ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

2η ΟΣΣ / ΠΛΗ22 / ΑΘΗ.4 /05.12.2015

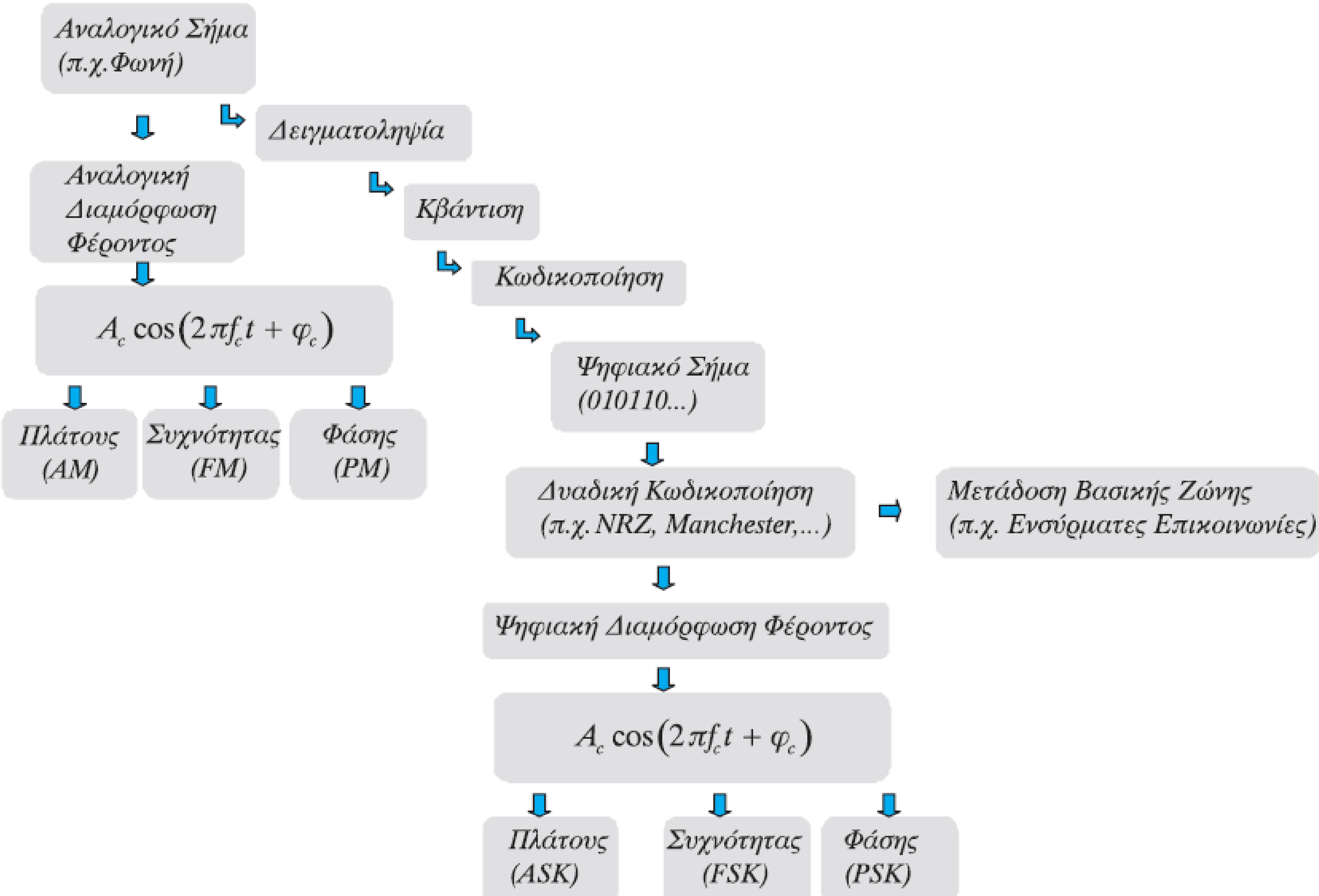
Νίκος Δημητρίου

(Σημείωση: Η παρουσίαση αυτή συμπληρώνει τα αρχεία PLH22_OSS2_diafaneies_v1.0.ppt, και octave_matlab_tutorial_v1.0.ppt που βρίσκονται στον υποφάκελο ΟΣΣ2 του study.eap.gr κι έχει επιπλέον παραδείγματα)

Βασικά θέματα 2ης ΟΣΣ

- Εισαγωγή στα Σήματα
- Περιοδικότητα Σημάτων
- ΜΣ Fourier
- Εισαγωγή στο OCTAVE/MATLAB
- Εισαγωγή στα Συστήματα - Φίλτρα
- Γραμμικές Διαμορφώσεις

Στάδια Επεξεργασίας σημάτων



Εισαγωγή στα Σήματα

- Ημιτονοειδή Σήματα
- Ορθογώνιος Παλμός
- Τριγωνικός Παλμός
- Κρουστικά Σήματα
- Σήμα Βήματος

- *(παραπομπή στο PLH22_OSS2_diafaneies_v1.0.ppt διαφάνειες 7-19 (ορισμοί) & 20-30 (παραδείγματα - εφαρμογές)*

2.2.7.6 Κρουστική Συνάρτηση δ(x) (Dirac)

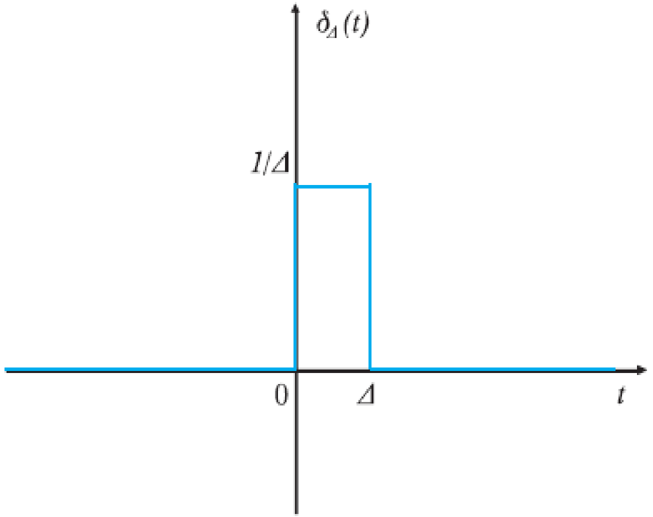
Λαμβάνεται ένας ορθογωνικός παλμός (μοναδιαίου εμβαδού) της εξής μορφής:

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}0,\ \text{οταν}\ t<0\\ \dfrac{1}{\Delta},\ \text{οταν}\ 0<t<\Delta\\ 0,\ \text{οταν}\ t>\Delta\end{cases}$$

όπου Δ>0.

Δηλαδή, ισχύει ότι

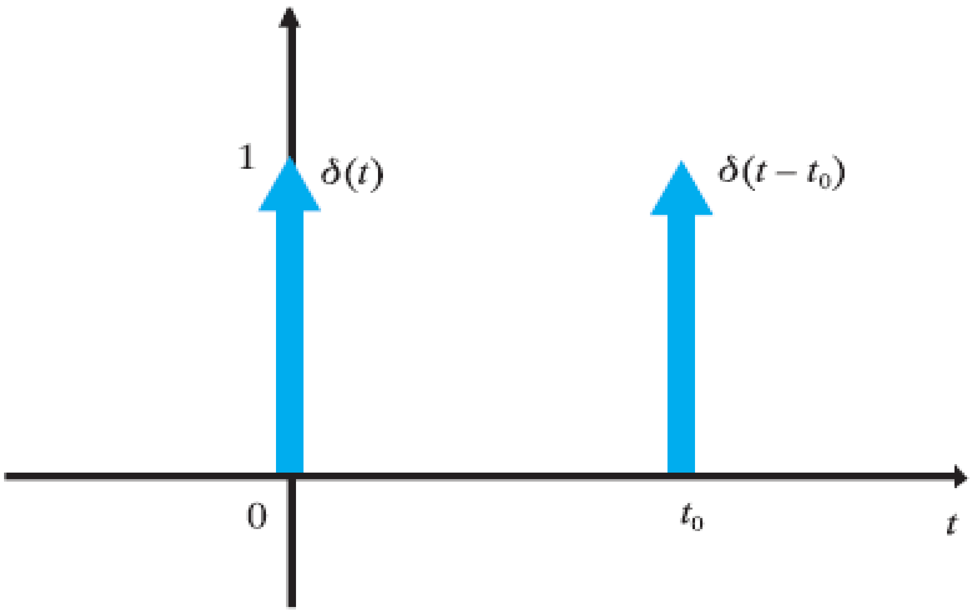
$$\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}rect\left(\frac{t-\frac{\Delta}{2}}{\Delta}\right)$$



Σχήμα 2.19

Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \to 0$), η χρονική διάρκεια του παλμο μηδενίζεται και το πλάτος του απειρίζεται, ενώ το εμβαδό του παραμένει ίσο με 1. κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0}\left[\delta_{\Delta}(t)\right]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες

- $\delta(t) = 0, \text{ οταν } t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0, \text{ οταν } t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$
- $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

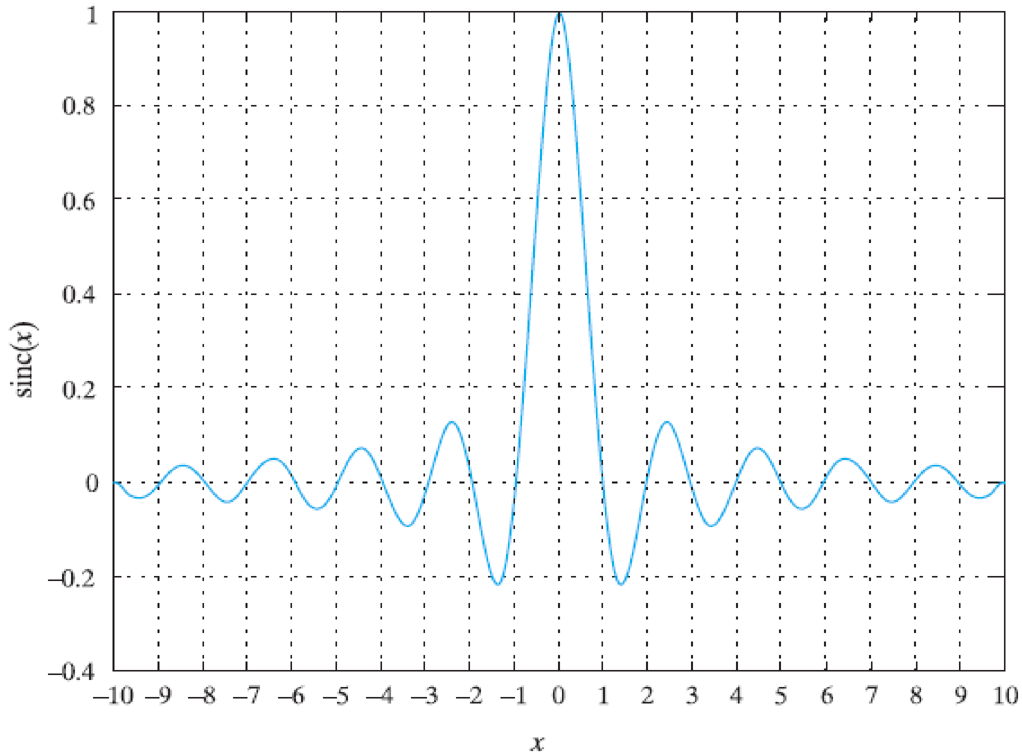
2.2.7.3 Συνάρτηση sinc

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

Περιοδικότητα σημάτων

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$$

Γενίκευση:

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα Ν περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2, ..., T_N θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N$$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N$$

Παράδειγμα

Βασικά Ζητήματα ΠΛΗ22 8/31

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5\pi t)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}\sec$

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=1,β=10 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \beta\mathrm{T}_1 = \alpha\mathrm{T}_2 = 4\sec$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25$ Hz

Examples1a,1b

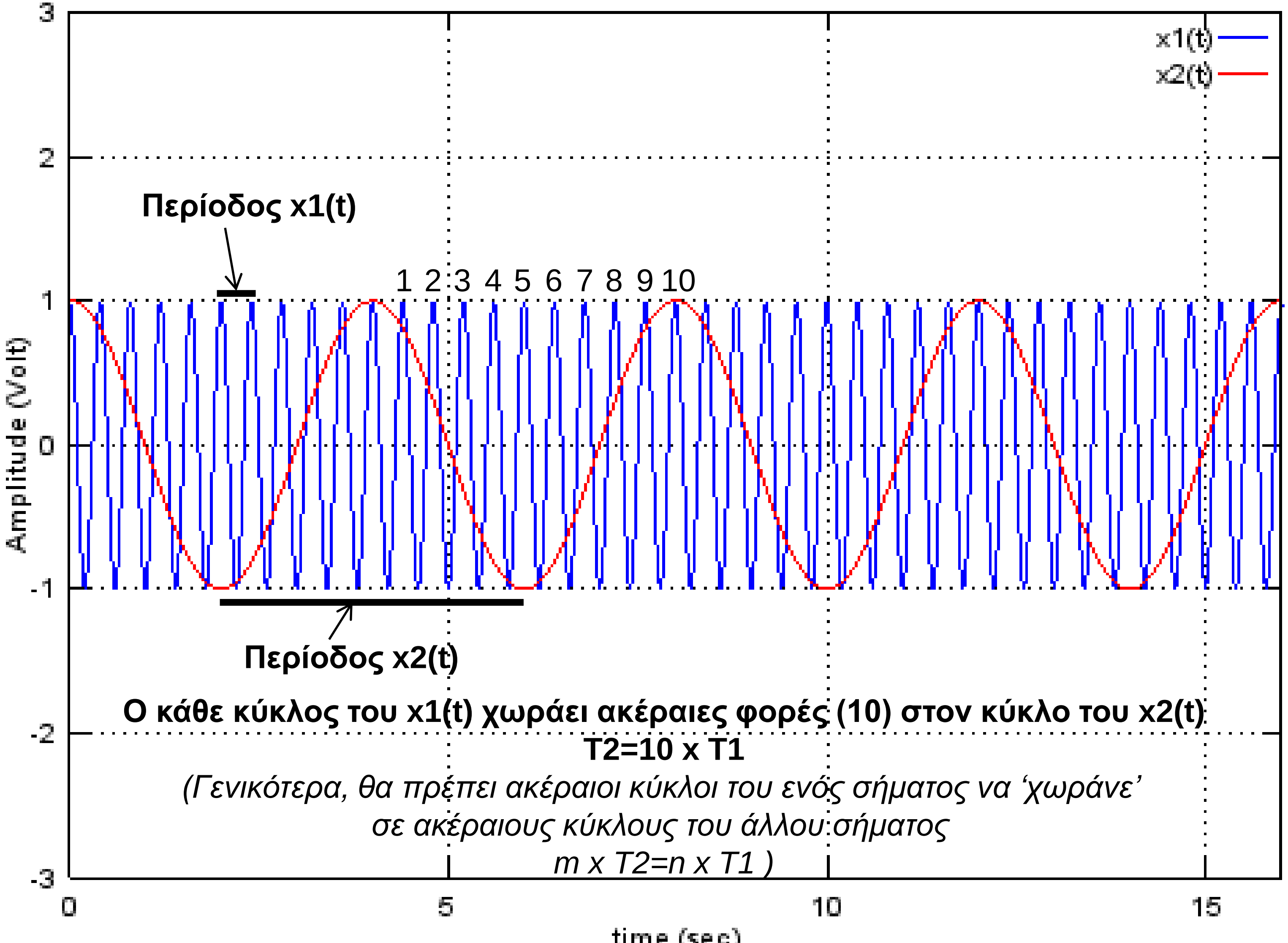
Γραφική απεικόνιση της προηγούμενης άσκησης στο OCTAVE

- *Παραπομπή: Για την εισαγωγή στο OCTAVE δείτε τις διαφάνειες octave_matlab_tutorial_v1.0.ppt*

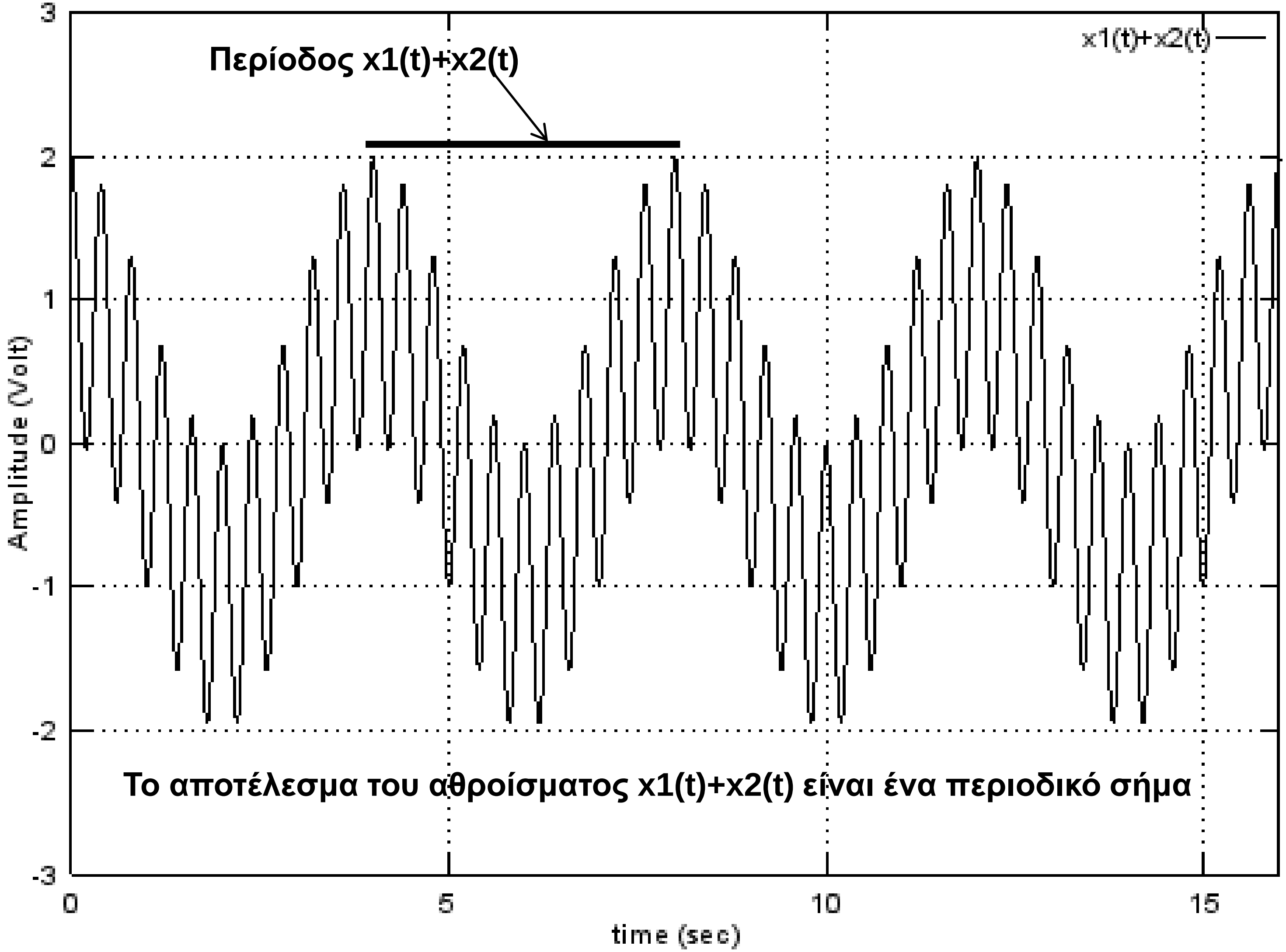
Example 1a

- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*pi.*t); % 1st signal with frequency 2.5Hz
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal ‘b’ is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal ‘r’ is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1a


x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) χωράει ακέραιες φορές (10) στον κύκλο του x2(t)
T2=10 x T1
(Γενικότερα, θα πρέπει ακέραιοι κύκλοι του ενός σήματος να 'χωράνε'
σε ακέραιους κύκλους του άλλου σήματος
m x T2=n x T1)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Example 1a



Περίοδος x1(t)+x2(t)
x1(t)+x2(t)
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) είναι ένα περιοδικό σήμα
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \boxed{\cos(5t)} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το ***cos(5t)*** η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5}$ ***sec***

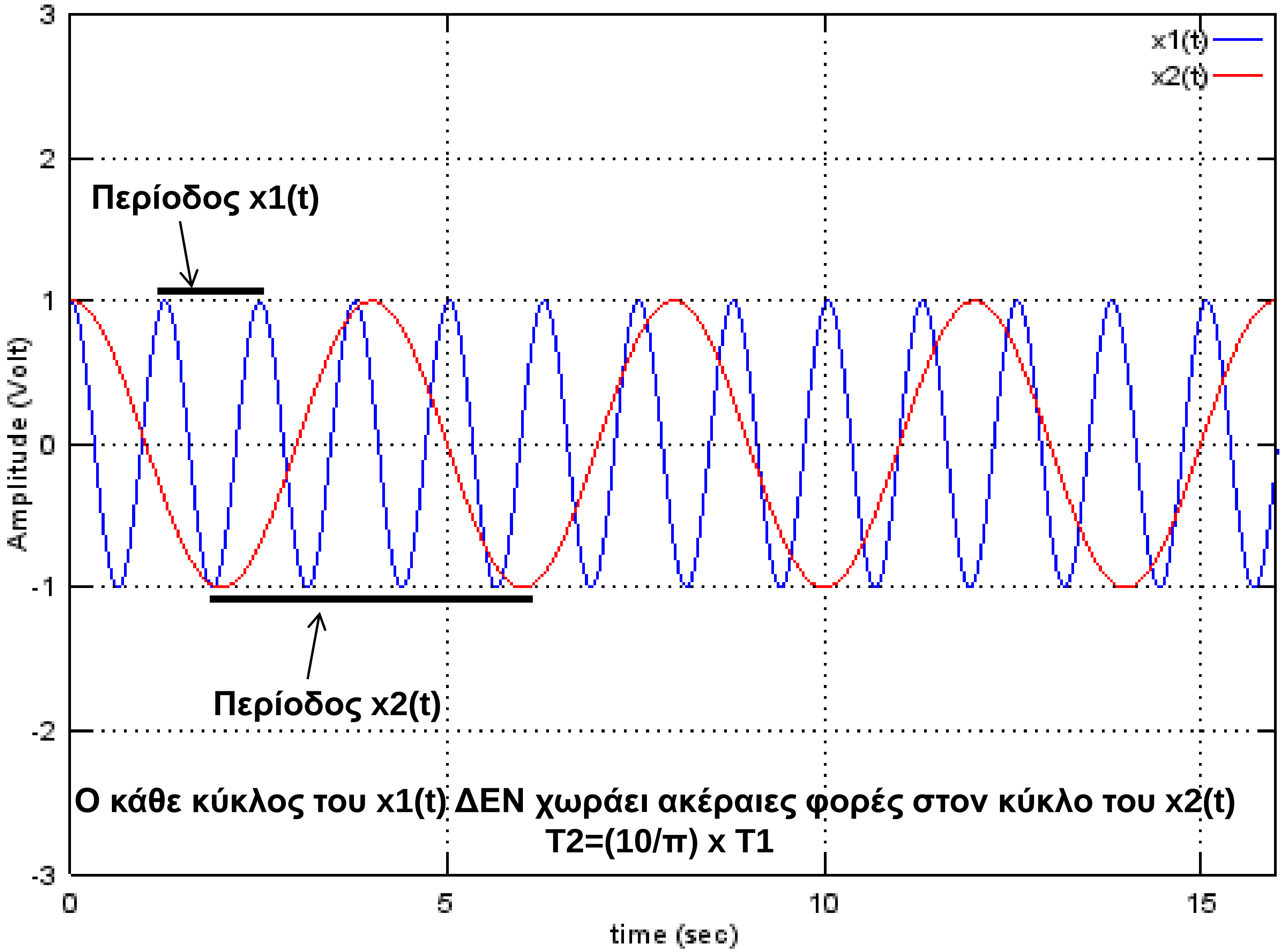
Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\,\text{sec}$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} =$ π/10 Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

Example 1b

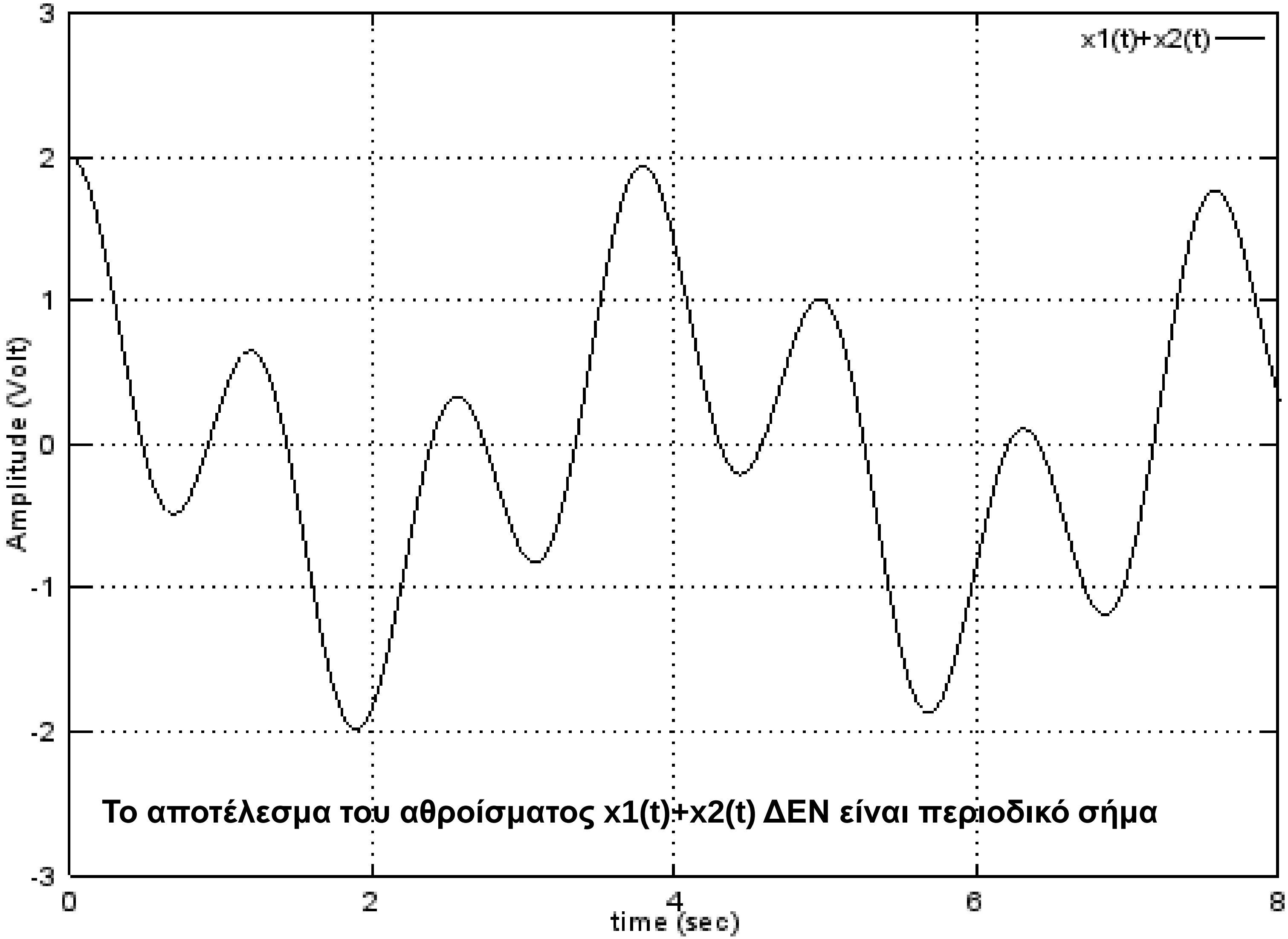
- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz   **Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a**
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal 'b' is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1b



x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) ΔΕΝ χωράει ακέραιες φορές στον κύκλο του x2(t)
T2=(10/π) x T1
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Example 1b



Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) ΔΕΝ είναι περιοδικό σήμα

- *Σημείωση: Να δείτε και το αρχείο demo_code_OSS1_051215 που περιέχει τις εντολές για το demo που είδαμε στην ΟΣΣ και το οποίο σχετίζεται με την ύλη της περιοδικότητας αθροισμάτων σημάτων*

Περιγραφή σημάτων στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων

- *(παραπομπή στο PLH22_OSS2_diafaneies_v1.0.ppt διαφάνειες 37-47)*

Παράδειγμα.

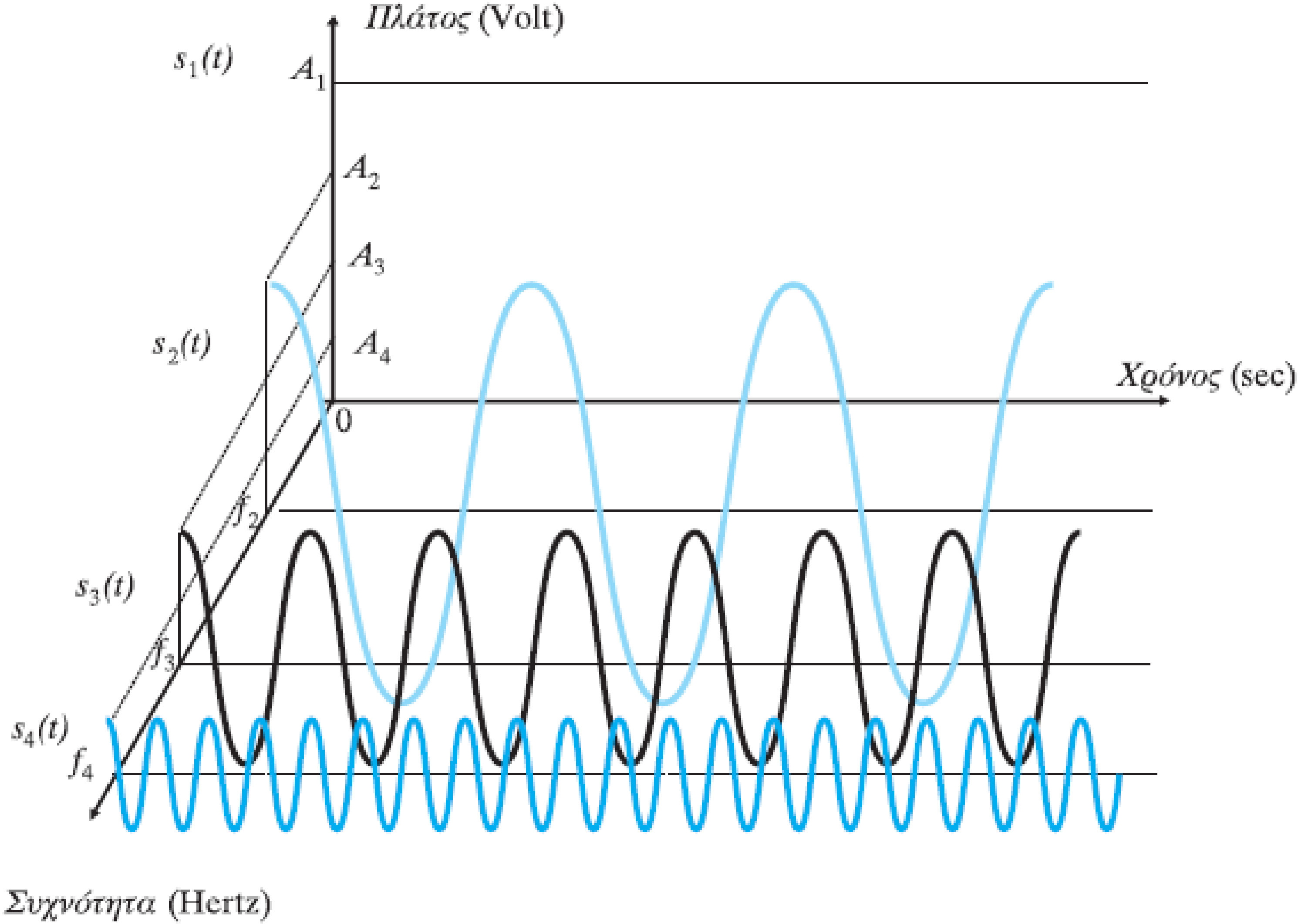
Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$
$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$
$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$
$$f_2 < f_3 < f_4$$
$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

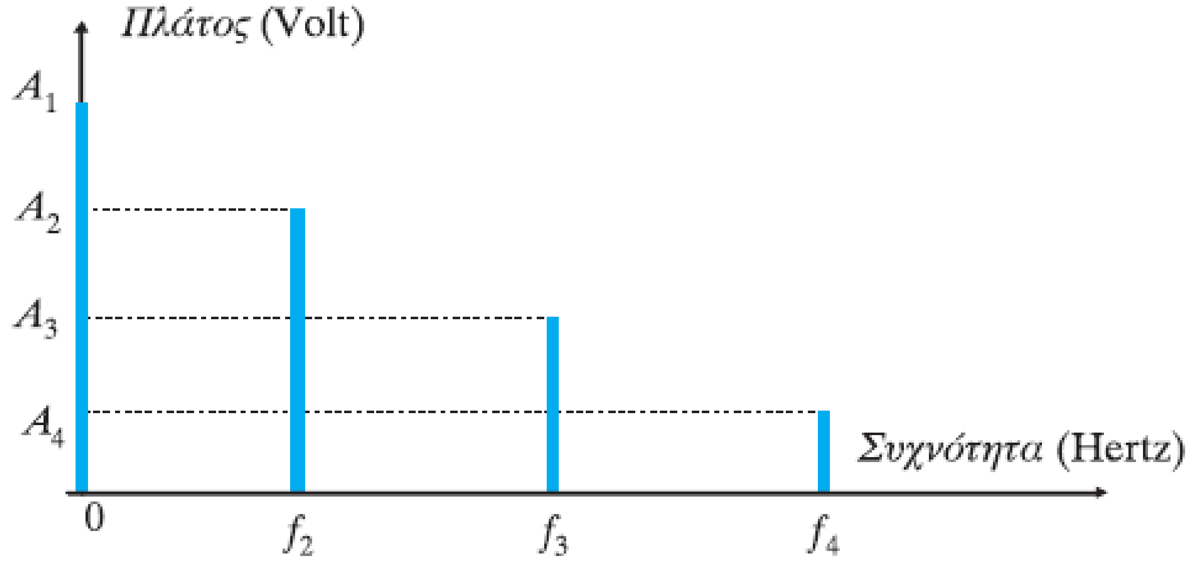
Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (i)

- Μιγαδικοί αριθμοί:

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

Ο μιγαδικός αριθμός «*j*» ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

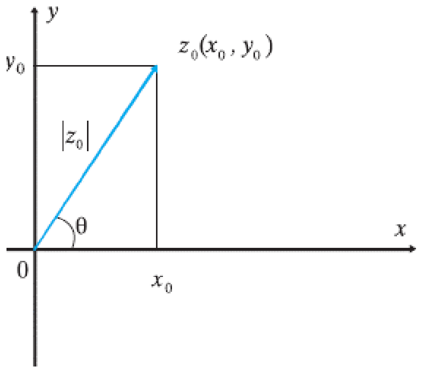
Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy)\cdot(x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Ο πολλαπλασιασμός του «*j*» επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.

ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες (στο δισδιάστατο πεδίο που ορίζεται από τους άξονες των πραγματικών και φανταστικών αριθμών) ως ένα διάνυσμα μέτρου $|z_0|$ και φάσης θ.



Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (ii)

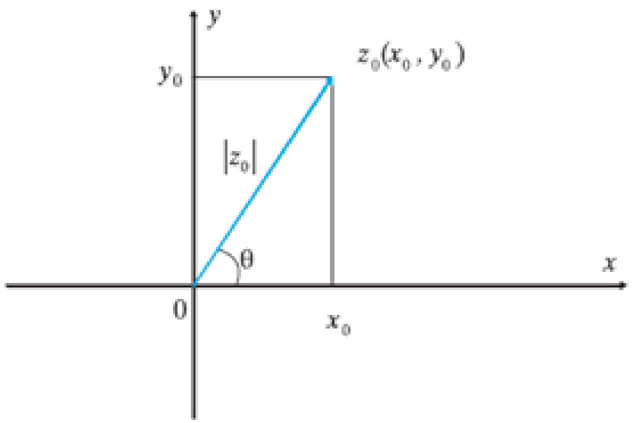
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0|\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0|\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0|\left[\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0|e^{j\theta}$$

Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (iii)

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι $\left|e^{j\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) + \cos(\theta) - j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) - \cos(\theta) + j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

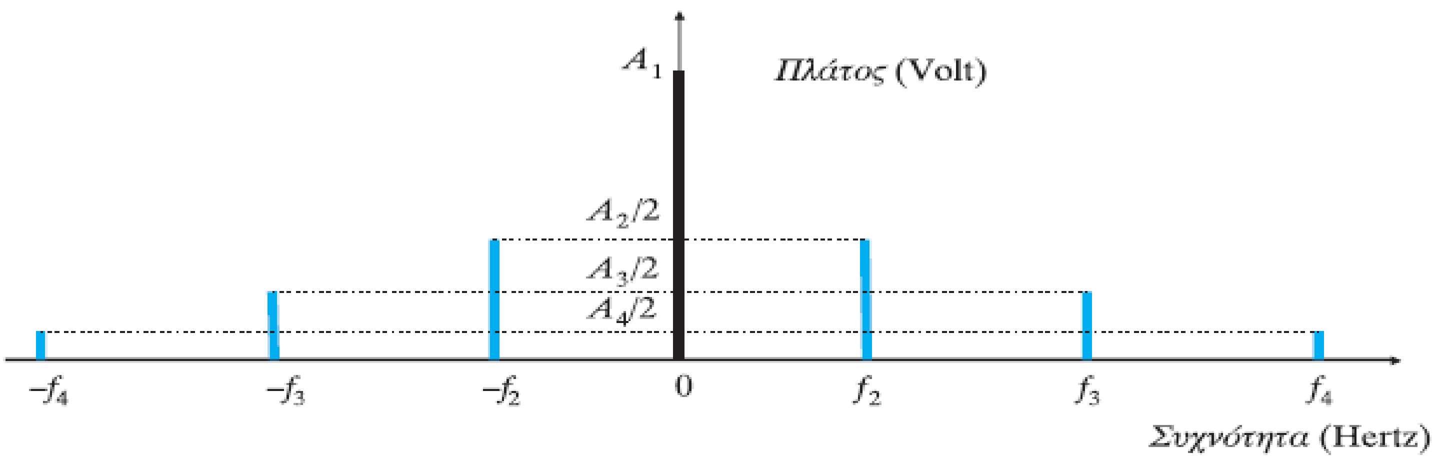
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

(συνέχεια από τη διαφάνεια 24)

$$s(t) = A_1 + A_2\frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3\frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4\frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} =$$

$$= A_1 + \frac{A_2}{2}e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2}e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2}e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2}e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2}e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2}e^{-j2\pi f_4 t}$$

Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.

2.3.1 Περιοδικά Σήματα - Σειρές Fourier

Ορισμός-Τριγωνομετρική-Εκθετική

Βασική Ιδιότητα:

Όλα τα περιοδικά σήματα αποτελούνται από αθροίσματα συνημιτόνων και ημιτόνων ορισμένων συχνοτήτων.

$$\boxed{x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{A_n \cos(2\pi n f t) + B_n \sin(2\pi n f t)\right\},}$$

όπου ισχύει $f = \frac{1}{T}$ («f» η συχνότητα και «T» η περίοδος του σήματος αντίστοιχα).

Η παραπάνω σχέση αντιπροσωπεύει την τριγωνομετρική σειρά Fourier. Εαν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις Euler, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

βλ. διαφάνεια 47 για τις σχέσεις Euler

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft}$$, που αντιπροσωπεύει τη μιγαδική σειρά Fourier.

Οι συχνότητες που περιέχονται στα παραπάνω αθροίσματα είναι οι εξής:

Για $n=1$, $f_1=f$, $T_1=1/f$

Για $n=2$, $f_2=2f$, $T_2=1/2f$

...

Για $n=k$, $f_k=kf$, $T_k=1/kf$

...

Ισχύει ότι $T_1=2T_2=3T_3=\ldots=kT_k=\ldots$, $k\in\mathbb{N}$, που συμπίπτει με το κριτήριο περιοδικότητας που παρουσιάστηκε σε την ενότητα 2.2.6

Οι συντελεστές Fourier απεικονίζουν το σήμα (πλάτος και φάση) σε καθεμιά από τις συνιστώσες συχνότητες.

π.χ. για τη συχνότητα $f_k=kf$ έχουμε $V_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi kft}dt=|V_k|e^{j\phi_k}$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος $|V_k|$ αντιπροσωπεύει το φάσμα πλάτους και ο όρος ϕ_k το φάσμα φάσης του σήματος για τη συγκεκριμένη συχνότητα.

2.3.2 Γενίκευση: Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός-Επέκταση Ανάλυσης Fourier για μη περιοδικά σήματα

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 2.3.1, το πλάτος και η φάση ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k=kf$ προσδιορίζεται με τον υπολογισμό του αντίστοιχου συντελεστή Fourier $V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi nft}dt = |V_k|e^{j\phi_k}$. Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η περίοδος μπορεί να υποτεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \to +\infty$), και το φάσμα του σήματος θα είναι συνεχές και όχι διακριτό ($nf \to f$). Συνεπώς, με τη γενίκευση των εκφράσεων για τις σειρές Fourier προκύπτει η έκφραση του φάσματος μη περιοδικών σημάτων , δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$ (το μέτρο της $G(f)$ έχει μονάδες $Volt/Hz$)

Αντίστοιχα, η σχέση που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του φάσματος ενός σήματος δίνεται παρακάτω:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν και με βάση την έκφραση του φάσματος του σήματος στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας $\omega=2\pi f$:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Χρειάζεται προσοχή, όταν εργάζεται κανείς στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας, διότι σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζεται σε σχέσεις και ιδιότητες μετασχηματισμών ο παράγοντας 2π ή 1/2π .

Όταν ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier το φάσμα $G(f)$, μπορούμε να γράψουμε: $x(t)\xleftrightarrow{F}G(f)$. Ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει τη σχέση ισοδυναμίας των εκφράσεων του σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων:

– Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT)=x(t)\ \text{για}\ k=1,2,\ldots$$

– Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση

$$T=m_1 T_1=m_2 T_2=\ldots=m_N T_N \quad m_1,m_2,\ldots,m_N \in \mathbb{N}^{*}$$

– Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από **διακριτούς** παλμούς σε συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση

$$f=k_1 f_1=k_2 f_2=\ldots=k_N f_N\ ,\ k_1,k_2\ldots k_N$$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1
$x(t)=1$	$\delta(f)$

Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t}x(t) = e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f)+\frac{1}{2}X(f)\delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t)*h(t)$	$X(f)H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$\left[X(f)*Y(f)\right]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$ ή $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$	$y(t)=X(t)$	$Y(f)=x(-f)$

Παραδείγματα

$$\operatorname{sin}c^2(t) \leftrightarrow tri(f)$$

$$4\operatorname{sin}c^2(4t) \leftrightarrow tri(\frac{f}{4})$$

Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect(t-10) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f\cdot 10}\operatorname{sinc}(f)$$

Ιδιότητα χρονικής μετατόπισης

$$\cos(2\pi 10t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-10)+\delta(f+10)\right] \Leftrightarrow$$

Ιδιότητα δυϊσμού

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(t-10)+\delta(t+10)\right] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi 10(-f)) = \cos(2\pi 10 f)$$

Συστήματα - Συνέλιξη

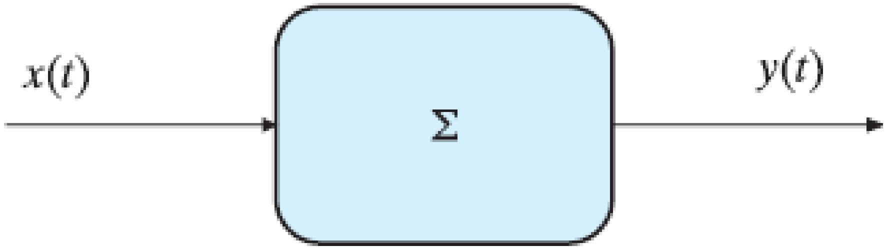
- *(παραπομπή στο PLH22_OSS2_diafaneies_v1.0.ppt διαφάνειες 33-35, 51-56)*

2.3.3.7 *Συνέλιξη*

Η έννοια της συνέλιξης σχετίζεται με τη χαρακτηριστική σχέση εισόδου-εξόδου σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα $y(t)$.



Σχήμα 2.24

Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου

Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S\left(x(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t))$$

και

$$y_2(t) = S(x_2(t))$$

τότε:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))$$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t)), y_2(t) = S(x_2(t)), \ldots, y_k(t) = S(x_k(t))$$

τότε:

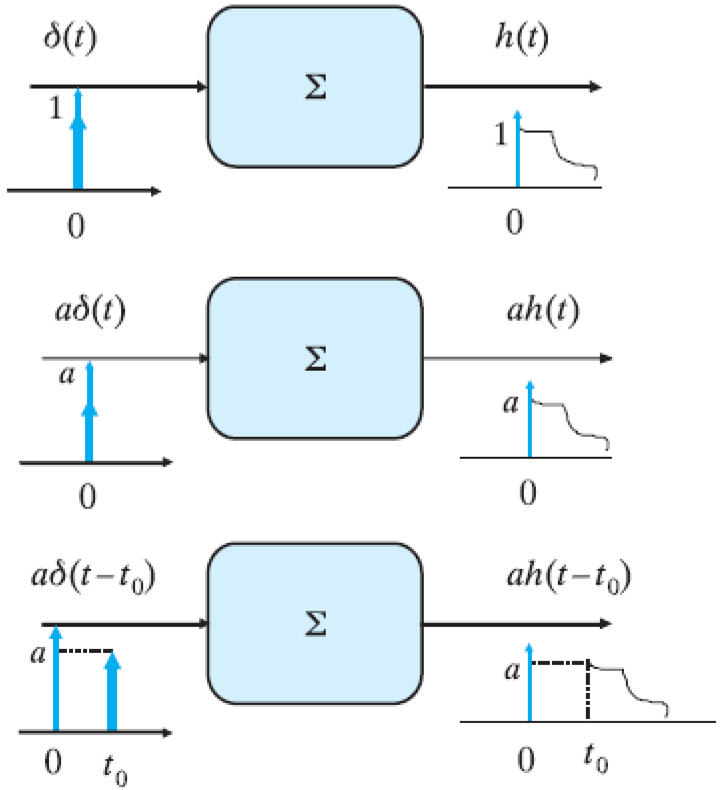
$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_k y_k(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(t) =$$

$$= S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \ldots + \alpha_k x_k(t)) = S\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, εαν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0, το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0.

Δηλαδή, αν $y(t) = S[x(t)]$ τότε $y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$.

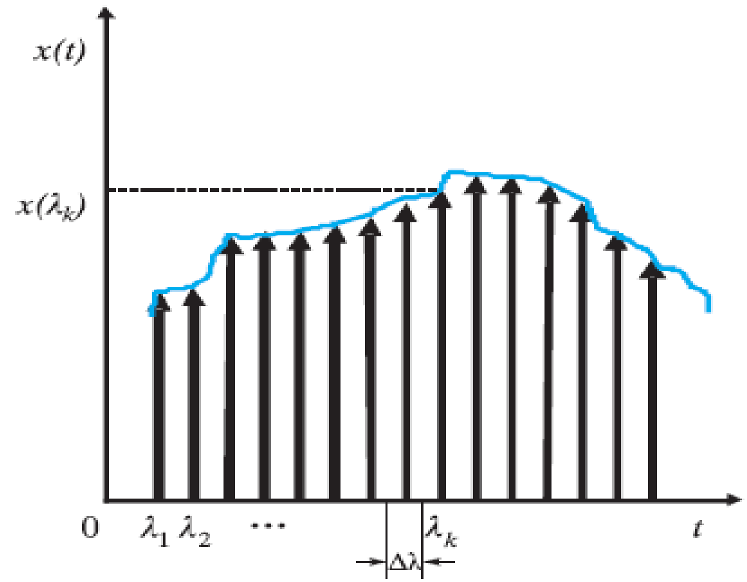
Η $\boxed{\text{κρουστική απόκριση}}$ ενός συστήματος $h(t)$ είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



Σχήμα 2.25

Κρουστική απόκριση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



Σχήμα 2.26

Αναπαράσταση σήματος εισόδου ως αθροίσματος παλμών

οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}x(\lambda_i)\delta(t-\lambda_i)$$

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\xrightarrow{\Delta\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda=x(t)*h(t)$$

Η πράξη $x(t)*h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t), h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$$

αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος
οπότε ισχύει:

$$\begin{array}{ccccc} y(t) = & x(t) & * & h(t) \\ \updownarrow F & \updownarrow F & & \updownarrow F \\ Y(f) = & X(f) & \cdot & H(f) \end{array}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

Γραμμικές Διαμορφώσεις

- *(παραπομπή στο PLH22_OSS2_diafaneies_v1.0.ppt διαφάνειες 66-81)*

Διαμορφώσεις Πλάτους-Βασικές αρχές

- Βασίζονται στην ιδιότητα μετατόπισης φάσματος

Αν

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

Τότε

$$x(t)\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(f-f_c)+X(f-f_c)\right]$$

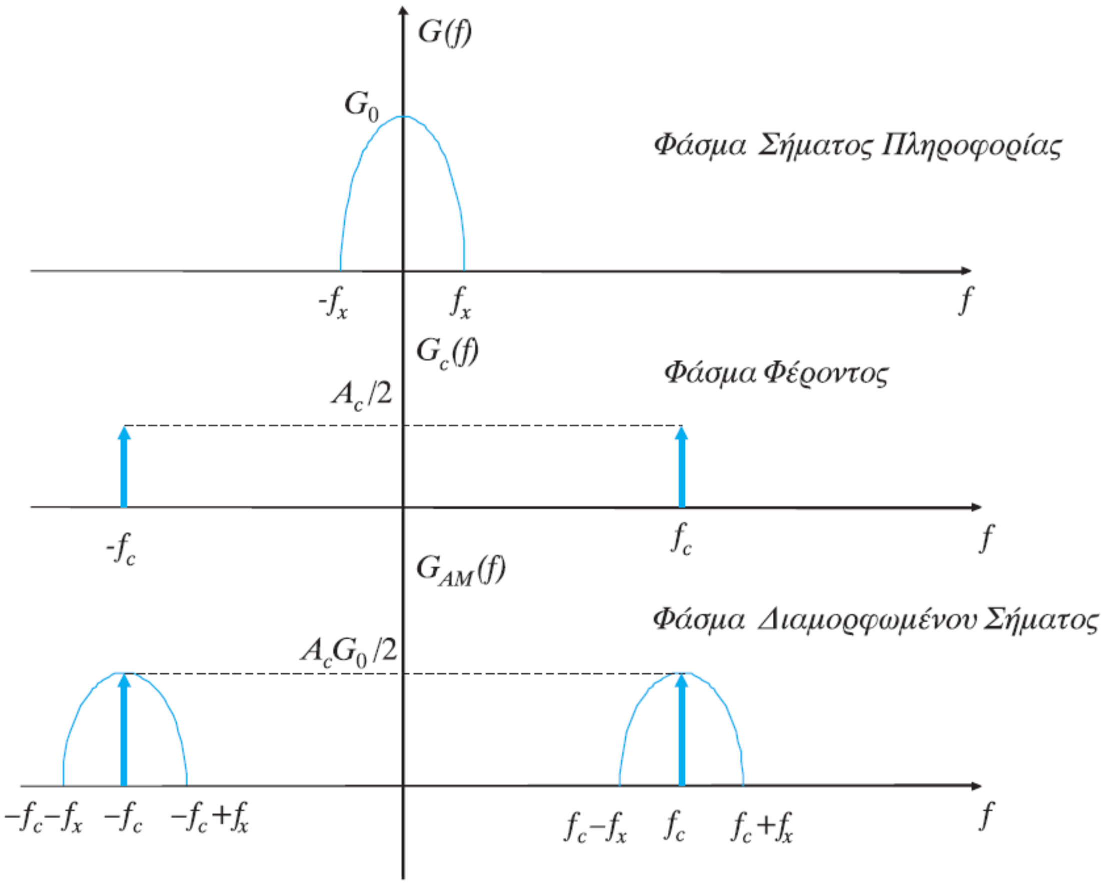
Σήμα πληροφορίας

Φέρον σήμα

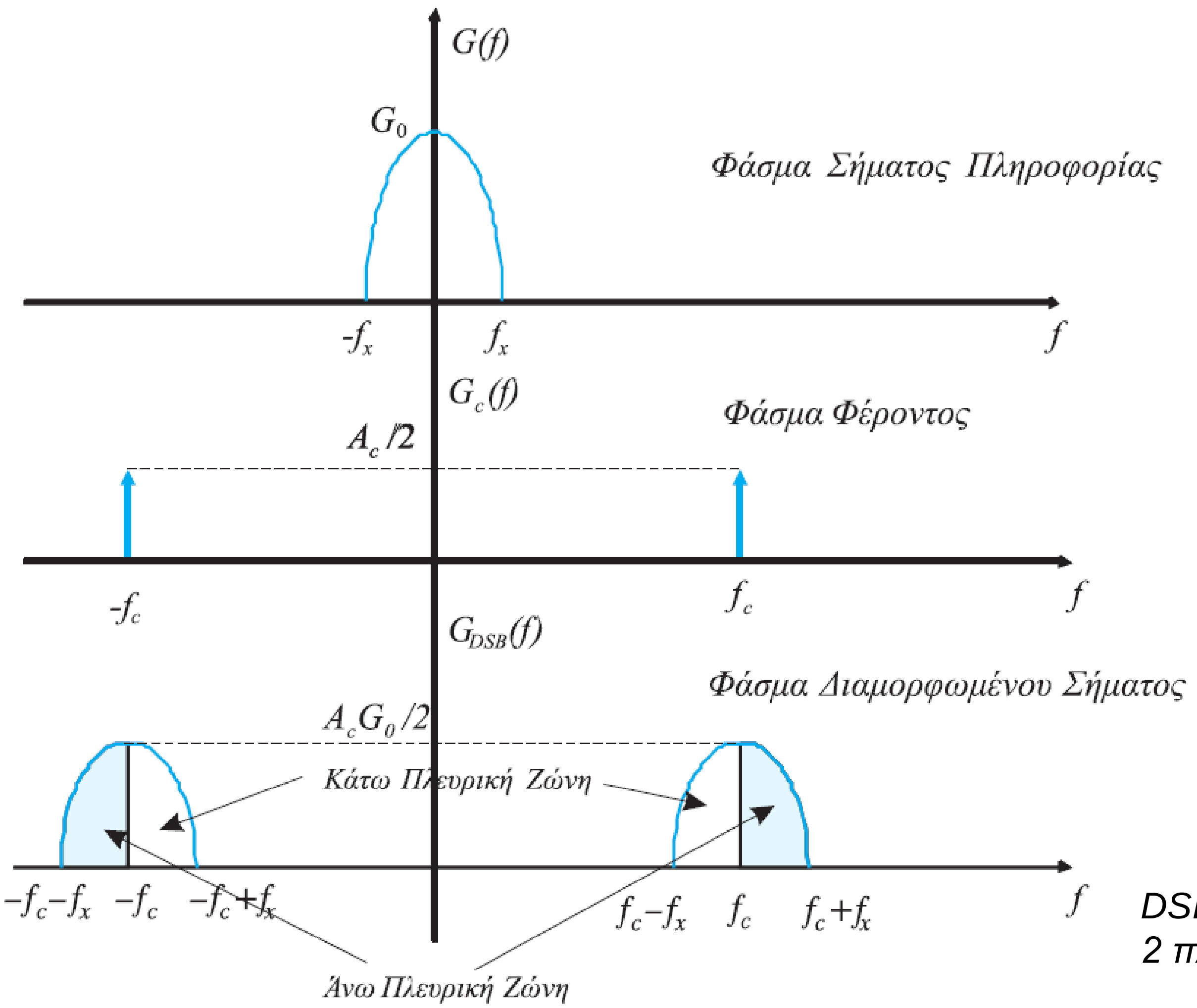
Είδη διαμορφώσεων πλάτους

- Double Side Band (DSB) $x_{DSB}(t)=x(t)\cdot \overline{A_c\cos(2\pi f_c t)}$
- Single Side Band (SSB) Προκύπτει από την DSB με κατάλληλο φιλτράρισμα μιας πλευρικής ζώνης
- AM $x_{AM}(t)=\left[1+x(t)\right]\cdot A_c\cos(2\pi f_c t)$

Διαμόρφωση ΑΜ (πεδίο συχνοτήτων)



Διαμορφώσεις DSB/SSB (πεδίο συχνοτήτων)



DSB: περιλαμβάνει και τις 2 πλευρικές

Παραδείγματα

ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0=\frac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t)=x(t)*\left[2a\cdot \operatorname{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha>f_0$ και το ‘*’ υποδηλώνει τη συνέλιξη.

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \Im\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

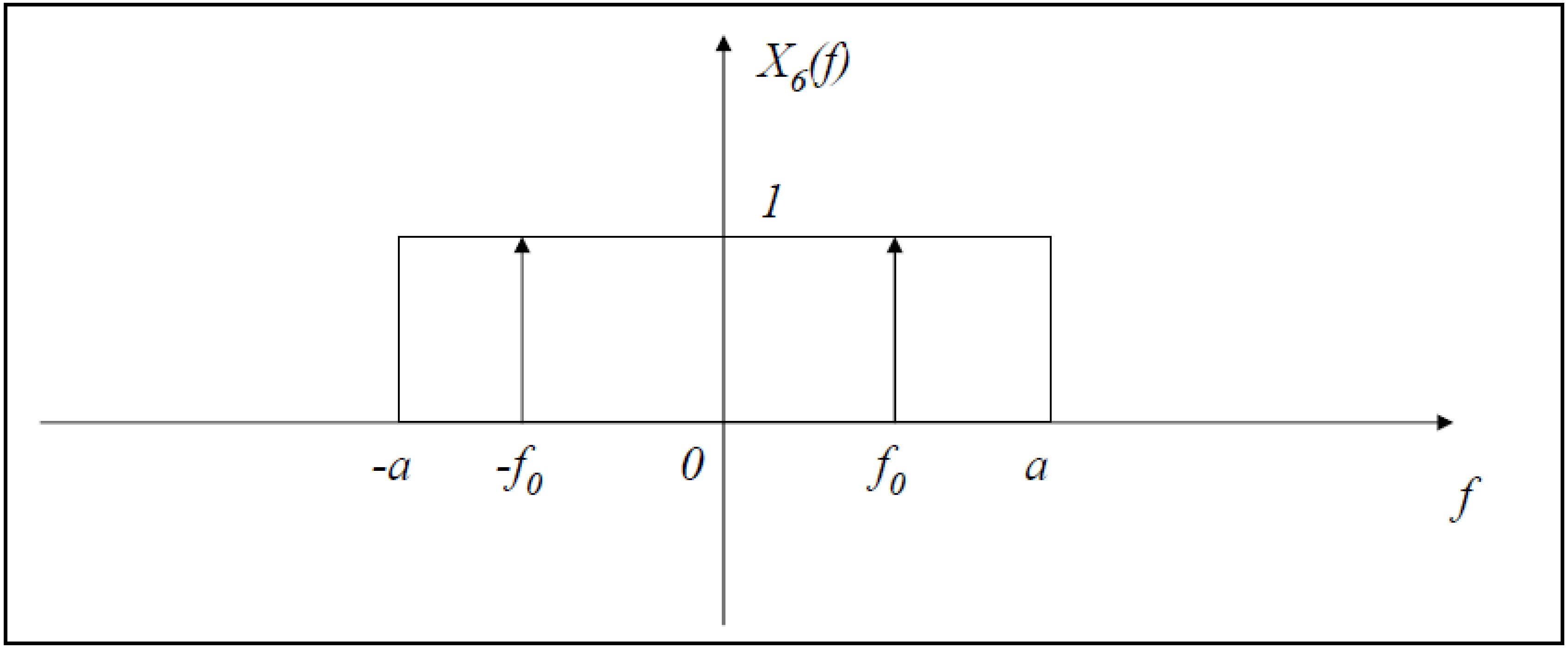
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] = X(f)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

και $\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} rect\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $\left[2a \cdot \operatorname{sinc}(2at)\right]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

Παράδειγμα με φίλτρα.

Ποιά η σχέση των α, b ώστε $(\alpha, b > 0)$

να ισχύει $\alpha\,\mathrm{sinc}(\alpha t) * b\,\mathrm{sinc}^2(bt) = b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$?

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \qquad y(t) = x(t)$$

$x(t) = b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$

$h(t) = \alpha \cdot \mathrm{sinc}(\alpha t) \qquad \alpha, b > 0$

Υπολογισμός $X(f)$

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}(f)$

αλλ. κλίμακας $\text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b}\,\text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

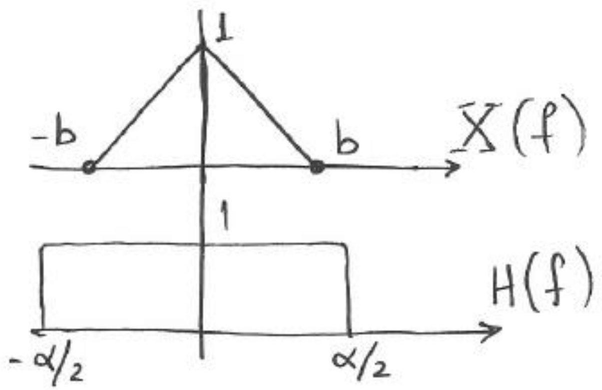
$\Rightarrow b\,\text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

Υπολογισμός $H(f)$.

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f)$

αλλ. κλίμακας $\text{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}\,\text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow \alpha\,\text{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

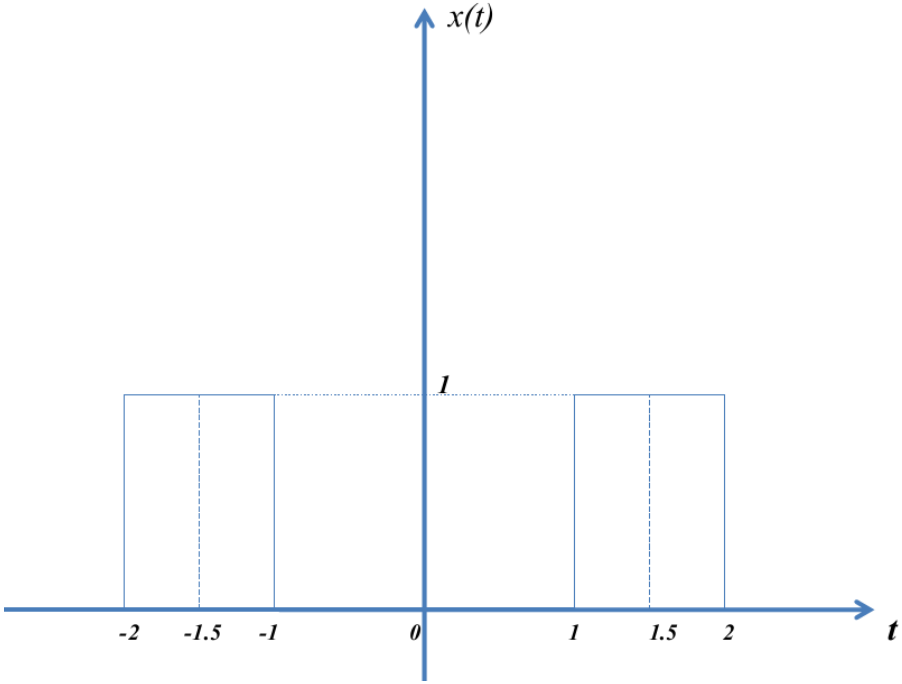


Εμείς θέλουμε $X(f) \cdot H(f) = X(f)$

οπότε $b \leq \frac{a}{2}$

ΘΕΜΑ 4 /ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής συνέλιξη: $y(t)=\left\{\delta(t)+\frac{1}{2}\left[\delta(t-3)+\delta(t+3)\right]\right\}*rect(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f)=\cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5) .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f) .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} * rect(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$Y(f) = \Im\left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} \cdot \Im\left[rect(t)\right] =$$

$$= \left[1 + \cos(6\pi f)\right] \cdot \mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \mathrm{sinc}(f)$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right]\cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\operatorname{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

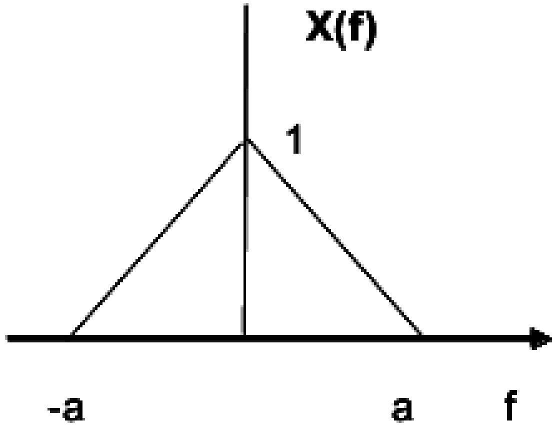
$$1+\cos(6\pi f)=2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

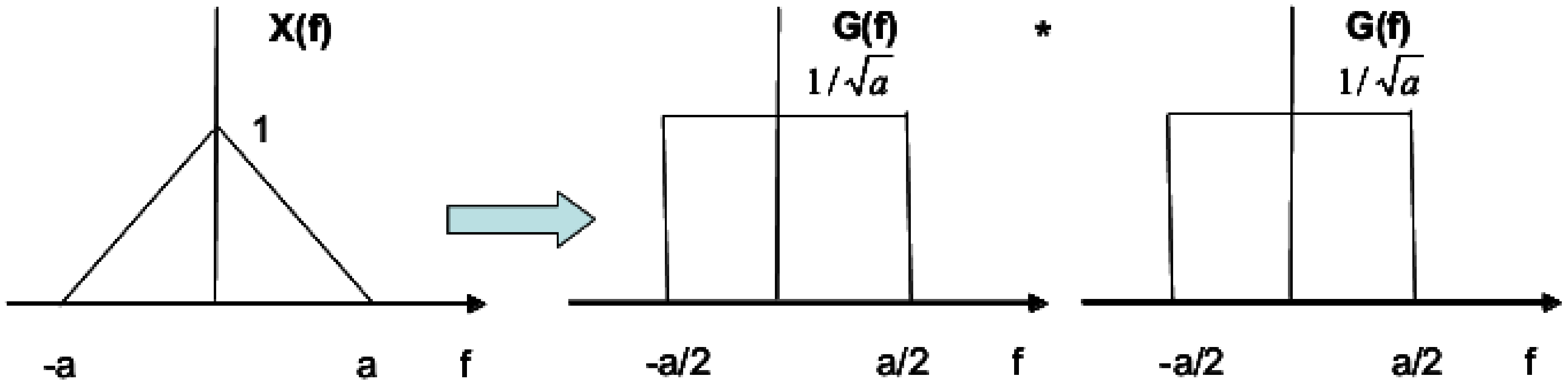
$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{2\cos^2(3\pi f)\cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\operatorname{sinc}(f)}=\cos(3\pi f)$$

Θέμα 5 ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα x(t) στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) [X(f)] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα x(t) προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier X(f) προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος G(f) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση g(t) με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a}\,\sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \sin c^2(at)$$

Άσκηση 4 (επαναληπτική, ΓΕ5/1112/Θ6)

Δίνεται το σήμα $x_1(t) = a \cdot \text{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \text{sinc}(2a \cdot t)$, $a > 0$. Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους *2V* και συχνότητας $f_c = a\ Hz$ και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα $x_2(t)$.

1. Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του αρχικού σήματος $X_1(f)$ και του διαμορφωμένου DSB σήματος $X_2(f)$.

1. Δίνεται ότι $x_1(t) = a \cdot \text{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \text{sinc}(2a \cdot t),\ a > 0$

Έχουμε:

$$\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} tri\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} rect\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a\text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

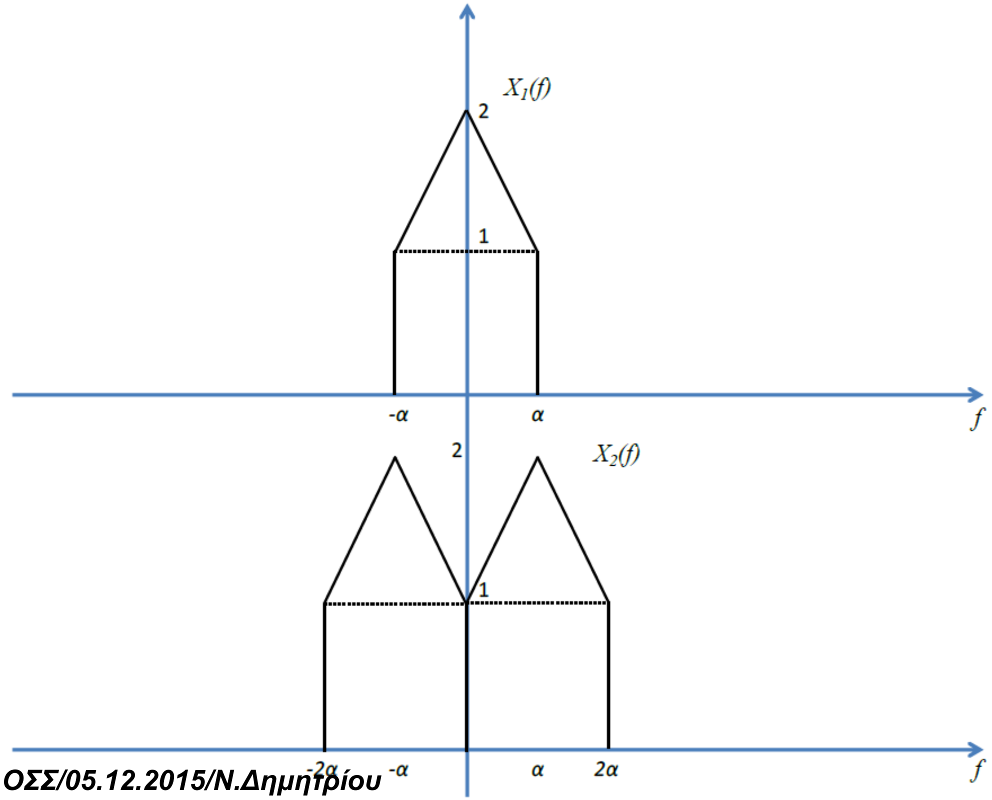
$$\Rightarrow x_1(t) = a\text{sinc}^2(at) + 2a\text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right) + rect\left(\frac{f}{2a}\right) = X_1(f)$$

Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $A_c = 2V$ και συχνότητας $f_c = a\ Hz$ και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα $x_2(t)$.
Το φάσμα πλάτους του είναι το εξής:

$$X_2(f) = \frac{1}{2} A_c \left\{ X_1(f - f_c) + X_1(f + f_c) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \left\{ X_1(f - a) + X_1(f + a) \right\} = tri\left(\frac{f-a}{a}\right) + rect\left(\frac{f-a}{2a}\right) + tri\left(\frac{f+a}{a}\right) + rect\left(\frac{f+a}{2a}\right)$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα φάσματα πλάτους $X_1(f)$ και $X_2(f)$.



ΘΕΜΑ 4	ΓΕ1/1314

Στόχος της άσκησης *Η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας σημάτωντόσο στο πεδίο του χρόνου όσο στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως επίσης και η εφαρμοφή του κριτηρίου Nyquist για την εύρεση της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.*

Σχετικές ασκήσεις: *Άσκηση 1 (σελ.1), Άσκηση 5 (σελ.8) - Επεξεργασία Σημάτων και Φάσμα και Άσκηση 4 (σελ.27)-Διαμόρφωση από το plh22_oss1-final.pdf*

Δίνονται τα σήματα $x_1(t)=\cos(10\pi t)$, $x_2(t)=\sin(t)$.

Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περίοδοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(α) $y_1(t)=x_1(t)-x_2(t)$

(β) $y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(\pi t)$

Δίνονται τα σήματα $x_3(t)=\delta(t-100)+\delta(t+100)$, $x_4(t)=\frac{1}{200}\sin c\left(\frac{t}{200}\right)$

Να βρεθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(γ) $y_3(t)=x_3(t)+x_4(t)$

(δ) $y_4(t)=x_3(t)*x_4(t)$

(α)

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \cos(10\pi t) - \sin(t)$$

$\cos(10\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{1}{5}\sec$

$\sin(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = 2\pi\sec$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{1}{5}}{2\pi} = \frac{1}{10\pi}$ άρρητος, άρα το $y_1(t)$ απεριοδικό

(β)

$$y_2(t) = x_1(t)\cdot x_2(\pi t) = \cos(10\pi t)\cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi t + 10\pi t) + \sin(\pi t - 10\pi t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(11\pi t) - \sin(9\pi t)\right]$$

$\sin(11\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \dfrac{2}{11}\sec$

$\sin(9\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = \dfrac{2}{9}\sec$

Λόγος περιόδων $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{\frac{2}{11}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{9}{11}$ ρητος, άρα το $y_2(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_2 = 11T_A = 9T_B = 2\sec$

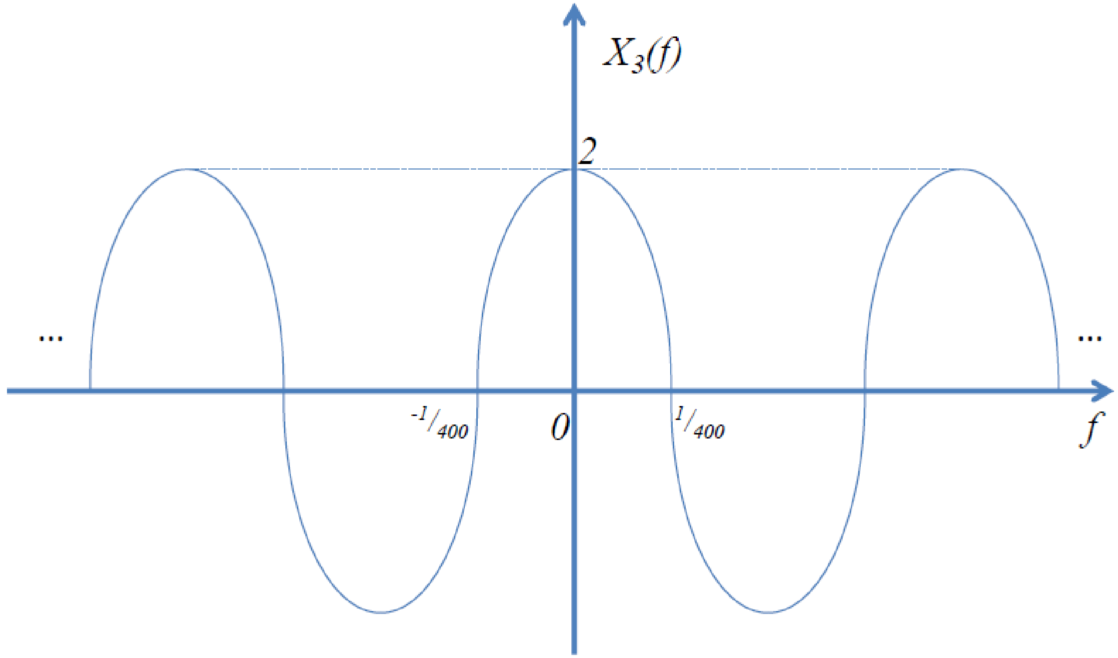
(γ)

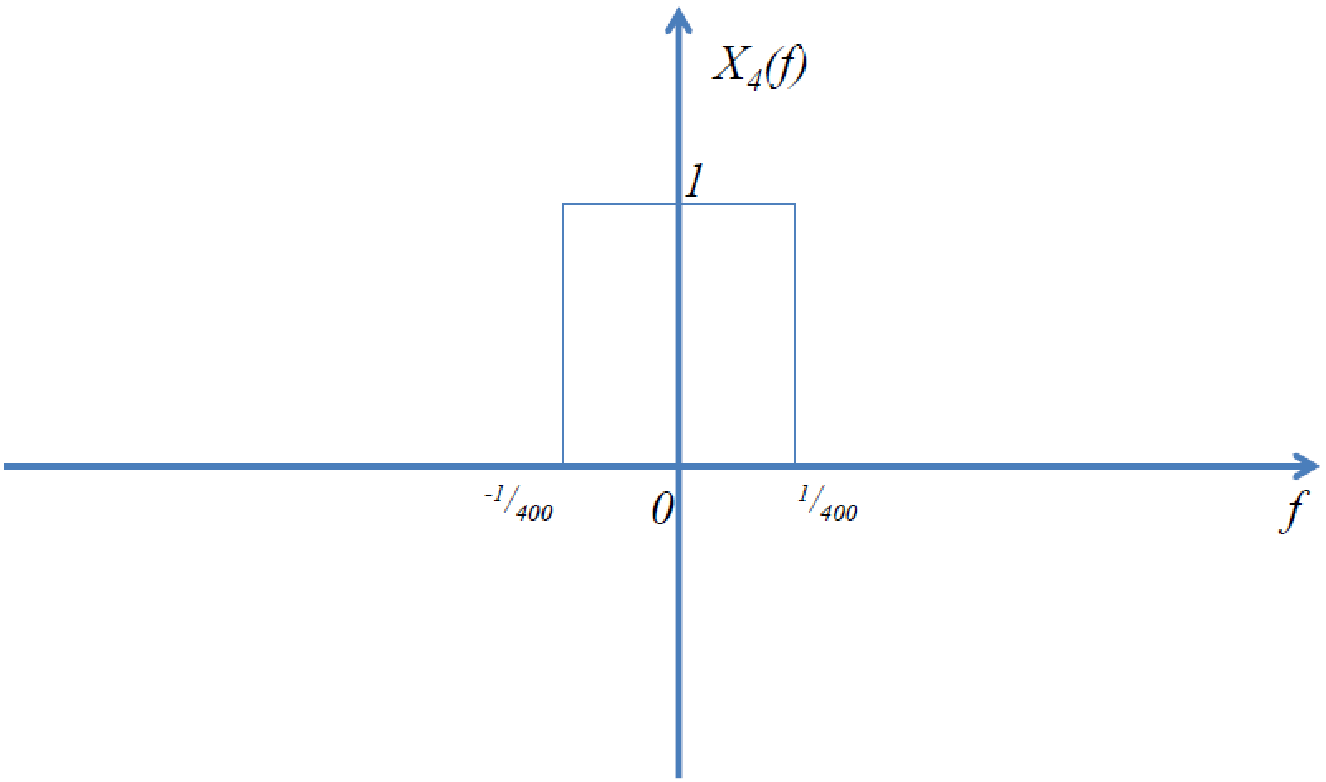
$$y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{F} 2\cos(2\pi f 100) = X_3(f)$$

$$x_4(t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{1/200}\right) = X_4(f)$$

Τα φάσματα πλάτους των ανωτέρω σημάτων απεικονίζονται παρακάτω

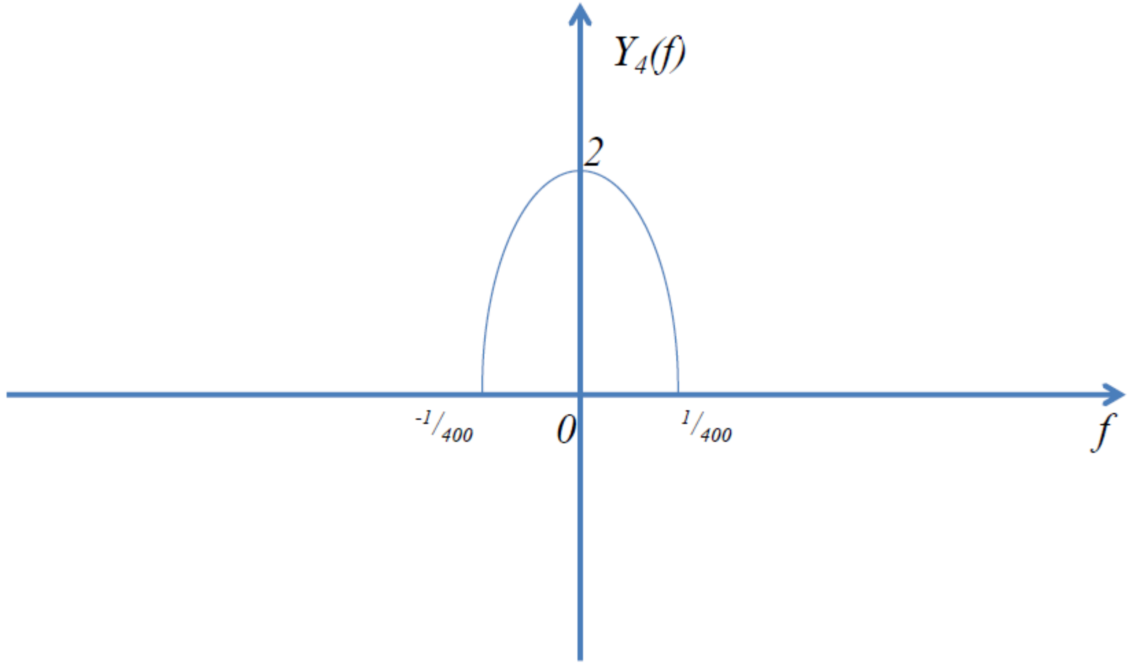




Το φάσμα $Y_3(f) = X_3(f) + X_4(f)$ είναι συνεχές συνεπώς το σήμα $y_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(δ) $y_4(t) = x_3(t) * x_4(t) \xleftrightarrow{F} X_3(f) \cdot X_4(f) = 2\cos(2\pi f 100) \cdot rect\left(\dfrac{f}{1/200}\right)$

Το φάσμα $Y_4(f)$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Το φάσμα είναι συνεχές, συνεπώς το σήμα $y_4(t)$ δεν είναι περιοδικό.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = 4\cos(800\pi t)$ και $X_2(f) = tri\left(\frac{f}{100}\right)$.

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

(α). Να υπολογιστεί η έκφραση $x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t)\right]$

(β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $x_3(t)$.

1/

(α), (β)

$$x_1(\frac{t}{2}) = 4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{t}{2}\right) = 4\cos\left(2\pi 200t\right) \leftrightarrow 2\left[\delta\left(f-200\right)+\delta\left(f+200\right)\right] \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{2}x_1(\frac{3t}{2}) = \frac{1}{2}4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{3t}{2}\right) = 2\cos\left(2\pi 600t\right) \leftrightarrow \delta\left(f-600\right)+\delta\left(f+600\right) \qquad \text{(B)}$$

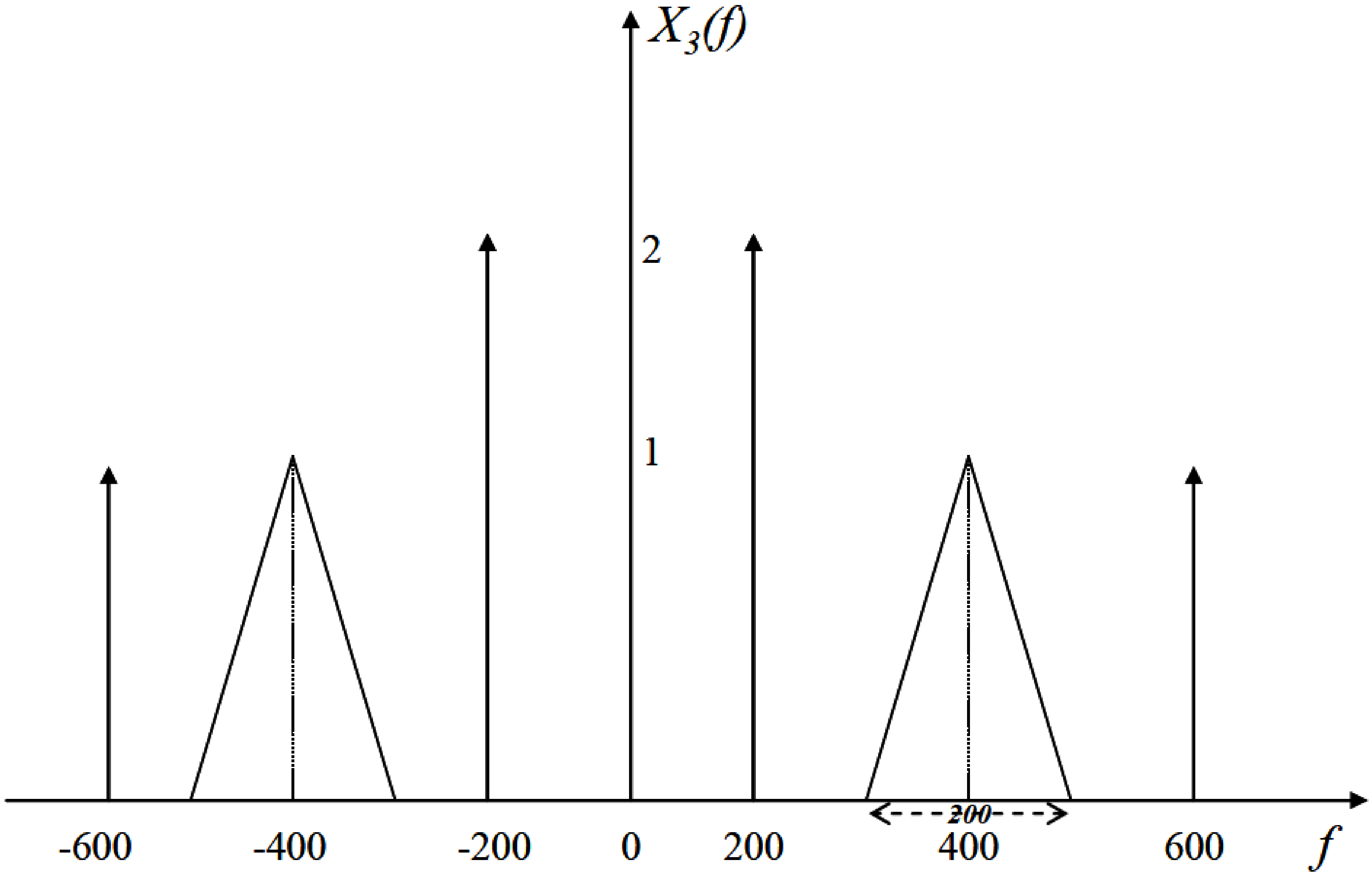
$$\frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) = 2\cos\left(2\pi 400t\right)100\sin c^2(100t) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left\{\delta\left(f-400\right)+\delta\left(f+400\right)\right\} * tri\left(\frac{f}{100}\right) = tri\left(\frac{f-400}{100}\right)+tri\left(\frac{f+400}{100}\right) \qquad \text{(Γ)}$$

Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t)\right] = 4\cos\left(2\pi 200t\right) + 2\cos\left(2\pi 600t\right) + 200\cos\left(2\pi 400t\right)\sin c^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2\left[\delta\left(f - 200\right) + \delta\left(f + 200\right)\right] + \left[\delta\left(f - 600\right) + \delta\left(f + 600\right)\right] + \left[tri\left(\frac{f - 400}{100}\right) + tri\left(\frac{f + 400}{100}\right)\right]$$


$X_3(f)$
2
1
200
-600
-400
-200
0
200
400
600
f

ΘΕΜΑ 4

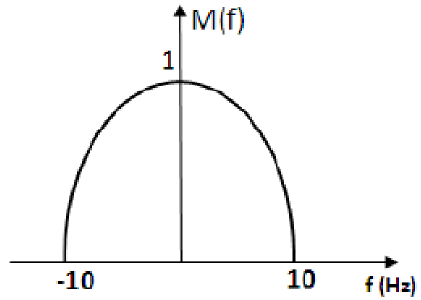
Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με την έννοια της διαμόρφωσης και του φάσματος αλλά και τη χρήση φίλτρων.*

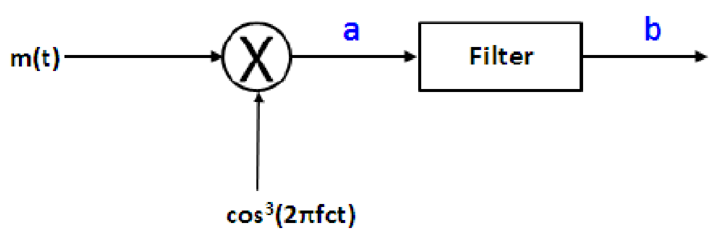
Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ1/2005-2006/Θ4, ΓΕ1/0910/Θ5, ΓΕ5/0708/Θ4, ΓΕ2/2011-12/Θ1*

Να σχεδιαστεί σύστημα διαμόρφωσης DSB όπου το εξαγόμενο σήμα στο σημείο **b** να είναι της μορφής

$$k \cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

όπου m(t) είναι ένα σήμα βασικής ζώνης B=10 Hz με φάσμα πλάτους M(f) (βλ. σχήμα) και k είναι μία σταθερά. Το προς σχεδίαση σύστημα διαμόρφωσης απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα





(α) Να βρεθεί στο σημείο **a** η έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου.
(β) Να σχεδιαστεί το φάσμα της κυματομορφής στο σημείο **a.**
(γ) Τι φίλτρο χρησιμοποιείται και ποια είναι η ελάχιστη επιτρεπτή συχνότητα f_c του φέροντος;
(δ) Αν το φέρον διαμόρφωσης είναι το $\cos^2(2\pi f_c t)$, να εξεταστεί αν το παραπάνω σύστημα διαμόρφωσης με την επιλογή του φίλτρου στο (γ) εξακολουθεί να παράγει το σήμα της μορφής:

$$k \cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Υπόδειξη : Όπως παρατηρείτε και στο σχήμα, το φέρον σήμα είναι της μορφής $\cos^3(2\pi f_c t)$

$$y = cos^3(2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) \cdot cos^2(2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) \cdot \frac{1+\cos(2\pi 2 f_c t)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) \cdot cos(2\pi 2 f_c t) =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}[cos(2\pi(2f_c + f_c)t) + cos(2\pi(2f_c - f_c)t)] =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi \cdot 3f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi f_c t) =$$

$$\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi \cdot 3f_c t)$$

(α). Με βάση το σχήμα, στο σημείο **(a)** θα έχω

$$z = m(t) \cdot y(t) = m(t) \cdot \left(\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi \cdot 3 f_c t)\right) =$$

$$= \frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 3 f_c t)$$

- Το σήμα $\frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$ αποτελεί το επιθυμητό σήμα ενώ
- το σήμα $\frac{1}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 3 f_c t)$ αποτελεί το ανεπιθύμητο σήμα εξαιτίας του όρου $3 f_c$, το οποίο και θα πρέπει να απορριφθεί από το φίλτρο

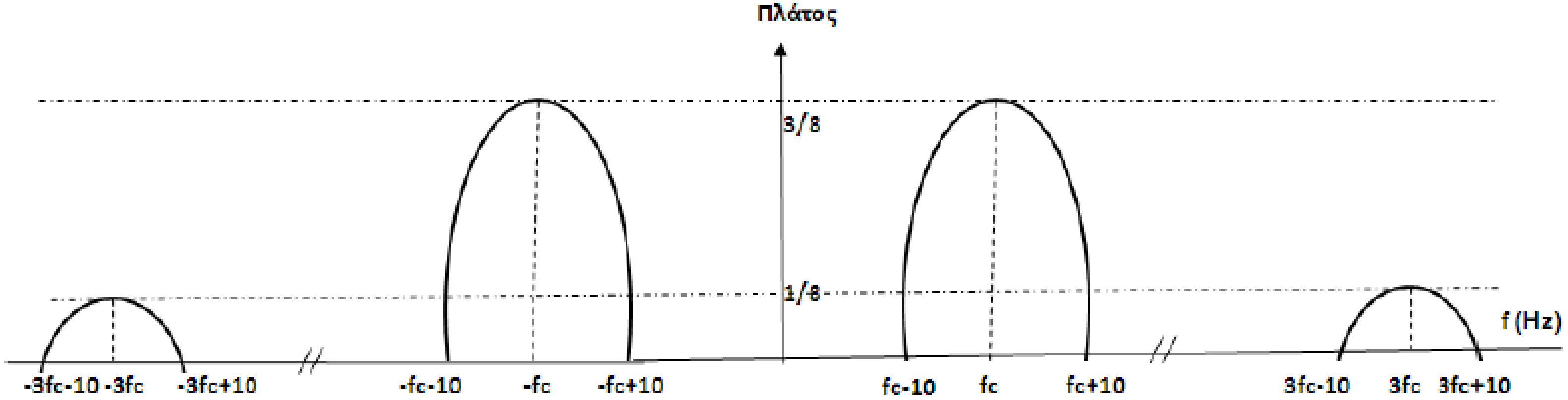
Ώστε, το σήμα που είναι και το τελικό μετά και από το φίλτρο

$$\frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

και επομένως είναι της μορφής που ζητά η άσκηση αφού k=3/4.

(β). Με βάση το θεώρημα της διαμόρφωσης και το φάσμα M(f), το φάσμα στο σημείο a θα είναι το άθροισμα δύο φασμάτων, το καθένα από τα οποία προκύπτει ως διαμόρφωση DSB-SC του φέροντος (ένα συχνότητας f_c και ένα $3f_c$) από το σήμα πληροφορίας ως εξής:

$$\begin{aligned}
\Im\left[z(t)\right] &= \Im\left[m(t)\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t) + m(t)\frac{1}{4}\cos(2\pi 3 f_c t)\right] \\
&= \Im\left[m(t)\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t)\right] + \Im\left[m(t)\frac{1}{4}\cos(2\pi 3 f_c t)\right] \\
&= \frac{3}{8}\left[M(f-f_c)+M(f+f_c)\right]+\frac{1}{8}\left[M(f-3f_c)+M(f+3f_c)\right]
\end{aligned}$$

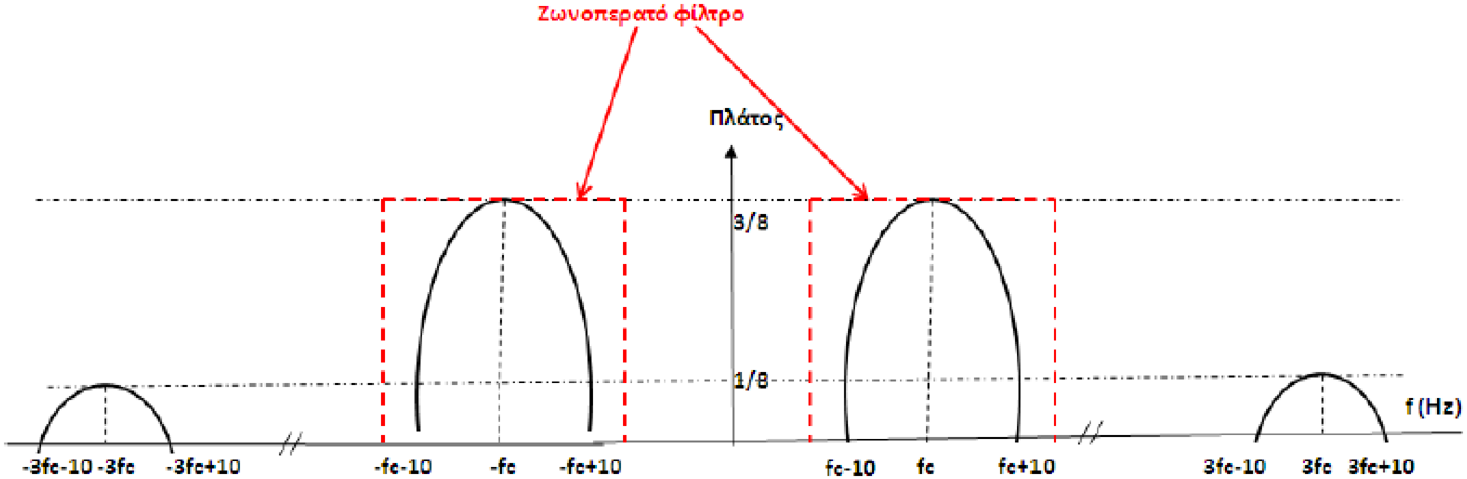


(γ). Το φίλτρο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί είναι ζωνοπερατό με κέντρο το f_c και το $-f_c$ ώστε να αποκόψει τις πολύ υψηλές συχνότητες των $3f_c$ διατηρώντας τις συχνότητες f_c και $-f_c$,δηλαδή

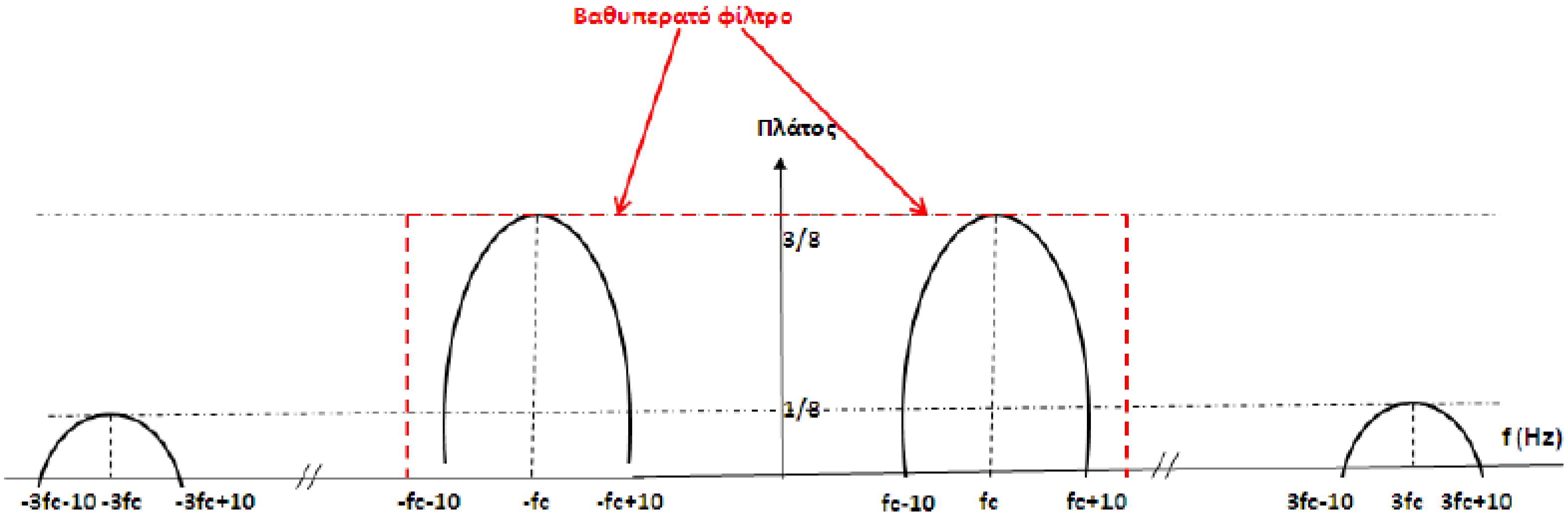
η κεντρική συχνότητα του φίλτρου θα είναι $f_c - 10 \le f_{φίλτρου} \le f_c + 10\text{Hz}$ με εύρος φίλτρου τις ακόλουθες συχνότητες:

- $3f_c - 10 > f_{cutoff} > f_c + 10$
- $0 < f_{cutoff} < f_c - 10$

καθώς και η συμμετρική του ως προς τον άξονα.



ή βαθυπερατό με συχνότητα αποκοπής μεγαλύτερη από $f_c + 10\ Hz$



Η ελάχιστη επιτρεπτή συχνότητα φέροντος είναι οποιαδήποτε συχνότητα για την οποία ισχύει $f_c - 10 \gg 0$. Οπότε $f_c \gg 10$. Η $f_{c,min}$ θα μπορούσε να είναι 10 Hz αλλά ο πρακτικός κανόνας είναι η fc να είναι δύο φορές τουλάχιστον μεγαλύτερη από την μέγιστη συχνότητα του σήματος.

(δ). Αν το φέρον διαμόρφωσης είναι το $\cos^2(2\pi f_c t)$ τότε θα έχουμε

$$y = cos^2(2\pi f_c t) = \frac{1 + \cos(2\pi 2 f_c t)}{2}$$

Οπότε

$$z = m(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 2f_c t)) = \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2 f_c t)$$

Επομένως στο σημείο **a** θα έχω δύο σήματα

- Το σήμα $\frac{1}{2} m(t)$ δεν είναι της ζητούμενης μορφής όπως δίνεται στην άσκηση.
- το σήμα $\frac{1}{2} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2 f_c t)$ επίσης δεν είναι της ζητούμενης μορφής εξαιτίας του όρου $2 f_c$

Συνεπώς το σύστημα διαμόρφωσης με ζωνοπερατό ή το βαθυπερατό φίλτρο δεν μπορεί να παράγει στην έξοδο το ζητούμενο σήμα αν το φέρον διαμόρφωσης είναι της μορφής $\cos^2(2\pi f_c t)$