ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.4
4^{η} ΟΣΣ
21/3/2015

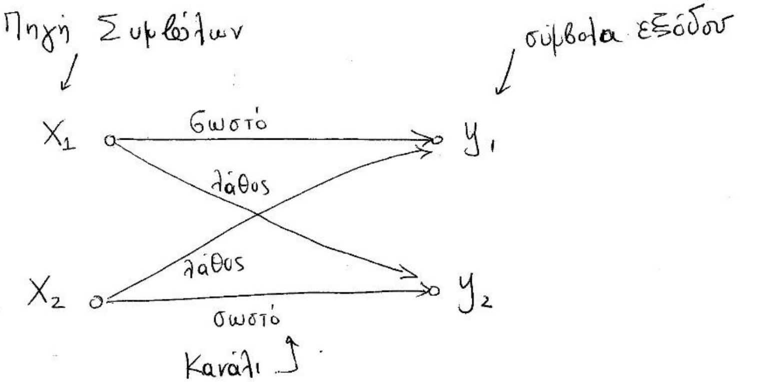
Συμπληρωματικές Διαφάνειες στα Κανάλια Επικοινωνίας

Νίκος Δημητρίου

Σκοπός: Μεταφορά συμβόλων διαμέσου του καναλιού διατηρώντας την κατανομή των μεταξύ τους πιθανοτήτων $p(x_i)$

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 5-19

Κανάλια Επικοινωνίας

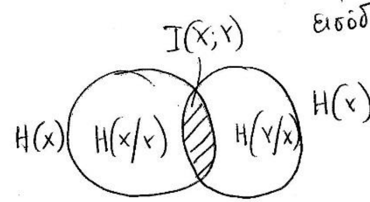


Πίνακας Μετάβασης Καναλιού

σύμβολα εξόδου

$$P = [p_{ij}] = P(y_j/x_i) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ & \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix} \end{array}$$

σύμβολα εισόδου



$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

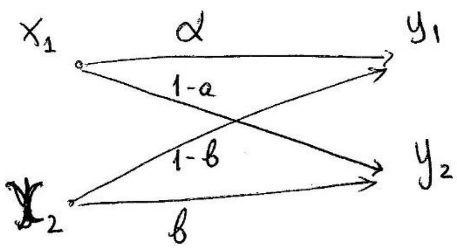
ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρει το κανάλι.

αβεβαιότητα της Y

Χωρητικότητα καναλιού

$$C = \max(I(X;Y))$$

Παράδειγμα. Ενθόρυβο κανάλι. 3)



$$P = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \\ x_2 \end{array} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{cc} \alpha & 1-\alpha \\ & \\ 1-b & b \end{array}\right] \end{array}$$

$$H(Y/X) = -p(y_1/x_1)\log\left[P(y_1/x_1)\right]\cdot p(x_1) -$$

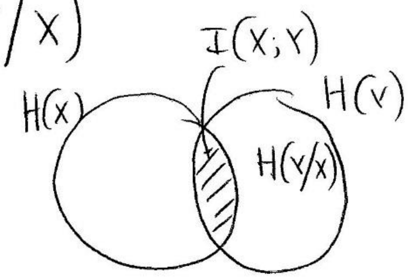
$$-p(y_1/x_2)\log\left[P(y_1/x_2)\right]p(x_2) - p(y_2/x_1)\log\left[P(y_2/x_1)\right]p(x_1) -$$

$$-p(y_2/x_2)\log\left[P(y_2/x_2)\right]\ p(x_2) =$$

$$= -a\log(\alpha)\,p(x_1) - (1-b)\log(1-b)\,p(x_2) - (1-a)\log(1-a)\,p(x_1) -$$

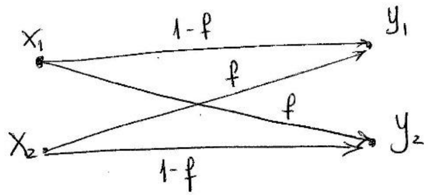
$$-b\log(1-b)\,p(x_2) \neq 0$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



$$C = \max_{p(x_i)} \left\{ I(X;Y) \right\}$$

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι



$$p(y_1) = (1-f)\,p(x_1) + f\,p(x_2)$$

$$p(y_2) = f\,p(x_1) + (1-f)\,p(x_2)$$

Αμοιβαία Πληροφορία.

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{2} p(y_j)\log p(y_j)$$

$$H(Y/X) = -(1-f)\log(1-f)\,p(x_1) - f\log(f)\,p(x_2) -$$

$$-(1-f)\log(1-f)\,p(x_2) - f\log(f)\,p(x_1) =$$

$$= p(x_1)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] + p(x_2)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] =$$

$$= \left[p(x_1) + p(x_2)\right]\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] = -(1-f)\log(1-f) - f\log f =$$

$= H(f)$ ανεξάρτητη των πιθανοτήτων των εισόδων.

Άρα $I(X;Y) = H(Y) - H(f)$

$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)}\{H(Y) - H(f)\} = \max_{p(x_i)}\{H(Y)\} - H(f)$$

Μέγιστη $H(Y) \Rightarrow$ ομοιόμορφα κατανεμημένες $p(y_j) = \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$ 6

<u>Έλεγχος:</u> Υπάρχουν κατάλληλες $p(x_i)$ που να δίνουν ομοιόμορφες $p(y_j)$?

<u>Ναι</u> εφόσον σε συμμετρικά κανάλια ομοιόμορφα κατανεμημένες είσοδοι οδηγούν σε ομοιόμορφα κατανεμημένες εξόδους

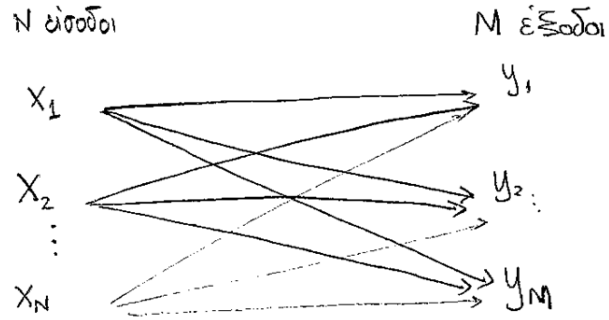
Αν $p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} p(y_1) = (1-f)\cdot\frac{1}{2} + f\,\frac{1}{2} = \frac{1-f+f}{2} = \frac{1}{2} \\ p(y_2) = f\,\frac{1}{2} + (1-f)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα $C = \max_{p(x_i)} H(Y) - H(f) = 1 - H(f)$

<u>Παρατηρήσεις:</u> *Η έξοδος μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη εάν ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

- *Η είσοδος είναι ομοιόμορφά κατανεμημένη και το κανάλι είναι συμμετρικό ή αθόρυβο*
- *Η είσοδος δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα κατανεμημένη αλλά το κανάλι είναι συμμετρικό με f=1/2*
- *Το κανάλι είναι ενθόρυβο γενικής μορφής (βλ. διαφάνεια 3) και με κατάλληλους συνδυασμούς των πιθανοτήτων $p(y_j/x_i)$ και $p(x_i)$ προκύπτουν ομοιόμορφές $p(y_j)$*

Κανάλια Επικοινωνίας



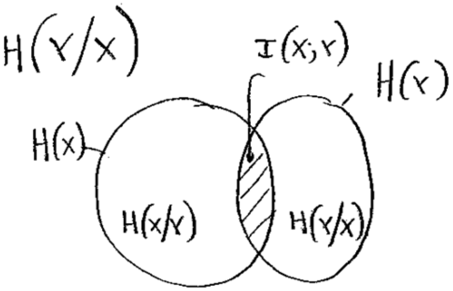
Πίνακας Μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_2) & \cdots & p(y_M/x_1) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ p(y_1/x_N) & & \cdots & p(y_M/x_N) \end{array}\right] \end{array}$$

Ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i) = 1$ (Το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα)

Αμοιβαία Πληροφορία:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 20-29

Χωρητικότητα:

$$C = \max\left[I(X;Y)\right]$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j)\cdot \log\left[p(y_j)\right]$$

στήλη j του πίνακα $P(Y/X)$

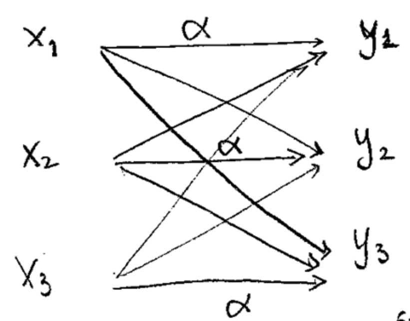
$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(y_j/x_i)\cdot p(x_i)$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left\{p(y_j/x_i)\cdot \log\left[p(y_j/x_i)\right]\cdot p(x_i)\right\}$$

Ειδικές Περιπτώσεις

Συμμετρικό Κανάλι → $N=M$

→ $p(y_i/x_i) = \alpha \quad \forall i$



$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

συμμετρικό Κανάλι 3 εισόδων - εξόδων

Μερικώς Συμμετρικό Κανάλι

Οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών.

π.χ. $$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \end{bmatrix}$$

Ιδιότητα Συμμετρικών / Μερικώς Συμμετρικών Καναλιών: 3

$$H(Y/X) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i) \log[p(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

Εξήγηση:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \{p(y_j/x_i) \log[p(y_j/x_i)]\, p(x_i)\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \{p(x_i) \underbrace{\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i) \log[p(y_j/x_i)]\}}\}$$

Το ίδιο άθροισμα δίνουν όλες οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αφού αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών

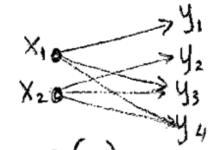
$$= -\underbrace{\sum_{i=1}^{N} [p(x_i)]}_{=1} \cdot \{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i) \log[p(y_j/x_i)]\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i) \log[p(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

Παράδειγμα διαφάνειας 30

παρατήρηση: μερικώς συμμετρικό κανάλι.

$$P(Y/X)=\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ x_2 & 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{array}$$



$p(x_1)=a$

$p(x_2)=1-a$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log p(y_j)$$

$$p(y_j)=\sum_{i=1}^{2} p(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{2} p(y_j/x_i)\cdot p(x_i)$$

$$p(y_1)=\sum_{i=1}^{2} p(x_i,y_1)=p(x_1,y_1)+p(x_2,y_1)=$$

$$= p(y_1/x_1)\cdot p(x_1)+p(y_1/x_2)\cdot p(x_2)=$$

$$= 0,8\cdot a + 0(1-a) = 0,8a$$

όμοια

$$p(y_2)=0,8(1-a)$$

$$p(y_3)=0,1$$

$$p(y_4)=0,1$$

$$H(Y)=\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log p(y_j) = 0,66-0,8a\log(0,8a)-$$
$$-0,8(1-a)\log[0,8(1-a)]$$

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 30-34

Υπολογισμός $H(Y/X)$

στοιχεία πίνακα $P(Y/X)$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i)\log\left[P(y_j/x_i)\right]\cdot P(x_i) =$$

δεδομένο

$$= -\sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i)\log P(y_j/x_i)$$

$i=1$ ή 2
επειδή το κανάλι
είναι μερικώς
συμμετρικό

$$= -\left[0{,}8\log(0{,}8) + 0{,}1\log 0{,}1 + 0{,}1\log 0{,}1\right] = 0{,}9219$$

Χωρητικότητα

$$C = \max\left[I(X;Y)\right] = \max\left[H(Y) - H(Y/X)\right]$$

- γ) Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή *α.*
- Είναι

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}[H(Y) - H(Y/X)] \\
&= \max_{p(x)}\left[0{,}66 - 0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575 - 0{,}66)\right] \\
&= \max_{p(x)}\left[-0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575\right].
\end{aligned}
$$

- Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του a που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο.

- Επομένως,

$$\frac{dI(X;Y)}{da} = \left[-0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a) - 0{,}2575\right]'$$

$$= -0{,}8\left[(a)'\log(0{,}8a) + a(\log(0{,}8a))'\right]$$

$$-0{,}8\left[(1-a)'\log(0{,}8(1-a)) + (1-a)(\log(1-a))'\right]$$

$$= -0{,}8\left[\log(0{,}8a) + a\frac{\log e}{a}\right] - 0{,}8\left[(-1)\log(0{,}8(1-a)) + (1-a)(-1)\frac{1}{1-a}\log e\right]$$

$$= -0{,}8\log(0{,}8a) - 0{,}8\log e + 0{,}8\log(0{,}8(1-a)) + 0{,}8\log e$$

$$= -0{,}8\left[\log(0{,}8a) - \log(0{,}8(1-a))\right] = -0{,}8\log\frac{0{,}8a}{0{,}8(1-a)} = 0 \Rightarrow$$

$$\log\frac{a}{1-a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{1-a}\right) = 2^0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

- Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του *a*, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού
- *C=0,8 bits/symbol.*

ΘΕΜΑ 4 ΕΞ2012Β

Μια ψηφιακή πηγή **3** συμβόλων $\{x_1, x_2, x_3\}$ εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο x_1 από την πηγή είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι πιθανότητες εκπομπής των άλλων δύο συμβόλων είναι ίσες. Να απαντηθούν τα ερωτήματα σε κάθε μία από τις παρακάτω 2 περιπτώσεις

α) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα <u>σε κανάλι χωρίς θόρυβο.</u> Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η χωρητικότητα του καναλιού **C** και η εντροπία της πηγής **H(X)**
- **ii)** Η εντροπία **H(X/Y)**

β) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα <u>σε ενθόρυβο κανάλι</u> με πίνακα μετάβασης,

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η εντροπία της πηγής **H(X)** και η **H(Y/X)**
- **ii)** Η αμοιβαία πληροφορία του ενθόρυβου καναλιού.

Για επιπλέον παραδείγματα
βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides
διαφάνειες 35-43

α). Κανάλι χωρίς θόρυβο

i) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων είναι $p(x_1)=0.4$ ενώ οι υπόλοιπες είναι $p(x_2)=p(x_3)=0.3$
Άρα η εντροπία της πηγής είναι:

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2(p(x_i))=-\left[0.4\cdot\log_2(0.4)+0.3\cdot\log_2(0.3)+0.3\cdot\log_2(0.3)\right]\approx 1.57\ bits$$

Γνωρίζω ότι η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς θόρυβο ισούται με τη μέγιστη τιμή του **H(X)** («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89) η οποία προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε
$p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=\frac{1}{3}$
Η χωρητικότητα δίνεται από

$$C=\max(H(X))=\log_2 q\Big|_{q=3}=\log_2(3)=1.58\ \text{bits/symbol}$$

όπου q είναι ο αριθμός συμβόλων εισόδου

ii) Επιπλέον, η εντροπία H(X/Y) ισούται με 0 αφού X=Y κι όπως αποδεικνύεται και στο βιβλίο σελ. 90.

β) Ενθόρυβο Κανάλι

i) Αν στο κανάλι εισαγάγουμε θόρυβο δεν αναμένεται να αλλάξει η εντροπία της πηγής αλλά μόνο η χωρητικότητα του καναλιού η οποία αναμένεται να είναι μικρότερη από αυτή του ερωτήματος (α)
Επομένως η εντροπία της πηγής H(X) είναι ίδια με αυτή του ερωτήματος (α).

Δεδομένου ότι το κανάλι έχει πίνακα μετάβασης

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Η εντροπία H(Y/X) δίνεται από τον τύπο

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{3} p(x_i)H(Y/X=x_i) \qquad (1)$$

Άρα για κάθε i=1,2,3 έχουμε

$$H(Y/X=x_i)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις πιθανότητες κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης έχουμε:

$$H(Y/X=x_1)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_1)\log p(y_j/x_1)=-0.5\log 0.5-0.5\log 0.5-0\log 0=1\,bits$$

$$H(Y/X=x_2)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_2)\log p(y_j/x_2)=-0\log 0-0.25\log 0.25-0.75\log 0.75=0,811\,bits$$

$$H(Y/X=x_3)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_3)\log p(y_j/x_3)=-0.5\log 0.5-0\log 0-0.5\log 0.5=1\,bits$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (1) έχουμε

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{3} p(x_i)H(Y/X=x_i)=0.4\cdot 1+0.3\cdot 0.811+0.3\cdot 1\approx 0,943\,bits \qquad (2)$$

ii).

Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) θα κάνουμε χρήση του τύπου $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εξόδου $P(Y)=\{p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\}$ οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω

$$P[Y]=[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3,x_i)\right]$$

Γνωρίζω ότι ισχύει $p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)$ («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25) και επομένως θα έχουμε

$$P(Y,X)=\begin{bmatrix} p(y_1,x_1) & p(y_2,x_1) & p(y_3,x_1) \\ p(y_1,x_2) & p(y_2,x_2) & p(y_3,x_2) \\ p(y_1,x_3) & p(y_2,x_3) & p(y_3,x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p(x_1)\cdot p(y_1/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_2/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_3/x_1) \\ p(x_2)\cdot p(y_1/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_2/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_2) \\ p(x_3)\cdot p(y_1/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_2/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_3/x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.4\cdot 0.5 & 0.4\cdot 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3\cdot 0.25 & 0.3\cdot 0.75 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0 & 0.3\cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0.225 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Οπότε το ζητούμενο δίνεται από

$$P[Y] = [p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)] = \left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1, x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2, x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3, x_i) \right] =$$

$$= [0.35 \quad 0.275 \quad 0.375]$$

$$p(y_1) = 0.35$$

$$p(y_2) = 0.275$$

$$p(y_3) = 0.375$$

Συνεπώς

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i) \log_2(p(y_i)) = -\left[0,35 \cdot \log_2(0,35) + 0,275 \cdot \log_2(0,275) + 0,375 \cdot \log_2(0,375)\right] = 1.573\, bits$$

Από την παραπάνω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού είναι:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = 1.573 - 0.943 \approx 0.63\, bits$$

ΘΕΜΑ 4

ΕΞ2011Α

Έστω η πηγή χωρίς μνήμη S1 που παράγει τα σύμβολα {α,β,γ,δ,ε} βάσει της κατανομής {0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2} και η πηγή με μνήμη S2, η οποία χαρακτηρίζεται από τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

ενώ οι στατικές πιθανότητες π_i, i=1,2,3,4,5 που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος $\boldsymbol{\pi P}=\boldsymbol{\pi}$ είναι όπως στην περίπτωση της πηγής χωρίς μνήμη δηλαδή $\pi_i=0.2$, i=1,2,3,4,5.

α) Να βρείτε ποια από τις δύο πηγές έχει την μικρότερη εντροπία.

β) Αν θεωρήσουμε τον παραπάνω πίνακα μετάβασης ως τον πίνακα μετάβασης ενός καναλιού και ότι η S1 είναι η πηγή συμβόλων που αποστέλλονται με την κατανομή του ερωτήματος (α) πάνω από αυτό το κανάλι βρείτε τα παρακάτω:

(i) Τι είδους *χαρακτηριστικό* κανάλι αντιπροσωπεύει ο πίνακας μετάβασης P;

(ii) Βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού αυτού. Είναι δυνατόν το πληροφορικό περιεχόμενο που μετάδωσε η πηγή S1 πάνω από το κανάλι να είναι ίσο με την χωρητικότητα του καναλιού; Εξηγείστε την απάντησή σας.

α) Η πηγή με μνήμη έχει μικρότερη εντροπία από την αντίστοιχη χωρίς μνήμη λόγω του ότι η εξάρτηση μειώνει την εντροπία της πηγής. Άρα H(S1)>H(S2).

Εναλλακτικά για να υπολογίσουμε την εντροπία της πηγής S1 η οποία είναι χωρίς μνήμη και άρα τα σύμβολα παράγονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο εφαρμόζουμε τον τύπο της εντροπίας

$$H(S1) = -\sum_{i=1}^{5} p_i \log(p_i) = -\sum_{i=1}^{5} 0.2\log(0.2) = 2.322\ bits$$

Στην περίπτωση της πηγής με μνήμη S2 η εντροπία της πηγής είναι

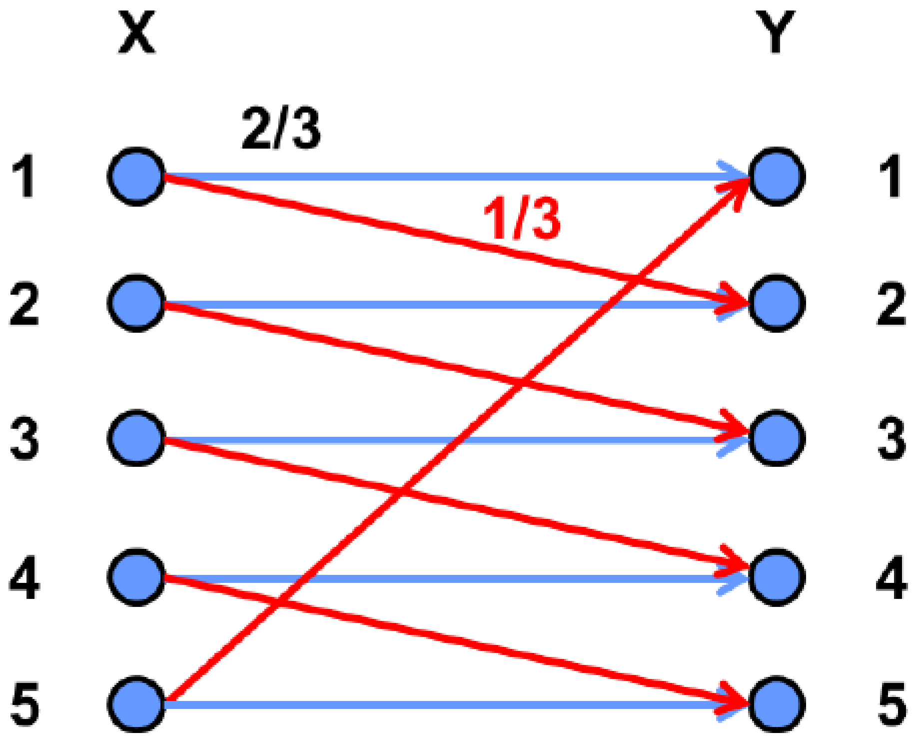
$$H(S2) = -\sum_{i=1}^{5} \pi_i \sum_{j=1}^{5} p_{ij} \log(p_{ij}) = -\sum_{i=1}^{5} 0.2\left(\frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{3}(\log 2 - \log 3) + \frac{1}{3}(\log 1 - \log 3)\right) = \frac{2}{3}0.585 + \frac{1}{3}1.585$$

$$= 0.918\ bits$$

Οπότε H(S1)>H(S2).

β) Ο πίνακας μετάβασης αντιπροσωπεύει κανάλι το οποίο συμπεριφέρεται ως ενθόρυβη γραφομηχανή.



Για να βρούμε τη χωρητικότητα του καναλιού πρέπει πρώτα να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y)

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

Άρα

$$H(Y/X) = -\left[\sum_{j=1}^{5} P(X=j) \sum_{i=1}^{5} P(Y=i/X=j) \log\left(P(Y=i/X=j)\right)\right]$$

$$H(Y/X) = -\left[\sum_{j=1}^{5} P(X=j) \left\{\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right\}\right]$$

$$= -\left[\frac{2}{3}\log\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= H\left(\frac{1}{3}\right)$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$I(X;Y) = H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right)$$

Αφού βρήκαμε την αμοιβαία πληροφορία, προχωρούμε να βρούμε την χωρητικότητα του καναλιού που προκύπτει από αυτή μέσω της μεγιστοποίησή της

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\left(H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Άρα το πρόβλημα μεγιστοποίησης μεταφέρεται στην μεγιστοποίηση της H(Y) η οποία παίρνει την μέγιστη τιμή όταν οι έξοδοι είναι ισοπίθανοι, δηλαδή όταν

H(0,2)=log5

Άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \log 5 - H\left(\frac{1}{3}\right) bits$$

Επειδή η μεγιστοποίηση της H(Y) είναι συναρτήσει των πιθανοτήτων εισόδου θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει κατάλληλη κατανομή πιθανοτήτων εισόδου η οποία όντως μεγιστοποιεί την εντροπία εξόδου. Πράγματι παρατηρούμε ότι η πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της πηγής εισόδου μεγιστοποιούν την εντροπία της εξόδου.

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{5} P(Y=j/X=i)P(X=i)$$
$$= P(Y=i/X=i)P(X=i) + P(Y=i/X=i-1)P(X=i-1) \quad , \text{ για κάθε i,j=1,2,3,4,5}$$
$$= \frac{2}{3}0.2 + \frac{1}{3}0.2 = 0.2$$

Άρα στην περίπτωσή μας το πληροφορικό περιεχόμενο ισούται με την μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού