

**ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.4**

**4<sup>η</sup> ΟΣΣ**

**19/3/2016**

## **Συμπληρωματικές Διαφάνειες στα Κανάλια Επικοινωνίας**

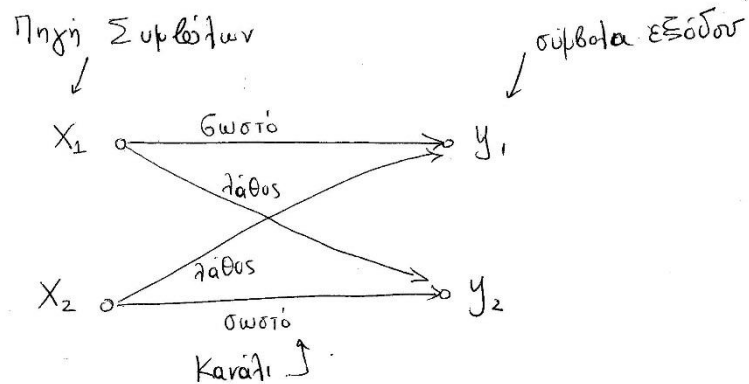
**Νίκος Δημητρίου**

*(\*) Οι διαφάνειες αυτές συνοψίζουν τα βασικά σημεία της παρουσίασης PLH22\_OSS4\_slides\_2015\_2016 που είναι διαθέσιμη στο [study.eap.gr](http://study.eap.gr)*

Σκοπός: Μεταφορά  
 συμβόλων διαμέσου του  
 καναλιού διατηρώντας την  
 κατανομή των μεταξύ  
 τους πιθανοτήτων  $p(x_i)$

Κανάλια Επικοινωνίας

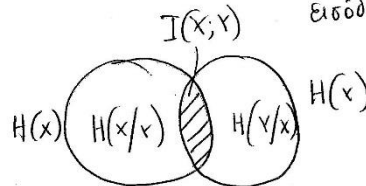
1)



Πίνακας Μετάβασης Καναλιού συμβόλα εξόδου

$$P = [p_{ij}] = P(y_j/x_i) = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

↑  
 συμβόλα  
 εισόδου



$$I(x,y) = H(y) - H(y/x)$$

↑  
 ποσότητα  
 πληροφορίας  
 που μεταφέρει το κανάλι.

↑ αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

↑ αβεβαιότητα της Y

Χωρητικότητα καναλιού  
 $C = \max(I(X,Y))$

βλ. αρχείο PLH22\_OSS4\_slides\_2015\_2016  
 διαφάνειες 5-19

# Αθόρυβα Κανάλια (1)

Κανάλια Επικοινωνίας

Ειδικές Περιοπτώσεις

① Αθόρυβο.

$$x_1 \longrightarrow y_1$$

$$x_2 \longrightarrow y_2$$

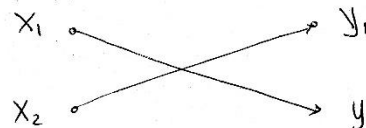
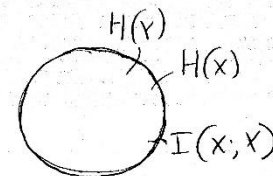
$$P(y_1) = P(x_1) \quad P(y_1/x_1) = 1$$

$$P(y_2) = P(x_2) \quad P(y_2/x_2) = 1$$

$$P(y/x) = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$H(y) = H(x) = I(x, y)$$

$$H(x/y) = H(y/x) = 0$$



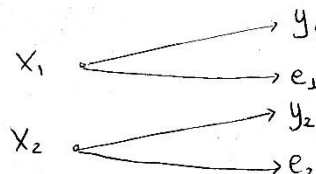
Επίσης

Αθόρυβο: Η κατανομή

των συμβόλων

εισόδου μεταφέρεται

στην έξοδο

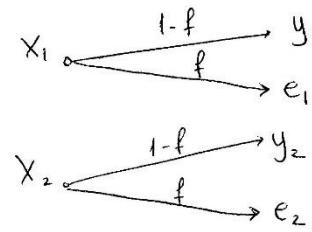


Επίσης αθόρυβο

το κάθε σύμβολο εισόδου

αναγνωρίζεται στην έξοδο ~~χωρίς~~ χωρίς σφάλμα.

# Αθόρυβα Κανάλια (2)



Επίσης  
αθόρυβο κανάλι  
(μη επικαλυπτόμενα έξοδοι)

$$P(Y/X) = \begin{matrix} & Y_1 & e_1 & Y_2 & e_2 \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-f & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-f & f \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P(Y_1) = (1-f) P(X_1)$$

$$P(e_1) = f P(X_1)$$

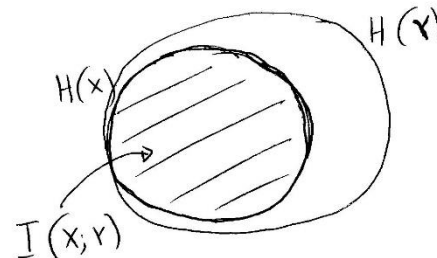
$$P(Y_2) = (1-f) P(X_2)$$

$$P(e_2) = f P(X_2)$$

$$H(Y/X) = -(1-f) \log(1-f) - f \log f = H(f)$$

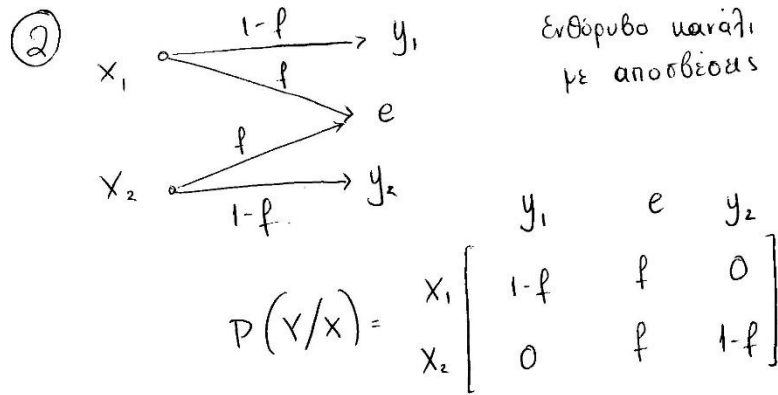
$$H(Y) = \sum_{j=1}^4 P(Y_j) \log P(Y_j) = \dots = H(f) + H(X)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(f) + H(X) - H(f) = H(X)$$



$H(Y) > H(X)$   
 η Y περιλαμβάνει 4 σύμβολα  
 η X περιλαμβάνει 2 σύμβολα

# Ενθόρυβα Κανάλια (1)



$$P(y_1) = (1-f)P(x_1)$$

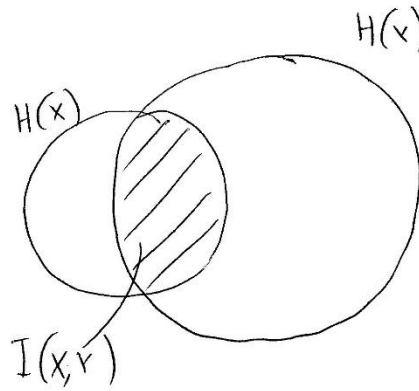
$$P(y_2) = (1-f)P(x_2)$$

$$P(e) = fP(x_1) + fP(x_2) = f \underbrace{(P(x_1) + P(x_2))}_1 = f$$

$$H(Y/X) = -(1-f)\log(1-f) - f\log(f) = H(f)$$

$$H(Y) = \sum_{j=1,4} P(y_j) \log[P(y_j)] = H(f) + (1-f)H(x)$$

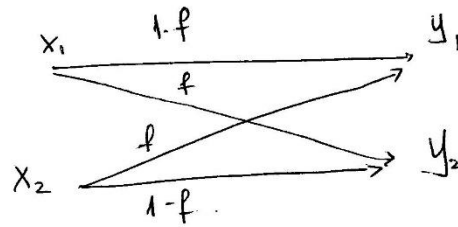
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(f) + (1-f)H(x) - H(f) = (1-f)H(x)$$



Ενθόρυβο κανάλι.  
(με τη λήψη του συμβόλου  $e$  δεν μπορεί να αναγνωριστεί ποιο σύμβολο εστάθη)

# Ενθόρυβα Κανάλια (2)

③ Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι

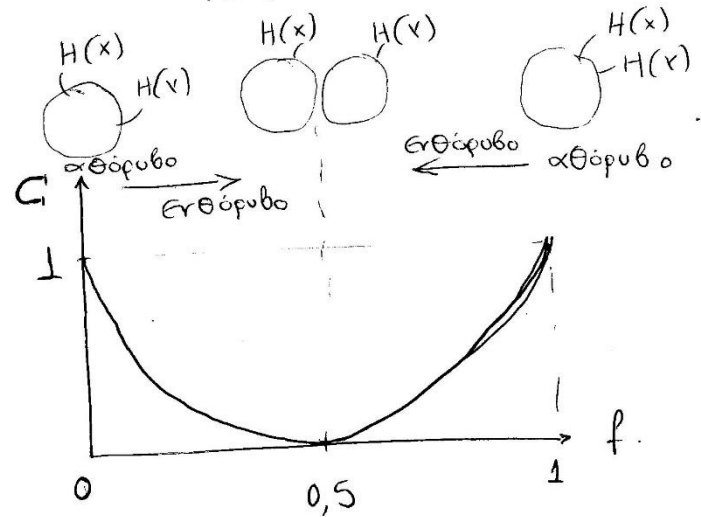


$$H(y/x) = -f \log f - (1-f) \log (1-f) = H(f)$$

$$I(x; y) = H(y) - H(y/x)$$

$$C = \max_{P(x_i)} \{I(x; y)\} = \max_{P(x_i)} \{H(y)\} - H(f) =$$

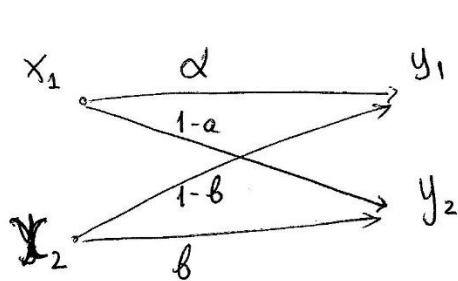
$$= 1 - H(f)$$



$f=0,5$  : χειρότερη επίδραση θορύβου

Παράδειγμα. Ενθόρυβο κανάλι.

3)

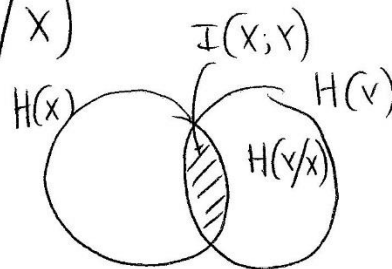


$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-b & b \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -p(y_1/x_1) \log [P(y_1/x_1)] \cdot p(x_1) - \\ &- p(y_1/x_2) \log [P(y_1/x_2)] p(x_2) - p(y_2/x_1) \log [P(y_2/x_1)] p(x_1) - \\ &- p(y_2/x_2) \log [P(y_2/x_2)] p(x_2) = \\ &= -\alpha \log(\alpha) p(x_1) - (1-b) \log(1-b) p(x_2) - (1-\alpha) \log(1-\alpha) p(x_1) - \\ &- b \log(1-b) p(x_2) \neq 0 \end{aligned}$$

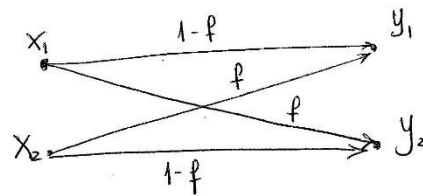
ΕΑΠ / ΠΛΗ22 / ΑΘΗ.4 / 4η ΟΣΣ / 19.03.2016 /  
Ν. Δημητρίου

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



$$C = \sum_{x_i} p(x_i) \{ I(X; Y) \}$$

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι



$$P(y_1) = (1-f)P(x_1) + fP(x_2)$$

$$P(y_2) = fP(x_1) + (1-f)P(x_2)$$

Απόδοση Πληροφορίας

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^2 P(y_j) \log P(y_j)$$

$$H(Y/X) = -(1-f) \log(1-f) P(x_1) - f \log(f) P(x_2) -$$

$$-(1-f) \log(1-f) P(x_2) - f \log(f) P(x_1) =$$

$$= P(x_1) [-(1-f) \log(1-f) - f \log f] + P(x_2) [(1-f) \log(1-f) - f \log f] =$$

$$= [P(x_1) + P(x_2)] [-(1-f) \log(1-f) - f \log f] = -(1-f) \log(1-f) - f \log f$$

$$= H(f) \quad \text{ανεξάρτητη των πιθανοτήτων των εισόδων.}$$

$$\text{Άρα } I(X; Y) = H(Y) - H(f)$$

$$C = \max_{P(x_i)} I(X; Y) = \max_{P(x_i)} \{ H(Y) - H(f) \} = \max_{P(x_i)} \{ H(Y) \} - H(f)$$



Μέγιστη  $H(x) \Rightarrow$  ομοιόμορφα καταμετρήνες  $P(y_j) = \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$  <sup>6</sup>

Ελεγχος: Υπάρχουν κατάλληλες  $p(x_i)$  που να δίνουν ομοιόμορφες  $p(y_j)$  ?

Ναι εφόσον σε συμμετρικά κανάλια ομοιόμορφα καταμετρήνες εισοδα οδηγούν σε ομοιόμορφα καταμετρήνες εξόδους

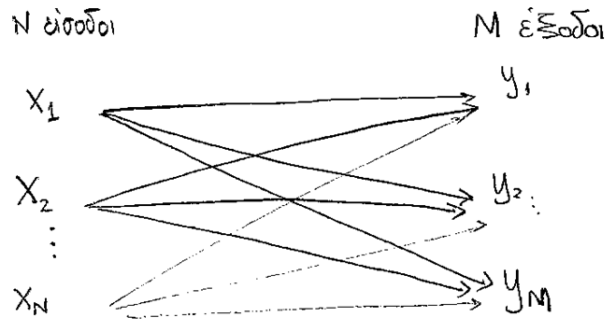
$$\text{Αν } p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} p(y_1) = (1-f) \cdot \frac{1}{2} + f \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-f+f}{2} = \frac{1}{2} \\ p(y_2) = f \cdot \frac{1}{2} + (1-f) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } C = \max_{p(x_i)} H(x) - H(f) = 1 - H(f)$$

**Παρατηρήσεις:** Η έξοδος μπορεί να είναι ομοιόμορφα καταμετρημένη εάν ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Η είσοδος είναι ομοιόμορφα καταμετρημένη και το κανάλι είναι συμμετρικό ή αθόρυβο
- Η είσοδος δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα καταμετρημένη αλλά το κανάλι είναι συμμετρικό με  $f=1/2$
- Το κανάλι είναι ενθόρυβο γενικής μορφής (βλ. διαφάνεια 3) και με κατάλληλους συνδυασμούς των πιθανοτήτων  $p(y_j/x_i)$  και  $p(x_i)$  προκύπτουν ομοιόμορφες  $p(y_j)$

# Κανάλια Επικοινωνίας πολλαπλών εισόδων/εξόδων

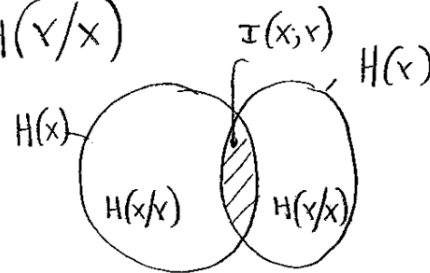


Πίνακας Μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \dots & y_M \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) & \dots & P(y_M/x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(y_1/x_N) & \dots & & P(y_M/x_N) \end{array} \right] \end{matrix}$$

Ισχύει ότι  $\sum_{j=1}^M P(y_j/x_i) = 1$  (Το άθροισμα μιάθε γραμμής του πίνακα)  
 Αμοιβαία Πληροφορία:

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



βλ. αρχείο PLH22\_OSS4\_slides\_2015\_2016  
 διαφάνειες 20-29

Χωρητικότητα:

$$C = \max [I(X; Y)]$$

$$H(X) = -\sum_{j=1}^M P(y_j) \cdot \log[P(y_j)]$$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^N P(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^N P(y_j/x_i) \cdot P(x_i)$$

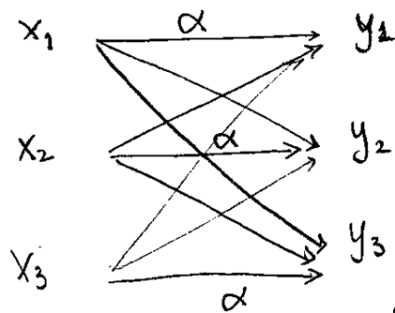
στην j του πίνακα P(Y/X)

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left\{ P(y_j/x_i) \cdot \log[P(y_j/x_i)] \cdot P(x_i) \right\}$$

Ειδικές Περιπτώσεις

Συμμετρικό Κανάλι → N=M

$$\rightarrow P(y_i/x_i) = a \quad \forall i$$



$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

Συμμετρικό Κανάλι 3 εισόδων - εξόδων

Μερικώς Συμμετρικό Κανάλι

Οι γραφές του πίνακα μετάβασης αποτελούνται από αντιπεραθέσεις των ίδιων τιμών.

π.χ.  $P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \end{bmatrix}$

Καταλιών:

$$H(Y/X) = - \sum_{j=1}^M P(y_j/x_i) \log [P(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

Εξήγηση:

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left\{ P(y_j/x_i) \log [P(y_j/x_i)] P(x_i) \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^N \left\{ P(x_i) \left\{ \sum_{j=1}^M P(y_j/x_i) \log [P(y_j/x_i)] \right\} \right\} \end{aligned}$$

Το ίδιο άθροισμα δίνουν όλες οι γραφές του πίνακα μετάβασης αφού αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών

$$= - \sum_{i=1}^N \underbrace{[P(x_i)]}_{=1} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^M P(y_j/x_i) \log [P(y_j/x_i)] \right\}$$

$$= - \sum_{j=1}^M P(y_j/x_i) \log [P(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

# παράδειγμα διαφάνειας 30

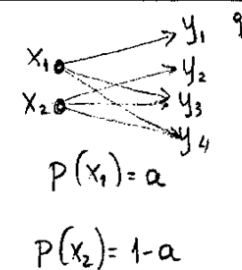
παρατήρηση:

μερικώς

συμμετρικό

κανάλι.

$$P(x/y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$$H(Y) = - \sum_{j=1}^4 P(y_j) \log P(y_j)$$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^2 P(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^2 P(y_j/x_i) \cdot P(x_i)$$

$$P(y_1) = \sum_{i=1}^2 P(x_i, y_1) = P(x_1, y_1) + P(x_2, y_1) =$$

$$= P(y_1/x_1) \cdot P(x_1) + P(y_1/x_2) \cdot P(x_2) =$$

$$= 0,8 \cdot a + 0 \cdot (1-a) = 0,8a$$

όμοια

$$P(y_2) = 0,8(1-a)$$

$$P(y_3) = 0,1$$

$$P(y_4) = 0,1$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^4 P(y_j) \log P(y_j) = 0,66 - 0,8a \log(0,8a) - 0,8(1-a) \log[0,8(1-a)]$$

ΕΑΠ / ΠΛΗ22 / ΑΘΗ.4 / 4η ΟΣΣ / 19.03.2016 / Ν.Δημητρίου

Υπολογισμός  $H(Y/X)$       στοιχεία πίνακα  $P(Y/X)$  <sup>10</sup>

$$H(Y/X) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 P(y_j/x_i) \log [P(y_j/x_i)] \cdot P(x_i) =$$

↑  
δεδομένο

$$= - \sum_{j=1}^4 P(y_j/x_i) \log P(y_j/x_i) \quad i=1 \text{ ή } 2$$

επειδή το κωράκι  
είναι μερικώς  
συμπλεκτικό

$$= - [0,8 \log(0,8) + 0,1 \log 0,1 + 0,1 \log 0,1] = 0,9219$$

Χωρητικότητα

$$C = \max [I(X;Y)] = \max [H(Y) - H(Y/X)]$$

- γ) Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή  $a$ .
- Είναι

$$\begin{aligned}
 C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y/X)] \\
 &= \max_{p(x)} [0,66 - 0,8a \log(0,8a) - 0,8(1-a) \log(0,8(1-a)) - 0,2575 - 0,66] \\
 &= \max_{p(x)} [-0,8a \log(0,8a) - 0,8(1-a) \log(0,8(1-a)) - 0,2575].
 \end{aligned}$$

- Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του  $a$  που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο.

- Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \frac{dI(X;Y)}{da} &= [-0,8a \log(0,8a) - 0,8(1-a) \log(0,8(1-a)) - 0,2575]' \\
 &= -0,8[(a)' \log(0,8a) + a(\log(0,8a))'] \\
 &\quad - 0,8[(1-a)' \log(0,8(1-a)) + (1-a)(\log(1-a))'] \\
 &= -0,8 \left[ \log(0,8a) + a \frac{\log e}{a} \right] - 0,8 \left[ (-1) \log(0,8(1-a)) + (1-a)(-1) \frac{1}{1-a} \log e \right] \\
 &= -0,8 \log(0,8a) - 0,8 \log e + 0,8 \log(0,8(1-a)) + 0,8 \log e \\
 &= -0,8[\log(0,8a) - \log(0,8(1-a))] = -0,8 \log \frac{0,8a}{0,8(1-a)} = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\log \frac{a}{1-a} = 0 \Rightarrow \left( \frac{a}{1-a} \right) = 2^0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

- Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του  $a$ , λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού
- $C=0,8 \text{ bits/symbol}$ .



## ΘΕΜΑ 4 ΕΞ2012B

Μια ψηφιακή πηγή **3** συμβόλων  $\{x_1, x_2, x_3\}$  εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο  $x_1$  από την πηγή είναι  $p(x_1) = 0.4$  ενώ οι πιθανότητες εκπομπής των άλλων δύο συμβόλων είναι ίσες. Να απαντηθούν τα ερωτήματα σε κάθε μία από τις παρακάτω 2 περιπτώσεις

**α)** Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε κανάλι χωρίς θόρυβο. Ζητείται να βρεθούν:

i) Η χωρητικότητα του καναλιού **C** και η εντροπία της πηγής **H(X)**

ii) Η εντροπία **H(X/Y)**

**β)** Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε ενθόρυβο κανάλι με πίνακα μετάβασης,

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθούν:

i) Η εντροπία της πηγής **H(X)** και η **H(Y/X)**

ii) Η αμοιβαία πληροφορία του ενθόρυβου καναλιού.

**α). Κανάλι χωρίς θόρυβο**

i) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων είναι  $p(x_1) = 0.4$  ενώ οι υπόλοιπες είναι  $p(x_2) = p(x_3) = 0.3$   
Άρα η εντροπία της πηγής είναι:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^3 p(x_i) \log_2(p(x_i)) = -[0.4 \cdot \log_2(0.4) + 0.3 \cdot \log_2(0.3) + 0.3 \cdot \log_2(0.3)] \approx 1.57 \text{ bits}$$

Γνωρίζω ότι η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς θόρυβο ισούται με τη μέγιστη τιμή του  $\mathbf{H(X)}$  («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89) η οποία προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{3}$$

Η χωρητικότητα δίνεται από

$$C = \max(H(X)) = \log_2 q|_{q=3} = \log_2(3) = 1.58 \text{ bits/symbol}$$

όπου  $q$  είναι ο αριθμός συμβόλων εισόδου

ii) Επιπλέον, η εντροπία  $H(X/Y)$  ισούται με 0 αφού  $X=Y$  κι όπως αποδεικνύεται και στο βιβλίο σελ. 90.

## β) Ενθόρυβο Κανάλι

ι) Αν στο κανάλι εισαγάγουμε θόρυβο δεν αναμένεται να αλλάξει η εντροπία της πηγής αλλά μόνο η χωρητικότητα του καναλιού η οποία αναμένεται να είναι μικρότερη από αυτή του ερωτήματος (α)  
Επομένως η εντροπία της πηγής  $H(X)$  είναι ίδια με αυτή του ερωτήματος (α).

Δεδομένου ότι το κανάλι έχει πίνακα μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Η εντροπία  $H(Y/X)$  δίνεται από τον τύπο

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^3 p(x_i) H(Y/X = x_i) \quad (1)$$

Αρα για κάθε  $i=1,2,3$  έχουμε

$$H(Y/X = x_i) = -\sum_{j=1}^3 p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις πιθανότητες κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης έχουμε:

$$H(Y/X = x_1) = -\sum_{j=1}^3 p(y_j/x_1) \log p(y_j/x_1) = -0.5 \log 0.5 - 0.5 \log 0.5 - 0 \log 0 = 1 \text{ bits}$$

$$H(Y/X = x_2) = -\sum_{j=1}^3 p(y_j/x_2) \log p(y_j/x_2) = -0 \log 0 - 0.25 \log 0.25 - 0.75 \log 0.75 = 0,811 \text{ bits}$$

$$H(Y/X = x_3) = -\sum_{j=1}^3 p(y_j/x_3) \log p(y_j/x_3) = -0.5 \log 0.5 - 0 \log 0 - 0.5 \log 0.5 = 1 \text{ bits}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (1) έχουμε

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^3 p(x_i) H(Y/X = x_i) = 0.4 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.811 + 0.3 \cdot 1 \approx 0,943 \text{ bits} \quad (2)$$

ii).

Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία  $I(X;Y)$  θα κάνουμε χρήση του τύπου  $I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εξόδου  $P(Y) = \{p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\}$  οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω

$$P[Y] = [p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)] = \left[ \sum_{i=1}^3 p(y_1, x_i) \quad \sum_{i=1}^3 p(y_2, x_i) \quad \sum_{i=1}^3 p(y_3, x_i) \right]$$

Γνωρίζω ότι ισχύει  $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j/x_i)$  («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25) και επομένως θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y, X) &= \begin{bmatrix} p(y_1, x_1) & p(y_2, x_1) & p(y_3, x_1) \\ p(y_1, x_2) & p(y_2, x_2) & p(y_3, x_2) \\ p(y_1, x_3) & p(y_2, x_3) & p(y_3, x_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p(x_1) \cdot p(y_1/x_1) & p(x_1) \cdot p(y_2/x_1) & p(x_1) \cdot p(y_3/x_1) \\ p(x_2) \cdot p(y_1/x_2) & p(x_2) \cdot p(y_2/x_2) & p(x_2) \cdot p(y_3/x_2) \\ p(x_3) \cdot p(y_1/x_3) & p(x_3) \cdot p(y_2/x_3) & p(x_3) \cdot p(y_3/x_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.4 \cdot 0.5 & 0.4 \cdot 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \cdot 0.25 & 0.3 \cdot 0.75 \\ 0.3 \cdot 0.5 & 0 & 0.3 \cdot 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0.225 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Οπότε το ζητούμενο δίνεται από

$$P[Y] = [p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)] = \left[ \sum_{i=1}^3 p(y_1, x_i) \quad \sum_{i=1}^3 p(y_2, x_i) \quad \sum_{i=1}^3 p(y_3, x_i) \right] =$$

$$= [0.35 \quad 0.275 \quad 0.375]$$

$$p(y_1) = 0.35$$

$$p(y_2) = 0.275$$

$$p(y_3) = 0.375$$

Συνεπώς

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^3 p(y_i) \log_2(p(y_i)) = -[0.35 \cdot \log_2(0.35) + 0.275 \cdot \log_2(0.275) + 0.375 \cdot \log_2(0.375)] = 1.573 \text{ bits}$$

Από την παραπάνω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού είναι:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = 1.573 - 0.943 \approx 0.63 \text{ bits}$$

**ΘΕΜΑ 4**

Έστω η πηγή χωρίς μνήμη S1 που παράγει τα σύμβολα {α,β,γ,δ,ε} βάσει της κατανομής {0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2} και η πηγή με μνήμη S2, η οποία χαρακτηρίζεται από τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ενώ οι στατικές πιθανότητες  $\pi_i$ ,  $i=1,2,3,4,5$  που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος  $\pi P = \pi$  είναι όπως στην περίπτωση της πηγής χωρίς μνήμη δηλαδή  $\pi_i=0.2$ ,  $i=1,2,3,4,5$ .

**α)** Να βρείτε ποια από τις δύο πηγές έχει την μικρότερη εντροπία.

**β)** Αν θεωρήσουμε τον παραπάνω πίνακα μετάβασης ως τον πίνακα μετάβασης ενός καναλιού και ότι η S1 είναι η πηγή συμβόλων που αποστέλλονται με την κατανομή του ερωτήματος (α) πάνω από αυτό το κανάλι βρείτε τα παρακάτω:

**(i)** Τι είδους χαρακτηριστικό κανάλι αντιπροσωπεύει ο πίνακας μετάβασης P;

**(ii)** Βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού αυτού. Είναι δυνατόν το πληροφορικό περιεχόμενο που μετάδωσε η πηγή S1 πάνω από το κανάλι να είναι ίσο με την χωρητικότητα του καναλιού; Εξηγείστε την απάντησή σας.

**α)** Η πηγή με μήμη έχει μικρότερη εντροπία από την αντίστοιχη χωρίς μήμη λόγω του ότι η εξάρτηση μειώνει την εντροπία της πηγής. Άρα  $H(S1) > H(S2)$ .

Εναλλακτικά για να υπολογίσουμε την εντροπία της πηγής S1 η οποία είναι χωρίς μήμη και άρα τα σύμβολα παράγονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο εφαρμόζουμε τον τύπο της εντροπίας

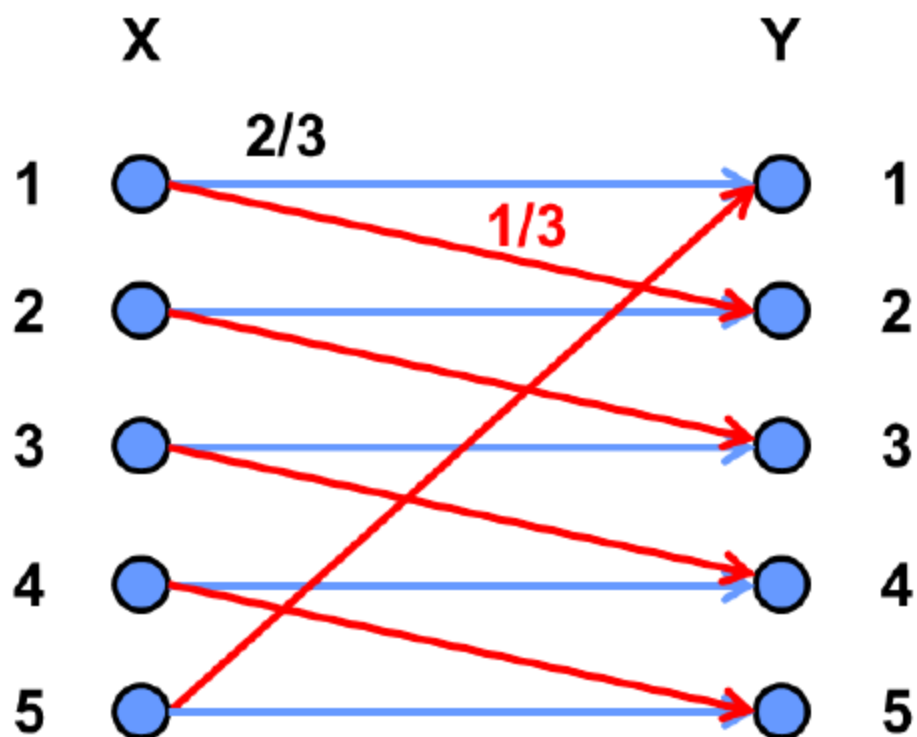
$$H(S1) = -\sum_{i=1}^5 p_i \log(p_i) = -\sum_{i=1}^5 0.2 \log(0.2) = 2.322 \text{ bits}$$

Στην περίπτωση της πηγής με μήμη S2 η εντροπία της πηγής είναι

$$\begin{aligned} H(S2) &= -\sum_{i=1}^5 \pi_i \sum_{j=1}^5 p_{ij} \log(p_{ij}) = -\sum_{i=1}^5 0.2 \left( \frac{2}{3} \log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{1}{3}\right) \right) \\ &= -\left( \frac{2}{3} (\log 2 - \log 3) + \frac{1}{3} (\log 1 - \log 3) \right) = \frac{2}{3} 0.585 + \frac{1}{3} 1.585 \\ &= 0.918 \text{ bits} \end{aligned}$$

Οπότε  $H(S1) > H(S2)$ .

β) Ο πίνακας μετάβασης αντιπροσωπεύει κανάλι το οποίο συμπεριφέρεται ως ενθόρυβη γραφομηχανή.



Για να βρούμε τη χωρητικότητα του καναλιού πρέπει πρώτα να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία  $I(X;Y)$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$



Άρα

$$H(Y/X) = - \left[ \sum_{j=1}^5 P(X=j) \sum_{i=1}^5 P(Y=i/X=j) \log(P(Y=i/X=j)) \right]$$

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= - \left[ \sum_{j=1}^5 P(X=j) \left\{ \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log \left( \frac{1}{3} \right) \right\} \right] \\ &= - \left[ \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log \left( \frac{1}{3} \right) \right] \\ &= H\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$I(X;Y) = H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right)$$

Αφού βρήκαμε την αμοιβαία πληροφορία, προχωρούμε να βρούμε την χωρητικότητα του καναλιού που προκύπτει από αυτή μέσω της μεγιστοποίησής της

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left( H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right) \right)$$

Άρα το πρόβλημα μεγιστοποίησης μεταφέρεται στην μεγιστοποίηση της  $H(Y)$  η οποία παίρνει την μέγιστη τιμή όταν οι έξοδοι είναι ισοπίθανοι, δηλαδή όταν

$$H(0,2) = \log 5$$

Άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \log 5 - H\left(\frac{1}{3}\right) \text{ bits}$$

Επειδή η μεγιστοποίηση της  $H(Y)$  είναι συναρτήσει των πιθανοτήτων εισόδου θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει κατάλληλη κατανομή πιθανοτήτων εισόδου η οποία όντως μεγιστοποιεί την εντροπία εξόδου. Πράγματι παρατηρούμε ότι η πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της πηγής εισόδου μεγιστοποιούν την εντροπία της εξόδου.

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=1}^5 P(Y=j | X=i) P(X=i) \\ &= P(Y=i | X=i) P(X=i) + P(Y=i | X=i-1) P(X=i-1) \quad , \text{ για κάθε } i,j=1,2,3,4,5 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.2 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 = 0.2 \end{aligned}$$

ΕΑΠ / ΠΛΗ22  
/ΑΘΗ.4 / 4η  
ΟΣΣ /  
19.03.2016 /  
Ν.Δημητρίου

Άρα στην περίπτωση μας το πληροφορικό περιεχόμενο ισούται με την μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού 26