σε q (κωδικά σύμβολα) υποομάδες (για δυαδικό $q=2$) με όσο το δυνατόν ίσες αθροιστικές πιθανότητες

③ Αντιστοίχιση σε κάθε υποομάδα ενός κωδ. συμβόλου

④ Ξανά το ② για κάθε υποομάδα.

	P	l_i	με ανάθεση πρώτα του 1 και μετά το 0.
Β	1/4	0 0	(11)
Ε	1/4	0 1	(10)
Α	1/8	1 0 0	(011)
Η	1/8	1 0 1	(010)
Θ	1/8	1 1 0	(001)
Γ	1/16	1 1 1 0	(0001)
Δ	1/32	1 1 1 1 0	(00001)
Ζ	1/32	1 1 1 1 1	(00000
	1		

ΟΜΑΔΟΠΟΙΟΥΜΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ!

Κωδικοποίηση Shannon

1. Διάταξη συμβόλων με φθίνουσα $p(s_i)$
2. Υπολογισμός Αθροιστικής πιθανότητας $\Pi_i = \sum_{k=1}^{i-1} p(s_k)$, $\Pi_1 = 0$
3. Υπολογισμός πλήθους κωδικών συμβόλων (μήκους κωδικής λέξης) για κάθε σύμβολο $l_i = \lceil -\log(p(s_i)) \rceil$
4. Εύρεση Δυαδικού Αναπτύγματος για κάθε Π_i

Αλγόριθμος:

```
for k = 1 : li
    Π(i) ← Π(i)·2
        if Π(i) ≥ 1
            ψk = 1
            Π(i) ← Π(i)-1
        else
            ψk = 0
        end
end
```

s_i	$P(s_i)$	Π_i	$l_i = -\log P(s_i)$	κωδικολέξεις
Β	1/4 = 0,25	0	2	00
Ε	1/4 = 0,25	0,25+0 = 0,25	2	01
Α	1/8 = 0,125	0,25+0,25 = 0,5	3	100
Η	1/8 = 0,125	0,125+0,5 = 0,625	3	101
Θ	1/8 = 0,125	0,125+0,625 = 0,75	3	110
Γ	1/16 = 0,0625	0,125+0,75 = 0,875	4	1110
Δ	1/32 = 0,03125	0,0625+0,875 = 0,9375	5	11110
Ζ	1/32 = 0,03125	0,03125+0,9375 = 0,96875	5	11111

π.χ για το Δ

$k = 1:5$, $\Pi_\Delta = 0,9375$

$k=1$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,9375 \times 2 = 1,875 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,875 - 1 = 0,875 \end{cases}$

$k=2$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,875 \times 2 = 1,75 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_2 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,75 - 1 = 0,75 \end{cases}$

$k=3$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,75 \times 2 = 1,5 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_3 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,5 - 1 = 0,5 \end{cases}$

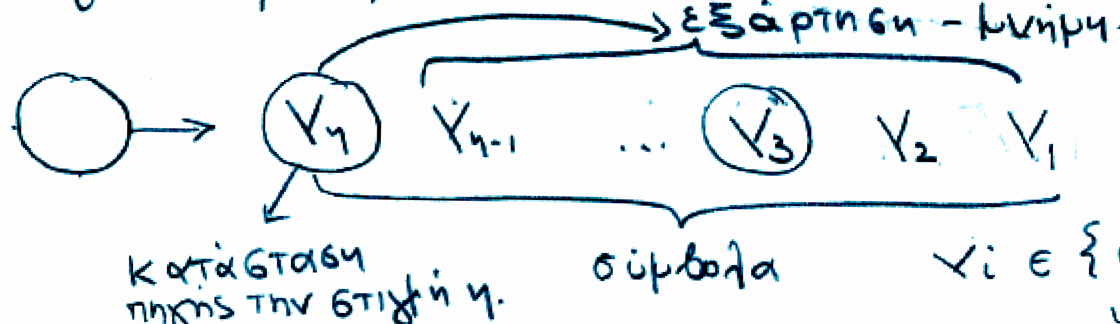
$k=4$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_4 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1 - 1 = 0 \end{cases}$

$k=5$

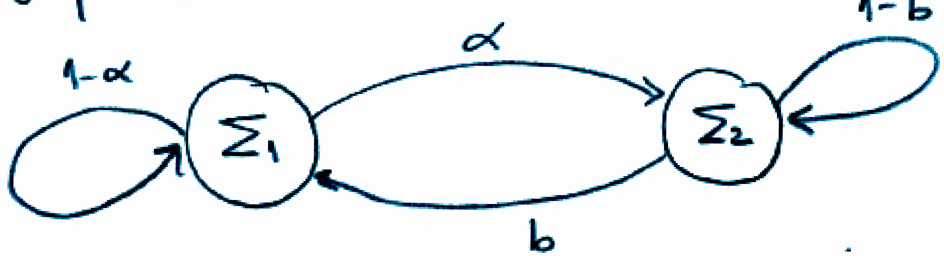
$\Pi_\Delta \leftarrow 0 \times 2 = 0 < 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_5 = 0 \\ \text{END} \end{cases}$

Πηγές με μνήμη – Αλυσίδες Markov



$Y_i \in \{\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{\text{δυνατά σύμβολα}}\}$

Για 2 σύμβολα



Για πηγή 1ης τάξης το κάθε εκπεμπόμενο σύμβολο εξαρτάται από το αμέσως προηγούμενό του

$$P\left(Y_{n+1}=y_{n+1} \,/\, Y_n=y_n, Y_{n-1}=y_{n-1}, \dots, Y_2=y_2, Y_1=y_1\right)=P\left(Y_{n+1}=y_{n+1} \,/\, Y_n=y_n\right)$$

Διαφάνειες 108-115
Αρχείου oss3_PLH22_InfoTheory_2015

* Χρονικά αμετάβλητη διαδικασία

$$P(Y_{n+1}=\Sigma_1 / Y_n=\Sigma_2) = P(Y_2=\Sigma_1 / Y_1=\Sigma_2)$$

* Στατική Διαδικασία

Η πιθανότητα κάθε κατάστασης είναι ανεξάρτητη του χρόνου

$$P(Y_n=\Sigma_1) = P(Y_{n+1}=\Sigma_1) \quad \forall n$$

Πίνακας Μετάβασης $P_{ij} = P(Y_{n+1}=j / Y_n=i)$

ΕΞ 2004Α/Θ2.

Στατική 1ης τάξης χρονικά αμετάβλητη { πηγή Markov 2 συμβόλων φ, χ

$$P_{ij} = \begin{array}{c|cc} & \varphi & \chi \\ \hline \varphi & 0,2 & 0,8 \\ \chi & 0,5 & 0,5 \end{array}$$

κατάσταση n+1

κατάσταση η

$$P(Y_{n+1} = \varphi / Y_n = \varphi) = 0,2 = P(\varphi/\varphi)$$

$$P(Y_{n+1} = \varphi / Y_n = \chi) = 0,5 = P(\varphi/\chi)$$

$$P(Y_{n+1} = \chi / Y_n = \cancel{\chi}\varphi) = 0,8 = P(\chi/\varphi)$$

$$P(Y_{n+1} = \chi / Y_n = \chi) = 0,5 = P(\chi/\chi)$$

Παρατήρηση:

(1) Κάθε κατάσταση ακολουθείται είτε από φ είτε από x

δηλ $p(\varphi/x) + p(x/x) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$ (κατάσταση x)

$p(\varphi/\varphi) + p(x/\varphi) = 0{,}2 + 0{,}8 = 1$ (κατάσταση φ)

Δηλ. το άθροισμα κάθε γραμμής του πιν. μετάβασης $= 1$

(2) $P(\varphi) = P(\underset{=}{\overset{2o}{\varphi}}\,\overset{1o}{x}) + P(\underset{=}{\varphi}\varphi) = p(\varphi/x)\cdot p(x) + p(\varphi/\varphi)\cdot p(\varphi)$

$p(x) = P(\underset{=}{x}\varphi) + P(\underset{=}{x}x) = p(x/\varphi)\cdot p(\varphi) + p(x/x)\cdot p(x)$

$$[p(\varphi)\;\; p(x)] = [p(\varphi)\;\; p(x)] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p(\varphi/\varphi) & p(x/\varphi) \\ p(\varphi/x) & p(x/x) \end{bmatrix}}_{\text{πιν. μετάβασης}} \quad (1)$$

$p(\varphi)+p(x)=1.$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $p(\varphi)=0,384$

$p(x)=0.616$

Εντροπία συμβόλων που εκπέμπονται από την κατάσταση φ

$$H(\varphi)=-\left\{p(\varphi/\varphi)\cdot\log\left[p(\varphi/\varphi)\right]+p(x/\varphi)\cdot\log\left(p(x/\varphi)\right)\right\}=$$

$$=-\sum_{j=1}^{2} P_{1j}\log(P_{1j})=-0,2\log 0,2-0,8\log 0,8=0,72$$

αντίστοιχα

$$H(x)=-\sum_{j=1}^{2} P_{2j}\log(P_{2j})=-0,5\log 0,5-0,5\log 0,5=1.$$

Εντροπία Πηγής 1 συμβόλου (με μνήμη)

$$H_m(S) = \sum_{i=1}^{2} p(s_i) \cdot H(s_i) = p(\varphi) \cdot H(\varphi) + p(x) \cdot H(x) =$$

$$= 0,384 \cdot 0,72 + 0.616 \cdot 1 = 0,891 \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

Εντροπία Πηγής 1 συμβόλου (χωρίς μνήμη)

$$H_0(S) = -\sum_{i=1}^{2} p(s_i) \log p(s_i) = -0,384 \log 0,384 - 0.616 \log 0.616$$

$$= 0,96 \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

(Εντροπία πηγής 2 συμβόλων

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H_0(S) + H_m(S) = (0,891 + 0,96) \frac{\text{bits}}{\text{message}}$$)

Πλεονασμός πηγής χωρίς μνήμη $r_0 = 1 - \frac{H_0(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H_0(S)}{\log 2}$

— " — — " — με μνήμη $r_m = 1 - \frac{H_m(S)}{\log 2}$

— " — εξάρτησης $r_{\varepsilon\xi} = 1 - \frac{H_m(S)}{H_0(S)}$

Ασκήσεις/Παραδείγματα

Θέμα 2/ΓΕ 2003.04

Δίνονται 2 τ.μ. X, Y και ο πίνακας συνδυασμένων πιθανοτήτων τους

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	4	2	1	1
y_2	2	4	1	1
y_3	2	2	2	2
y_4	8	0	0	0

$\times 32$

$\div 32$

$P(x_i, y_j)$

$Y \backslash X$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$
$y_1=1$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/32$
$y_2=2$	$1/16$	$1/8$	$1/32$	$1/32$
$y_3=3$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$
$y_4=4$	$1/4$	0	0	0

Ζητούμενα:

1) $H(X)$, $H(Y)$
2) $H(X/Y)$, $H(Y/X)$
3) $H(X,Y)$
4) $I(X;Y)$

Εντροπια $H(x) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \log[p(x_i)]$

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας

ως προς x_i:

$$p(x_1) = \sum_{j=1}^{4} p(x_1, y_j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(αθροίζουμε τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα)

$$p(x_2) = \sum_{j=1}^{4} p(x_2, y_j) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$p(x_3) = \sum_{j=1}^{4} p(x_3, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

$$p(x_4) = \sum_{j=1}^{4} p(x_4, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

Αρα, $H(x) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) -$

$- p(x_3)\log(p(x_3)) - p(x_4)\log(p(x_4)) =$

$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) = 1{,}75$ bits

Ομοίως για το Υ:

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας ως προς y_j

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_2) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_3) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_4) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_4) = \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{4}$$

Άρα, $H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log(p(y_j)) = \left[-\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right)\right] \cdot 4 = 2$ bits

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} P(x_i, y_j)\left[\log P(x_i/y_j)\right] \quad (1)$$

$$= -\sum_{j=1}^{4} P(y_j) \cdot \sum_{i=1}^{4}\left[P(x_i/y_j) \log\left(P(x_i/y_j)\right)\right]$$

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

Υπολογίζοντας τις υπο συνθήκη πιθανότητες και εφαρμόζοντας τη σχέση (1) μπορεί να υπολογισθεί η $H(X/Y)$

Εναλλακτική Λύση: (αποφεύγοντας υπολογισμούς $P(x_i/y_j)$)

Ισχύει ότι $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

$$\Rightarrow H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

από τον πίνακα υπολογίζεται η $H(X,Y)$ και με την παραπάνω σχέση υπολογίζεται το ζητούμενο

$$H(X,X) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i,y_j)\log\left[p(x_i,y_j)\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \quad \Rightarrow 1\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) - \quad \Rightarrow 2\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - 0\log(0) - \quad \Rightarrow 3\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) \quad \Rightarrow 4\eta \text{ στήλη}$$

$\log\left(\frac{1}{4}\right) = \log(4^{-1}) = \log(2^{-2}) = -2\log 2 = 2$

Είναι: $\log\left(\frac{1}{8}\right) = \log\left(8^{-1}\right) = \log\left[\left(2^{3}\right)^{-1}\right] = \log\left(2^{-3}\right) =$

$= -3\log(2) = -3$

$\log\left(\frac{1}{16}\right) = \log\left(16^{-1}\right) = \log\left(2^{-4}\right) = -4\log 2 = -4$

$\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log\left(32^{-1}\right) = \log\left(2^{-5}\right) = -5\log 2 = -5$

Εξήγηση για το $\log(0)$

Κανονικα, $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$

Όμως στην περίπτωση μας, όπου υπολογίζουμε την ποσότητα πληροφορίας $H(x_i) = -\log(p(x_i))$, ισχύει ότι $H(x_i) = 0$ όταν ισχύει $\begin{cases} p(x_i) = 1 \\ \text{ή} \\ p(x_i) = 0 \end{cases}$

Άρα, θέτουμε $\log(0) = 0$ (μόνο στην περίπτωση υπολογισμών ποσότητας πληροφορίας)

$\cdot$ Άρα, $H(X,Y) = -\frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{4}(-2) -$

$- \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$

$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$

$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 =$

$= \frac{2 \cdot 3}{8} + \frac{6 \cdot 4}{16} + \frac{4 \cdot 5}{32} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{6+12+5+4}{8} = \frac{27}{8} = 3,375$ bits

$\cdot$ Άρα, $H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = 3,375 - 2 = 1,375$ bits

και $H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = 3,375 - 1,75 = 1,625$ bits

και $I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 1,75 - 1,375 = 0,375$ bits

ΘΕΜΑ 3

ΓΕ4/0910

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον έλεγχο κωδίκων ως προς ως προς το αν είναι μη ιδιάζοντες (non-singular), μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι και άμεσοι (ή στιγμιαίοι) και αν μπορεί να προέρχονται από εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman.* Δείτε το παράδειγμα 2.4 του βιβλίου και Θ3/ΓΕ/2004-5, Θ3/ΓΕ4/2003-4 , Θ3/ΓΕ4/2006-7.

Ζητείται να εξεταστεί αν οι ακόλουθοι κώδικες είναι μη ιδιάζοντες, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι και άμεσοι και αν μπορεί να προέλθουν από εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης του Huffman για κάποια κατανομή πιθανοτήτων των συμβόλων της πηγής:

1. {01, 10, 11, 000, 001},
2. {001, 10, 110, 111},
3. {001, 011, 1001, 1100, 1110},
4. {110, 11, 100, 00, 10},
5. {0, 10, 110, 1110},
6. {10, 11, 010, 011, 000, 0010, 00110, 00111}.

Για τον κώδικα 6, αν απαντήσετε ότι μπορεί να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman, προτείνετε μια κατάλληλη γι’ αυτό κατανομή πιθανοτήτων των 8 συμβόλων της πηγής.

Ένας κώδικας ελεύθερος προθέματος, δηλαδή κώδικας του οποίου καμιά από τις κωδικές λέξεις δεν αποτελεί πρόθεμα άλλης κωδικής λέξης μπορεί να αποκωδικοποιηθεί αμέσως στον προορισμό, δηλαδή ο κώδικας είναι άμεσος ή στιγμιαίος. Παρατηρούμε επίσης ότι ένας κώδικας ελεύθερος προθέματος πληροί και τις δύο πρώτες ιδιότητες, αφού τότε δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν κωδικές λέξεις, αλλά ούτε και ακολουθίες κωδικών λέξεων (αντιστοιχούσες σε διαφορετικές ακολουθίες συμβόλων της πηγής) που ταυτίζονται. Επομένως, για τους δεδομένους κώδικες ισχύουν τα ακόλουθα:

1. ο κώδικας είναι ελεύθερος προθέματος και επομένως είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Ακόμα, παρατηρούμε ότι μπορεί να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman, π.χ. για κατανομή πιθανοτήτων των 5 συμβόλων της πηγής {0,25, 0,25, 0,25, 0,13, 0,12}.

2. Ο κώδικας έχει κωδικές λέξεις διάφορες μεταξύ τους και είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Όμως, δεν είναι Huffman, αφού η κωδική λέξη '001' δεν θα μπορούσε να προκύψει για οποιαδήποτε κατανομή πιθανοτήτων. Αντ' αυτής θα μπορούσε να προκύψει η κωδική λέξη ΄0΄ και τοτε ο κώδικας θα μπορούσε να προέλθει με εφαρμογή του αλγορίθμου κωδικοποίησης Huffman, π.χ. για κατανομή πιθανοτήτων {0,55, 0,30, 0,10, 0,05}

3. Ο κώδικας έχει κωδικές λέξεις διάφορες μεταξύ τους και είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Όμως, δεν είναι Huffman, αφού δεν είναι βέλτιστος, για παράδειγμα οι δύο πρώτες κωδικές λέξεις μπορούν να γίνουν '00' και '01' και οι άλλες τρεις κωδικές λέξεις μπορούν να γίνουν '10', '110' και '111'.

4. Ο κώδικας αυτός είναι μη ιδιάζων αλλά δεν είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, δεν είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος ούτε άμεσος ούτε μπορεί να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman.

5. Ο κώδικας έχει κωδικές λέξεις διάφορες μεταξύ τους και είναι ελεύθερος προθέματος. Επομένως, είναι μη ιδιάζων, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος και άμεσος. Όμως, δεν είναι Huffman, αφού οι μεγαλύτερου μήκους κωδικές λέξεις δεν έχουν ίσο μήκος. Αν αντί της κωδικής λέξης '1110' μας δίνονταν κωδική λέξη '111', δηλαδή αντί του δεδομένου κώδικα είχαμε τον κώδικα {0, 10, 110, 111}, τότε αυτός είναι Huffman, π.χ. για κατανομή πιθανοτήτων {0,55, 0,30, 0,10, 0,05}, όπως και στο ερώτημα 2.

6. Ο κώδικας είναι ελεύθερος προθέματος και επομένως πληροί όλες τις ιδιότητες, μπορεί δε να προέλθει με εφαρμογή του αλγόριθμου κωδικοποίησης Huffman, με την ακόλουθη ενδεικτική κατανομή πιθανοτήτων εμφάνισης των 8 συμβόλων της πηγής: {¼ ¼, 1/8, 1/8, 1/8, 1/16, 1/32, 1/32}.

Κώδικες	Μη ιδιάζων	Μ.Α	άμεσος	huffman	Σχόλιο
01,10,11,000,001	✓	✓	✓	✓	huff:εχει πολλαπλασιο του 2 μεγαλυτερες λεξεις(2) και διαφερουν κατα 1 και αφου ειναι huf ειναι και ολα τα προηγουμενα
001,10,110,111	✓	✓	✓	✗	Επειδη αμεσος ειναι και ολα τα προηγουμενα αλλα δεν ειναι huff γιατι οι μεγαλυτερες λεξεις δεν ειναι πολλαπλασιο του 2(3) ασχετα αν οι 2 μεταξυ τους διαφερουν κατα 1
001,011,1001,1100,1110	✓	✓	✓	✗	
110,11,100,00,10	✓	✓	✗	✗	Μη αμεσος αρα και μη huff γιατι ειναι προθεματικος(11 στο 110),ειναι μοναδ.αποκωδ*(το εξηγω παρακατω)
0,10,110,1110	✓	✓	✓	✗	
10,11,010,011,000,0010,00110,00111	✓	✓	✓	✓	οι μεγαλυτερες λεξεις ειναι πολλαπλασιο του 2(2) και μεταξυ τους διαφερουν κατα 1

*Οταν ειναι κατι μεγαλυτερο(huffman) ειναι και ολα τα προηγουμενα η σειρα ειναι

Μη ιδιαζων

Μοναδικα αποκωδικοποιησιμος

Αμεσος

huffman

- **Μη ιδιαζων=οταν ολες οι λεξεις ειναι διαφορετικες**

- **Αμεσος=οταν δεν ειναι προθεματικος,δηλαδη οταν μια λεξη δεν ειναι προθεμα καποιας αλλης του συνολου π.χ (110,11,100,00,10) το 11 ειναι προθεμα του 110 αρα δεν ειναι αμεσος(ειναι προθεματικος)**

- **Huffman=οταν οι μεγαλυτερες λεξεις ειναι πολλαπλασιο του δυο και μεταξυ τους διαφερουν κατα ενα**
  - **π.χ 01,10,11,000,001 εχουμε 2 μεγαλυτερς λεξεις 000,001 και διαφερουν μεταξυ τους**
    κατα ενα, αρα ειναι huffman

  - **ομως το 001,10,110,111 δεν ειναι huffman γιατι ενω εχει 2 λεξεις που διαφερουν μεταξυ τους κατα ενα, το 110 και το 111 δεν ειναι μονο δυο οι μεγαλες λεξεις αλλα τρεις,εχει και το 001 αρα δεν ειναι πολλαπλασιο του 2 οι μεγαλες λεξεις (τεσσερις δηλαδη)**

- **Μοναδικα αποκωδικοποιησιμος=**
  - **αν εχουμε διαφορετικες λεξεις ισου μεγεθους τοτε ειναι μοναδικα αποκωδικοποιησιμος**
  - **Ολες οι λεξεις διαφορετικες ασχετως μεγεθους και αρχιζουν απο 1 ή απο¨0 τοτε ειναι μοναδικα αποκωδικοποιησιμος ¨**
  - **αν εχουμε αμεσο κωδικα(μη προθεματικος) τοτε ειναι και μοναδικα αποκωδικοποιησιμος(Οταν ειναι κατι μεγαλυτερο ειναι και ολα τα προηγουμενα)**
  - **Αν δεν εχουμε αμεσο κωδικα(προθεματικος δηλαδη) τοτε ελεγχουμε με ρουτινα αν ειναι μοναδικα αποκωδικοποιησιμος**
  - **Βρισκουμε την λεξη που ειναι προθεμα καποια αλλης,μετα αφαιρουμε απο αυτην την αλλη το προθεμα και αυτο που μενει το κανουμε προθεμα ωστε να επαναλαβουμε το πρωτο βημα.Ολο το θεμα ειναι να βρεθουμε καποια στιγμη με καποιο προθεμα που να ειναι ιδιο με καποια λεξη π.χ**

- **0,10,11,01**

  Το 0 ειναι προθεμα του 01
  Αρα αφαιρουμε(δεν αφαιρουμε με την μαθηματικη εννοια αλλα απλως το βγαζουμε-δεν κανουμε δηλαδη δυαδικη αφαιρεση) απο το 01 το 0 και μας μενει 1
  Το 1 ειναι προθεμα του 11 αρα το αφαιρουμε και απο κει και μας μενει 1
  Το 1 ειναι προθεμα του 10 το αφαιρουμε και μας μενει 0
  Το 0 ειναι ολοκληρη η λεξη 0 οποτε δεν ειναι μοναδικα αποκωδικοποιησιμος
  Αν δεν καταληγαμε σε καποια ολοκληρη λεξη τοτε θα ηταν μοναδικα αποκωδικοποιησιμος

- **11,00,10,100,110**

  Το 11 παει στο 110 μας μενει 0
  Το 0 παει στο 00 μας μενει 0
  Το 0 δεν παει πουθενα οποτε ειναι μοναδικα αποκωδικοποιησιμος

- **110,11,10**

  Το 11 στο 110 μας μενει 0
  Το 0 ομως μετα δεν ειναι προθεμα καμιας λεξης οποτε ειναι μοναδικα αποκωδικοποιησιμος

- **11,10,110,1110**

  Το 11 παει στο 1110 μας μενει 10
  Το 10 σε ολο το 10 αρα δεν ειναι μοναδικα αποκωδικοποιησιμος

ΘΕΜΑ 4

ΓΕ4/1112

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μέτρων ποσότητας πληροφορίας και την εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης. Σχετικά θέματα μπορείτε να βρείτε σε ΓΕ4 περασμένων ετών, όπως ΓΕ4/2010-11/Θ3, ΓΕ4/2009-10/Θ2, ΓΕ4/2008-09/Θ3, ΓΕ4/2006-7/Θ4 και* Θ3/ΓΕ/2004-5.

Θεωρούμε την πηγή που εκπέμπει τα στατιστικά ανεξάρτητα σύμβολα Α, Β, Γ, Δ, Ε, το πληροφορικό περιεχόμενο των οποίων περιέχεται στον ακόλουθο πίνακα:

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)
Α	1.81
Β	1.38
Γ	2.42
Δ	3.14
Ε	4.96

Ζητούνται τα εξής:

1. Η εντροπία της πηγής.
2. Κώδικας Shannon για τα σύμβολα της πηγής και η επίδοσή του.
3. Κώδικας καλύτερος αυτού που προέκυψε στο ερώτημα 2 και η επίδοσή του.

1). Γνωρίζω ότι το πληροφορικό περιεχόμενο της πηγής εκφράζεται από το $-log_2(p(x_i))$. Οπότε θα έχουμε π.χ. Σύμβολο "Α": $-log_2(p(x_1)) = 1.81 \rightarrow p(x_1) = 0.285$

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Οπότε η εντροπία της πηγής θα δίνεται από

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{6} p(x_i) \cdot log_2(p(x_i))$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα θα έχουμε

$$H(X) = -\begin{bmatrix} 0.285 \cdot log_2(0.285) + 0.384 \cdot log_2(0.384) + 0.186 \cdot log_2(0.186) \\ +0.113 \cdot log_2(0.113) + 0.032 \cdot log_2(0.032) \end{bmatrix}$$
$$= 0.516 + 0.530 + 0.451 + 0.355 + 0.158 = 2.01$$

Εναλλακτικά (Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώ περισσότερα δεκαδικά ψηφία αυξάνοντας την ακρίβεια της λύσης)

Οπότε υπολογίζουμε ξανά τις πιθανότητες των συμβόλων με τη χρήση του πληροφορικού περιεχομένου της πηγής, $-log_2(p(x_i))$.

Επομένως θα έχουμε π.χ. Σύμβολο “Α”: $-log_2(p(x_1)) = 1.81 \rightarrow p(x_1) = 0.2851$

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Α	1.81	0.2851
Β	1.38	0.3842
Γ	2.42	0.1868
Δ	3.14	0.1134
Ε	4.96	0.0321

Οπότε η εντροπία της πηγής θα δίνεται από

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{6} p(x_i) \cdot log_2(p(x_i))$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα θα έχουμε

$$H(X) = -\begin{bmatrix} 0.2851 \cdot log_2(0.2851) + 0.3842 \cdot log_2(0.3842) + 0.1868 \cdot log_2(0.1868) \\ +0.1134 \cdot log_2(0.1134) + 0.0321 \cdot log_2(0.0321) \end{bmatrix} =$$
$$= 0.5161 + 0.5302 + 0.4521 + 0.3561 + 0.1592 = 2.0137$$

2). Για τη μέθοδο Shannon θα χρησιμοποιήσουμε τη φθίνουσα σειρά των συμβόλων

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Β	1.38	0.384
Α	1.81	0.285
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Και μετά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Shannon

Προκειμένου να βρεθεί η απόδοση της πηγής, θα πρέπει να υπολογισθεί το μέσο μήκος του κώδικα

				Ανάπτυγμα Pi					
Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Μήκος li	Αθροιστικές πιθανότητες	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	Κωδική Λέξη
B	0.384	2	0	0	0	0	0	0	00
A	0.285	2	0.384	0	1	1	0	0	01
Γ	0.186	3	0.669	1	0	1	0	1	101
Δ	0.113	4	0.855	1	1	0	1	1	1101
E	0.032	5	0.968	1	1	1	1	0	11110

$$L = \sum_{i=1}^{5} p(x_i) \cdot l_i$$

$$L = 0.384 \cdot 2 + 0.285 \cdot 2 + 0.186 \cdot 3 + 0.113 \cdot 4 + 0.032 \cdot 5 = 2.508$$

Οπότε η απόδοση της πηγής ορίζεται ως

$$n = \frac{H(S)}{L} = 80.14\%$$

Εναλλακτικά (Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώ περισσότερα δεκαδικά ψηφία αυξάνοντας την ακρίβεια της λύσης)

Για τη μέθοδο Shannon θα χρησιμοποιήσουμε τη φθίνουσα σειρά των συμβόλων

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Β	1.38	0.3842
Α	1.81	0.2851
Γ	2.42	0.1868
Δ	3.14	0.1134
Ε	4.96	0.0321

Και μετά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Shannon

Προκειμένου να βρεθεί η απόδοση της πηγής, θα πρέπει να υπολογισθεί το μέσο μήκος του κώδικα

				Ανάπτυγμα Pi					
Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Μήκος li	Αθροιστικές πιθανότητες	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	Κωδική Λέξη
B	0.3842	2	0	0	0	0	0	0	00
A	0.2851	2	0.3842	0	1	1	0	0	01
Γ	0.1868	3	0.6693	1	0	1	0	1	101
Δ	0.1134	4	0.8561	1	1	0	1	1	1101
E	0.0321	5	0.9695	1	1	1	1	1	11111

$$L = \sum_{i=1}^{5} p(x_i) \cdot l_i$$

$$L = 0.3842 \cdot 2 + 0.2851 \cdot 2 + 0.1868 \cdot 3 + 0.1134 \cdot 4 + 0.0321 \cdot 5 = 2.513$$

Οπότε η απόδοση της πηγής ορίζεται ως

$$n = \frac{H(S)}{L} = 80.131\%$$

Σχόλιο : *Οπως γνωρίζουμε ο κώδικας Shannon αναφέρεται σε δυαδικό ανάπτυγμα και επομένως η ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων είναι σημαντική. Μια ένδειξη για το πλήθος των δεκαδικών είναι ότι θα πρέπει να είναι περίπου της ίδιας τάξης με το μήκος της κωδικής λέξης δηλ. για μέγιστο μήκος 5 κωδικής λέξης μια ακρίβεια τουλάχιστον τεσσάρων δεκαδικών ενδείκνυται εκτός και αν η άσκηση δίνει τις πιθανότητες σαν δεδομένες οπότε ακολουθούμε πλήρως τις υποδείξεις.*

ΘΕΜΑ 4 ΕΞ 2012Β

Δίνεται μια πηγή χωρίς μνήμη που παράγει τα σύμβολα {0,1}, με *p(0)=1/4*. Ζητούνται τα ακόλουθα:

α) Να βρεθεί η κωδικοποίηση όλων των μηνυμάτων της πηγής που αποτελούνται από δύο σύμβολα σύμφωνα με τον αλγόριθμο κωδικοποίησης Shannon.

β) Η κωδικοποίηση μηνυμάτων της πηγής που αποτελείται από 3 σύμβολα σύμφωνα με τον αλγόριθμο κωδικοποίησης Shannon δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Ακολουθίες Πηγής	Κωδικές Λέξεις
000	111111
001	11110
010	11100
011	101
100	11011
101	100
110	011
111	00

(i) Βελτιώνεται η συμπίεση με αυτή την κωδικοποίηση (ακολουθία συμβόλων μήκους 3) σε σχέση με την κωδικοποίηση του ερωτήματος α) (ακολουθία συμβόλων μήκους 2);

(Υπόδειξη: Για να μπορέσετε να αποφανθείτε για τη συμπίεση των δύο κωδικοποιήσεων θα πρέπει να συγκρίνετε το μέσο μήκος που αναλογεί σε κάθε ένα σύμβολο {0,1} της πηγής για την κάθε μία περίπτωση κωδικοποίησης)

(ii) Δείξτε έναν καλύτερο τρόπο συμπίεσης των μηνυμάτων του ερωτήματος (α).

α)

Ακολουθίες Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	P_i	Μήκος l_i	Ανάπτυγμα του P_i	Κωδικές Λέξεις
11	9/16	$P_1 = 0$	$l_1 = 1$	.0000	0
10	3/16	$P_2 = 9/16$	$l_2 = 3$	.1000	100
01	3/16	$P_3 = 12/16$	$l_3 = 3$	.1100	110
00	1/16	$P_4 = 15/16$	$l_4 = 4$	.1111	1111

β)

(i) Παρατηρούμε ότι το μέσο μήκος κωδικής λέξης για τα μηνύματα μήκους 2 συμβόλων είναι

$$L_2 = 1\cdot\frac{9}{16} + 3\cdot\frac{3}{16} + 3\cdot\frac{3}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{31}{16}\ bits\,/\,μήνυμα(μήκους\ 2)$$

και άρα το μέσο μήκος ανά σύμβολο είναι 31/16/2=31/32 bits/σύμβολο

Ομοίως για ακολουθίες 3 συμβόλων κάνοντας χρήση του πίνακα της εκφώνησης ως προς το μήκος της κάθε κωδικής λέξης και υπολογίζοντας τις πιθανότητες εμφάνισης του κάθε μηνύματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Ακολουθίες Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Μήκος l_i	Κωδικές Λέξεις
000	1/64	$l_1 = 6$	111111
001	3/64	$l_2 = 5$	11110
010	3/64	$l_3 = 5$	11100
011	9/64	$l_4 = 3$	101
100	3/64	$l_5 = 5$	11011
101	9/64	$l_6 = 3$	100
110	9/64	$l_7 = 3$	011
111	27/64	$l_8 = 2$	00

Από τον οποίο προκύπτει ότι

$$L_3 = 2\cdot\frac{27}{64} + 3\cdot\frac{9}{64} + 3\cdot\frac{9}{64} + 5\cdot\frac{3}{64} + 3\cdot\frac{9}{64} + 5\cdot\frac{3}{64} + 5\cdot\frac{3}{64} + 6\cdot\frac{1}{64} = \frac{186}{64}\ bits\,/\,μήνυμα(μήκους\ 3)$$

και άρα το μέσο μήκος ανά σύμβολο είναι (186/64)/3=31/32 bits/σύμβολο

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η συμπίεση στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια και άρα δεν βελτιώνεται με την αύξηση των μηνυμάτων από μήκος 2 σε 3 σύμβολα. Αντιθέτως αν αυξήσουμε το μήκος σε 4 τότε παρατηρείται βελτίωση της συμπίεσης. Για να το δούμε αυτό αρκεί να βρούμε το μέσο μήκος μηνύματος και στη συνέχεια να βρούμε το μέσο μήκος ανά σύμβολο.

(ii) Για να επιτύχουμε καλύτερη συμπίεση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο κωδικοποίησης Huffman για τα μηνύματα μήκους 2 καθότι γνωρίζουμε ότι πετυχαίνει βέλτιστη συμπίεση.

Ακολουθίες Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων				Κωδικές Λέξεις
11	9/16	*9/16*	*9/16*	1	0
10	3/16	*3/16*	*7/16*		10
01	3/16	*4/16*			110
00	1/16				111

Βλέπουμε ότι το μέσο μήκος είναι 27/16 bits/μήνυμα(μήκους 2) και άρα το μέσο μήκος ανά σύμβολο είναι 27/32 bits/σύμβολο πού είναι καλύτερη από τις συμπιέσεις των προηγούμενων αλγορίθμων.

ΘΕΜΑ 5 ΓΕ4/0708

Δίδεται ο πίνακας μετάβασης τριών καταστάσεων ***στατικής*** πηγής Markoff 1ης τάξης, η οποία παράγει τα σύμβολα φ, χ και ψ:

$\mathbf{U_n}$ \ $\mathbf{U_{n+1}}$	S_1	S_2	S_3
S_1	$P_{11} = 1/2$	$P_{12} = 1/4$	$P_{13} = 1/4$
S_2	$P_{21} = 1/4$	$P_{22} = 1/2$	$P_{23} = 1/4$
S_3	$P_{31} = 0$	$P_{32} = 1/2$	$P_{33} = 1/2$

Συμβολίζουμε με S_1, S_2, S_3, τις τρεις καταστάσεις της πηγής, με $\mathbf{U_n}$ την κατάσταση που βρίσκεται η πηγή τη χρονική στιγμή **n = 1,2, …,** και με $[P_{ij}]$ τις στατικές πιθανότητες μετάβασης, για κάθε χρονική στιγμή **n,** από την κατάσταση S_i στη κατάσταση S_j. (Δείτε την κατωτέρω επεξήγηση!)

Σχεδιάζουμε τρεις δυαδικούς κώδικες $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ (ένα για κάθε μία από τις καταστάσεις S_1 , S_2 και S_3), αποτελούμενους από τρεις κωδικές λέξεις ο καθένας, όσες και τα σύμβολα της πηγής (δείτε και πάλι την κατωτέρω επεξήγηση). Έτσι, για κάθε σύμβολο της πηγής έχουμε σε κάθε έναν από τους τρεις κώδικες ενδεχομένως διαφορετική κωδική λέξη, η οποία και χρησιμοποιείται σύμφωνα με την εκάστοτε κατάσταση της πηγής. Με βάση αυτή τη μέθοδο κωδικοποίησης της ***στατικής*** πηγής Markoff, υιοθετούμε τις ακόλουθες αρχές:

- Για κάθε χρονική στιγμή **n** και παρούσα κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, επιλέγουμε το κώδικα $\mathbf{C_i}$ που αντιστοιχεί στη κατάσταση $S_\mathbf{i}$,
- Στέλνουμε την κωδική λέξη $\mathbf{c_{ij}}$ του κώδικα $\mathbf{C_i}$ που αντιστοιχεί στο j, εκτελώντας συγχρόνως μετάβαση στην κατάσταση $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathbf{j}$,
- Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα για το επόμενο σύμβολο, κοκ.

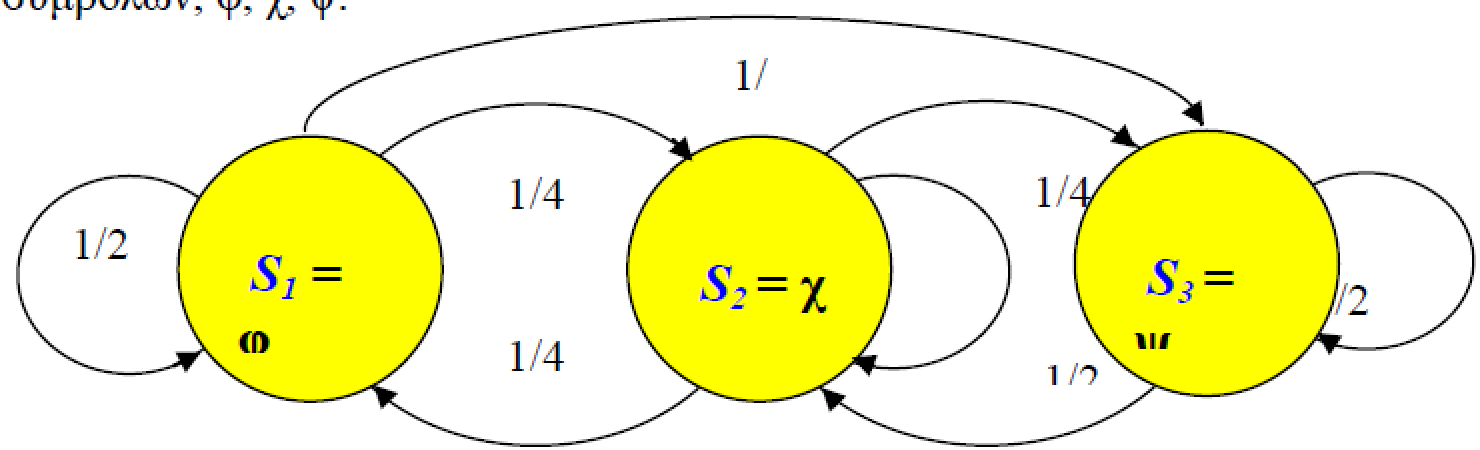
α) Σχεδιάστε κατά Huffman τους τρεις δυαδικούς κώδικες $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, και υπολογίστε το μέσο μήκος της κωδικής λέξης του επόμενου συμβόλου, υποθέτοντας ότι η κατάσταση προέλευσης είναι $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, i = 1,2,3.

β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός δυαδικών ψηφίων κωδικοποίησης για κάθε σύμβολο της πηγής?

γ) Πώς σχετίζεται το τελευταίο με την εντροπία H(U) της πηγής (αλυσίδας) Markoff?

δ) Ο πλεονασμός, ο πλεονασμός εξάρτησης και ο ολικός πλεονασμός της διακριτής πηγής.

(**Επεξήγηση:** Ο μηχανισμός εναλλαγής των τριών καταστάσεων εικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα. Σε κάθε χρονική στιγμή **n**, η μετάβαση από μία κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$ στην επόμενη $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathbf{j}$ συνοδεύεται από την εκπομπή ενός εκ των τριών συμβόλων, φ, χ, ψ.



Σύμφωνα και με τον πίνακα μετάβασης, όταν είναι γνωστή η κατάσταση προέλευσης $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, τα τρία σύμβολα φ, χ, ψ, που εκπέμπονται εν δυνάμει, εκπέμπονται με αντίστοιχες πιθανότητες P_{ij}, j = 1, 2, 3, και οδηγούν την επόμενη χρονική στιγμή **n+1** στην αντίστοιχη κατάσταση προορισμού $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathbf{j}$. Παρατηρείστε ότι, ανεξάρτητα από τη κατάσταση προέλευσης $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$, το σύμβολο **(φ ή χ ή ψ)** που εκπέμπεται κατά τη μετάβαση, ορίζεται μόνον από την κατάσταση προορισμού $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathbf{j}$.

Οι πιθανότητες μετάβασης $[P_{ij}]$ παίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο ο μηχανισμός εναλλαγής των καταστάσεων αντανακλάται στη σειρά συμβόλων που παράγεται από την πηγή Markoff. Παρατηρείστε στο συγκεκριμένο παράδειγμα ότι επειδή η πιθανότητα μετάβασης $P_{31} = \Pr\,[S_1 / S_3]$ από την κατάσταση S_3, στην κατάσταση S_1 είναι μηδενική, το σύμβολο **φ** δεν εκπέμπεται ποτέ μετά το σύμβολο **ψ.** Άρα οι πιθανότητες μετάβασης $[P_{ij}]$ παίζουν σημαντικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο ο μηχανισμός εναλλαγής των καταστάσεων της πηγής Markoff πρέπει να κωδικοποιηθεί για να επιτύχουμε βέλτιστη *συμπύκνωση/συμπίεση*.

Για να επιτύχουμε βέλτιστη επίδοση, δηλαδή μεγιστοποίηση του επιπέδου συμπίεσης της πηγής, σχεδιάζουμε κατά κανόνα τρεις δυαδικούς κώδικες $\mathbf{C_1, C_2, C_3}$ (ένα για κάθε μία από τις καταστάσεις S_1, S_2 και S_3), έτσι ώστε ο συνολικός κώδικας να παράγει, αντίστοιχα με τη σειρά καταστάσεων της πηγής, δηλαδή αντίστοιχα με τη σειρά των παραγομένων συμβόλων φ, χ, ψ, μια σειρά δυαδικών ψηφίων. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο κώδικας $\mathbf{C_1} = [\mathbf{c_{11}}, \mathbf{c_{12}}, \mathbf{c_{13}}]$ ορίζεται από τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{1j}]$ της κατάστασης S_1, ο κώδικας $\mathbf{C_2} = [\mathbf{c_{21}}, \mathbf{c_{22}}, \mathbf{c_{23}}]$ από τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{2j}]$ της κατάστασης S_2, και ο κώδικας $\mathbf{C_3} = [\mathbf{c_{31}}, \mathbf{c_{32}}, \mathbf{c_{33}}]$ από τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{3j}]$ της κατάστασης S_3. Παρατηρείστε ότι τα σύμβολα φ, χ, ψ, κωδικοποιούνται ενδεχομένως με διαφορετικές κωδικές λέξεις ανάλογα με την κατάσταση προέλευσης S_1, S_2, S_3.)

(α) Για λόγους ευκολίας, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του Τόμου Α, του βιβλίου Θεωρίας της Πληροφορίας & Κωδικοποίησης, σελ. 69-76.

Από τον δεδομένο **πίνακα μετάβασης της στατικής πηγής**

$\mathbf{U_n}$	$\mathbf{U_{n+1}}$ S_1	S_2	S_3
S_1	$P_{11} = 1/2$	$P_{12} = 1/4$	$P_{13} = 1/4$
S_2	$P_{21} = 1/4$	$P_{22} = 1/2$	$P_{23} = 1/4$
S_3	$P_{31} = 0$	$P_{32} = 1/2$	$P_{33} = 1/2$

Markoff 1ης τάξης, η οποία εκπέμπει τα τρία σύμβολα, φ, χ και ψ, μπορούμε να υπολογίσουμε τις $[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}]$, οι οποίες συμβολίζουν τις πιθανότητες των τριών καταστάσεων της πηγής, S_1, S_2 *και* S_3 .

Από την περιγραφή της ***στατικής*** πηγής Markoff 1ης τάξης, γνωρίζουμε ότι κάθε μετάβαση από μία κατάσταση $\mathbf{U_n}$ στην επόμενη $\mathbf{U_{n+1}}$, συνοδεύεται από την εκπομπή ενός εκ των τριών συμβόλων, φ, χ, ψ. Η παρούσα κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$ συνδέεται με την εκπομπή του τελευταίου παραχθέντος συμβόλου $\mathbf{X_n}$, ενώ η επόμενη κατάσταση $\mathbf{U_{n+1}} = S_\mathrm{j}$ χαρακτηρίζεται από την εκπομπή του επομένου συμβόλου $\mathbf{X_{n+1}}$.

Οι πιθανότητες εκπομπής των τριών συμβόλων εξαρτώνται από τη κατάσταση που βρίσκεται η πηγή σε δεδομένη χρονική στιγμή n. Δεδομένου ότι η πηγή Markoff που μας δίνεται είναι ***1ης τάξης***, καθώς επίσης και ***στατική***, ένας τρόπος κωδικοποίησης που αποδεικνύεται αποτελεσματικός είναι να σχεδιασθούν τρεις διαφορετικοί δυαδικοί κώδικες $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, και $\mathbf{C_3}$, ένας για κάθε μία από τις καταστάσεις S_1, S_2 και S_3.

Με βάση τις πιθανότητες μετάβασης $[P_{ij}]$, και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Huffman για κάθε προηγούμενη (η παρούσα) κατάσταση $\mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}$ (S_1, S_2, S_3) χωριστά, έχουμε:

S_1	Κώδικας Huffman $\mathbf{C_1}$			$l_{\mathbf{ij}}$
$\mathbf{c_{11}}$	P_{11} = ½	½ (0)	0	1
$\mathbf{c_{12}}$	P_{12} = ¼ (0)	½ (1)	10	2
$\mathbf{c_{13}}$	P_{13} = ¼ (1)		11	2

S_2	Κώδικας Huffman $\mathbf{C_2}$			$l_{\mathbf{ij}}$
$\mathbf{c_{21}}$	P_{21} = ¼ (0)	½ (1)	10	2
$\mathbf{c_{22}}$	P_{22} = ½	½ (0)	0	1
$\mathbf{c_{23}}$	P_{23} = ¼ (1)		11	2

S_3	Κώδικας Huffman $\mathbf{C_3}$		$l_{\mathbf{ij}}$
$\mathbf{c_{31}}$	P_{31} = 0	--	--
$\mathbf{c_{32}}$	P_{32} = ½ (0)	0	1
$\mathbf{c_{33}}$	P_{33} = ½ (1)	1	1

Άρα, το κατά Huffman μέσο μήκος της κωδικής λέξης του επόμενου συμβόλου, για τις τρεις καταστάσεις S_1, S_2, και S_3, υποθέτοντας ότι η προηγούμενη κατάσταση είναι δεδομένη, είναι:

$$\mathbf{L_i} = \mathrm{E}[\mathbf{l_{ij}} / \mathbf{U_n} = S_\mathbf{i}] = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{3}} l_{\mathbf{ij}} \mathbf{P_{ij}} = \begin{cases} 1{,}5 \;, \mathbf{i} = 1 \\ 1{,}5 \;, \mathbf{i} = 2 \\ 1{,}0 \;, \mathbf{i} = 3 \end{cases} \text{ δυαδικά ψηφία για κάθε σύμβολο.}$$

β) Ο μέσος αριθμός δυαδικών ψηφίων κωδικοποίησης για κάθε σύμβολο της πηγής είναι ο μέσος όρος **L** του $\mathbf{L_i}$, με βάση τις στατικές πιθανότητες $[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}]$, των τριών καταστάσεων S_1 , S_2 , S_3:

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}[\mathbf{L_i}] = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{p_i}\, \mathrm{E}[\mathbf{l_{ij}} / \mathbf{U_n} = S_i] \,.$$

Οι στατικές πιθανότητες $[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}]$, υπολογίζονται με βάση τη σχέση (σελ. 70 του βιβλίου):

$$[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}], \qquad \sum_{i=1}^{3} \mathbf{p_i} = \mathbf{1}\,,$$

από όπου προκύπτει ότι: $[\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}] = [2/9 , 4/9, 1/3]$.

Άρα: $\mathbf{L} = \mathbf{E}[\mathbf{L_i}] = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{p_i}\, \mathrm{E}[\mathbf{l_{ij}} / \mathbf{U_n} = S_i] = \mathbf{p_1}\, 1{,}5 + \mathbf{p_2}\, 1{,}5 + \mathbf{p_3}\, 1{,}0 = 4/3$

$= 1{,}333$ bits/σύμβολο πηγής.

γ) Σύμφωνα με τη σχέση (2.13), σελ. 73 του βιβλίου, η εντροπία H(U) της πηγής (αλυσίδας) Markoff είναι:

$$H_{\mu\varepsilon\,\mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S}) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=3}} \mathrm{p_i H(S_i)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=3}} \mathrm{p_i} \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{j=3}} P_{ij} \log P_{ij} = \mathbf{1{,}333333\ bits/σύμβολο}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με τον ανωτέρω τρόπο κωδικοποίησης πετύχαμε άριστη κωδικοποίηση, αφού το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων είναι ίσο με την εντροπία της πηγής.

δ) Ο πλεονασμός της διακριτής πηγής μπορεί να υπολογισθεί, σύμφωνα με τη σχέση (2.3) στη σελ. 48 του βιβλίου:

$$red = 1 - \frac{H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S})}{\log 3}\text{, όπου } H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S}) = -\sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} \mathbf{p_i \log p_i} = \mathbf{1{,}530493}.$$

Άρα, ο πλεονασμός χωρίς μνήμη της διακριτής πηγής είναι: ***red*** **= 0,034366**.

Παρόμοια, ο πλεονασμός εξάρτησης της διακριτής πηγής υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2.17) στη σελ. 74 του βιβλίου:

$$\boldsymbol{red_{\varepsilon\xi}} = 1 - \frac{H_{\mu\varepsilon\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S})}{H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S})} = 1 - \frac{H_{\mu\varepsilon\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S})}{1{,}530493} = 1 - \frac{1{,}333333}{1{,}530493} = \mathbf{0{,}128821.}$$

Τέλος, σύμφωνα με τη σχέση (2.18) του βιβλίου στη σελ. 74, ο ολικός πλεονασμός της διακριτής πηγής είναι:

$$\boldsymbol{red_{o\lambda}} = 1 - \frac{H_{\mu\varepsilon\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S})}{max\, H_{\chi\omega\rho\acute{\iota}\varsigma\ \mu\nu\acute{\eta}\mu\eta}(\mathrm{S})} = 1 - \frac{1{,}333333}{\log 3} = \mathbf{0{,}15876.}$$