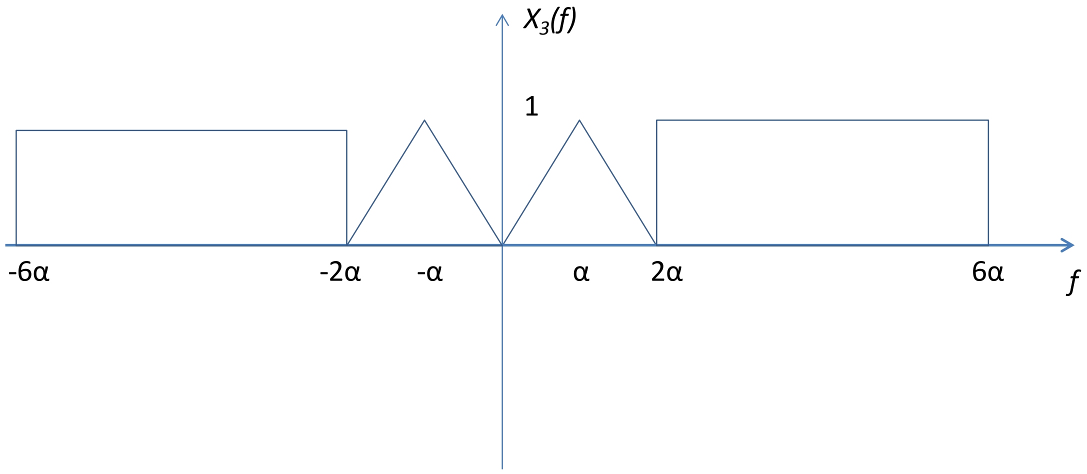
ΘΕΜΑ 2 ΕΞ2011Α (τελευταίο ερώτημα)

Δίνεται το σήμα $x_1(t) = a \cdot \text{sinc}^2(a \cdot t),\ a > 0$. και το σήμα $x_2(t) = 4a \cdot \text{sinc}(4a \cdot t),\ a > 0$. Τα δύο σήματα πρέπει να μεταδοθούν με πολυπλεξία διαίρεσης συχνότητας (FDM) ως εξής: Το αμφίπλευρο φάσμα του $x_1(t)$ θα τοποθετηθεί στην περιοχή συχνοτήτων [0, 2α Hz] ενώ το αμφίπλευρο φάσμα του $x_2(t)$ θα μετατοπιστεί στην περιοχή συχνοτήτων [2α Hz,6α Hz], χωρίς να μεταβληθούν τα πλάτη τους. Η μετατόπιση αυτή γίνεται με κατάλληλη διαμόρφωση DSB του καθενός από τα σήματα $x_1(t),\ x_2(t)$ οπότε προκύπτει το σήμα $x_3(t)$.

Το σήμα $x_3(t)$ του ερωτήματος υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα 5πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 20dB. Να υπολογίσετε το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM, υποθέτοντας ότι η παράμετρος a ισούται με 40. *(Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση σήματος με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (σε μονάδες decibel) ισούται με* $SNR = 10 \cdot \log_{10}(L^2)$*)*

Απάντηση

Το φάσμα πλάτους $X_3(f)$ του FDM σήματος απεικονίζεται ως εξής:



$$X_3(f) = rect\left(\frac{f+4a}{4a}\right) + tri\left(\frac{f+a}{a}\right) + tri\left(\frac{f-a}{a}\right) + rect\left(\frac{f-4a}{4a}\right)$$

και η έκφραση στο πεδίο του χρόνου είναι

$$x_3(t) = 4a\sin c(4at)\left[e^{j2\pi 4at} + e^{-j2\pi 4at}\right] + a\sin c^2(at)\left[e^{j2\pi at} + e^{-j2\pi at}\right]$$

Το σήμα $x_3(t)$ υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα 5πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια μετατρέπεται σε ψηφιακό σήμα PCM, για τη μετάδοση του οποίου απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος τουλάχιστον 20dB.

Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι ίση με $f_{s,\min} = 2f_{\max} = 2\cdot 6aHz = 12aHz$, συνεπώς η συχνότητα δειγματοληψίας του ερωτήματος είναι $f_\delta = 5f_{s,\min} = 5\cdot 12aHz = 60aHz$.

Προκειμένου το $x_3(t)$ να μεταδοθεί με PCM και SNR≥20dB θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε: $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log L$.

Συνεπώς ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών ομοιόμορφης κβάντισης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $20\log_{10} L \geq 20 \Rightarrow L \geq 10^{\frac{20}{20}} = 10$ άρα κατ' ελάχιστον απαιτούνται L=10 στάθμες και επειδή θα πρέπει να είναι δύναμη του 2 τελικά θα έχουμε 16 στάθμες κβάντισης.

Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για τη μετάδοση του σήματος PCM είναι $B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_\delta \log_2 L = \frac{1}{2} 60\alpha\cdot 4 = 120\alpha\ Hz = 120\cdot 40Hz = 4.8kHz$.

ΘΕΜΑ 4 ΕΞ2009Β

Δίδεται κώδικας C που προέκυψε με εφαρμογή του αλγορίθμου κωδικοποίησης Huffman και του οποίου η αντιστοίχηση των κωδικών λέξεων με τα σύμβολα της πηγής (s1,…s9) περιέχεται στον ακόλουθο πίνακα:

Σύμβολα	**Κωδικές Λέξεις**
s1	011000
s2	01100100
s3	010
s4	0110011
s5	01101
s6	1
s7	01100101
s8	0111
s9	00

α) Να βρείτε τα σύμβολα εκείνα που έχουν το μεγαλύτερο και το μικρότερο πληροφοριακό περιεχόμενο. Εξηγείστε την απάντηση σας.

β) Αν δίνεται ότι τα σύμβολα της πηγής παράγονται βάσει των πιθανοτήτων {0.28, 0.27, 0.25, 0.1, 0.05, 0.04, 0.005, 0.003, 0.002 }, να αντιστοιχίσετε τις πιθανότητες αυτές στα ανωτέρω σύμβολα της πηγής, s1 έως s9, έτσι ώστε το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων να παραμείνει βέλτιστο. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

α) Το σύμβολο που μεταφέρει το μεγαλύτερο πληροφοριακό περιεχόμενο πρέπει να είναι ανάμεσα σε αυτά που αντιστοιχούν στις κωδικές λέξεις με το μεγαλύτερο μήκος αφού αυτές οι κωδικές λέξεις έχουν ανατεθεί στις μικρότερες πιθανότητες λόγω του αλγορίθμου του Huffman. Με μία επισκόπηση του πίνακα των κωδικών λέξεων παρατηρούμε ότι τα σύμβολα s2 και s7 έχουν τις μεγαλύτερες κωδικές λέξεις με μήκος 8. Κατά αντιστοιχία η s6 έχει το μικρότερο πληροφοριακό περιεχόμενο.

β) Για να αντιστοιχήσουμε τις πιθανότητες στα σύμβολα της πηγής θα πρέπει να δούμε τις αντίστοιχες κωδικές λέξεις. Με δεδομένο ότι οι κωδικές λέξεις προέκυψαν από τον αλγόριθμο Huffman θα πρέπει να ξεκινήσουμε από τα σύμβολα με τις δύο μικρότερες πιθανότητες και αυτές να τις αντιστοιχήσουμε στα σύμβολα με τις δύο μεγαλύτερες κωδικές λέξεις. Αυτό συμβαίνει διότι ο Huffman κατασκευάζει το δένδρο των κωδικών λέξεων από τα φύλλα προς την ρίζα, δηλαδή αρχίζει από τα σύμβολα με τις μικρότερες πιθανότητες και προχωράει προς τις μεγαλύτερες πιθανότητες. Άρα οι πιθανότητες 0.002 και 0.003 πρέπει να αντιστοιχηθούν στα σύμβολα s2 και s7 αφού αυτά έχουν τις μεγαλύτερες κωδικές λέξεις μήκους 8. Στη συνέχεια το σύμβολο s4 είναι το μοναδικό με μήκος κωδικής λέξης 7, συνεπώς θα πρέπει να αντιστοιχηθεί στην αμέσως μικρότερη πιθανότητα που είναι η 0.005. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να αντιστοιχήσουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες καταλήγοντας στον παρακάτω πίνακα.

Σύμβολα	Κωδικές λέξεις	Πιθανότητες
s6	1	0,28
s9	00	0,27
s3	010	0,25
s8	0111	0,1
s5	01101	0,05
s1	011000	0,04
s4	0110011	0,005
s7	01100101	0,003
s2	01100100	0,002