

# ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

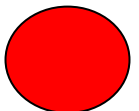
Νίκος Δημητρίου

ΣΕΠ ΘΕ ΠΛΗ-22/ΑΘΗ.3

Εισαγωγή στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

2016

*Σημείωση: Οι διαφάνειες αυτές βασίζονται στην παρουσίαση που είναι αναρτημένη στο [study.eap.gr](http://study.eap.gr) και περιλαμβάνουν πρόσθετες επεξηγήσεις και παραδείγματα στις διαφάνειες με τη σήμανση*



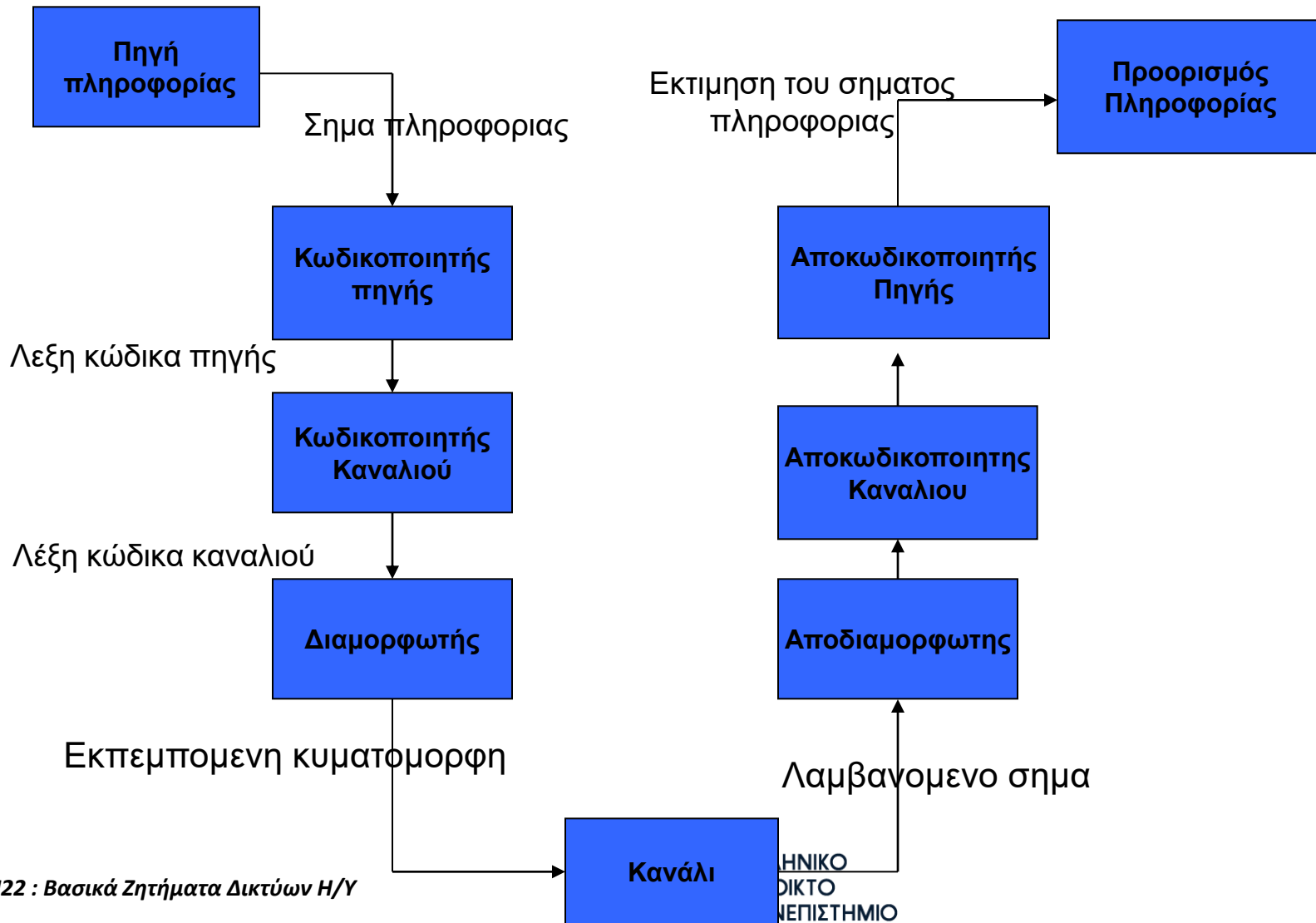
# Στόχοι Μελέτης

---

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
  - Παροχή Υπηρεσιών προς τους χρήστες
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
  - Τύποι Σημάτων
  - Χαρακτηριστικά Συστημάτων
  - Φάσμα
- Αναλογικές Διαμορφώσεις Πλάτους

# Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

# Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



# Σήματα και Συστήματα



# Σήμα

---

- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
  - Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα

# Κατηγορίες Σημάτων

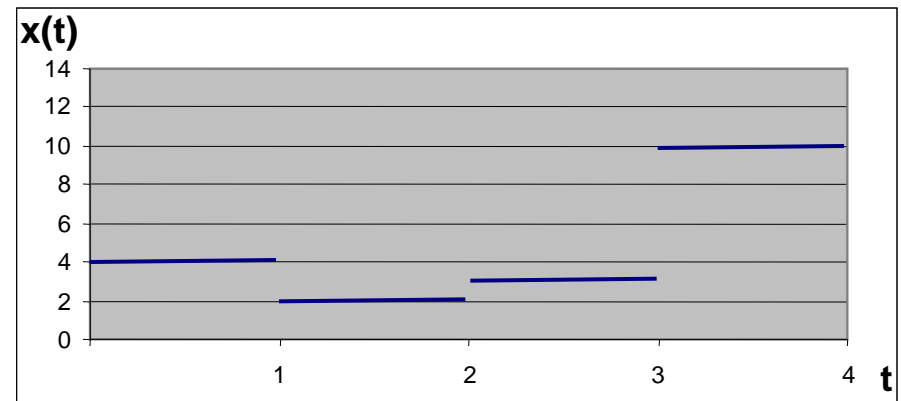
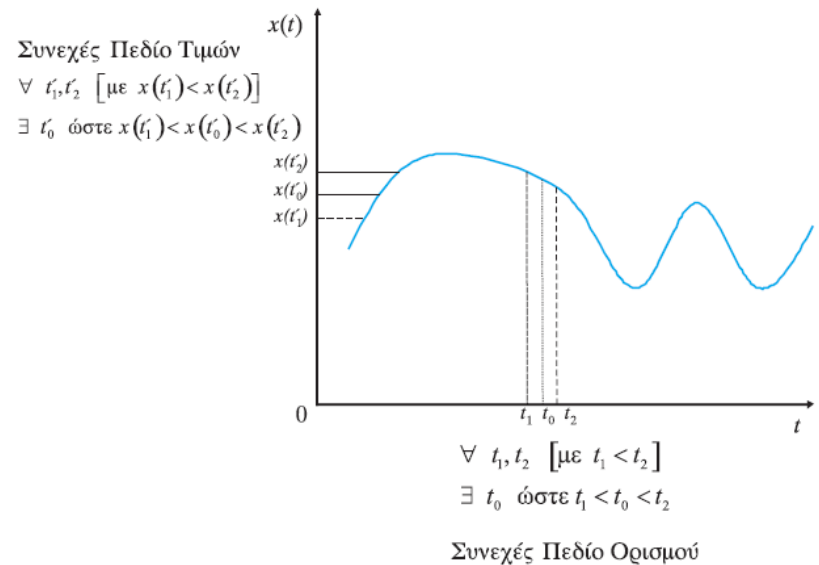
---

- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
  - Περιοδικά Σήματα
  - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
    - Ημιτονοειδή Σήματα
    - Ορθογώνιος Παλμός
    - Τριγωνικός Παλμός
    - Κρουστικά Σήματα
    - Σήμα Βήματος

# Σήματα Συνεχούς Χρόνου (ΣΣΧ)

- Είναι αυτά στα οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος) παίρνει συνεχείς τιμές
- Αναλογικά Σήματα: Είναι αυτά τα ΣΣΧ που και η εξαρτημένη μεταβλητή  $x(t)$  παίρνει συνεχείς τιμές
  - $x(t)=4t$
- Διακριτά Σήματα Συνεχούς Χρόνου: Είναι σήματα ΣΣΧ που η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές

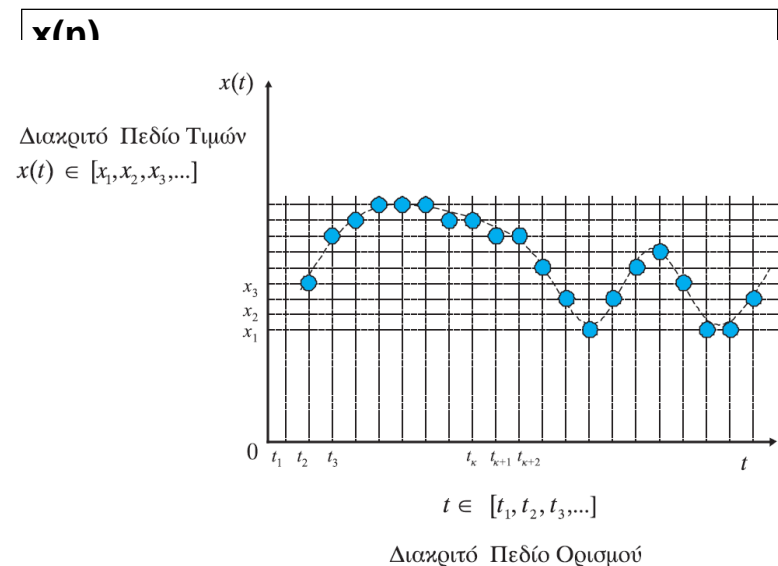
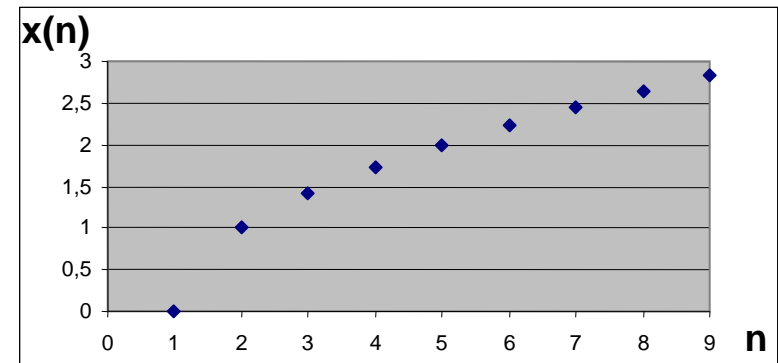
$$x(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2, & 1 < t \leq 2 \\ 3, & 2 < t \leq 3 \\ 10.3, & 3 < t \leq 4 \end{cases}$$





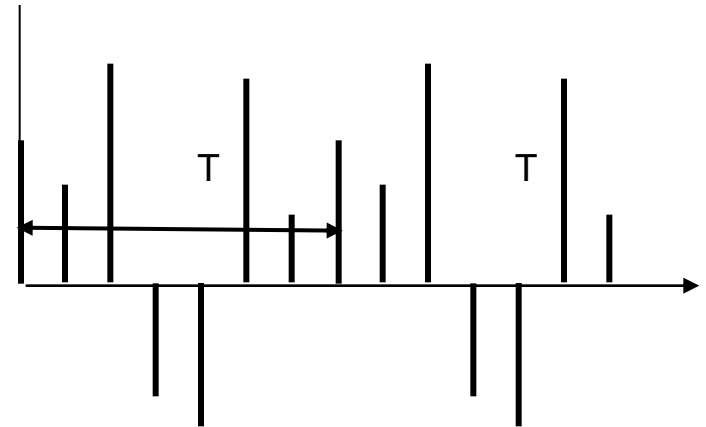
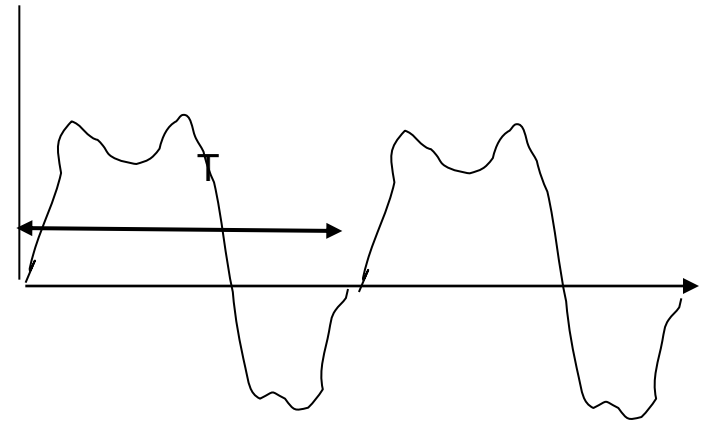
# Σήματα Διακριτού Χρόνου (ΣΔΧ)

- Ο χρόνος δέχεται μόνο διακριτές τιμές
- Τα σήματα συμβολίζονται ως ακολουθίες
- Αναλογικά ΣΔΧ: Η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει συνεχείς τιμές
  - $x(n)=\text{sqrt}(n)$
- Διακριτά ΣΔΧ: Η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές
- Ψηφιακό Σήμα



# Περιοδικά Σήματα

- Αναλογικό Σήμα
  - Ισχύει η σχέση  $y(t)=y(t+T)$
  - $T$  είναι περίοδος και ορίζει τη μικρότερη χρονική διάρκεια μετά την οποία επιλαμβάνεται
- Διακριτό Σήμα
  - Ισχύει  $y(n)=y(n+N)$  για όλα τα  $n$
  - $N$  περίοδος



# Ημιτονοειδή Σήματα (1)

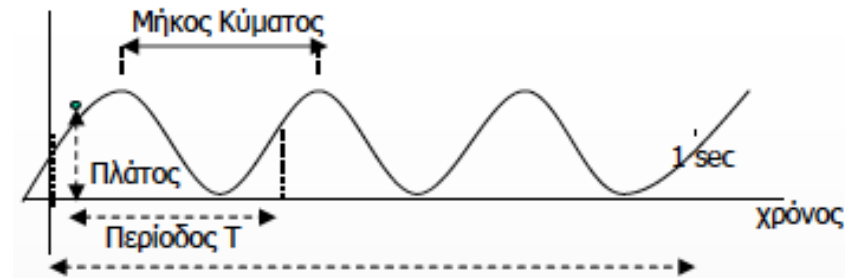
- Ειδική κατηγορία περιοδικών σημάτων

- Αναλογικού χρόνου

- Παράσταση

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

- $\varphi \rightarrow$  γωνία φάσης
- $T \rightarrow$  περίοδος
- $\omega = 2\pi f \rightarrow$  κυκλική συχνότητα

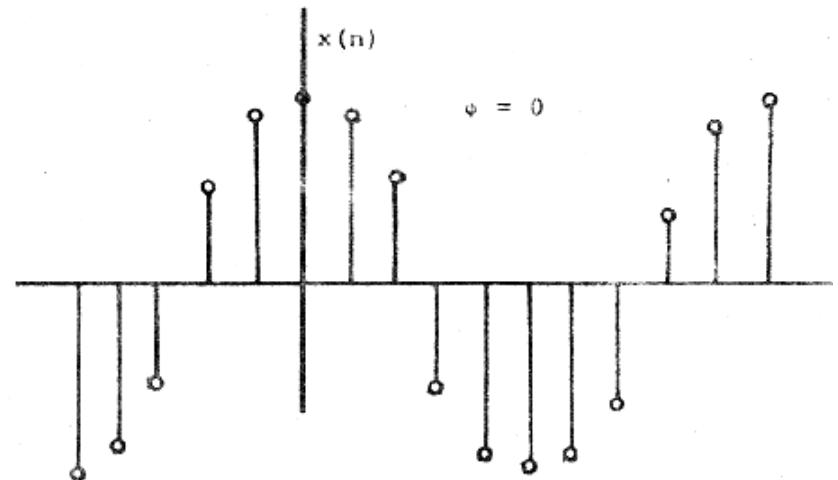


- Διακριτού χρόνου

- Παράσταση

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$$

- $N \rightarrow$  Περίοδος
- $\theta \rightarrow$  γωνία φάσης

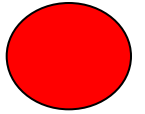


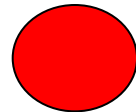
# Ημιτονοειδή Σήματα (2)

- **Συχνότητα  $f$ :** Αριθμός πλήρων ταλαντώσεων (κύκλοι) ανά δευτερόλεπτο (σε Hertz - Hz).
  - $f = 1 / T$
- **Περίοδος  $T$ :** Διάρκεια πλήρους ταλάντωσης (sec)
  - $T = 1 / f$
- **Μήκος  $\lambda$ :** Η απόσταση στην οποία μεταδίδεται το σήμα σε χρόνο  $T$  (σε μέτρα).
- **Ταχύτητα μετάδοσης  $u$ :** Η ταχύτητα με την οποία ο σήμα διαπερνά το μέσο μετάδοσης
  - $u = \lambda \cdot f$
- Στο κενό, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν την ταχύτητα του φωτός
  - $3 \cdot 10^8$  m/sec
- **Πλάτος  $a$ :** Η τιμή του σήματος μια χρονική στιγμή.

# Περιοδικότητα σημάτων

---





### Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους  $T_1, T_2$  θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$  τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q} \quad (\text{μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει}$$

όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$$

### Γενίκευση:

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα  $N$  περιοδικών σημάτων με περιόδους  $T_1, T_2, \dots, T_N$  θα είναι περιοδικό εάν :

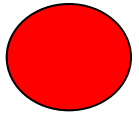
$\exists m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$  τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N$$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N$$

# Παράδειγμα



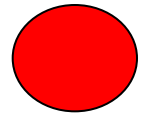
*Βασικά Ζητήματα ΠΛΗ22*

8/31

## Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα  $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$ , όπου  $f(x) = \cos(\pi x)$ .

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.



$$\text{Είναι } s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

$$\text{Για το } \cos(5\pi t) \text{ η περίοδος είναι } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} \text{ sec}$$

$$\text{Για το } \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ η περίοδος είναι } T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \text{ sec}$$

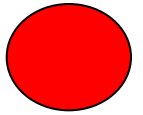
Ο λόγος των περιόδων είναι  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$  με  $\alpha=1, \beta=10$  φυσικούς, άρα ρητός οπότε

το σήμα  $s_1(t)$  είναι περιοδικό με περίοδο  $T = \beta T_1 = \alpha T_2 = 4 \text{ sec}$

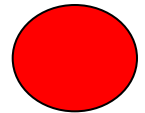
Η συχνότητα του  $s_1(t)$  είναι το αντίστροφο της περιόδου:  $f = \frac{1}{T} = 0.25 \text{ Hz}$



# Γραφική απεικόνιση της προηγούμενης άσκησης στο OCTAVE

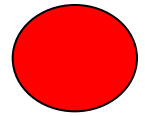


- *Παραπομπή: Για την εισαγωγή στο OCTAVE δείτε τις διαφάνειες `octave_matlab_tutorial_v1.0.ppt`*

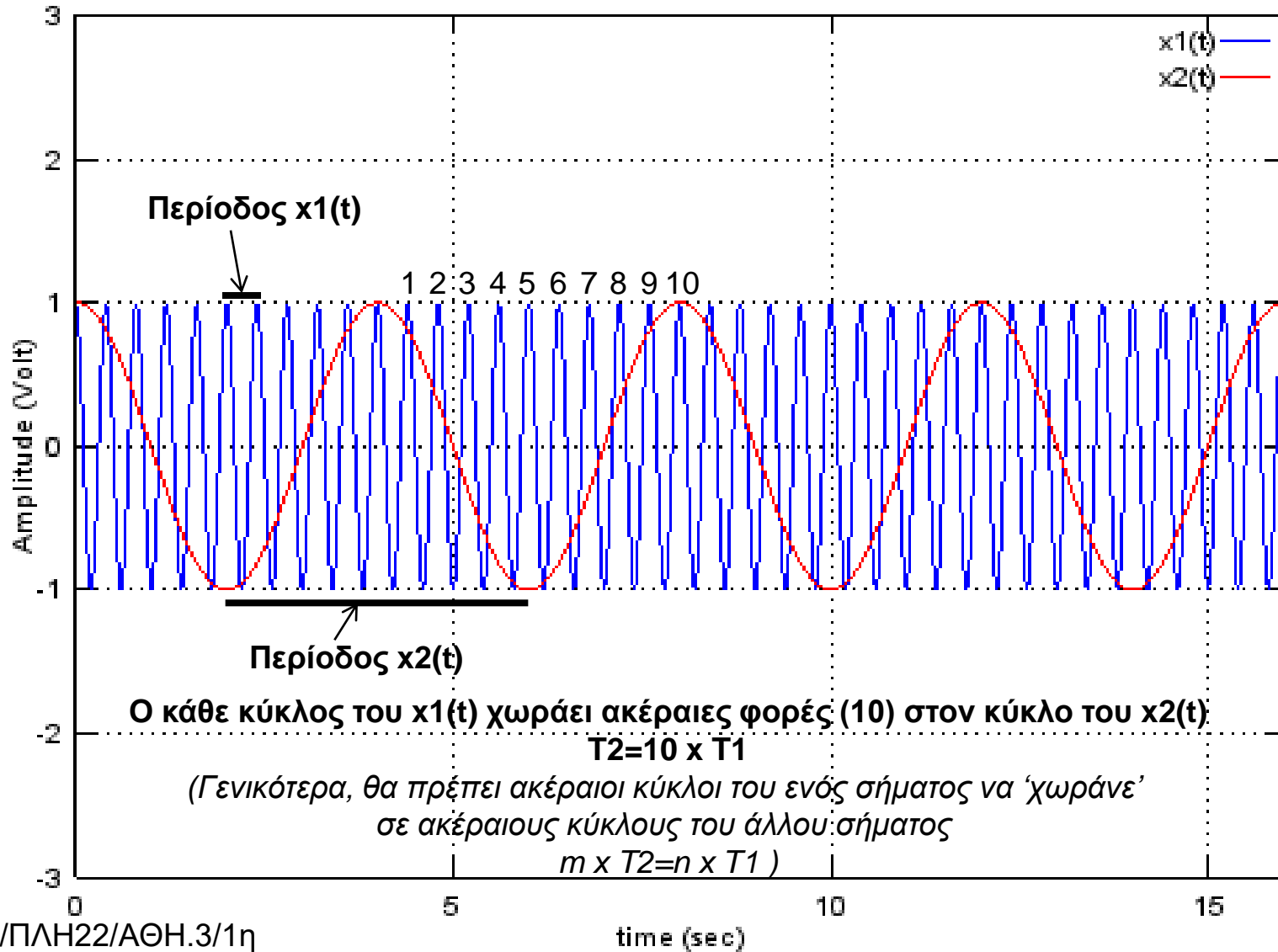


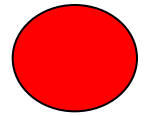
# Example 1a

- `figure;` % figure creation
- `Ts=1./50;` % sample duration (sampling frequency=50Hz)
- `t=0:Ts:10000.*Ts;` %create 10000 time samples
- `x1=cos(5.*pi.*t);` % 1<sup>st</sup> signal with frequency 2.5Hz
- `x2=cos(pi.*t./2);` % 2<sup>nd</sup> signal with frequency 0.25Hz
- `plot(t,x1,'b');` %plot 1<sup>st</sup> signal 'b' is for blue line
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- `hold;` %hold the first plot
- `plot(t,x2,'r');` % plot the 2<sup>nd</sup> signal 'r' is for red line
- `legend('x1(t)','x2(t)');` % show which plot corresponds to which signal
- `grid;` % show a rectangular grid
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- `figure;` % figure creation
- `plot(t,x1+x2,'k');` plot the sum of  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- `legend('x1(t)+x2(t)');` % show to which signal the plot corresponds
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- 18 ■ `grid` % show a rectangular grid

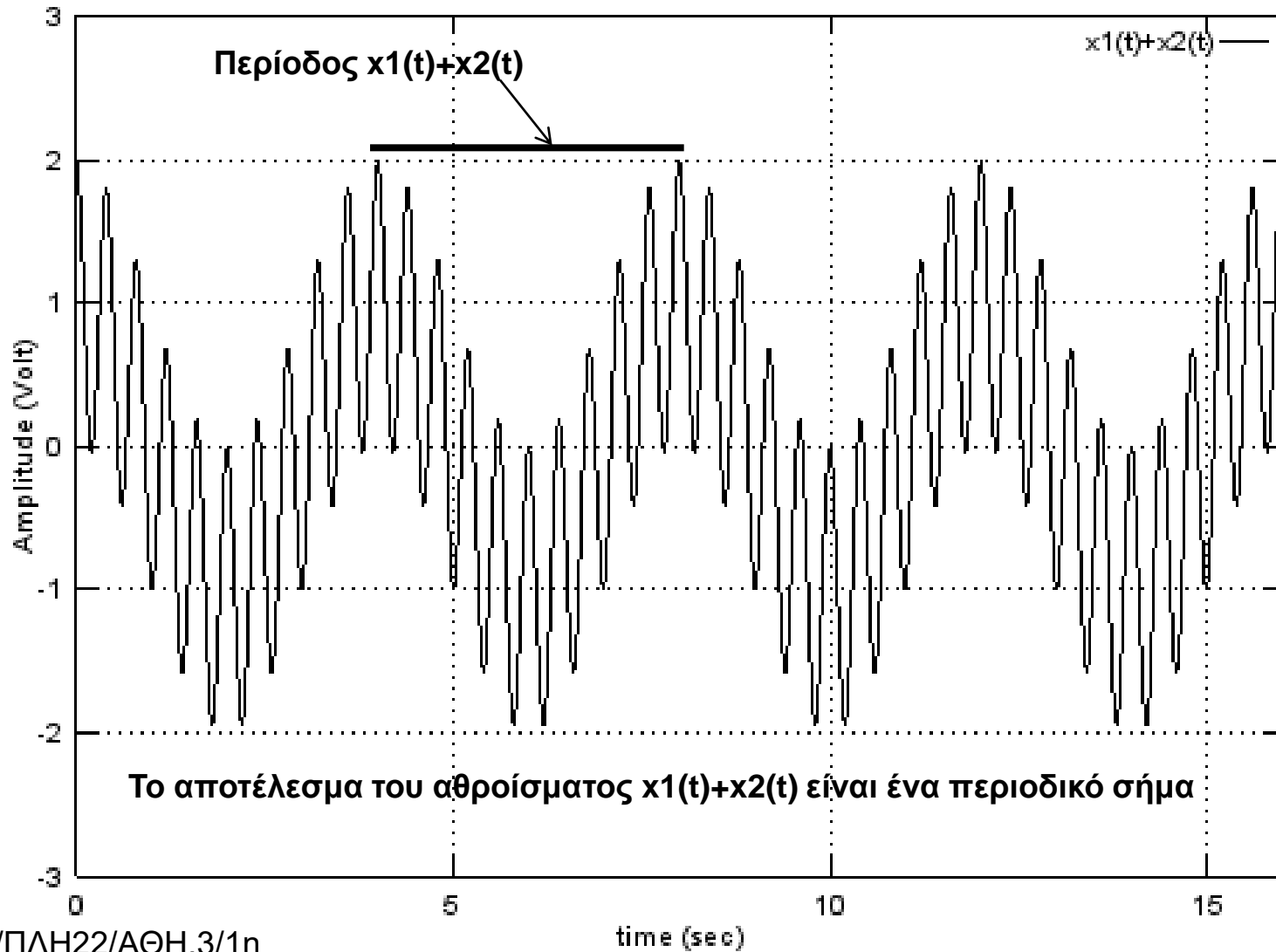


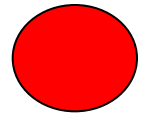
# Example 1a





# Example 1a





# Παραλλαγή

Διαφοροποίηση



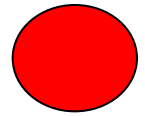
$$\text{Είναι } s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

$$\text{Για το } \cos(5t) \text{ η περίοδος είναι } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5} \text{ sec}$$

$$\text{Για το } \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ η περίοδος είναι } T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \text{ sec}$$

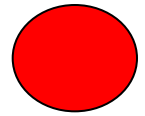
Ο λόγος των περιόδων είναι  $\frac{T_1}{T_2} = \pi/10$  Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό



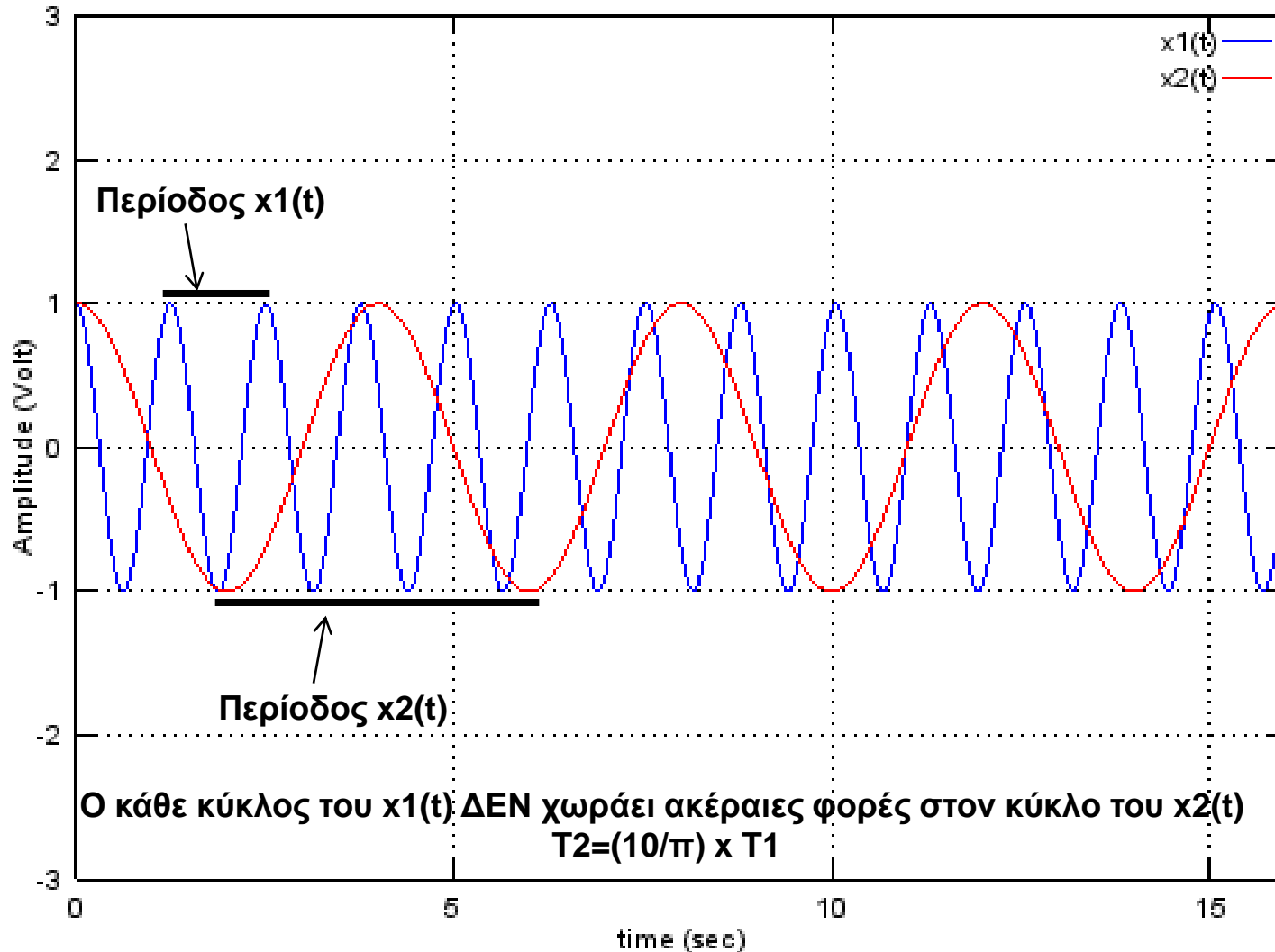
# Example 1b

- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.\*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.\*t); % 1<sup>st</sup> signal with frequency 2.5/pi Hz
- x2=cos(pi.\*t./2); % 2<sup>nd</sup> signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1<sup>st</sup> signal 'b' is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2<sup>nd</sup> signal 'r' is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

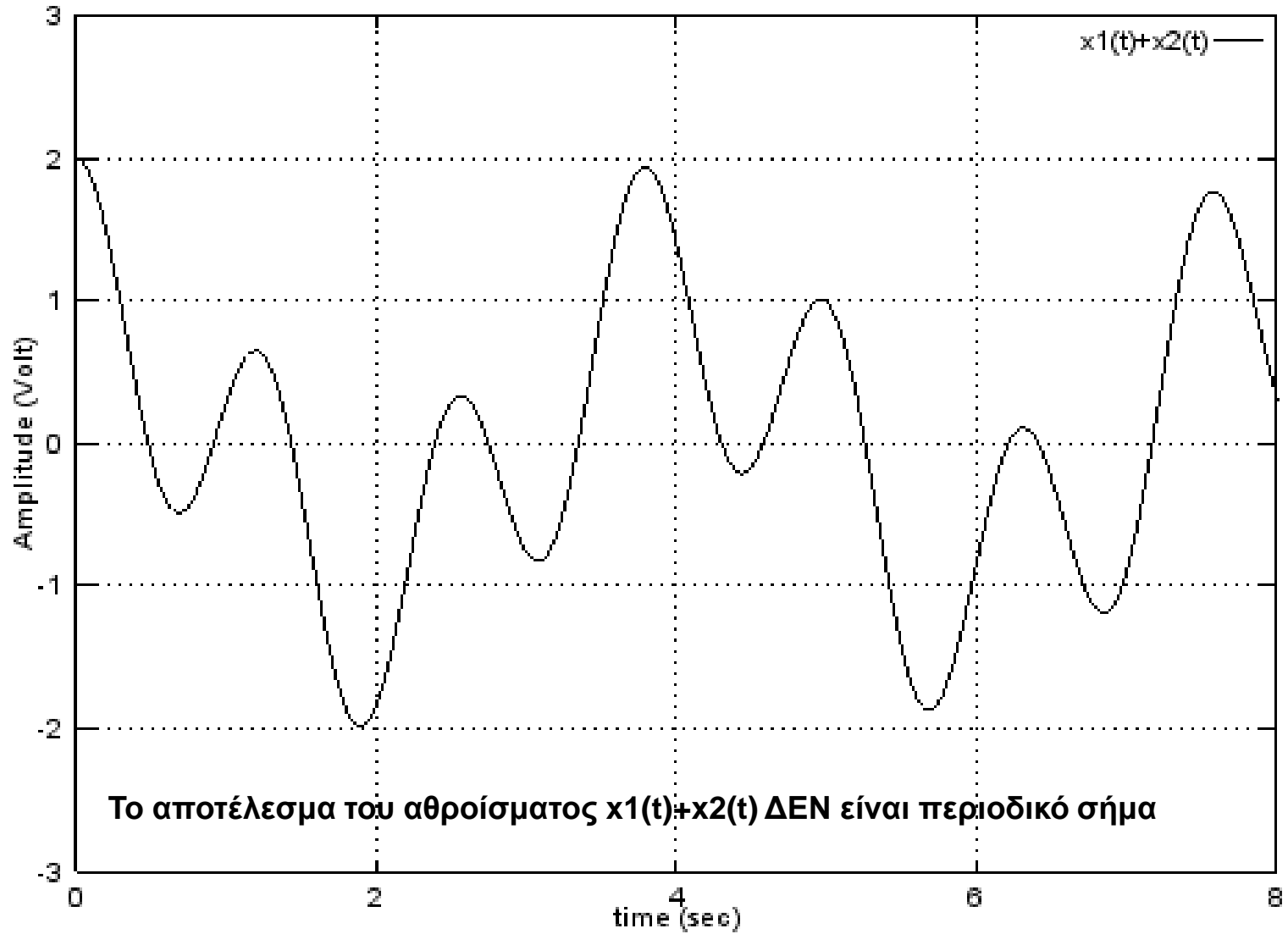
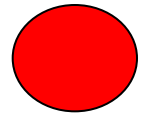
← Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a



# Example 1b



# Example 1b



Το αποτέλεσμα του αθροίσματος  $x1(t)+x2(t)$  ΔΕΝ είναι περιοδικό σήμα

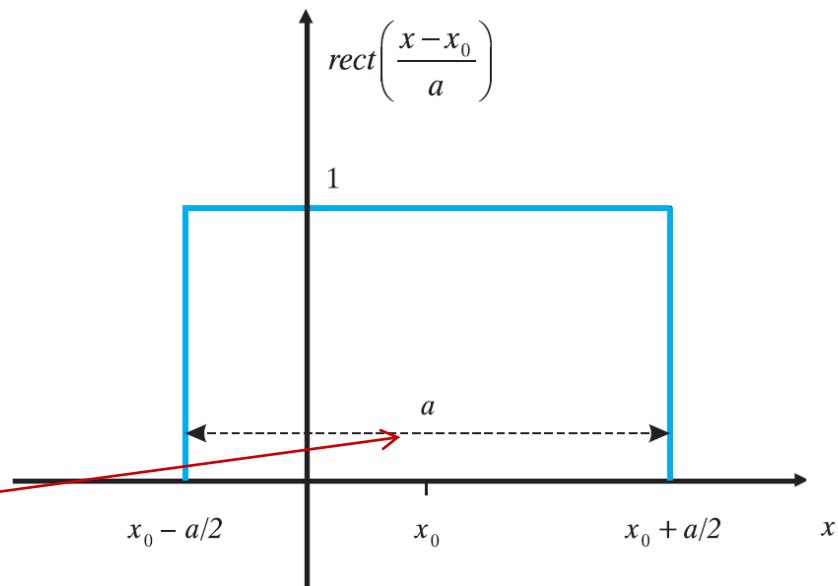


# Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } |x-x_0| < \frac{a}{2}, \text{ δηλ. } x_0 - \frac{a}{2} < x < x_0 + \frac{a}{2} \\ 0, & \text{όταν } |x-x_0| > \frac{a}{2}, \text{ δηλ. } \begin{cases} x < x_0 - \frac{a}{2} \\ \text{ή} \\ x > x_0 + \frac{a}{2} \end{cases} \end{cases}$$

όπου  $a > 0$



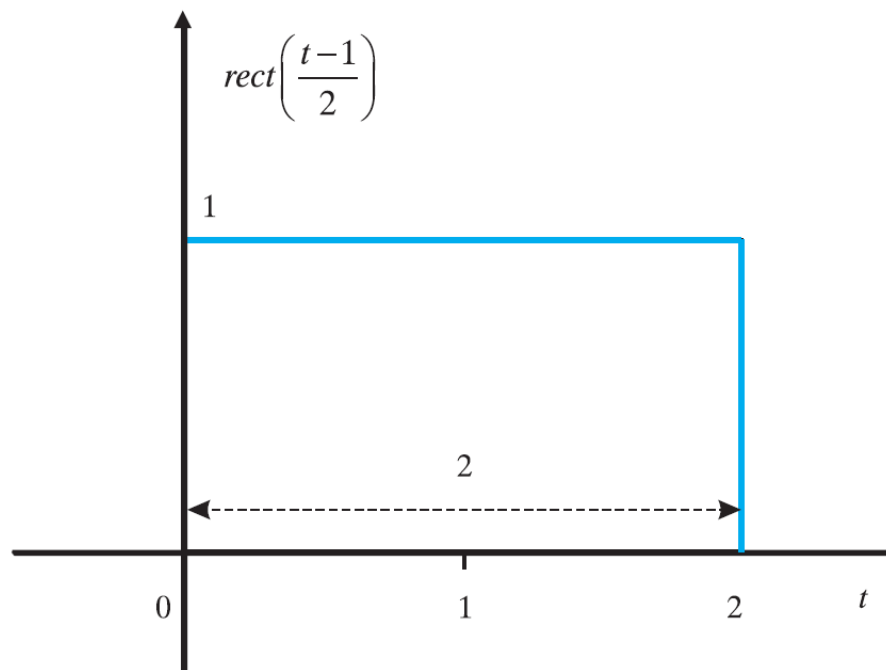
Σχεδιαστικό Εύρος

# Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (2)

## ■ Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο  $t_0 = 1$  και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα  $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0, 2)$ .

- $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

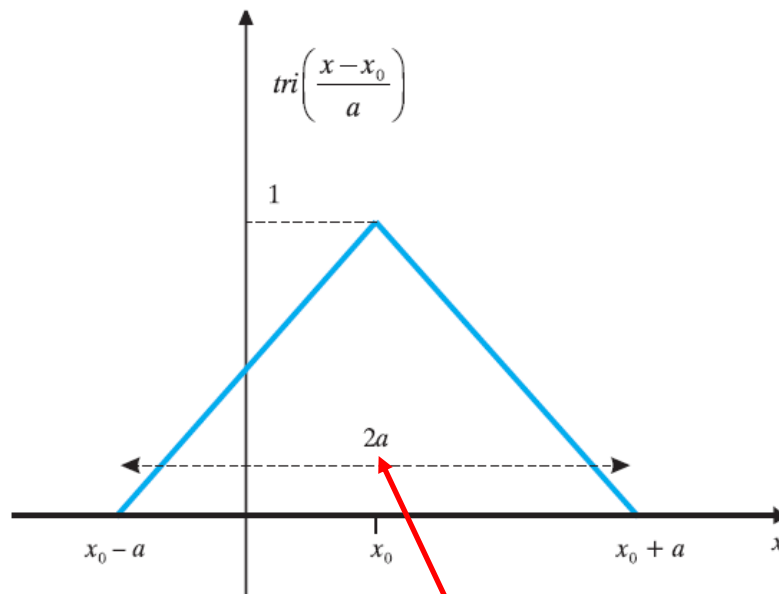


# Σήμα Τριγωνικός Παλμός (1)

## ■ Ορισμός

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \text{tri}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_0|}{a}, & \text{όταν } |x-x_0| < a, \text{ δηλ. } x_0 - a < x < x_0 + a \\ 0, & \text{όταν } |x-x_0| > a, \text{ δηλ. } \begin{cases} x < x_0 - a \\ \text{ή} \\ x > x_0 + a \end{cases} \end{cases}$$

όπου  $a > 0$



Προσοχή στην αναλυτική έκφραση για τα ολοκληρώματα

Σχεδιαστικό Εύρος

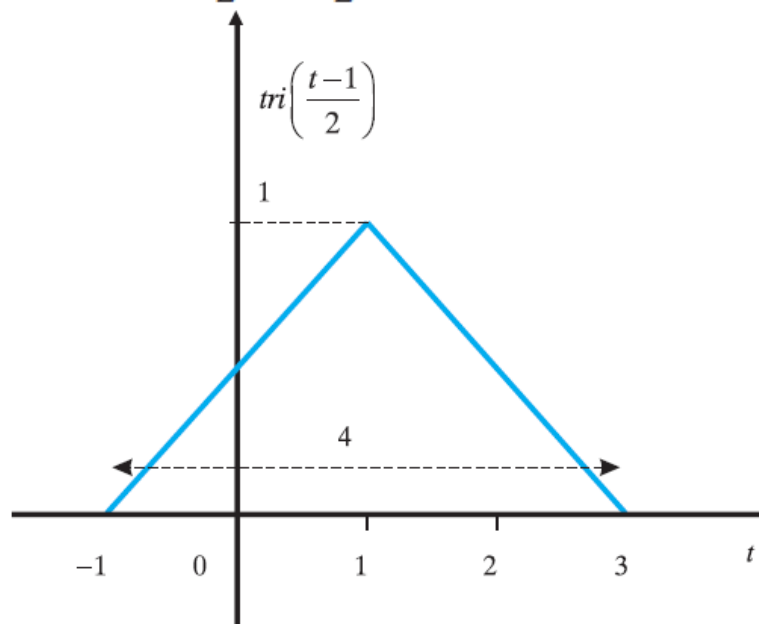
# Σήμα Τριγωνικός Παλμός (2)

## ■ Παραδείγματα

- $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο  $t_0 = 1$  και εύρος

$2 \times 2 = 4$ , άρα εκτείνεται στο διάστημα  $(t_0 - \frac{4}{2}, t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$ .



# Σήμα Τριγωνικός Παλμός (3)

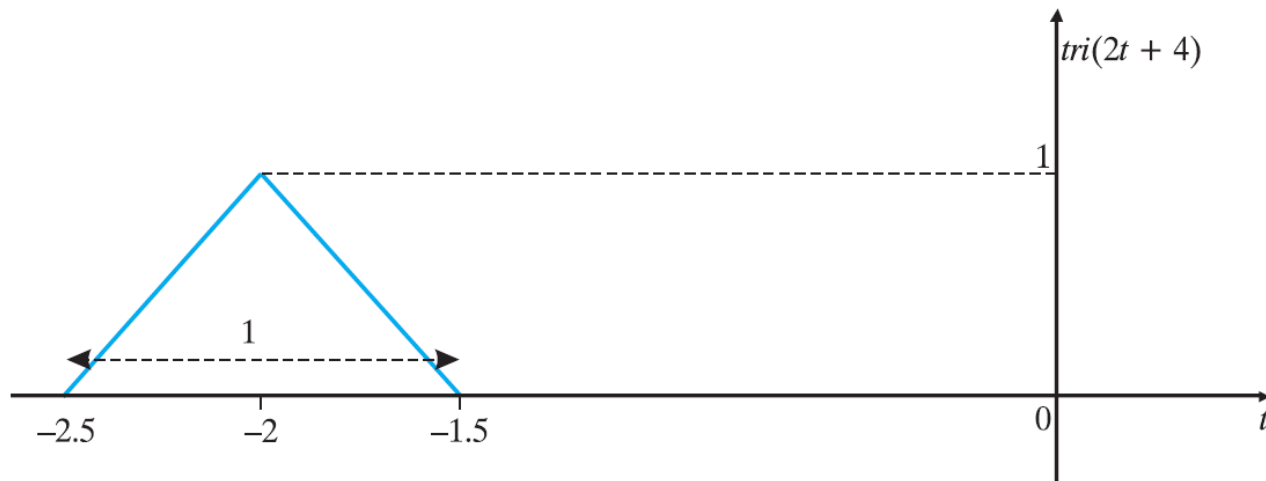
- $x(t) = \text{tri}(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή  $\text{tri}\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι:  $x(t) = \text{tri}(2t+4) = \text{tri}(2(t+2)) = \text{tri}\left(\frac{t+2}{1/2}\right) = \text{tri}\left(\frac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο  $t_0 = -2$  και εύρος  $2 \times \frac{1}{2} = 1$ , άρα εκτείνεται στο διάστημα

$$\left(t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right) = (-2.5, -1.5).$$



# Κρουστικά Σήματα

## ■ Αναλογικά Κρουστικά Σήματα

### – Χαρακτηριστικά

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$

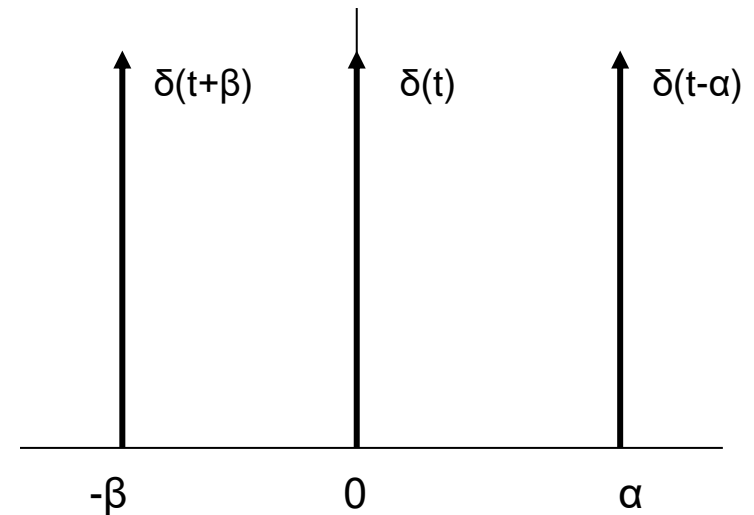
- $\delta(t) = 0, t \neq 0$

### – Ιδιότητες

- Συμμετρικότητα  $\delta(-t) = \delta(t)$

- Ολίσθηση  $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

- Κλιμάκωσης χρόνου  $\delta[a \cdot (t - t_0)] = \frac{1}{|a|} \delta(t - t_0)$

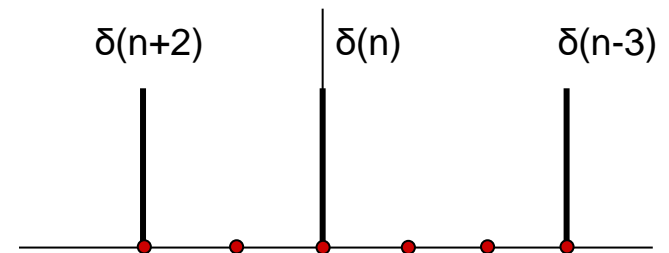


## ■ Κρουστική Συνάρτηση Διακριτού Χρόνου

### – Χαρακτηριστικά

- $\delta(n) = 1, n = 0$

- $\delta(n) = 0, n \neq 0$



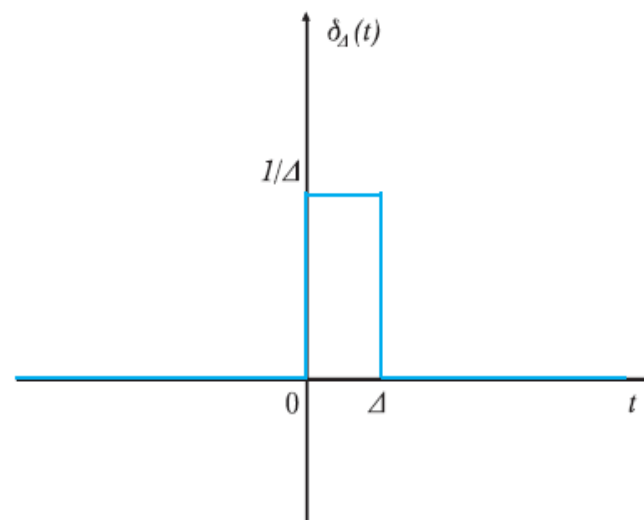
Λαμβάνεται ένας ορθογωνικός παλμός (μοναδιαίου εμβαδού) της εξής μορφής:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{οταν } t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & \text{οταν } 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{οταν } t > \Delta \end{cases}$$

όπου  $\Delta > 0$ .

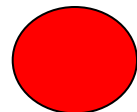
Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \text{rect} \left( \frac{t - \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \right)$$



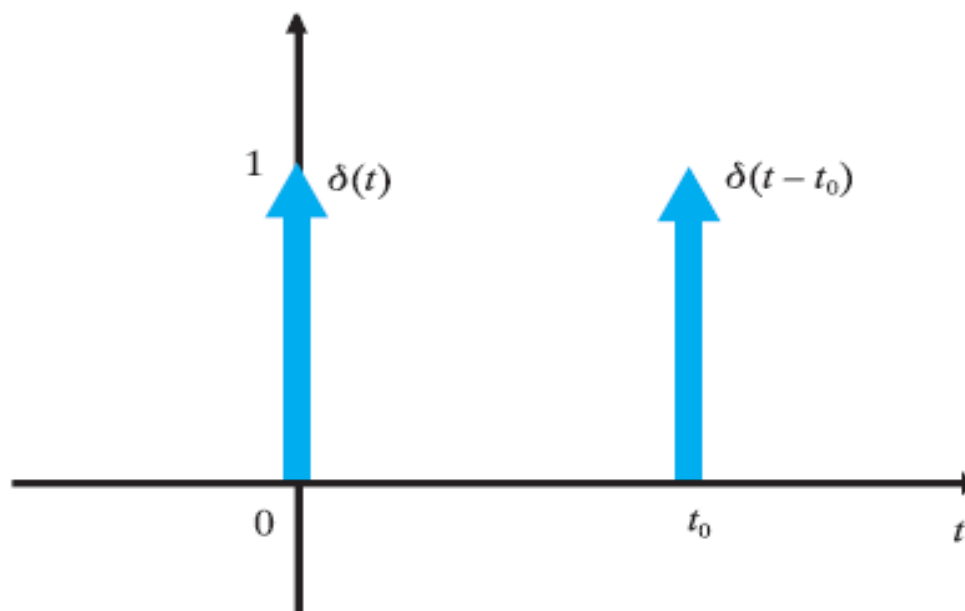
Σχήμα 2.19

Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού



- Αν θεωρηθεί ότι το  $\Delta$  είναι πολύ μικρό ( $\Delta \rightarrow 0$ ), η χρονική διάρκεια του παλμικού σήματος μηδενίζεται και το πλάτος του απειρίζεται, ενώ το εμβαδό του παραμένει ίσο με 1.

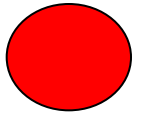
Η κρουστική συνάρτηση  $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [\delta_{\Delta}(t)]$  σχεδιάζεται ως εξής:



**Σχήμα 2.20**

*Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και  $t_0$*





- $\delta(t) = 0$ , όταν  $t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0$ , όταν  $t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- $f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

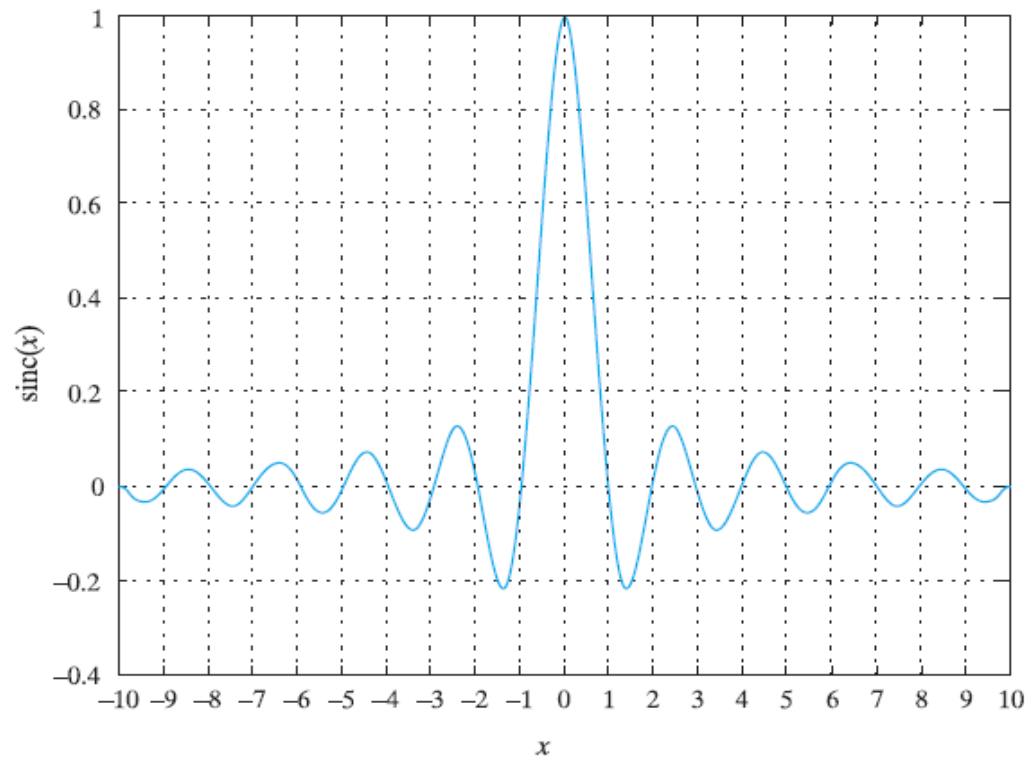
### 2.2.7.3 Συνάρτηση sinc

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 2.15

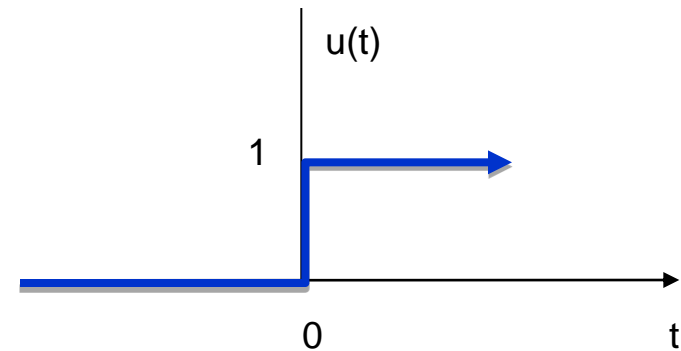
Απεικόνιση συνάρτησης sinc

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/1η  
ΟΣΣ/04.12.2016/Ν.Δημητρίου

# Σήμα Βήματος (1)

## ■ Αναλογικό Σήμα

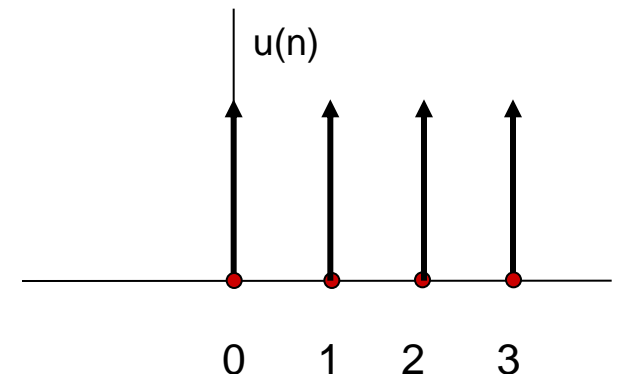
- Ορισμός  $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ N/A & t = 0 \end{cases}$
- Ιδιότητες
  - Παραγωγήσιση  $\frac{d}{dt}[u(t)] = \delta(t)$
  - Ολοκλήρωση  $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$



## ■ Διακριτό Σήμα

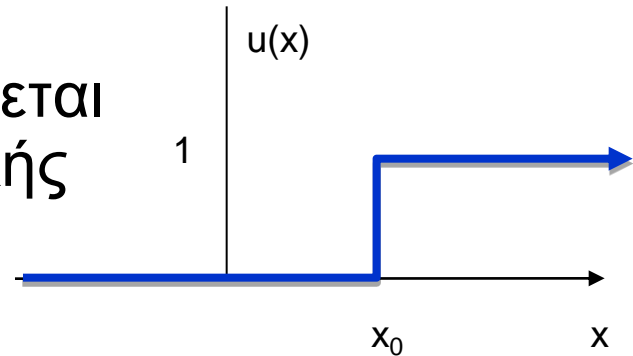
- Ορισμός

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

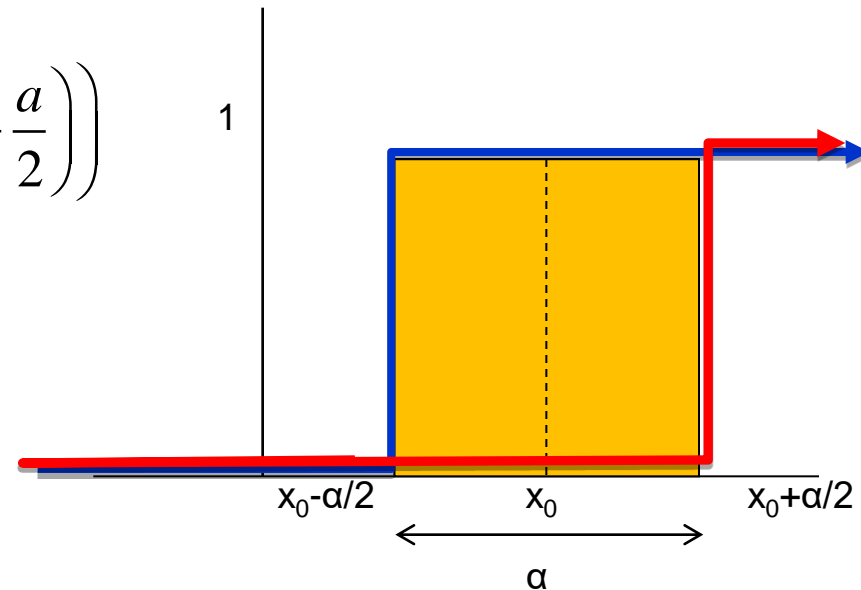


# Σήμα Βήματος (2)

- Ο ορθογώνιος παλμός περιγράφεται και μέσω της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

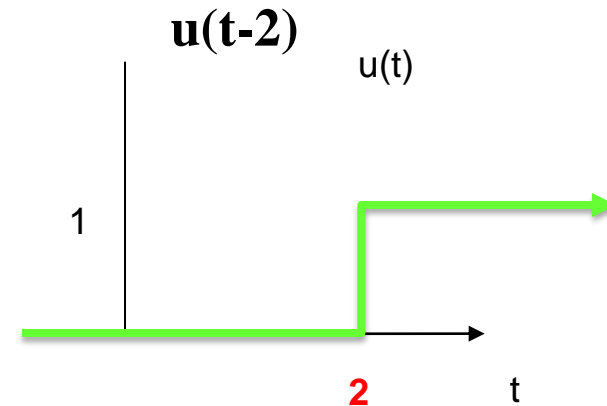
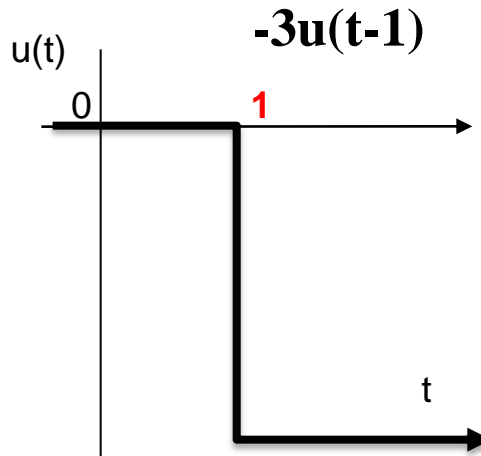
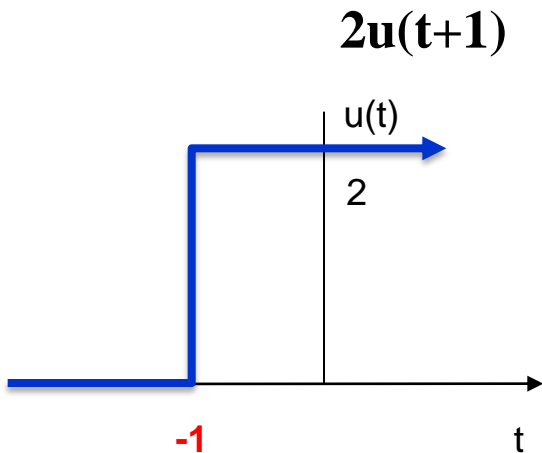


$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = u\left(x - \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\right) - u\left(x - \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)\right)$$



# Σήμα Βήματος (3)


- Παραδείγματα
  - Να σχεδιαστεί το σήμα  $x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)$
- Μέθοδος
- Βήμα 1: Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους



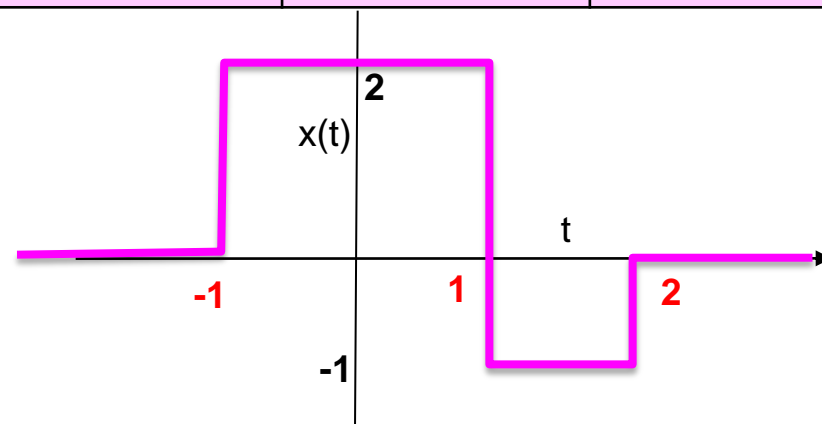
- Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1 και 2**

# Σήμα Βήματος (4)

- Βήμα 3: Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



$2u(t+1)$	0	2	2	2
$-3u(t-1)$	0	0	-3	-3
$u(t-2)$	0	0	0	1
$x(t)$	0	2	-1	0



- Βήμα 4:
- Γραφική Παράσταση

# Υπέρθεση Σημάτων (1)

---

- Εργασία 1<sup>η</sup>, (2009), Θέμα 4

- Δίνεται το σήμα

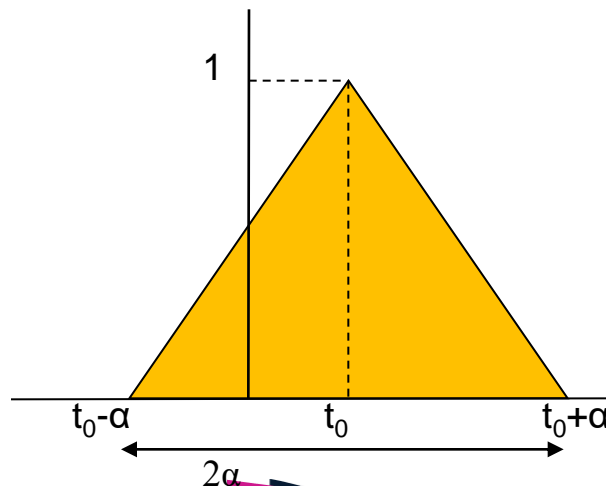
$$x(t) = -2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) + 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - 2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα  $x(t)$ .

# Υπέρθωση Σημάτων (2)

- Βήμα 1<sup>ο</sup>: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \text{tri}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{t-t_0}{a}, & \text{όταν } t_0 < t < t_0 + a \\ 1 - \frac{-(t-t_0)}{a} = 1 + \frac{t-t_0}{a}, & \text{όταν } t_0 - a < t < t_0 \\ 0, & \text{όταν } |t-t_0| > a \text{ ή } t < t_0 - a \text{ ή } t > t_0 + a \end{cases}$$

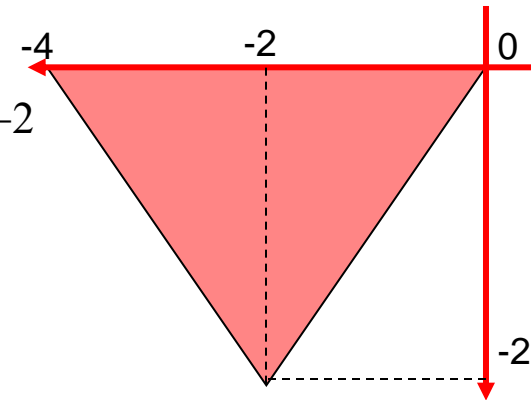




# Υπέρθυση Σημάτων (3)

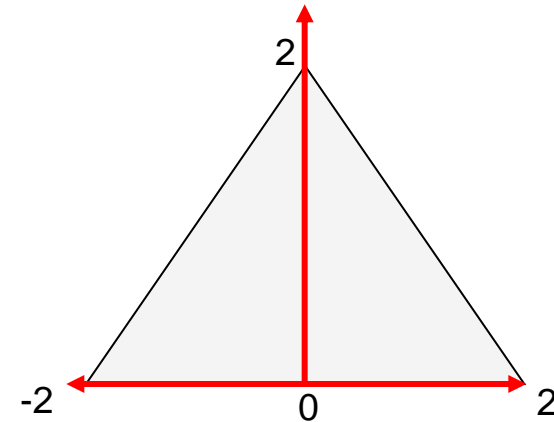
■ Αρα 1<sup>ο</sup> σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) = \begin{cases} -2\left[1 - \frac{-(t+2)}{2}\right] = -4 - t, \text{ όταν } -2 < t+2 < 0 \Rightarrow -4 < t < -2 \\ -2\left[1 - \frac{(t+2)}{2}\right] = t, \text{ όταν } 0 < t+2 < 2 \Rightarrow -2 < t < 0 \\ 0, \text{ όταν } t < -4 \text{ ή } t > 0 \end{cases}$$



2<sup>ο</sup> σήμα

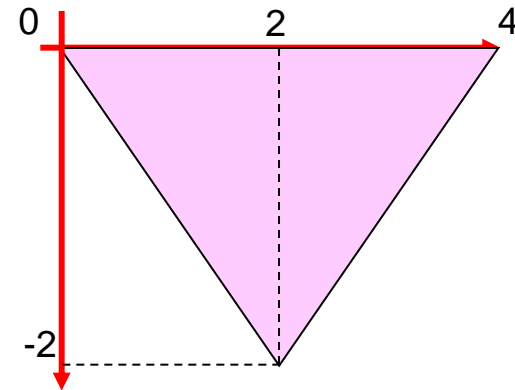
$$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 2\left[1 - \frac{-(t)}{2}\right] = 2 + t, \text{ όταν } -2 < t < 0 \\ 2\left[1 - \frac{(t)}{2}\right] = 2 - t, \text{ όταν } 0 < t < 2 \\ 0, \text{ όταν } t < -2 \text{ ή } t > 2 \end{cases}$$



# Υπέρθυση Σημάτων (4)


- 3<sup>ο</sup> σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) = \begin{cases} -2\left[1 - \frac{-(t-2)}{2}\right] = -t, \text{ όταν } -2 < t-2 < 0 \Rightarrow 0 < t < 2 \\ -2\left[1 - \frac{(t-2)}{2}\right] = t-4, \text{ όταν } 0 < t-2 < 2 \Rightarrow 2 < t < 4 \\ 0, \text{ όταν } t < -4 \text{ ή } t > 0 \end{cases}$$



# Υπέρθυση Σημάτων (5)

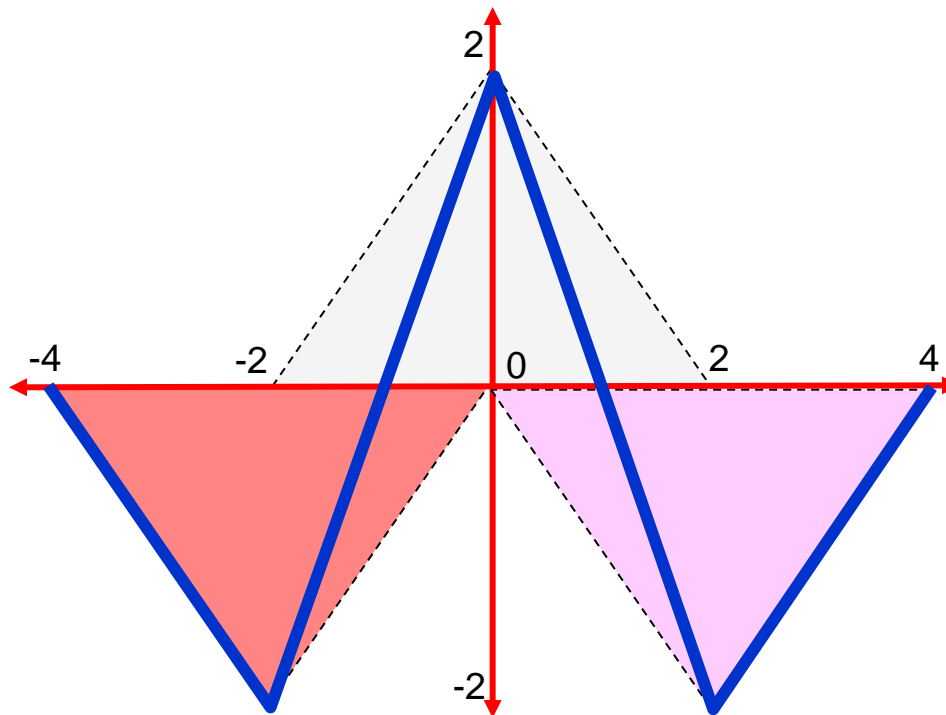
- Βήμα 2<sup>ο</sup>: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα



$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right)$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$	0	0	0	-t	t-4
$x(t)$	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

# Υπέρθυση Σημάτων (6)

- Βήμα 3<sup>ο</sup>: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα



# Υπέρθεση Σημάτων (7)

---

- Από Εργασία 1<sup>η</sup>, (2009), Θέμα 6(β)

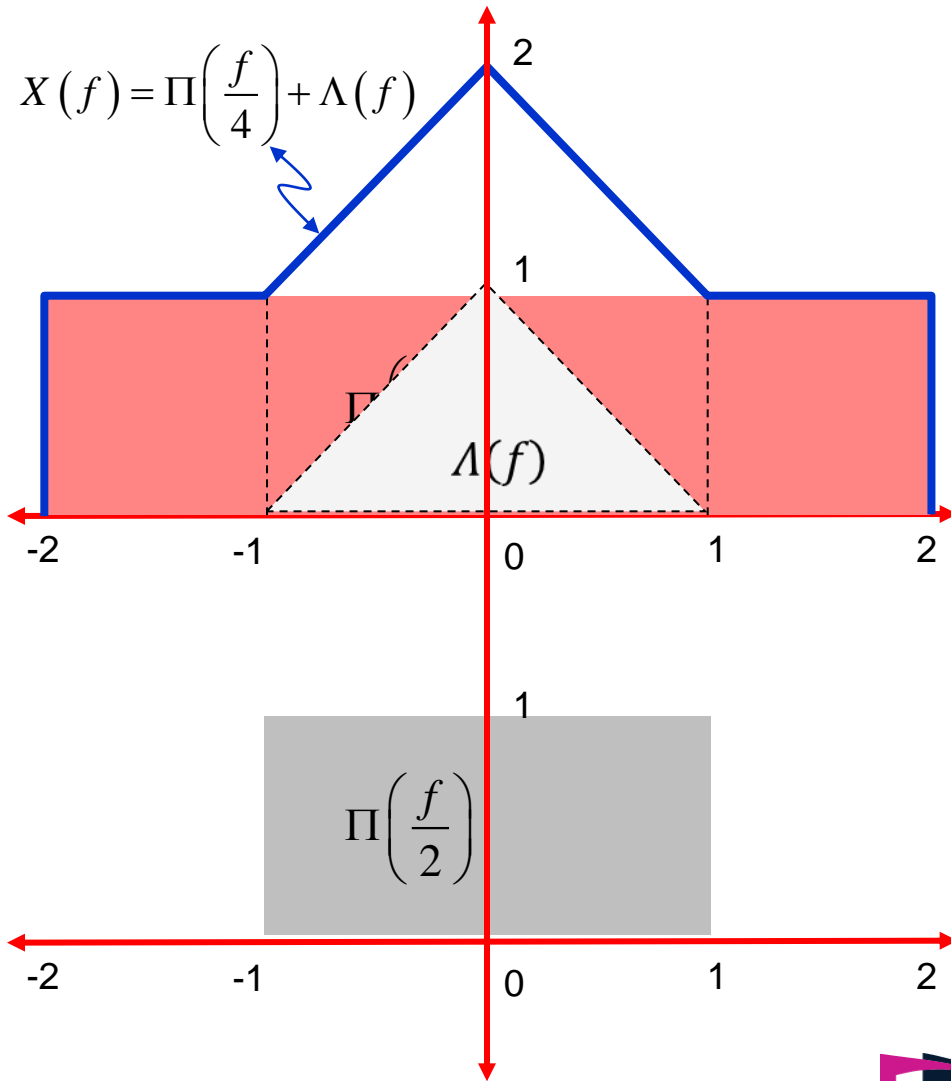
- Δίνεται το  $X(f)$  και  $H(f)$  που είναι

- $$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f) \quad \text{και} \quad H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

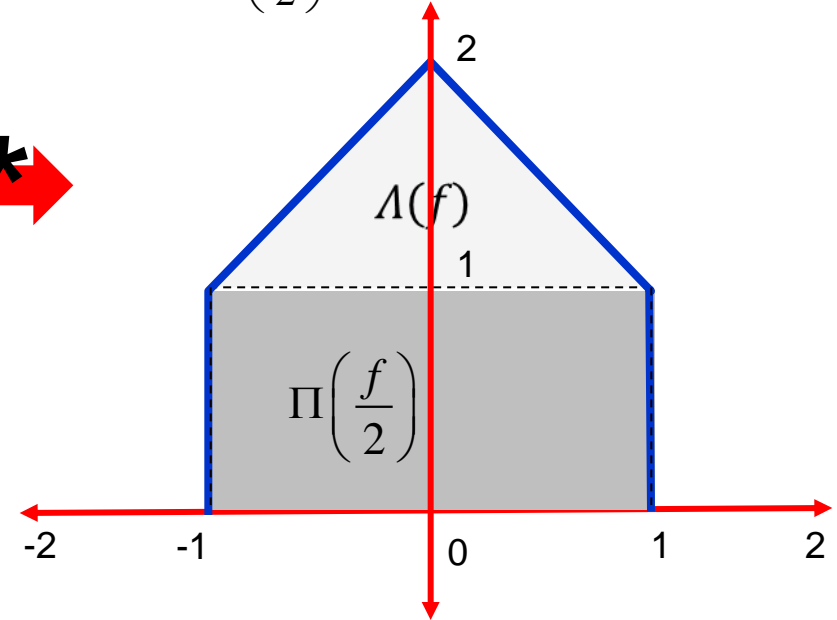
- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

# Υπέρθωση Σημάτων (8)



$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \left[ \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f)
 \end{aligned}$$

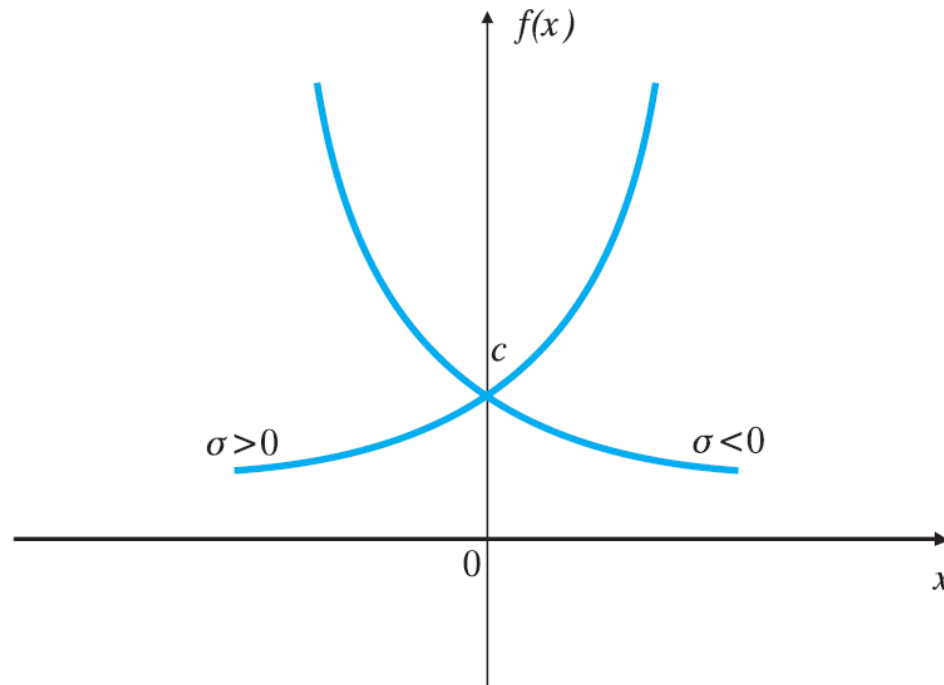


# Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (1)

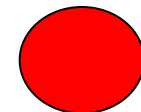
Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\sigma x}, \text{ όπου } c, \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



## Φάσμα πλάτους Σημάτων – Μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων



### Παράδειγμα.

Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα  $S_i(t)$ , σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$

$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$

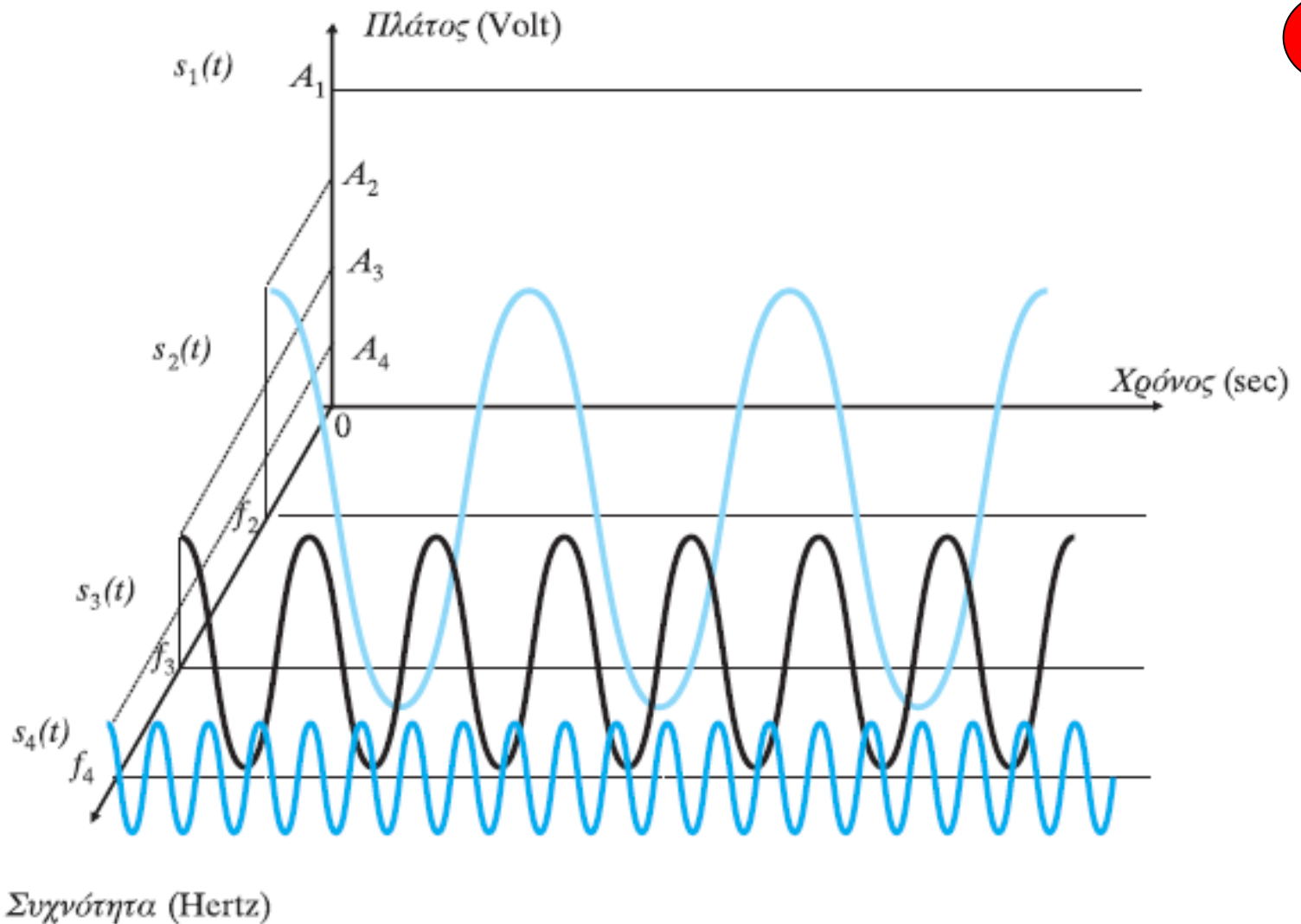
$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$

$$f_2 < f_3 < f_4$$

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

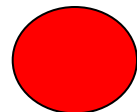
Τα σήματα που απαρτίζουν το  $s(t)$  μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:



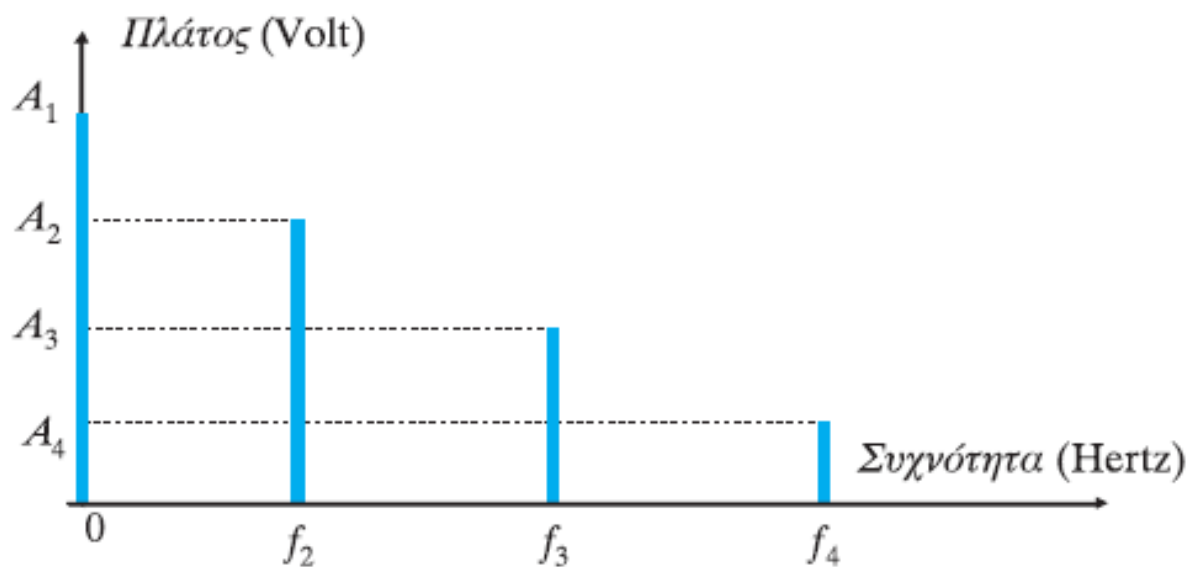


**Σχήμα 2.21**

Απεικόνιση του σήματος  $s(t)$  στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων



Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος  $s(t)$  μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



**Σχήμα 2.22**

*Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος  $s(t)$*

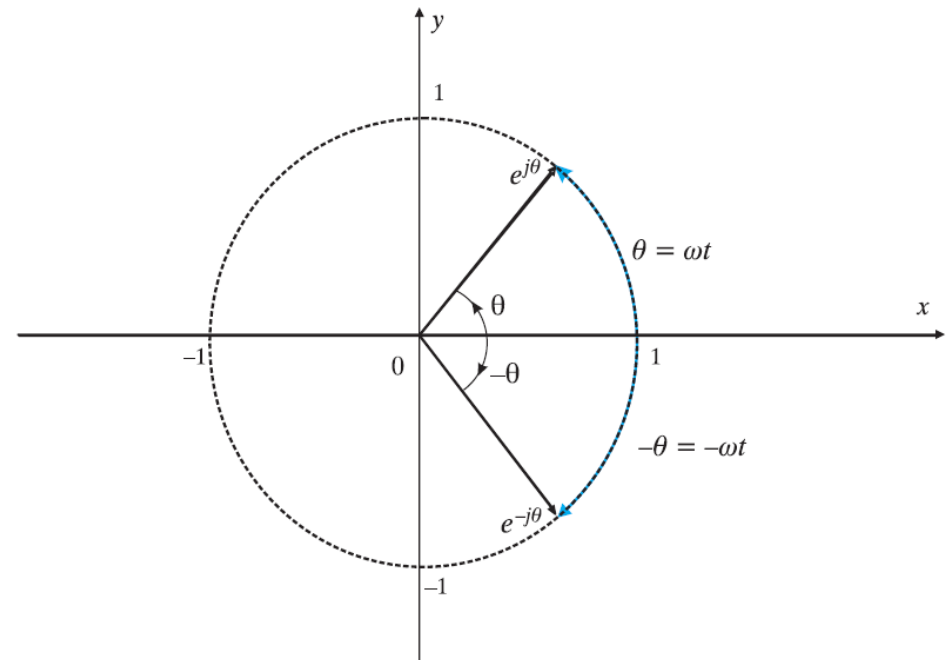
# Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (2)

- Έκφραση περιοδικών σημά εκθετικών
- Με χρήση σχέσεων
- Euler

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



# Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (i)

- Μιγαδικοί αριθμοί:

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών  $\mathbb{C}$  περιλαμβάνει τους αριθμούς  $z \in \mathbb{C}$  που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy, x, y \in \mathbb{R}$$

Ο μιγαδικός αριθμός « $j$ » ισούται με  $j = \sqrt{-1}$  και ισχύει  $j^2 = -1$ .

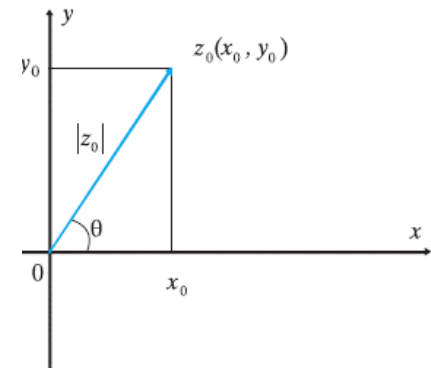
Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού  $z = x + jy$  ισούται με  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού  $z = x + jy$  είναι ο  $z^* = x - jy$ .

Ισχύει ότι  $z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ .

Ο πολλαπλασιασμός του « $j$ » επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά  $\pi/2$ .

ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες (στο διδιάστατο πεδίο που ορίζεται από τους άξονες των πραγματικών και φανταστικών αριθμών) ως ένα διάνυσμα μέτρου  $|z_0|$  και φάσης  $\theta$ .



# Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (ii)

Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0| \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0| \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$

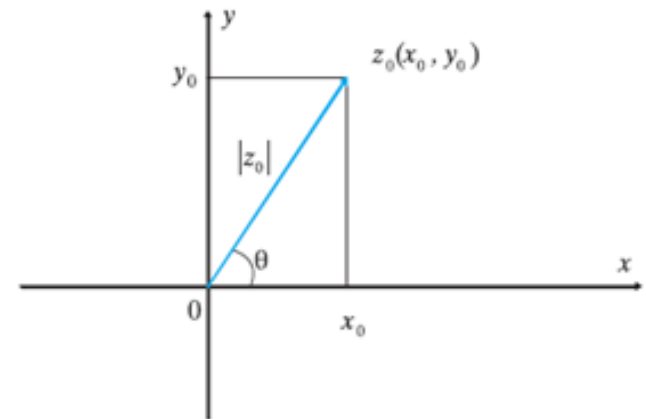
Οπότε ο μιγαδικός  $z_0$  μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0| [\cos(\theta) + j \sin(\theta)]$$

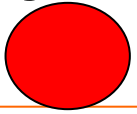
Θέτοντας  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0| e^{j\theta}$$



# Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (iii)



Ο μιγαδικός αριθμός  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$  έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) + \cos(\theta) - j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) - \cos(\theta) + j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

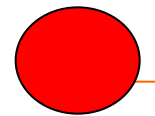
και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα  $s(t)$  μπορεί να

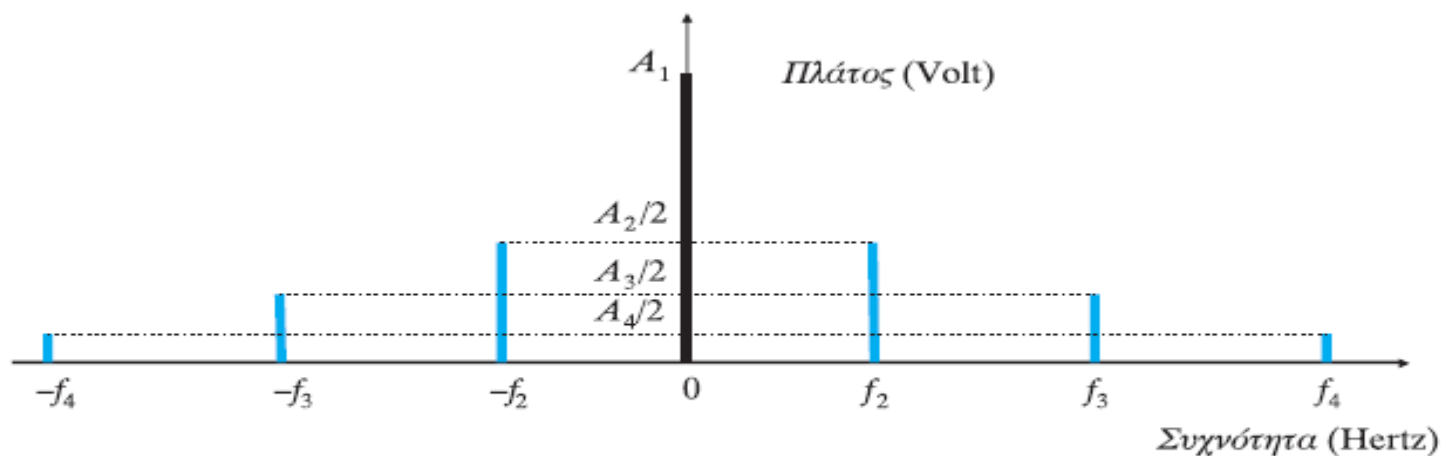
γραφεί διαδοχικά:

(συνέχεια από τη διαφάνεια 50)



$$\begin{aligned} s(t) &= A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} = \\ &= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t} \end{aligned}$$

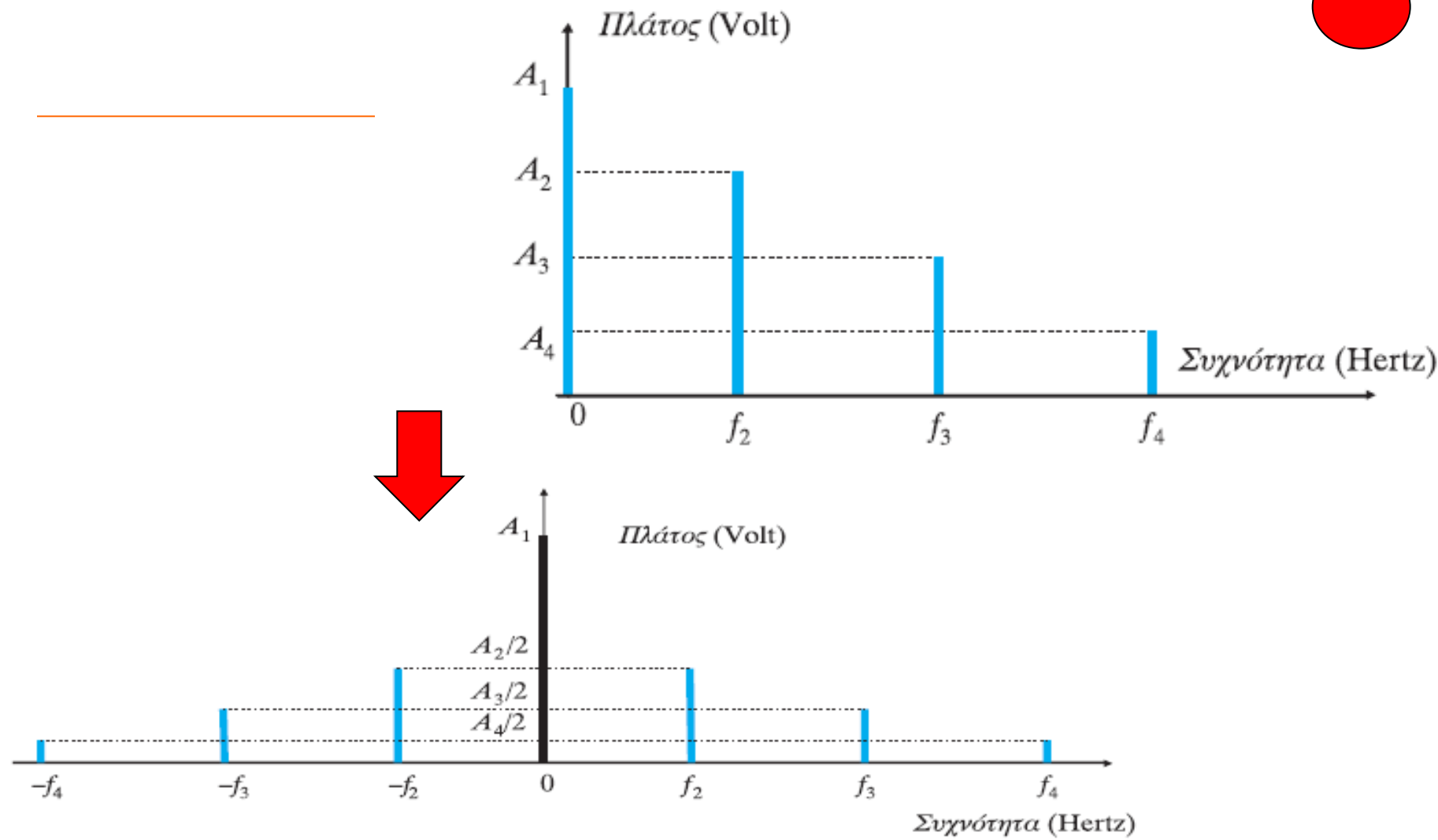
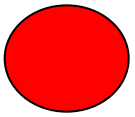
Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



**Σχήμα 2.23**

*Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος  $s(t)$*

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.



Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος  $s(t)$



## ■ Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων:

- Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}_+^*, \text{ τέτοιο ώστε } x(t+kT) = x(t) \text{ για } k = 1, 2, \dots$$

- Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N \quad m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

- Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από **διακριτούς** παλμούς σε συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση

$$f = k_1 f_1 = k_2 f_2 = \dots = k_N f_N, \quad k_1, k_2, \dots, k_N$$

# Σύστημα

- Ως σύστημα χαρακτηρίζεται οποιαδήποτε διαδικασία μετασχηματισμού ενός αρχικού σήματος  $x(t)$  σε ένα άλλο σήμα  $y(t)$  το οποίο και χαρακτηρίζεται ως απόκριση του συστήματος
- $T[.]$ : τελεστής που δηλώνει το μετασχηματισμό που εκτελείται επί της εισόδου  $x(t)$



# Ταξινόμηση Συστημάτων (1)

- Συστήματα Συνεχούς ή Διακριτού Χρόνου
  - Αν τα σήματα εισόδου και εξόδου,  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι σήματα συνεχούς χρόνου, τότε το σύστημα ονομάζεται σύστημα συνεχούς χρόνου
  - Αν τα σήματα εισόδου και εξόδου,  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε το σύστημα ονομάζεται σύστημα διακριτού χρόνου
- Γραμμικά Συστήματα
  - Ο τελεστής  $T[.]$  ικανοποιεί τις συνθήκες της γραμμικότητας και ομοιογένειας
    - Αθροιστικότητα  $T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$
    - Ομοιογένεια:  $T[a \cdot x(t)] = a \cdot T[x(t)]$

# Ταξινόμηση Συστημάτων (2)

---

## ■ Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

- Ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη: *Εάν  $y(t) = T[x(t)]$  τότε ισχύει  $y(t - \alpha) = T[x(t - \alpha)]$* 
  - $\alpha$ : σταθερά

## ■ Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα (LTI)

- Αν το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, τότε το σύστημα ονομάζεται **γραμμικό χρονικά αμετάβλητο**

# Χαρακτηριστικά Σήματος

---

- Στην πράξη, κάθε ηλεκτρομαγνητικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σε (περισσότερα από ένα) περιοδικά αναλογικά σήματα διαφορετικής συχνότητας, πλάτους και φάσης
- Ανάλυση Fourier

# Μετασχηματισμός Fourier

# Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας εργαλείο με το οποίο βλέπουμε ένα σημά από μια άλλη οπτική γωνία:
  - Κοιτάξτε πόσο διαφορετική μπορεί να φανεί μια καρεκλα στα την βλέπουμε από διαφορετες γωνιες



- Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σηματος:
  - Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολές συναρτήσει του χρόνου
  - Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

# Μετασχηματισμός Fourier (1)

- Ο μετασχηματισμος (Μ/Σ) Fourier του σηματος  $x(t)$  είναι ο:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

- Ο αντιστροφος Μ/Σ Fourier δίδεται από την σχέση:

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

- Συμβολίζουμε ένα ζεύγος Μ/Σ Fourier ως εξής:  $x(t) \Leftrightarrow X(f)$



# Άλλη Μορφή Μ/Σ Fourier

- Ισοδύναμες αναφορές με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Η κυκλική συχνότητα  $\omega=2\pi f$  μετριέται σε radians/sec και  $d\omega=2\pi df$

# Ιδιότητες Μετασχηματισμών (1)

*Σημείωση: δείτε τον πίνακα 2.3.5A,  
σελ. 54-55 (τόμος Β, μέρος Β)*

- Γραμμικότητα

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(f), \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(f) \Leftrightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$$

- Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου και Συχνότητας

$$x_1(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \quad \frac{1}{|a|} x_1\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow X_1(af)$$

- Χρονική καθυστέρηση

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) \exp(-j2\pi ft_0)$$

- Δυϊσμός

$$\text{Αν } x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow X(-t) \leftrightarrow x(f) \text{ \& } X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

# Ιδιότητες Μετασχηματισμών (2)

- Συνδυασμός Αλλαγής Κλίμακας & Χρονικής Ολίσθησης

$$x_1(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \exp\left(-j2\pi f \frac{t_0}{a}\right)$$

- Ολίσθηση Συχνότητας

$$\exp(j2\pi f_c t)x(t) \leftrightarrow X(f - f_c)$$

- Συνέλιξη σημάτων στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = x(t) * g(t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = X(f)G(f)$$

# Ιδιότητες Μετασχηματισμών (3)

- Παραγωγή στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f) X(f)$$

- Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$$

- Διαμόρφωση

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c)$$

- Θεώρημα Parseval

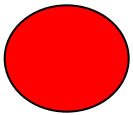
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

# Μετασχηματισμός Fourier Βασικών Σημάτων

*Σημείωση: δείτε τον πίνακα 2.3.5B,  
σελ. 56-57 (τόμος B, μέρος B)*

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (t)	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER (f)
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	$e^{-j2\pi fa}$
1	$\delta(f)$
$e^{j2\pi fa}$	$\delta(f-a)$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2} (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))$
$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2j} (\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0))$
rect(t)	sinc(f)
sinc(t)	rect(f)
tri(t)	sinc <sup>2</sup> (f)
sinc <sup>2</sup> (f)	tri(f)

# Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

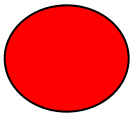


Πεδίο χρόνου ( $t$ )	Πεδίο συχνότητας ( $f$ )
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

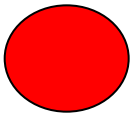
$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Πεδίο χρόνου ( $t$ )	Πεδίο συχνότητας ( $f$ )
$\delta(t)$	1
$x(t) = 1$	$\delta(f)$



# Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου ( $t$ )	Πεδίο συχνότητας ( $f$ )
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0} X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t} x(t) = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(f) \delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(f) H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$[X(f) * Y(f)]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xrightarrow{F} X(\Omega)$	$y(t) = X(t)$	$Y(f) = x(-f)$



# Παραδείγματα

$$\sin c^2(t) \leftrightarrow \text{tri}(f)$$

Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$4 \sin c^2(4t) \leftrightarrow \text{tri}\left(\frac{f}{4}\right)$$

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{rect}(t-10) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f \cdot 10} \text{sinc}(f)$$

Ιδιότητα χρονικής μετατόπισης

$$\cos(2\pi 10t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f-10) + \delta(f+10)] \Leftrightarrow$$

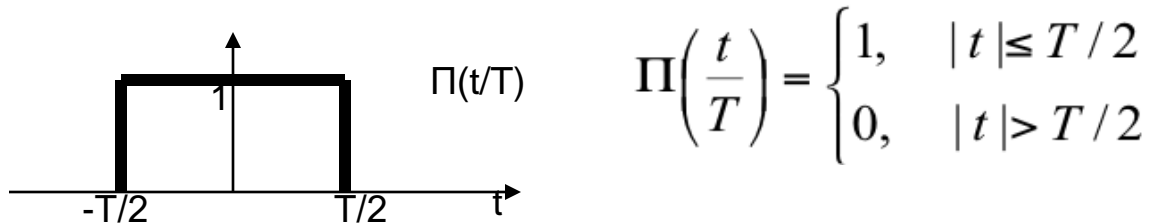
Ιδιότητα διΐσμού

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(t-10) + \delta(t+10)] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi 10(-f)) = \cos(2\pi 10f)$$



# Παραδείγματα (1)

## ■ Τετραγωνικός Παλμός



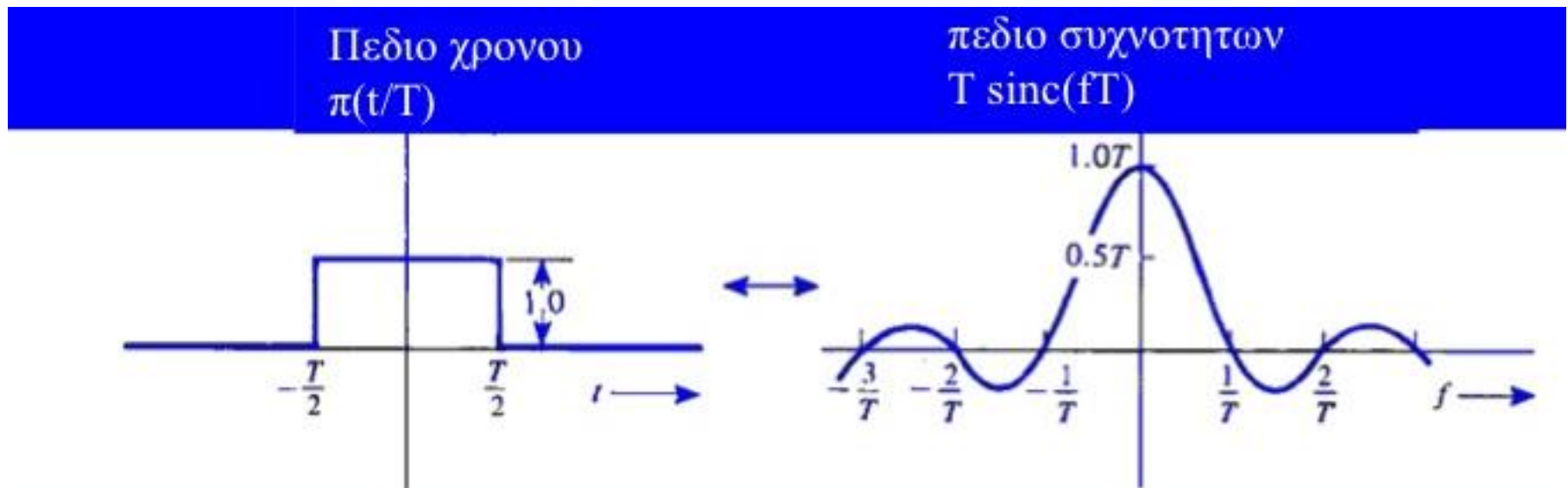
$$F[\Pi(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f}$$

- Αλλά  $(e^{jx} - e^{-jx})/2j = \sin(x)$
- Αποτέλεσμα:

$$\Pi(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \cdot \text{sinc}(fT)$$

# Παραδείγματα (2)

- Είδαμε ότι  $\Pi(t/T) \Leftrightarrow T \text{sinc}(fT)$
- Παρατηρησεις:
  - Η διάρκεια του παλμου είναι αντιστροφως αναλογη του ευρους φασματος
  - Η ασυνεχεια στο πεδίο του χρονου οδηγει σε απεριοριστο φασμα



# Παραδείγματα (3)

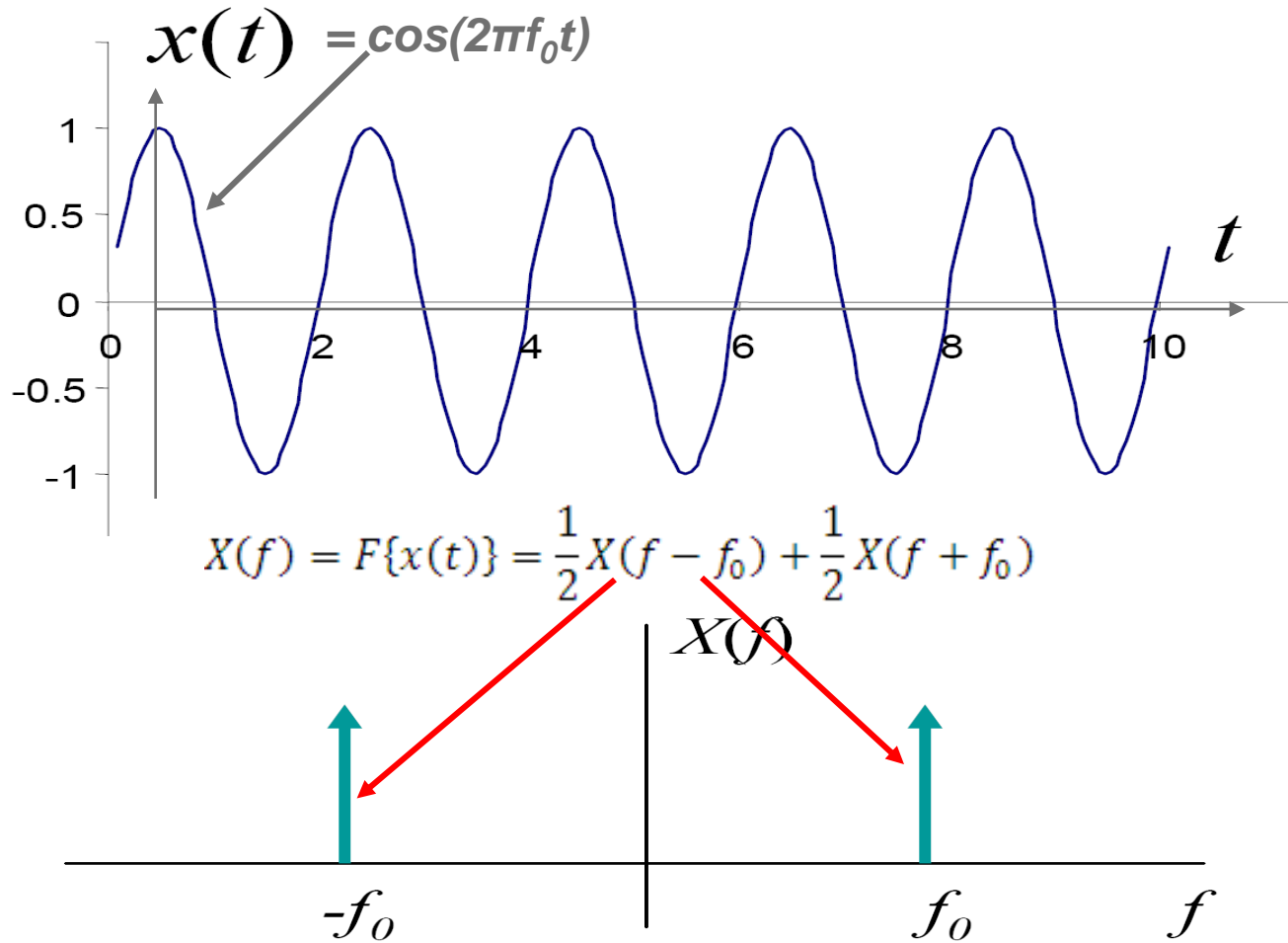
- Μερικές φορές είναι ευκολότερο να βρούμε ένα σήμα στο χρόνο υπολογίζοντας τον αντιστροφο Μ/Σ

- Δίνεται  $X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)$

- Βρίσκουμε

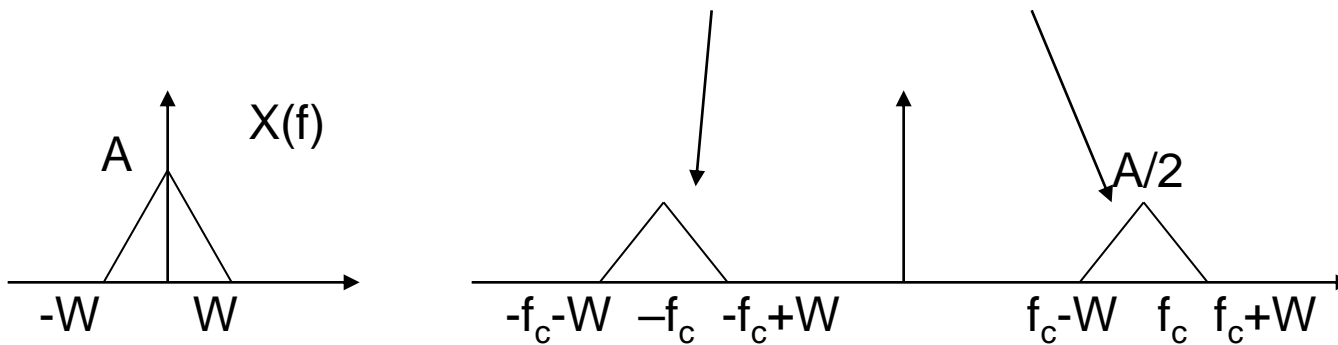
$$\begin{aligned}x(t) &= F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f - f_c)e^{j2\pi ft} df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f + f_c)e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} = \cos(2\pi f_c t)\end{aligned}$$

# Παραδείγματα (4)



# Παραδείγματα (5)

■  $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$



# Κρουστική Απόκριση

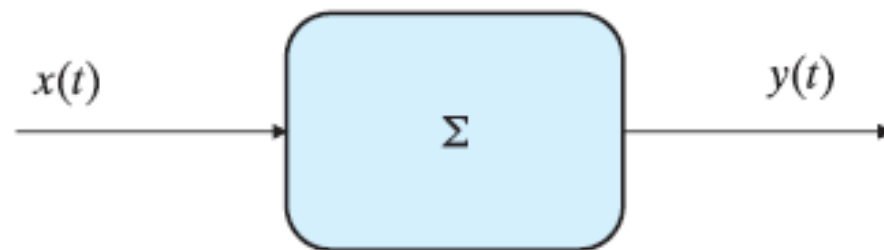
- Κρουστική Απόκριση
  - Η απόκριση του συστήματος ( $h(t)$ ) όταν η είσοδος είναι η  $\delta(t)$
- Απόκριση σε Αυθαίρετη Είσοδο
  - Η απόκριση του συστήματος σε αυθαίρετη είσοδο  $x(t)$  μπορεί να εκφρασθεί σαν η συνέλιξη του  $x(t)$  και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος  $h(t)$
  - $y(t)=x(t)*h(t)$
- Απόκριση Συχνότητας
  - Εφαρμογή της συνέλιξης στο πεδίο της συχνότητας  $Y(f)=X(f)H(f)$
  - $H(f)$  ονομάζεται απόκριση συχνότητας



Η έννοια της συνέλιξης σχετίζεται με τη χαρακτηριστική σχέση εισόδου-εξόδου σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα  $\Sigma$  λαμβάνει ως είσοδο το σήμα  $x(t)$  και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα  $y(t)$ .



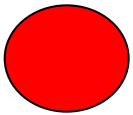
**Σχήμα 2.24**

*Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου*

Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S(x(t))$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:



Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t))$$

και

$$y_2(t) = S(x_2(t))$$

τότε:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))$$

Γενικότερα, για  $k$  εισόδους ισχύει ότι

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t)), y_2(t) = S(x_2(t)), \dots, y_k(t) = S(x_k(t))$$

τότε:

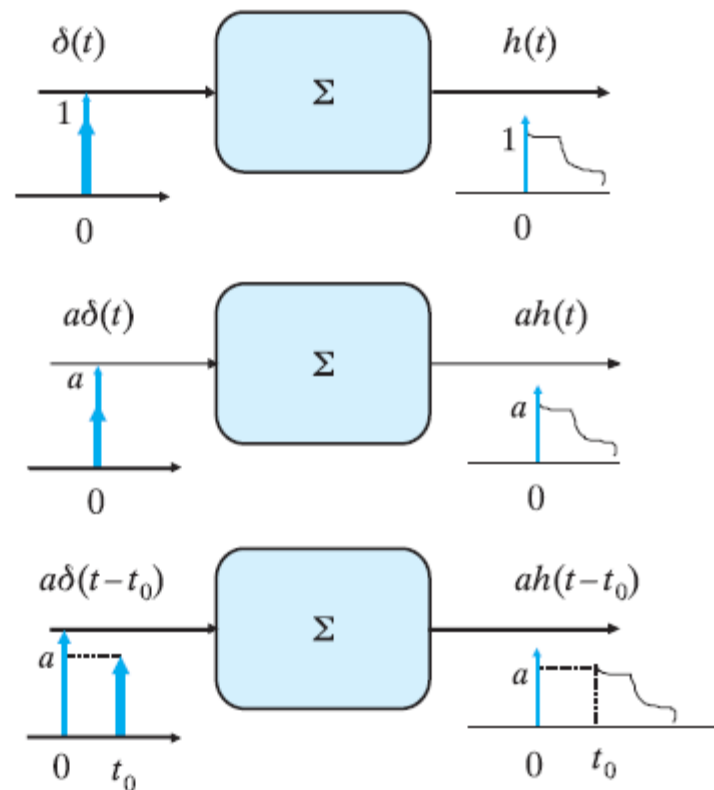
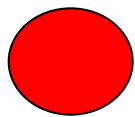
$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_k y_k(t) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i(t) = \\ &= S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_k x_k(t)) = S\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i(t)\right) \end{aligned}$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, εάν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο  $t_0$ , το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο  $t_0$ .

Δηλαδή, αν  $y(t) = S[x(t)]$  τότε  $y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$ .



Η **κρουστική απόκριση** ενός συστήματος  $h(t)$  είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$ . Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.

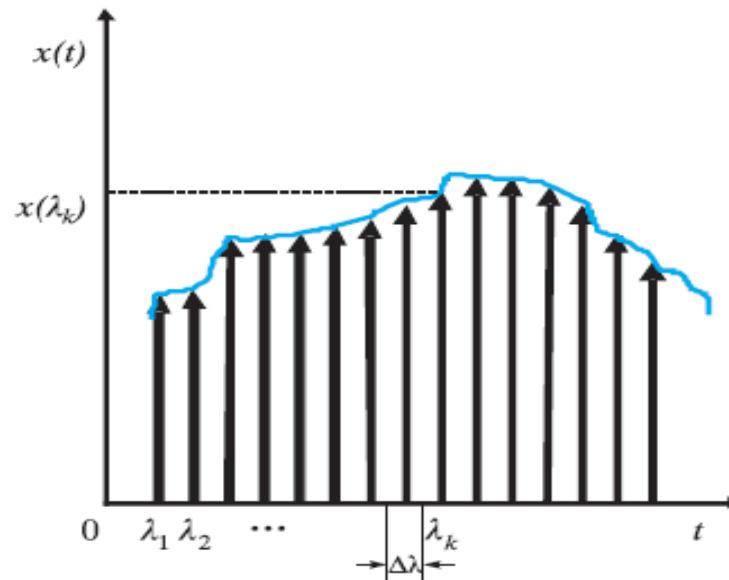
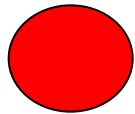


Σχήμα 2.25

Κρουστική απόκριση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος



Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



**Σχήμα 2.26**

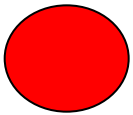
*Αναπαράσταση σήματος εισόδου ως αθροίσματος παλμών*

οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i) \delta(t - \lambda_i)$$

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i) h(t - \lambda_i) \xrightarrow{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = x(t) * h(t)$$



Η πράξη  $x(t) * h(t)$  ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων  $x(t), h(t)$  στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$$

αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος  
οπότε ισχύει:

$$\begin{array}{ccc} y(t) = & x(t) * & h(t) \\ \updownarrow F & \updownarrow F & \updownarrow F \\ Y(f) = & X(f) \cdot & H(f) \end{array}$$

# Φίλτρα

# Φίλτρα

---

- Το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας  $H(f)$  παίρνει σημαντικές τιμές μόνο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων
- Κατηγορίες Φίλτρων
  - Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (LPF): επιτρέπει τη διέλευση όλων των συνιστωσών του σήματος εισόδου με συχνότητες κάτω από ένα όριο  $b$
  - Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (HPF): Το ιδανικό HPF αποκόπτει όλες τις συνιστώσες του σήματος εισόδου με συχνότητες μικρότερες από  $b$  και αφήνει τη διέλευση όλων των συνιστωσών πάνω από  $b$  χωρίς παραμόρφωση
  - Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (BPF): Διέλευση μιας συγκεκριμένης ζώνης συχνότητας

# Φίλτρα

---

- Βαθυπερατά
  - Χαμηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Υψιπερατό
  - Υψηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Ζωνοπερατό
  - Συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζωνοφρακτικό
  - Φράση συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζώνες διέλευσης και αποκοπής

# Τύποι Φίλτρων

- Ιδανικό Βαθυπερατό (Low Pass)

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}$$

- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

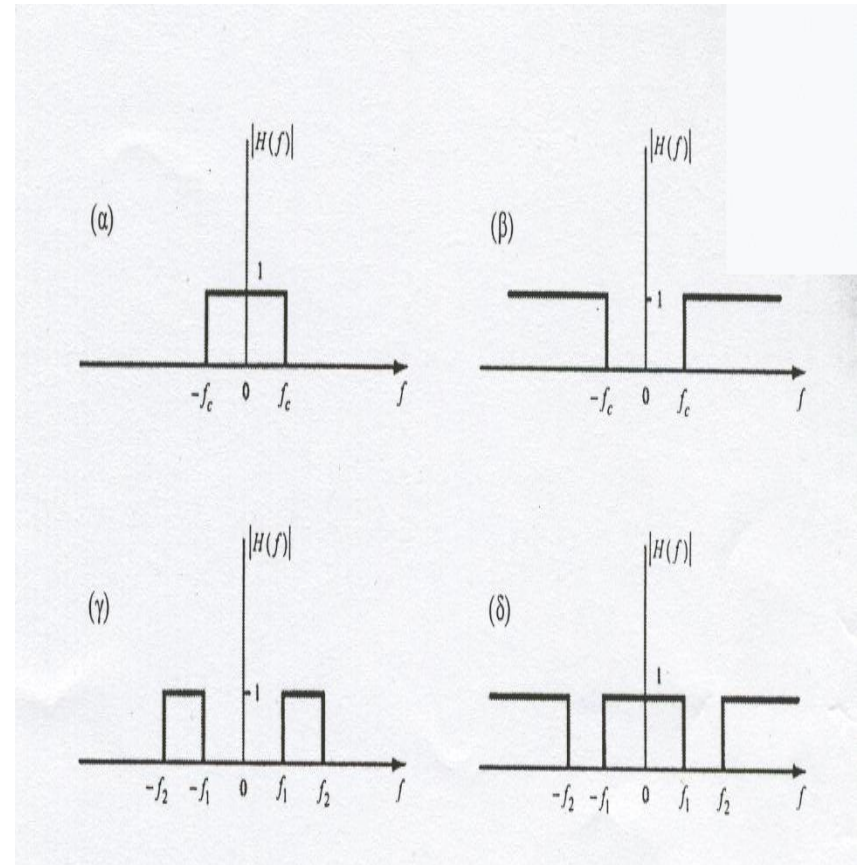
$$H(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_c \\ 1, & |f| > f_c \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

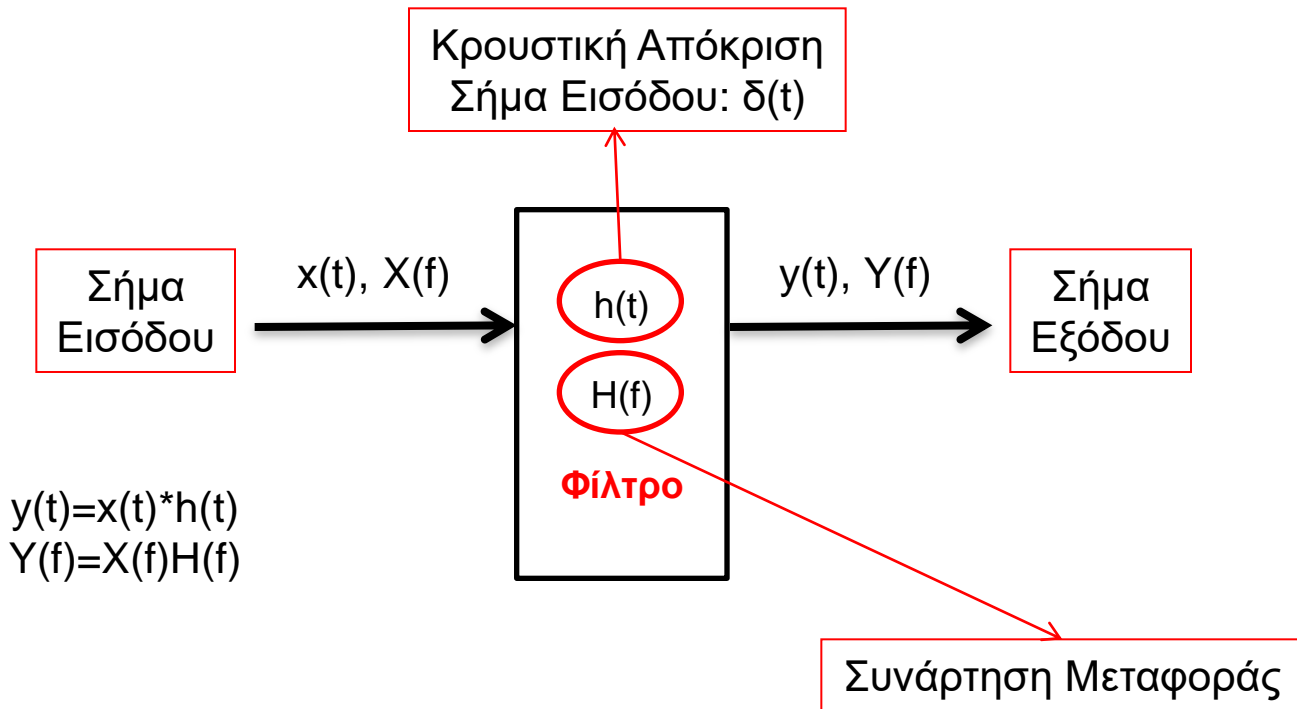
$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

$$H(f) = \begin{cases} 0, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases}$$



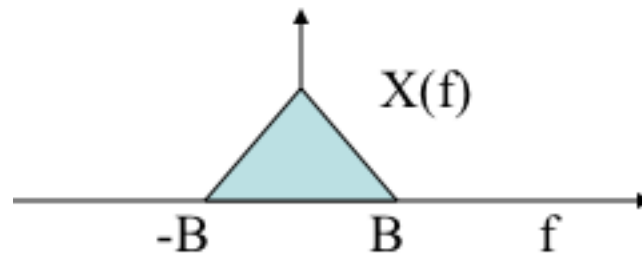
# Ορολογία Φίλτρων



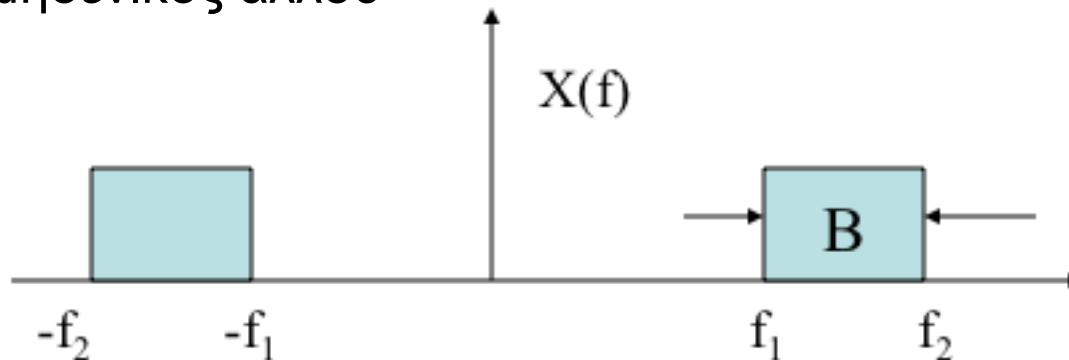


# Σηματα Βασικης Ζωνης και Ζωνοπερατα Baseband and Bandpass Signals

- Ένα σήμα  $x(t)$  Βασικής Ζώνης με εύρος φάσματος  $B$  είναι ένα σήμα για το οποίο ο Μ/Σ Fourier  $X(f)$  είναι μη μηδενικός για  $|f| \leq B$ , και είναι μηδενικός  $X(f) = 0$  για  $|f| > B$ .



- Ένα ζωνοπερατό σήμα  $x(t)$  με εύρος φάσματος  $B = f_2 - f_1$  είναι ένα σήμα για το οποίο ο  $X(f)$  είναι μη μηδενικός για  $0 < f_1 < |f| < f_2$ , και είναι μηδενικός αλλού



# Μέσα μετάδοσης - Κανάλι

# Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (1)

- Κάθε πληροφορία, προκειμένου να μεταδοθεί από την πηγή στον προορισμό της, πρέπει να χρησιμοποιήσει ένα ελαστικό μέσο, το μέσο μετάδοσης.
- Κάθε πηγή εκπέμπει σε ορισμένες συχνότητες, οι οποίες καθορίζουν τη ζώνη εκπομπής ή φάσμα (spectrum): η μέγιστη και ελάχιστη συχνότητα που μπορεί να εκπέμψει).
  - Spectrum σήματος: Το εύρος των συχνοτήτων που περιέχει το σήμα
- Εύρος ζώνης (bandwidth): Το «μέγεθος» του spectrum
  - Εύρος ζώνης= Μέγιστη Συχνότητα – Ελάχιστη Συχνότητα
- Εύρος ζώνης και μέσο μετάδοσης
  - Κάθε μέσο μετάδοσης είναι κατάλληλο για συγκεκριμένα εύρη (ώστε το σήμα να μεταδίδεται ικανοποιητικά – χωρίς σημαντικά σφάλματα)

# Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (2)

- Κατά τη μετάδοση φωνής (και δεδομένων) στο τηλεφωνικό, τα τηλεφωνικά καλώδια χαλκού υποστηρίζουν συχνότητες από 300 ως 3.300 Hz, Εύρος ζώνης = 3 KHz.
- Εύρος ζώνης και Ρυθμός Μετάδοσης
  - Το Εύρος Ζώνης σχετίζεται άμεσα με την «ποσότητα» πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διατρέχει το μέσο.

# Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (3)

---

- Το φυσικό μέσο μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών σημάτων
- Τύποι καναλιών
  - Ενσύρματα : Καλώδια Χαλκού
  - Ενσύρματα : Οπτικές Ίνες
  - Ασύρματα : Αέρας, Κενό

# Κανάλι Μετάδοσης (1)

---

- Χαρακτηριστικά καναλιού
  - Διαθέσιμο Εύρος ζώνης συχνοτήτων
  - Απόκριση πλάτους και φάσης
  - Ευαισθησία σε θόρυβο
- Επηρεάζουν
  - Μέγιστο ρυθμό μετάδοσης
  - Εξασθένιση σήματος - μέγιστη απόσταση
  - Παραμόρφωση πλάτους, φάσης
  - Πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος

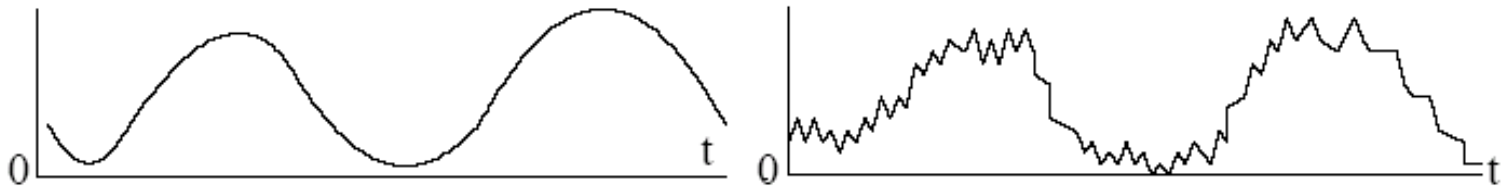
# Κανάλι Μετάδοσης (2)

- Κάθε κανάλι αλλοιώνει τα μεταδιδόμενα σήματα
  - Εξασθένιση: Είναι η απώλεια της ισχύος καθώς το σήμα διαδίδεται και μετράται σε dB. Ο λογαριθμικός λόγος της ισχύς του σήματος εισόδου προς την έξοδο  $10\log(P_{out}/P_{in})$ 
    - Στα ενσύρματα μέσα το σήμα εξασθενεί λογαριθμικά με την απόσταση
    - Η απώλεια εκφράζεται σε decibel ανά χιλιόμετρο
    - Η ποσότητα της απωλεσθήσας ισχύος εξαρτάται από τη συχνότητα
    - Εάν η εξασθένιση είναι πολύ μεγάλη ο δέκτης πιθανόν να μη μπορεί να ανιχνεύσει το σήμα
  - Παραμόρφωση καθυστέρησης: Προκαλείται από το γεγονός ότι διαφορετικές συνιστώσες οδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες

# Κανάλι Μετάδοσης (3)

## ■ Εισαγωγή θορύβου

- Εσωτερικός θόρυβος (π.χ, θερμικός θόρυβος ηλεκτρονικών κυκλωμάτων)
- Εξωτερικός θόρυβος (π.χ, παρεμβολές, κοσμική ακτινοβολία)
- Επίδραση του θορύβου στην ισχύ του σήματος-Signal-to-Noise Ratio:  
 $SNR=(\text{Average Signal Power}/\text{Noise Power})=10\log(P/N)$





# Κανάλι Μετάδοσης (4)

- Τα τηλεπικοινωνιακά σήματα μεταδίδονται δια μέσου του αέρα με τη χρήση κεραίας κατάλληλου μεγέθους
- Στο κενό όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους
  - Ισχύει η σχέση  $\lambda = c/f$
  - $c$ : ταχύτητα του φωτός 300000 Km/sec,  $\lambda$ : μήκος κύματος
- Η ποσότητα πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα σχετίζεται με το εύρος ζώνης του
- Για να αποτραπεί το πλήρες χάος, υπάρχουν διεθνείς συμφωνίες που αφορούν το ποιος χρησιμοποιεί ποιες συχνότητες
  - Οργανισμός ITU-R

# Θόρυβος

---

- Ανεπιθύμητη ενέργεια που προέρχεται από πηγές εκτός πομπού
- Αφορά όλα τα συστήματα επικοινωνίας (Ασύρματα-Ενσύρματα)
- Εσωτερικός Θόρυβος
  - Θερμικός θόρυβος (thermal noise, white noise)
    - Κίνηση ηλεκτρονίων
  - Θόρυβος Ενδοδιαμόρφωσης (inter-modulation noise)
    - Συνύπαρξη σημάτων διαφορετικών συχνοτήτων στο ίδιο μέσο
  - Συνακρόαση (crosstalk)
    - Παρεμβολές μεταξύ μεταδόσεων κοντινών μεταξύ τους
  - Παλμικός θόρυβος (impulse)
    - Αστάθειες ηλεκτρικού ρεύματος
  - Εξωτερικοί Θόρυβοι
    - Βιομηχανικά και Ατμοσφαιρικά παράσιτα

# Γραμμικές και Μη Γραμμικές Διαμορφώσεις

# Διαμόρφωση

- **ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Modulation)**= Η μεταβολή, σύμφωνα με το σήμα πληροφορίας, των παραμετρών ενός φεροντός κυματος (carrier wave) που είναι καταλληλό για την μεταδοση μέσα από το δεδομένο κανάλι
- **ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Demodulation)** είναι η αντιστροφη διαδικασία
  - Το είδος της διαμορφωσης καθορίζει:
  - Την αντοχή στο θόρυβο και την παραμορφωση του καναλιού
  - Την πιστοτητα αναπαραγωγής του αρχικού σήματος πληροφορίας
  - Το εύρος του απαιτούμενου για την μεταδοση φασματος
  - Την πολυπλοκότητα των συστημάτων εκπομπής και λήψης

# Τι επιτυγχάνουμε με την Διαμόρφωση

- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή συχνοτήτων όπου το μέσο διάδοσης (γραμμή μεταφοράς, ατμόσφαιρα, οπτική ίνα) έχει βελτιωμένα χαρακτηριστικά.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε κατάλληλη περιοχή συχνοτήτων, όπως αυτή έχει αποδοθεί από τους διεθνείς οργανισμούς προτυποποίησης για συγκεκριμένες υπηρεσίες.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή υψηλότερων συχνοτήτων όπου το μήκος κύματος είναι μικρότερο. Επειδή το μέγεθος των κεραιών εξαρτάται από το μήκος κύματος, με τη μετατόπιση σε υψηλότερες συχνότητες μπορούμε να κατασκευάσουμε κεραίες και άρα και πομποδέκτες μικρότερου μεγέθους.

# Τι επιτυγχάνουμε με την Διαμόρφωση

- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχές συχνοτήτων όπου τα κυκλώματα λειτουργούν με καλύτερα χαρακτηριστικά. Ένα παράδειγμα είναι η μετατόπιση του σήματος σε *ενδιάμεση συχνότητα (intermediate frequency - IF)*. Το πλεονέκτημα αυτής της μετατόπισης είναι η δυνατότητα χρήσης του ίδιου κυκλώματος IF από πολλά σήματα, τα οποία μπορεί να καταλαμβάνουν διαφορετικές ζώνες ραδιοσυχνοτήτων (*radio frequencies - RF*).
- Μέχρι κάποιο όριο “ανοσία” του σήματος από θόρυβο και παρεμβολές. Η ανοσία αυτή επιτυγχάνεται με τη διεύρυνση του εύρους ζώνης που καταλαμβάνει το διαμορφωμένο σήμα σε σχέση με το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας. Αυτό το πλεονέκτημα προσφέρεται μόνο από μερικούς τύπους διαμορφώσεις.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σημαίνει και επίτευξη μεγαλύτερων αποστάσεων σε σχέση με αυτό που μπορεί να επιτευχθεί αν το σήμα παραμείνει βασικής ζώνης

# Τι επιτυγχάνουμε με την Διαμόρφωση

---

- Δυνατότητα ταυτόχρονης μετάδοσης πολλών σημάτων μέσα από τον ίδιο δίαυλο επικοινωνίας, διατηρώντας βέβαια τη δυνατότητα διαχωρισμού των διαφορετικών σημάτων πληροφορίας από τις διαφορετικές πηγές. Δηλαδή επιτυγχάνουμε *πολυπλεξία (multiplexing)* σημάτων από διαφορετικές πηγές, η οποία καλείται *πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (frequency division multiplexing - FDM)*.

# Συγκριση Αναλογικων και Ψηφιακων συστηματος Επικοινωνιας

## Αναλογικα Συστηματα

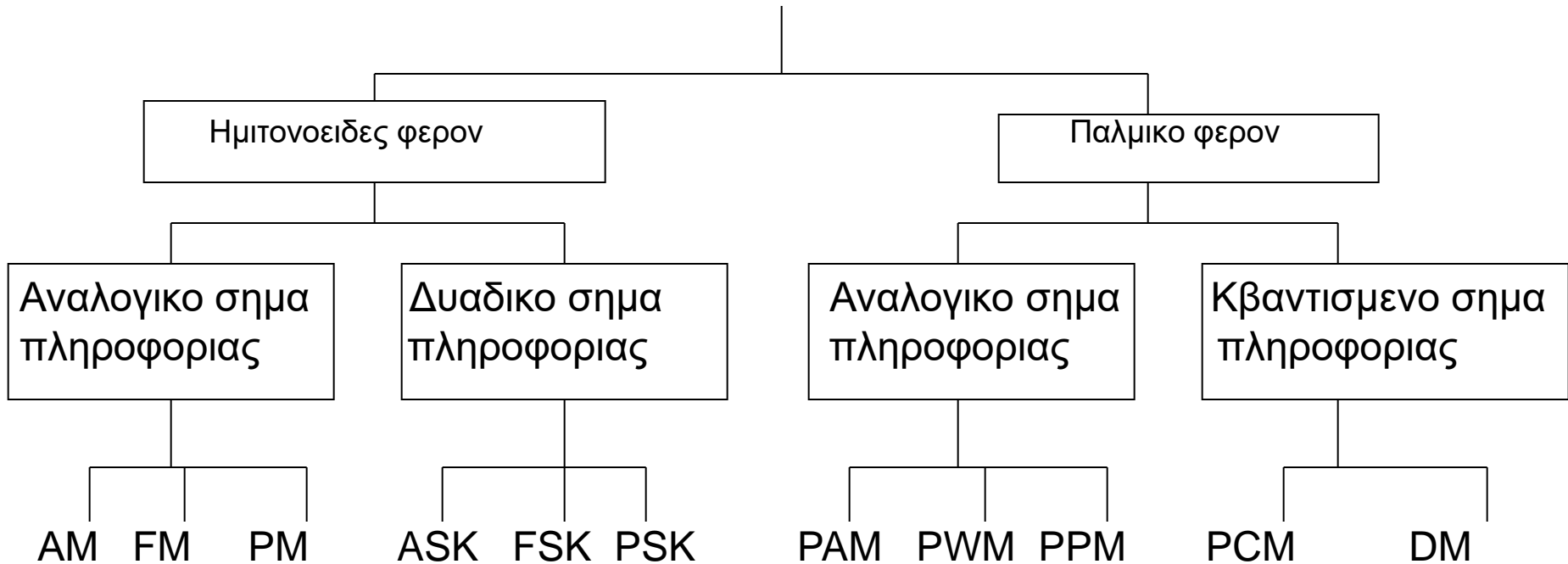
- Απλουστερη δομη
- Δυσκολοτερη σχεδιαση
- Ελαχιστες δυνατοτητες υλοποιησης βελτιστων διαταξεων
- Δυσκολοτερη υλοποιηση και συντηρηση
  - Ανάγκη συνεχων ρυθμισεων
  - Απαιτησεις γραμμικοτητας εξαρτηματων
  - Εξαρτηση απο τις θερμοκρασιακες μεταβολες των εξαρτηματων
  - Εξαρτηση απο την γηρανση του υλικου

## Ψηφιακα Συστηματα

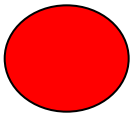
- Πολυπλοκοτερη δομη
- Ευκολοτερη σχεδιαση
- Δυνατοτητα υλοποιησης βελτιστων διαταξεων
- Ευκολοτερη υλοποιηση και συντηρηση
- Καλυτερη προσαρμογη προς το καναλι
- Ευελιξια κατασκευης
  - DSPs, μPs
  - FPGAs, ASICs
- Μικροτερο κοστος



# Είδη Διαμόρφωσης



A=Amplitude, F=Frequency, P=Phase, M= Modulation  
K=Keying, W=Width, P=Pulse, Position, D=Delta



# Διαμορφώσεις Πλάτους-Βασικές αρχές

- Βασίζονται στην ιδιότητα μετατόπισης φάσματος

Αν

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

Τότε

$$x(t) \cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

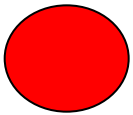
Σήμα

πληροφορίας

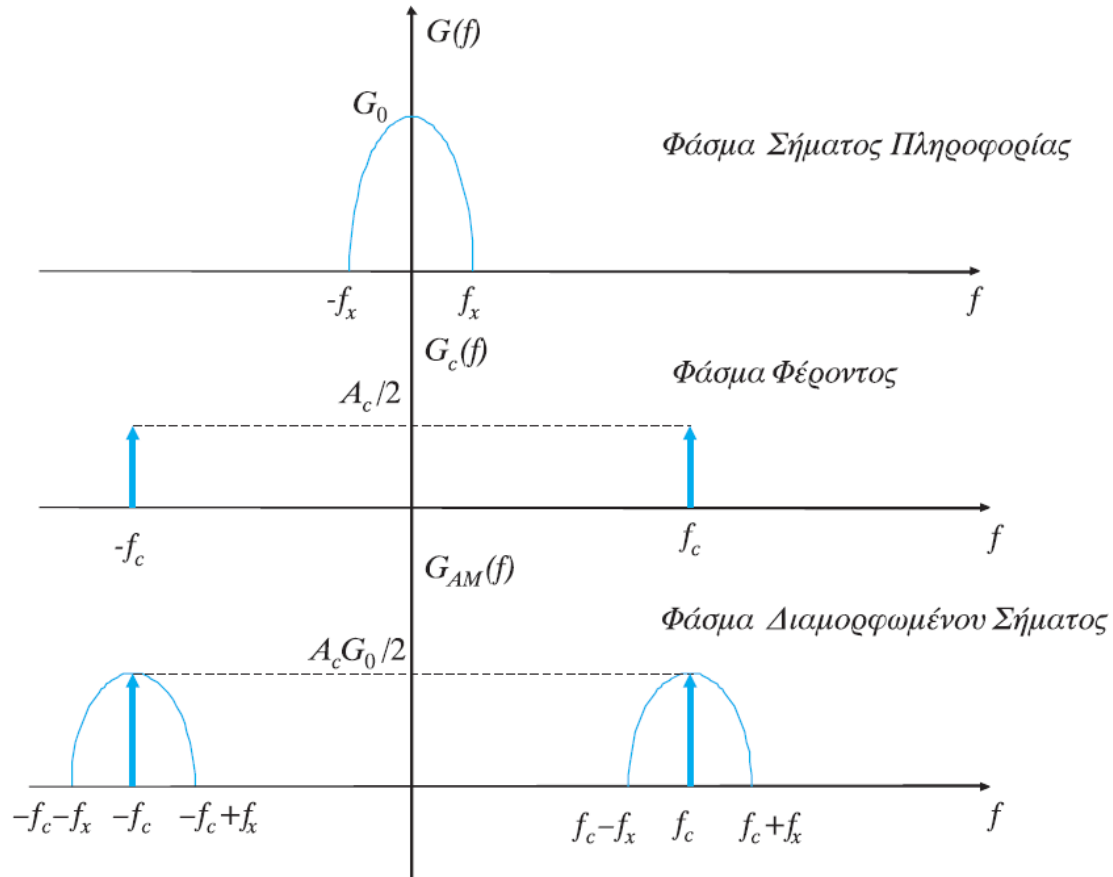
Φέρον σήμα

## Είδη διαμορφώσεων πλάτους

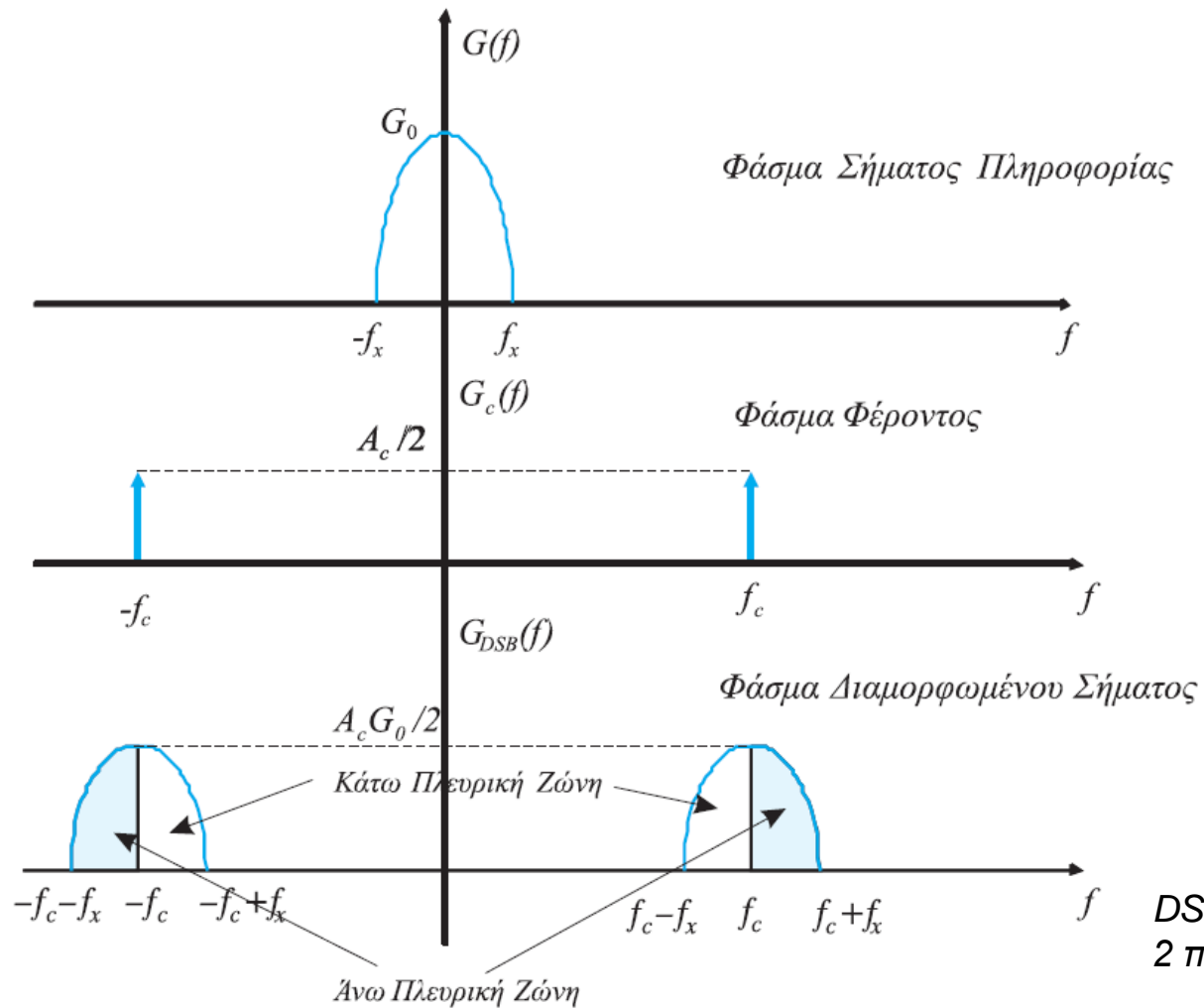
- Double Side Band (DSB)  $x_{DSB}(t) = x(t) \cdot A_c \cos(2\pi f_c t)$
- Single Side Band (SSB) Προκύπτει από την DSB με κατάλληλο φιλτράρισμα μιας πλευρικής ζώνης
- AM  $x_{AM}(t) = [1 + x(t)] \cdot A_c \cos(2\pi f_c t)$



# Διαμόρφωση AM (πεδίο συχνοτήτων)

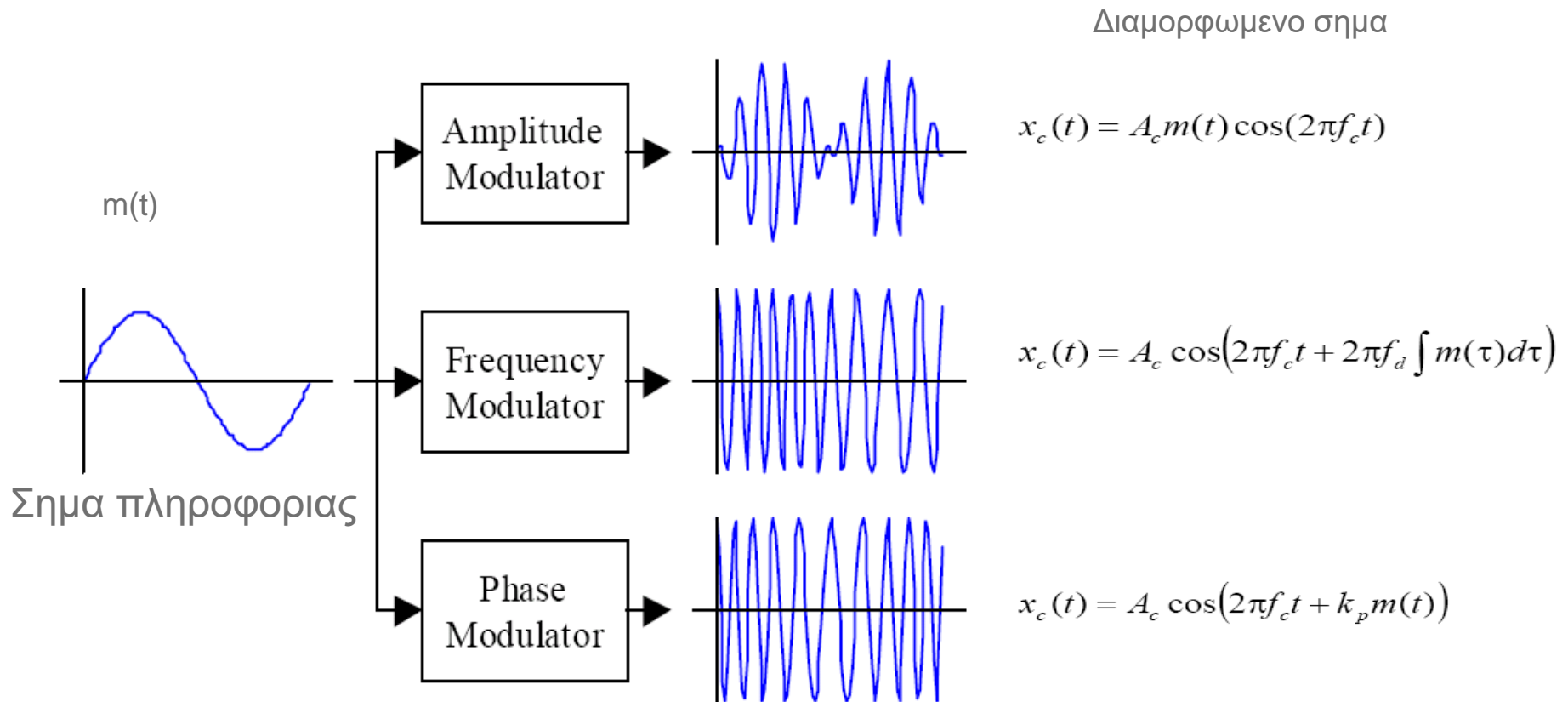


# Διαμορφώσεις DSB/SSB (πεδίο συχνοτήτων)



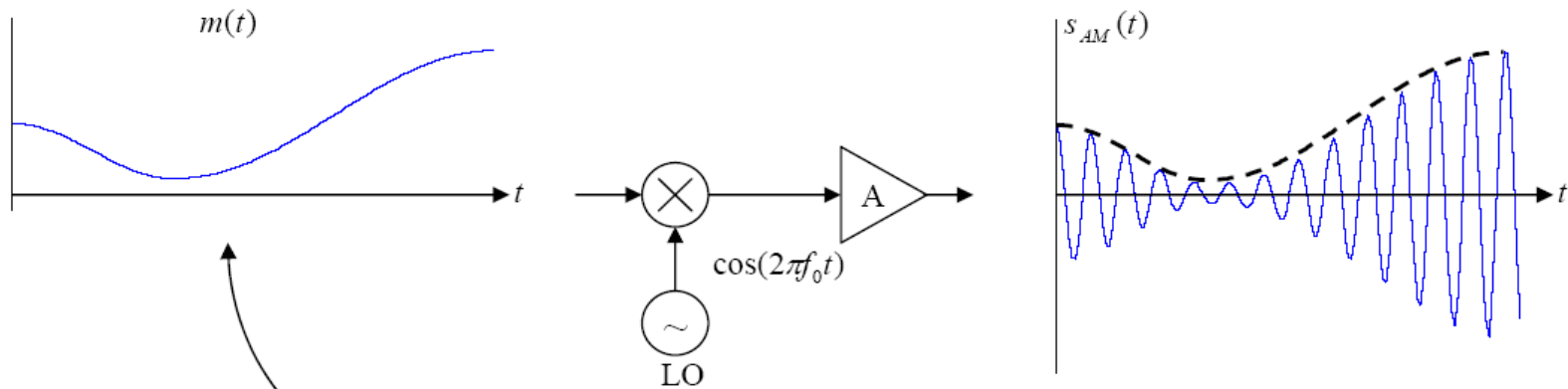
DSB: περιλαμβάνει και τις 2 πλευρικές

# Βασικοί Τύποι Αναλογικής Διαμόρφωσης



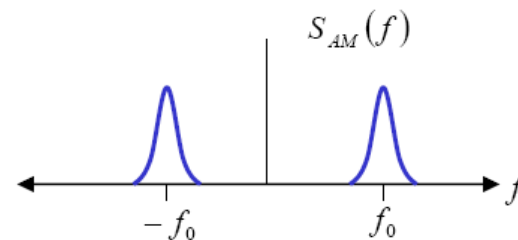
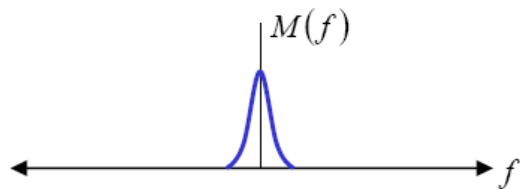
# Γραμμική Διαμόρφωση Πλάτους : Γενική Αρχή

$$\text{Mathematical Representation: } s_{AM}(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$$



$m(t)$  can assume an infinite number of possible waveforms

⇒ **Amplitude Modulation**



# Διαμόρφωση Διπλο-πλευρικής Ζώνης (DSB)

- Το σήμα μηνύματος  $x(t)$  πολλαπλασιάζεται με το φέρον σήμα  $\cos 2\pi f_c t$

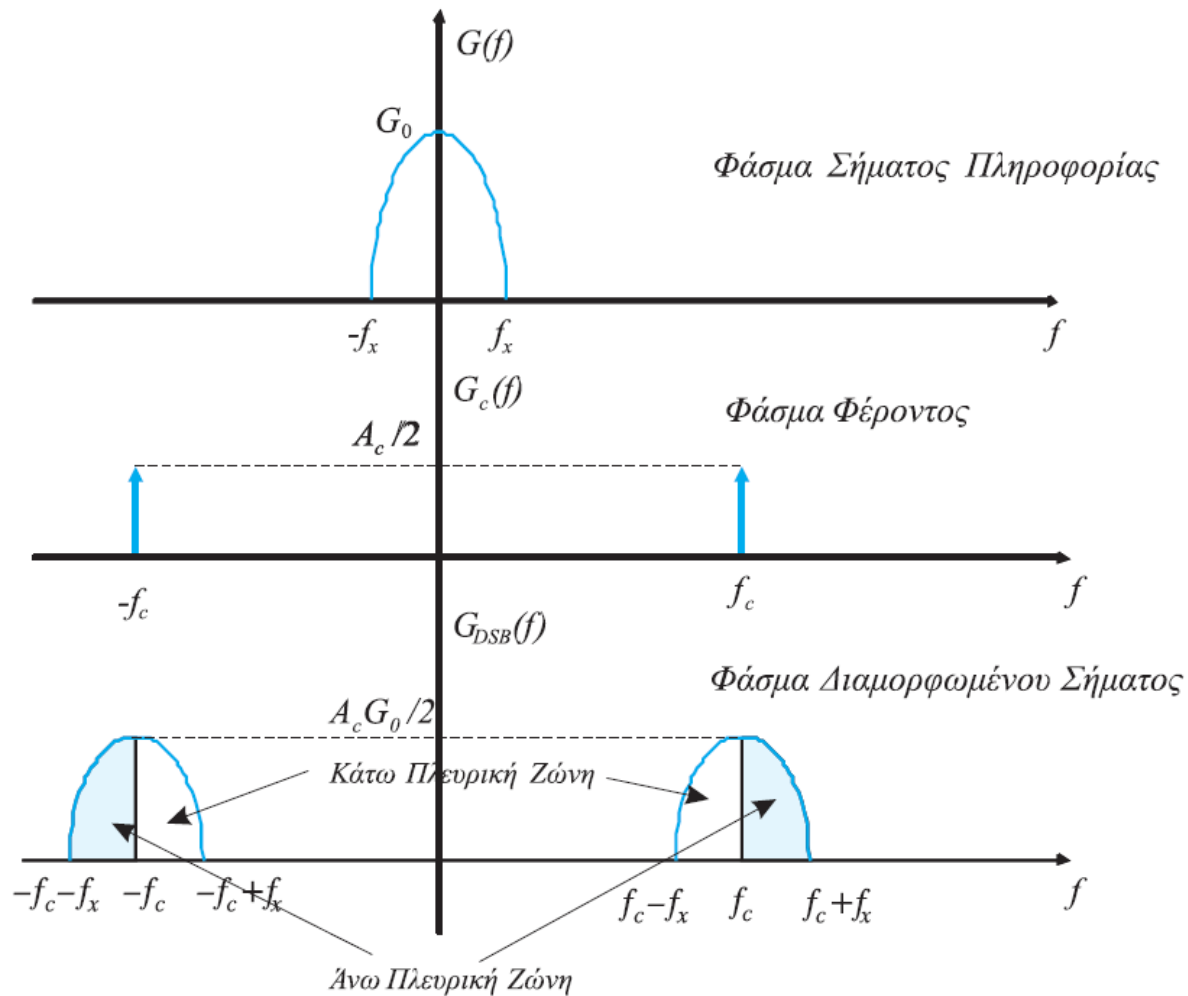
$$y_{DSB}(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

- Στο πεδίο της συχνότητας αυτό ανάγεται σε

$$Y(f) = \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c)$$

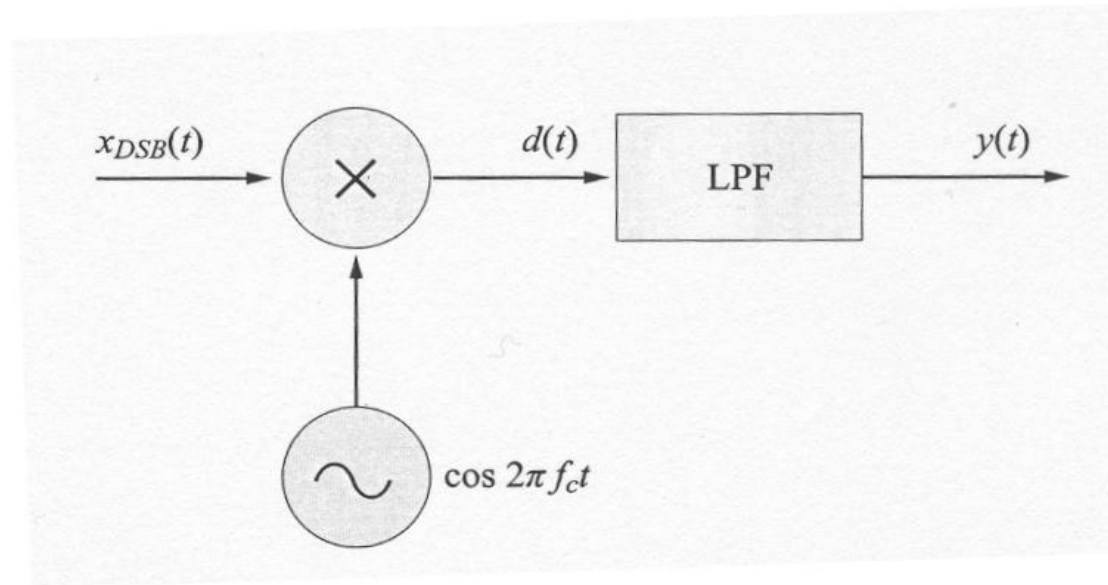
- Δύο φάσματα Συχνοτήτων
  - Πάνω Πλευρική Ζώνη  $f > f_c$
  - Κάτω Πλευρική Ζώνη  $f < f_c$

# Διαμόρφωση DSB : Πεδίο συχνότητας





# Αποδιαμόρφωση DSB



**Πεδίο χρόνου**

$$d(t) = x_{DSB}(t) \cos 2\pi f_c t \Leftrightarrow d(t) = x(t) \cos^2 2\pi f_c t \Leftrightarrow$$

$$d(t) = \frac{1}{2} x(t) (1 + \cos 4\pi f_c t) \Leftrightarrow d(t) = \frac{x(t)}{2} + \frac{x(t)}{2} \cos 4\pi f_c t$$

**Πεδίο συχνότητας**

$$d(t) = \frac{1}{2} x(t) (1 + \cos 4\pi f_c t) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} D(f) = \frac{1}{2} X(f) + \frac{1}{2} X(f) \left\{ \frac{1}{2} [\delta(f - 2f_c) + \delta(f + 2f_c)] \right\} \Leftrightarrow$$

$$D(f) = \frac{1}{2} X(f) + \frac{1}{4} [X(f - 2f_c) + X(f + 2f_c)]$$

# Διαμόρφωση AM (1)

- Το σήμα AM δημιουργείται με την προσθήκη ενός ισχυρού φέροντος σε ένα σήμα DSB

$$x_{AM}(t) = A_c [1 + x(t)] \cos 2\pi f_c t = A(t) \cos 2\pi f_c t$$

- $x(t)$  σήμα μηνύματος
  - $A_c, f_c$  πλάτος και συχνότητα φέροντος σήματος
  - $A(t)$  περιβάλλουσα του διαμορφωμένου σήματος
- Στο πεδίο της συχνότητας το προηγούμενο ανάγεται σε

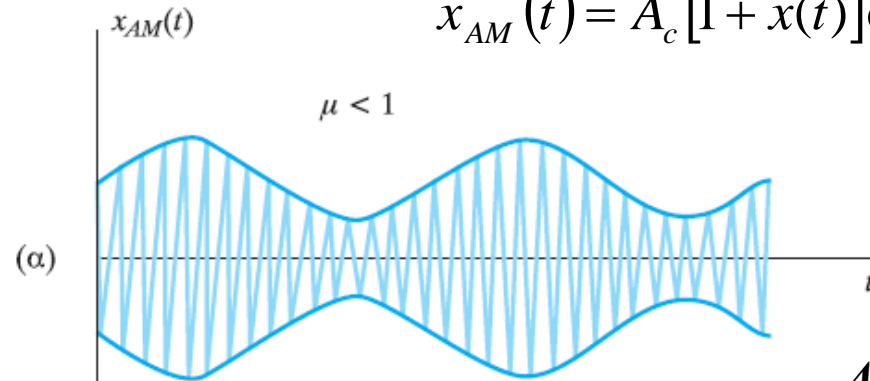
$$X_{AM}(f) = \frac{1}{2} A_c [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{1}{2} A_c [X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

Δεδομένου ότι

$$A_c \cos 2\pi f_c t \xleftrightarrow{\text{Fourier transform}} \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

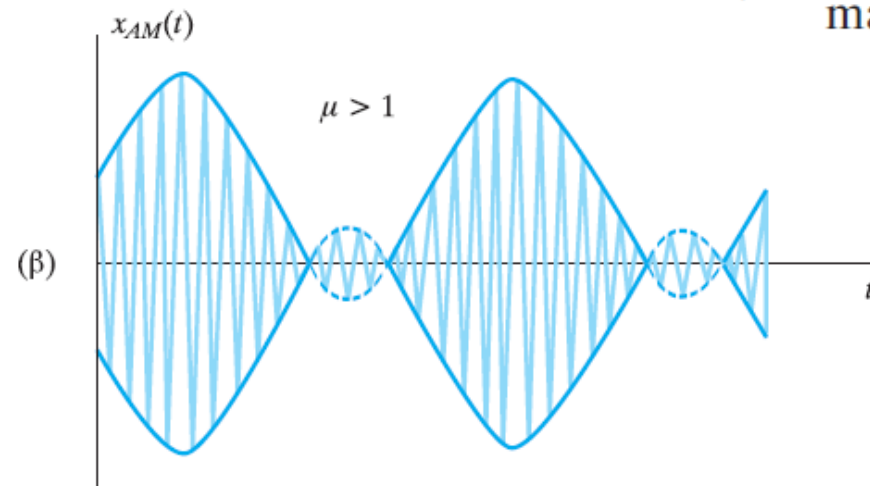
# Διαμόρφωση AM (2)

$$x_{AM}(t) = A_c [1 + x(t)] \cos 2\pi f_c t = A(t) \cos 2\pi f_c t$$

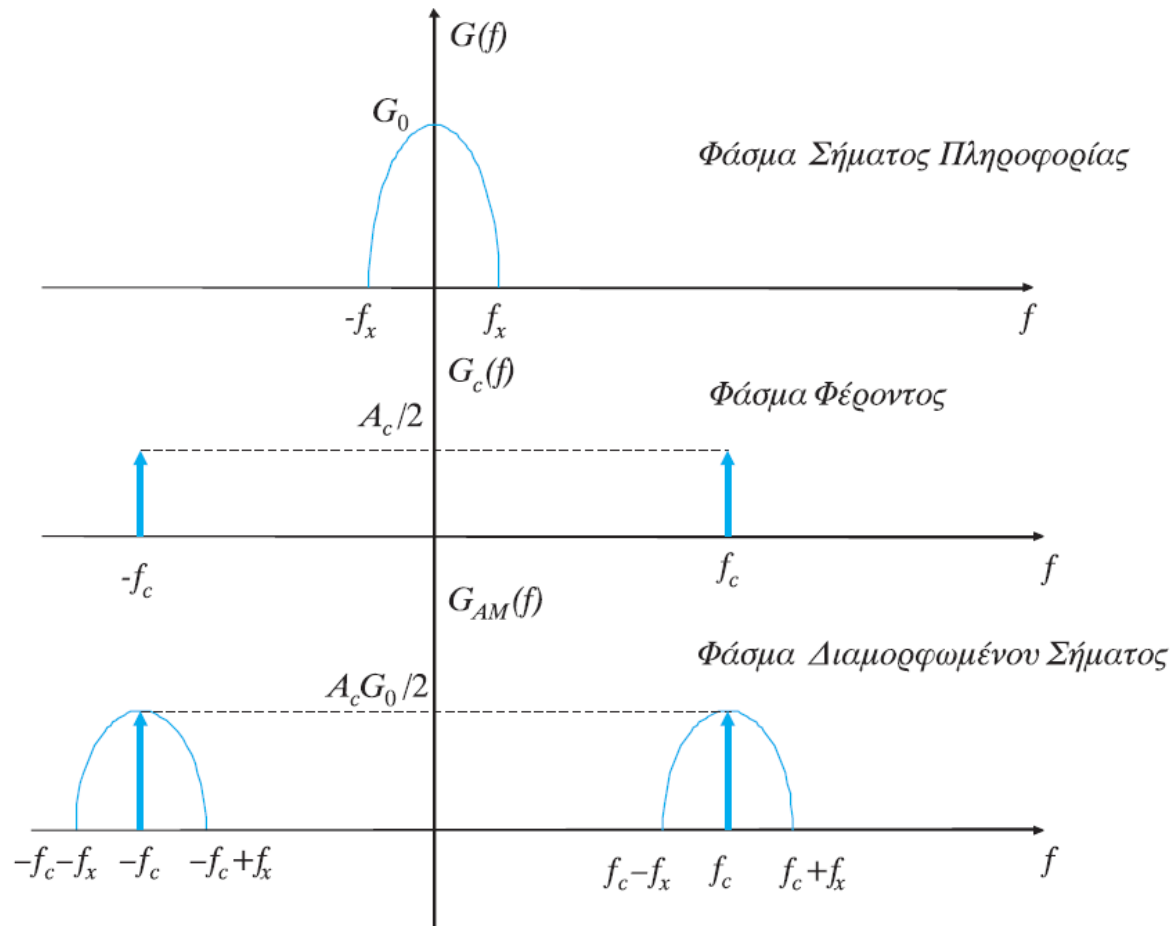


*Δείκτης Διαμόρφωσης*

$$\mu = \frac{\max\{A(t)\} - \min\{A(t)\}}{\max\{A(t)\} + \min\{A(t)\}}$$



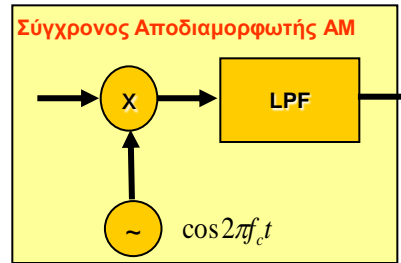
# Διαμόρφωση AM: Πεδίο της συχνότητας



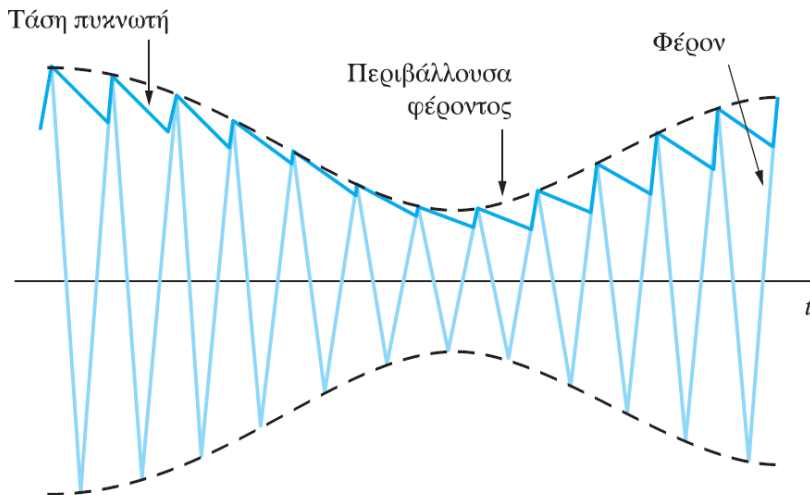
Το φάσμα του σήματος AM είναι πανομοιότυπο με το φάσμα του σήματος DSB, διαφέροντας μόνο στην προσθήκη της φασματικής συνιστώσας του φέροντος

# Αποδιαμόρφωση AM

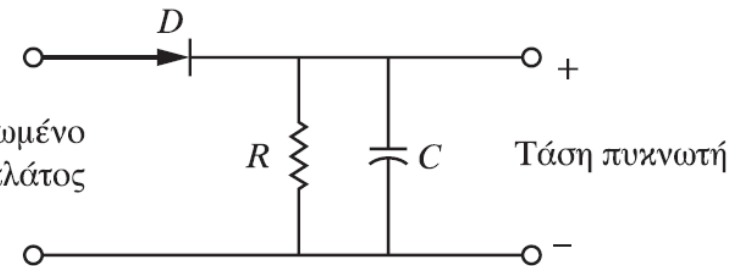
- Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση
  - Όπως στα σήματα DSB



- Με φωρατή περιβάλλουσας (όταν  $\mu < 1$ )



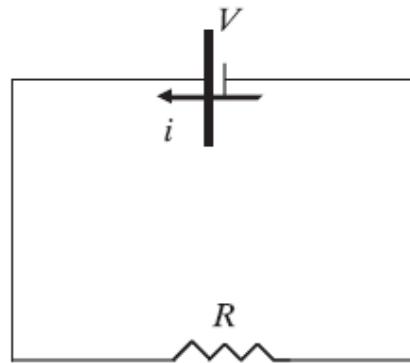
Φέρον διαμορφωμένο κατά πλάτος



# Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (1)

## 2.4.1 Στιγμιαία ισχύς/ενέργεια

Θεωρούμε καταρχήν το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος:



Σχήμα 2.27

Ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος

Υποθέτουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση  $V$  είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το χρόνο. Η ισχύς που παράγεται στο κύκλωμα και καταναλώνεται στην αντίσταση ισούται με:

$$P = V \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

# Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (2)

Και η αντίστοιχη ενέργεια που έχει παραχθεί στο κύκλωμα και έχει καταναλωθεί στην αντίσταση σε χρόνο  $t$  ισούται με το γινόμενο της ισχύος επί τον αντίστοιχο χρόνο, δηλαδή:

$$E(t) = P \cdot t = V \cdot i \cdot t = i^2 \cdot R \cdot t = \frac{V^2}{R} \cdot t$$

Οι μονάδες ισχύος είναι τα Watt ( $1\text{W} = 1\text{Joule/sec}$ ) και ενέργειας είναι τα Joule ή οι Wh ( $1\text{Wh} = 1\text{Watt} \times 1\text{hour} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \times 3.600 \text{sec} = 3.600\text{Joule}$ )

Εάν στο παραπάνω σχήμα υποθέσουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε οι ανωτέρω σχέσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R = \frac{V^2(t)}{R}$$

$$E(t) = \int_0^t P(t) \cdot dt = \int_0^t V(t) \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^t i^2(t) \cdot R \cdot dt = \int_0^t \frac{V^2(t)}{R} \cdot dt$$

# Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (3)

Για τηλεπικοινωνιακά συστήματα θεωρούμε ότι  $R = 1\Omega$ , οπότε το τηλεπικοινωνιακό σήμα  $x(t)$  μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί εξίσου με την εφαρμοζόμενη τάση ή το ρεύμα στις ανωτέρω σχέσεις, οι οποίες μετασχηματίζονται ως εξής:

Στιγμιαία ισχύς πραγματικού σήματος  $P(t) = x^2(t)$

Ενέργεια πραγματικού σήματος  $E(t) = \int_0^t x^2(t) \cdot dt$

Προκειμένου οι ανωτέρω ορισμοί να ισχύουν και για μιγαδικά σήματα  $x(t)$  (των οποίων η ισχύς εξαρτάται μόνο από το μέτρο τους), οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

Στιγμιαία ισχύς σήματος  $P(t) = |x(t)|^2$

Ενέργεια σήματος  $E(t) = \int_0^t |x(t)|^2 \cdot dt$

Σημείωση: Για πραγματικά σήματα  $x(t)$  ισχύει ότι  $|x(t)|^2 = x^2(t)$ .



# Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (4)

## 2.4.2 Μέση ισχύς

Γενικά, για ένα μέγεθος  $m(t)$  που μεταβάλλεται με το χρόνο, η χρονική μέση τιμή του μεταξύ δύο χρονικών στιγμών  $t_1$  και  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) ορίζεται ως:

$$\overline{m(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} m(t) \cdot dt$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να εκφράσουμε τη μέση ισχύ ενός σήματος  $x(t)$  λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή του καθ' όλη τη διάρκειά του (ή ισοδύναμα από  $-\infty$  έως  $+\infty$ ) ως εξής:

$$\overline{P(t)} = P_x = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 \cdot dt \right\}$$

Αντίστοιχα, η ενέργεια αυτού του σήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$E_x = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \left\{ (t_2 - t_1) \cdot P_x \right\} = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \left[ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \cdot dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \cdot dt$$

# Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (5)

## 2.4.3 Σήματα ενέργειας – ισχύος

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$0 < E_x < +\infty$$

ονομάζονται ενεργειακά. Παραδείγματα σημάτων ενέργειας είναι διάφοροι παλμοί (τετραγωνικός, τριγωνικός), δηλαδή σήματα πεπερασμένης διάρκειας. Τα σήματα αυτά έχουν μηδενική ισχύ.

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ

$$0 < P_x < +\infty$$

ονομάζονται σήματα ισχύος. Παραδείγματα σημάτων ισχύος είναι τα περιοδικά και τα σήματα άπειρης διάρκειας (π.χ. το σήμα  $x(t) = c$ ,  $0 < t < +\infty$ ). Τα σήματα αυτά έχουν άπειρη ενέργεια.

# Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (6)

## 2.4.4 Ταυτότητα Parseval – Μέση ισχύς περιοδικών σημάτων

Για τα περιοδικά σήματα η σχέση υπολογισμού της μέσης ισχύος μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

Έστω σήμα  $x(t)$  περιοδικό με περίοδο  $T_0$  τέτοια ώστε να ισχύει  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$x(t+nT_0) = x(t), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Στον υπολογισμό της μέσης ισχύος μπορούμε να περιορίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στη διάρκεια μιας περιόδου:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{(t_2-t_1) \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} \stackrel{t_2 \rightarrow t_1+nT_0}{=} \lim_{nT_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{nT_0} \int_{t_1}^{t_1+nT_0} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{nT_0} \left[ n \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt \end{aligned}$$

# Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (7)

Για τα περιοδικά σήματα που γράφονται με τη μορφή μιγαδικής σειράς Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft}, \text{ όπου } V_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi nft} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j2\pi nft} dt$$

και έχουν ΜΣ Fourier:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cdot \delta(f - nf_0), \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

η μέση ισχύς μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ V_n^* \cdot V_n \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |V_n|^2 \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται ταυτότητα Parseval για περιοδικά σήματα.

Δηλαδή, βρίσκοντας την έκφραση του περιοδικού σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέση ισχύ του υπολογίζοντας το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών των όρων που περιλαμβάνει το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων.

# Παράδειγμα (1)

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος  $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$ .

Α' τρόπος: Υπολογισμοί με ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Το  $x(t)$  έχει περίοδο  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ . Η μέση ισχύς, σύμφωνα με την παραπάνω ενό-

τητα, θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |A_0 \cos(2\pi f_0 t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} [A_0 \cos(2\pi f_0 t)]^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t) \cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(2\pi f_0 t) \cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} \cdot dt = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[ \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1}{2} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2} \cdot dt \right] = \frac{A_0^2}{T_0} \left[ \frac{1}{2} [t]_{t_1}^{t_1+T_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} (\sin(4\pi f_0 t))' \cdot dt \right] = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[ \frac{1}{2} [t_1 + T_0 - t_1] + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 t)]_{t_1}^{t_1+T_0} \right] = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[ \frac{T_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 (t_1 + T_0)) - \sin(4\pi f_0 (t_1))] \right] = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[ \frac{T_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \left[ \sin\left(4\pi f_0 t_1 + 4\pi f_0 \frac{1}{f_0}\right) - \sin(4\pi f_0 t_1) \right] \right] = \frac{A_0^2}{T_0} \left[ \frac{T_0}{2} + 0 \right] = \frac{A_0^2}{2} \end{aligned}$$

## Παράδειγμα (2)

Β' τρόπος: Υπολογισμοί από τη σειρά Fourier – με την ταυτότητα Parseval

Το  $x(t)$  μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς Fourier με τη χρήση της σχέσης Euler:

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{A_0}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Επίσης, ο ΜΣ Fourier του  $x(t)$  ισούται με:  $X(f) = \frac{A_0}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2} \delta(f + f_0)$

οπότε η μέση ισχύς υπολογίζεται (με χρήση της ταυτότητας Parseval) ως εξής:

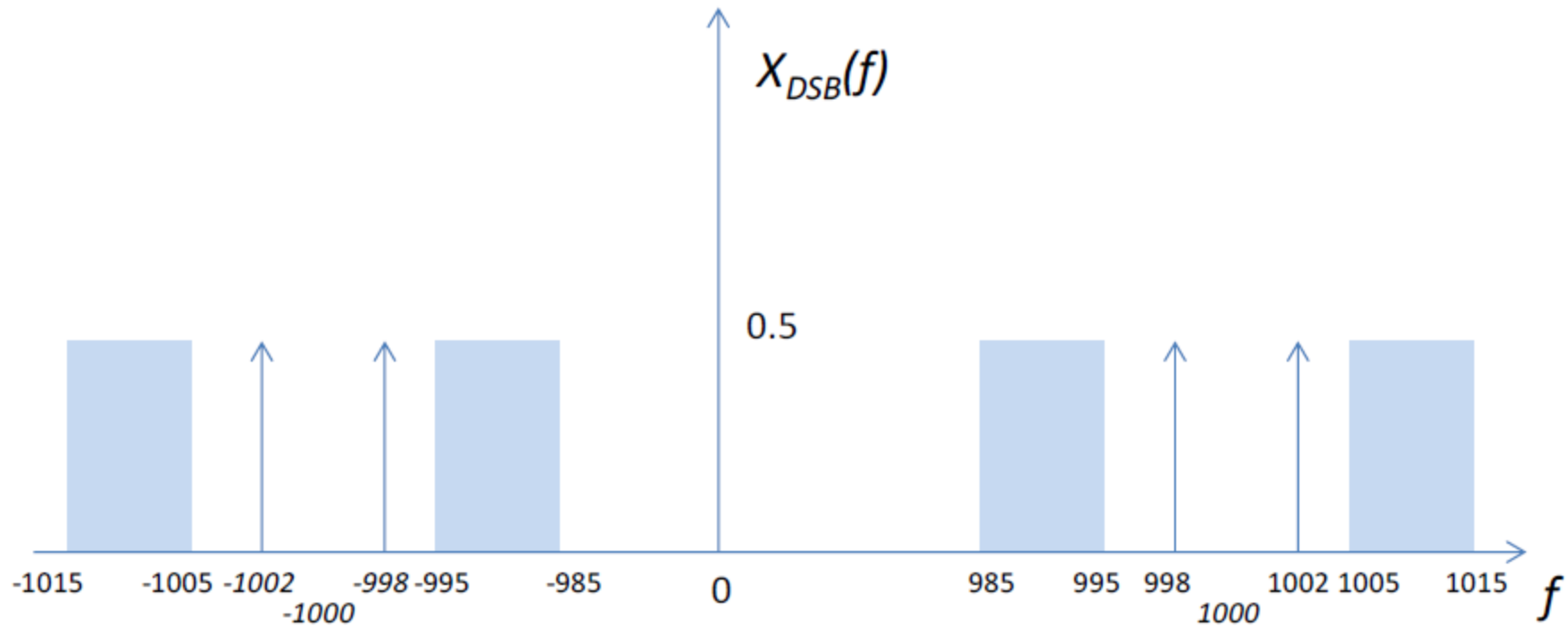
$$P_x = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{A_0^2}{4} + \frac{A_0^2}{4} = \frac{A_0^2}{2}.$$

# Παραδείγματα

---

## ΘΕΜΑ 2 2016B

Δίνεται το φάσμα του διαμορφωμένου κατά DSB σήματος:



όπου έχει χρησιμοποιηθεί φέρων συχνότητας 1KHz και μοναδιαίου πλάτους.

α) Να υπολογιστεί η έκφραση του μηνύματος  $x(t)$

β) Να υπολογιστούν το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος και του μηνύματος

γ) Να βρεθεί η περίοδος (αν υπάρχει)

του σήματος

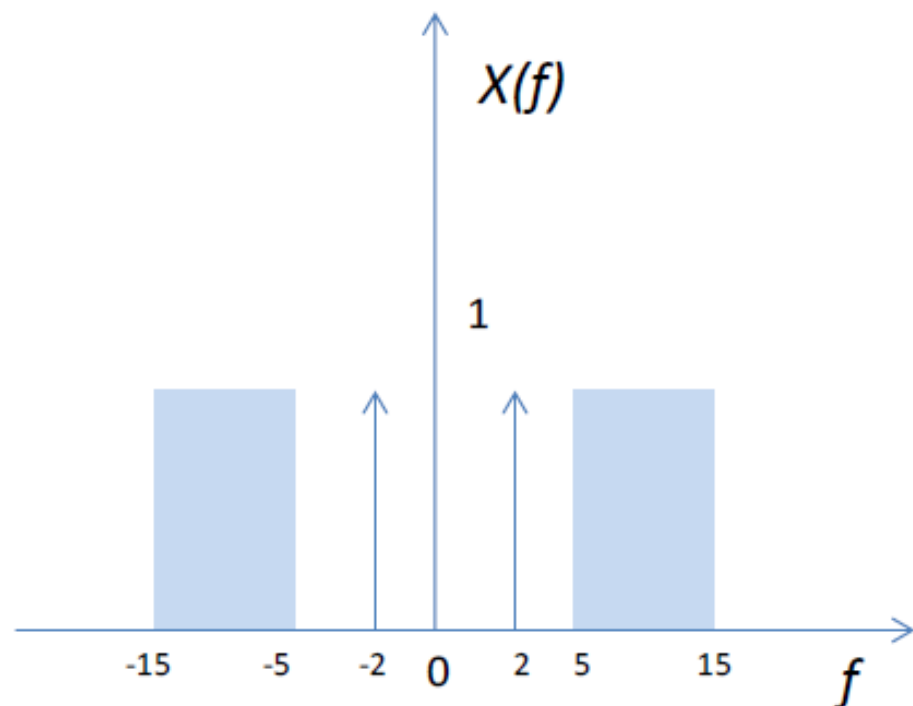
$x(t) * 8\text{sinc}(8t)$

(Το σύμβολο '\*' υποδηλώνει συνέλιξη)



α)

Αφού χρησιμοποιείται φέρον μοναδιαίου πλάτους και φέρουσα συχνότητας 1KHz το σήμα βασικής ζώνης είναι:



$$X(f) = \{\delta(f - 2) + \delta(f + 2)\} + \text{rect}\left(\frac{f + 10}{10}\right) + \text{rect}\left(\frac{f - 10}{10}\right) =$$

Ισχύει ότι:

$$e^{\pm j2\pi 10t} 10 \text{sinc}(10t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} \text{rect}\left(\frac{f \mp 10}{10}\right)$$

Επομένως το σήμα  $x(t)$  είναι:

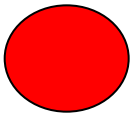
$$\begin{aligned} x(t) &= 10 \text{sinc}(10t) \{e^{j2\pi 10t} + e^{-j2\pi 10t}\} + 2 \cos(2\pi 2t) = \\ &= 10 \text{sinc}(10t) 2 \cos(2\pi 10t) + 2 \cos(2\pi 2t) = \\ &= 20 \text{sinc}(10t) \cos(20\pi t) + 2 \cos(4\pi t) \end{aligned}$$

■ ΕΛΛΗΝΙΚΟ

1

β)

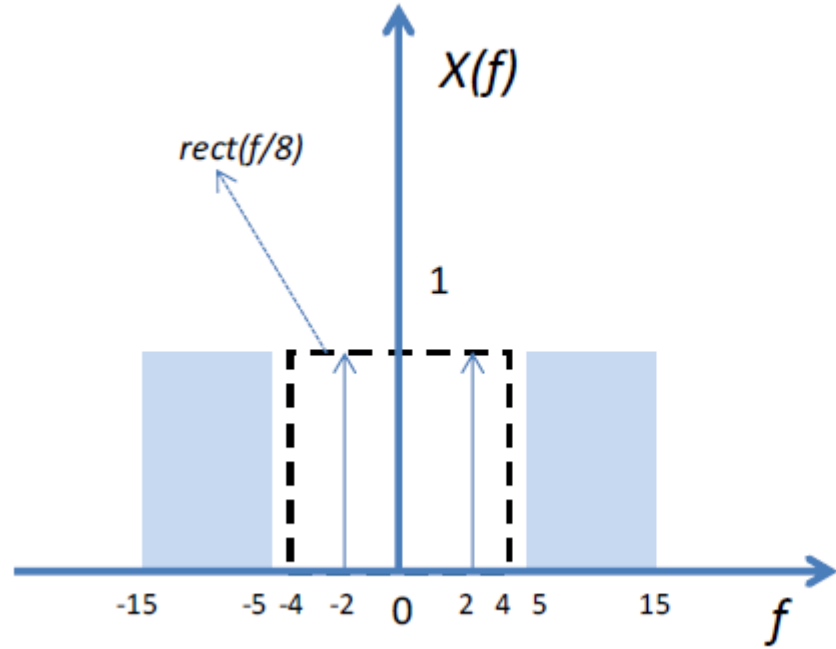
Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος είναι 30Hz, ενώ του σήματος βασικής ζώνης είναι 15Hz

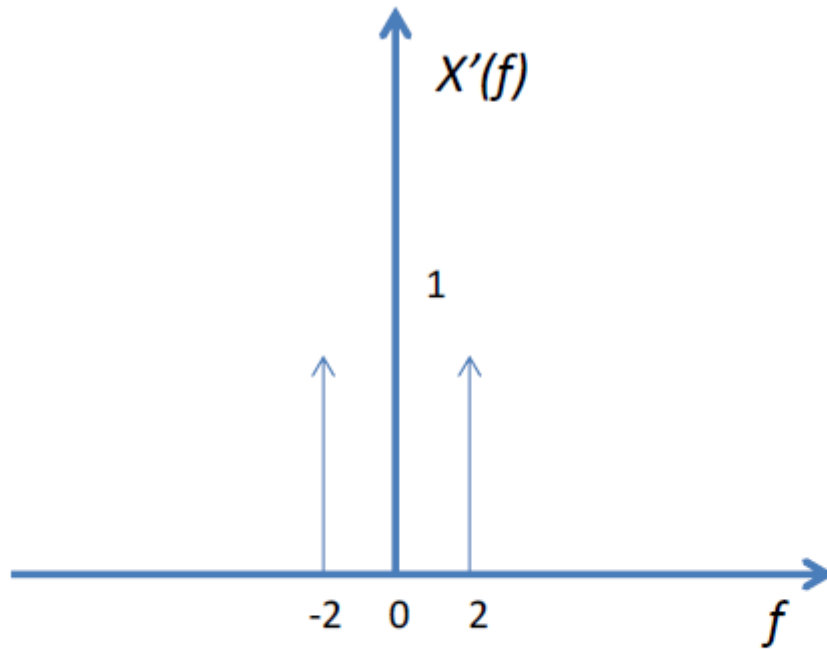
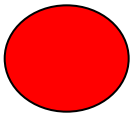


γ)

$$F\{\chi(t) * 8\text{sinc}(8t)\} = X(f)\text{rect}\left(\frac{f}{8}\right)$$

άρα





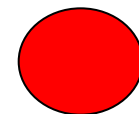
Άρα από το φάσμα μπορούμε να δούμε ότι

$$X(f) \text{rect}\left(\frac{f}{8}\right) = \delta(f - 2) + \delta(f + 2)$$

Επομένως το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα 2Hz και περίοδο  $T=0.5\text{sec}$

## **ΘΕΜΑ 6**

ΕΞ2016Α



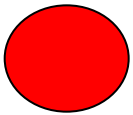
Δίνεται το σήμα  $x(t) = \sin(100t)$ . Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και η ικανότητα δειγματοληψίας (με το κριτήριο Nyquist) των παρακάτω σημάτων. Επίσης για κάθε σήμα να υπολογίσετε –αν υπάρχουν- την περίοδο και την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

(α)  $y(t) = [x(t)]^2$

(β)  $z(t) = x(t) * \left[ \frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]$

(γ)  $w(t) = x(t) + \left[ \frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]^2$

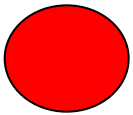
(δ)  $r(t) = x(5.5 \cdot t) \cdot x(2.5 \cdot t)$



(α)

$$y(t) = [x(t)]^2 = \sin^2(100t) = \frac{1 - \cos(200t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(2\pi \frac{200}{2\pi} t\right)}{2}$$

Το σήμα έχει έναν συνημιτονικό όρο άρα είναι περιοδικό με συχνότητα  $f_y = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$ ,  
με περίοδο  $T_y = \frac{\pi}{100} \text{ sec}$  και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_{s,y} = \frac{200}{\pi} \text{ Hz}$



(β)

$$z(t) = x(t) * \left[ \frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right] = \sin(100t) * \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi t} = \sin(100t) * \text{sinc}(100t) = \\ = \sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) * \text{sinc}(100t)$$

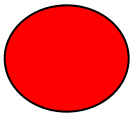
Το φάσμα πλάτους είναι

$$Z(f) = \frac{1}{2j} \left[ \delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right) \right] \cdot \frac{1}{100} \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το τελικό σήμα περιλαμβάνει τους 2 παλμούς  $\delta$  στις συχνότητες  $\pm \frac{100}{2\pi} \text{ Hz} = \pm \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$  (εφόσον στην ανωτέρω πράξη ο τετραγωνικός παλμός δρα ως βαθυπερατό φίλτρο με μεγαλύτερη συχνότητα αποκοπής, ίση με 50 Hz).

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα  $f_z = \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$ ,

με περίοδο  $T_z = \frac{\pi}{50} \text{ sec}$  και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_{s,z} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$



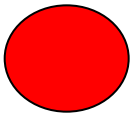
$$\begin{aligned}(\gamma) w(t) &= x(t) + \left[ \frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]^2 = \sin(100t) + \left[ \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi t} \right]^2 = \sin(100t) + \text{sinc}^2(100t) = \\ &= \sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) + \text{sinc}^2(100t)\end{aligned}$$

Το σήμα έχει φάσμα πλάτους :

$$W(f) = \frac{1}{2j} \left[ \delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right) \right] + \frac{1}{100} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100Hz, άρα η ελάχιστη συχνότητα Nyquist είναι  $f_{s,w} = 200\text{Hz}$ .



$$\begin{aligned}(\delta) r(t) &= x(5.5t) \cdot x(2.5t) = \sin(550t) \cdot \sin(250t) = \frac{1}{2} [\cos(550t - 250t) - \cos(550t + 250t)] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(300t) - \cos(800t)]\end{aligned}$$

Οι περίοδοι των 2 συνημιτονικών όρων είναι οι εξής:

$$T_1 = \frac{2\pi}{300} \text{ sec}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{800} \text{ sec}$$

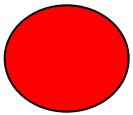
και ο λόγος τους είναι

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{300}}{\frac{2\pi}{800}} = \frac{8}{3}, \text{ ρητός, } \text{οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο } T_r = 3T_1 = 8T_2 = \frac{\pi}{50} \text{ sec}$$

, έχει συχνότητα  $f_r = \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$ ,

και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας  $f_{s,r} = 2 \frac{400}{\pi} \text{ Hz} = \frac{800}{\pi} \text{ Hz}$

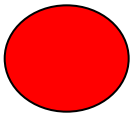




## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , με περίοδο  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ . Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε)  $x_g(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)]$ , όπου  $a > f_0$  και το '\*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.



$$(ε) x_6(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)], \text{ όπου } a > f_0$$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \mathfrak{F}[2a \cdot \text{sinc}(2at)]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

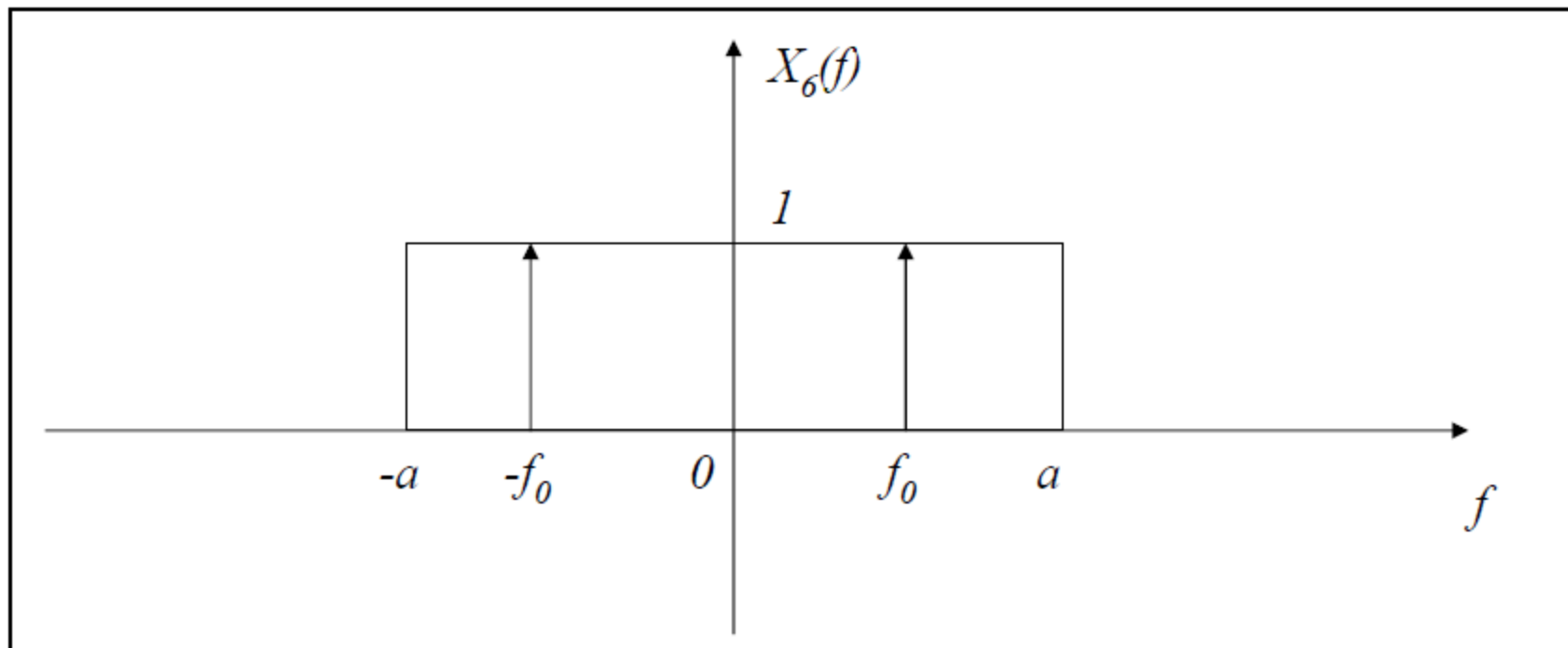
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = X(f)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f) \Leftrightarrow$$

$$\text{και } \Leftrightarrow \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.

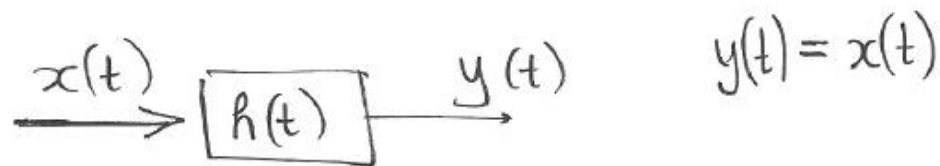


Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του  $x(t)$  με το  $[2a \cdot \text{sinc}(2at)]$  ισοδυναμεί με διέλευση του  $x(t)$  από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\alpha > f_0$ , συνεπώς το σήμα  $x(t)$  εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ.  $x_6(t) = x(t)$ ) άρα το σήμα

$x_6(t)$  είναι περιοδικό με περίοδο ίση με  $T_0 = \frac{1}{f_0}$

Παράδειγμα με φίλτρα.

Ποιά η σχέση των  $a, b$  ώστε  $(a, b > 0)$   
να ισχύει  $a \operatorname{sinc}(at) * b \operatorname{sinc}^2(bt) = b \operatorname{sinc}^2(bt)$  ?



$$x(t) = b \operatorname{sinc}^2(bt)$$

$$h(t) = a \operatorname{sinc}(at) \quad a, b > 0$$

Υπολογισμός  $X(f)$

Γνωρίζουμε ότι  $\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}(f)$

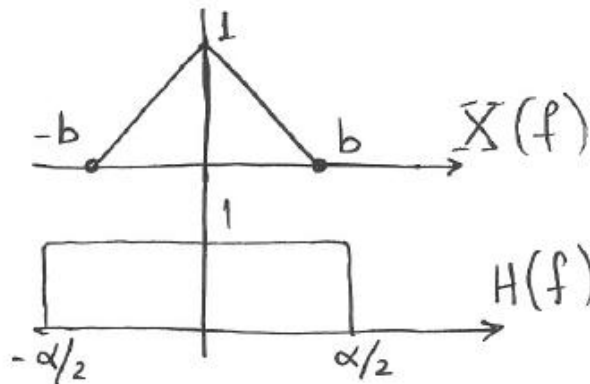
αλλ. υλιθαιας  $\text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b} \text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$   
 $\Rightarrow b \text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

Υπολογισμός  $H(f)$ .

Γνωρίζουμε ότι  $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f)$

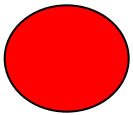
αλλ. υλιθαιας  $\text{sinc}(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\alpha} \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow \alpha \text{sinc}(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

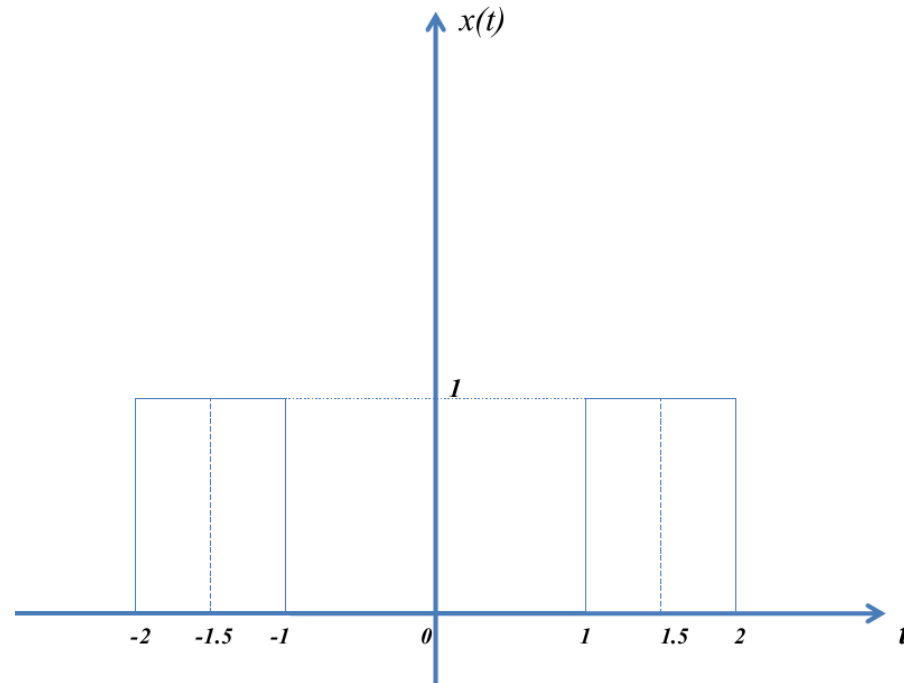


Εφείς θέλουμε  $X(f) \cdot H(f) = X(f)$

οπότε  $b \leq \frac{\alpha}{2}$



Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα  $x(t)$  με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής

$$\text{συνέλιξη: } y(t) = \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} * \text{rect}(t) .$$

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου  $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου  $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση

<sup>142</sup> με  $H(f) = \cos(3\pi f)$ .  
ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.4/2η

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα  $x(t)$  ισούται με:

$$x(t) = \text{rect}(t - 1.5) + \text{rect}(t + 1.5) .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5} \text{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5} \text{sinc}(f) = 2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f) .$$

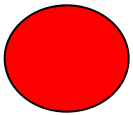
(β)

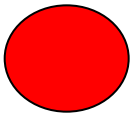
Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} * \text{rect}(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \mathfrak{F} \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} \cdot \mathfrak{F}[\text{rect}(t)] = \\ &= [1 + \cos(6\pi f)] \cdot \text{sinc}(f) = \text{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \text{sinc}(f) \end{aligned}$$





(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{[1 + \cos(6\pi f)] \cdot \text{sinc}(f)}{2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f)}.$$

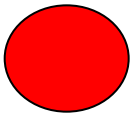
Κι επειδή ισχύει ότι

$$1 + \cos(6\pi f) = 2 \cos^2(3\pi f)$$

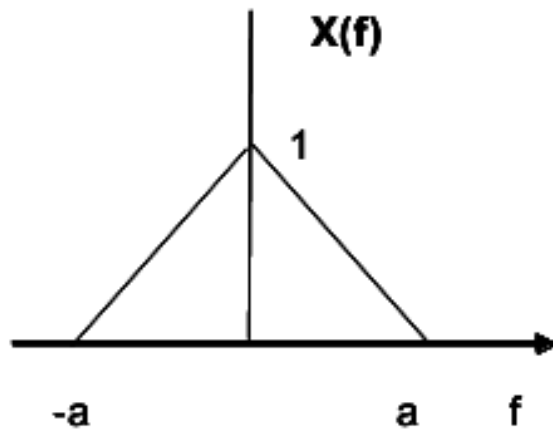
τελικά έχουμε:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2 \cos^2(3\pi f) \cdot \text{sinc}(f)}{2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f)} = \cos(3\pi f)$$

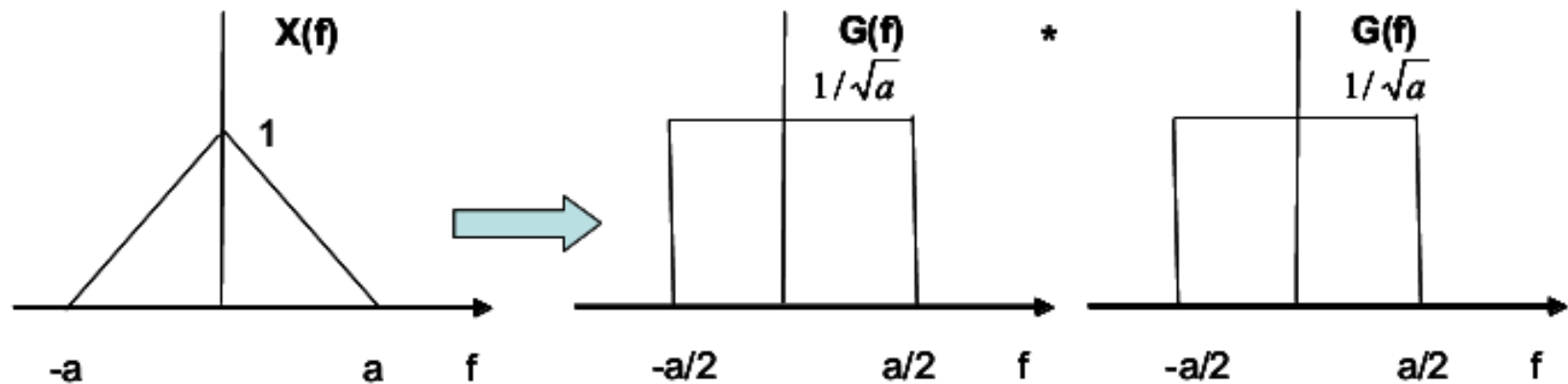
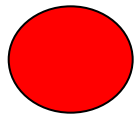




(β) Να βρεθεί το σήμα  $x(t)$  στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $x(t)$   $[X(f)]$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα  $x(t)$  προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier  $X(f)$  προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος  $G(f)$  όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα

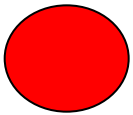


Η συνάρτηση  $g(t)$  με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a} \sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \text{sinc}^2(at)$$

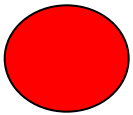


**Άσκηση 4** (επαναληπτική, ΓΕ5/1112/06)

Δίνεται το σήμα  $x_1(t) = a \cdot \text{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \text{sinc}(2a \cdot t)$ ,  $a > 0$ . Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους  $2V$  και συχνότητας  $f_c = a \text{ Hz}$  και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα  $x_2(t)$ .

1. Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του αρχικού σήματος  $X_1(f)$  και του διαμορφωμένου DSB σήματος  $X_2(f)$ .

1. Δίνεται ότι  $x_1(t) = a \cdot \text{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \text{sinc}(2a \cdot t)$ ,  $a > 0$



Έχουμε:

$$\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} \text{tri}\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \text{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = a \text{sinc}^2(at) + 2a \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) = X_1(f)$$

Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους  $A_c = 2V$  και συχνότητας  $f_c = a \text{ Hz}$  και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα  $x_2(t)$ .

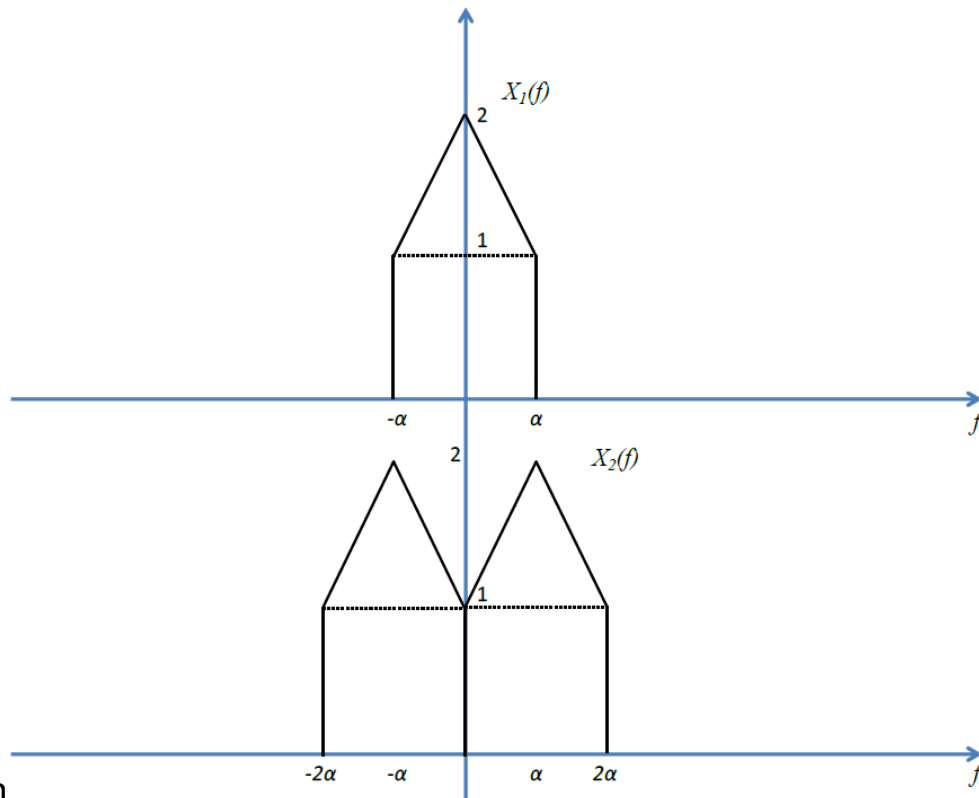
Το φάσμα πλάτους του είναι το εξής:

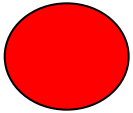
$$X_2(f) = \frac{1}{2} A_c \{X_1(f - f_c) + X_1(f + f_c)\} =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \{X_1(f - a) + X_1(f + a)\} = \text{tri}\left(\frac{f - a}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{f - a}{2a}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + a}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + a}{2a}\right)$$

Στο

παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα φάσματα πλάτους  $X_1(f)$  και  $X_2(f)$ .





**Στόχος της άσκησης** Η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας σημάτων τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως επίσης και η εφαρμογή του κριτηρίου Nyquist για την εύρεση της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.

**Σχετικές ασκήσεις:** Άσκηση 1 (σελ.1), Άσκηση 5 (σελ.8) - Επεξεργασία Σημάτων και Φάσμα και Άσκηση 4 (σελ.27)-Διαμόρφωση από το plh22\_oss1-final.pdf

Δίνονται τα σήματα  $x_1(t) = \cos(10\pi t)$ ,  $x_2(t) = \sin(t)$ .

Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περίοδοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(α)  $y_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$

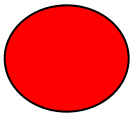
(β)  $y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(\pi t)$

Δίνονται τα σήματα  $x_3(t) = \delta(t-100) + \delta(t+100)$ ,  $x_4(t) = \frac{1}{200} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{200}\right)$

Να βρεθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(γ)  $y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$

(δ)  $y_4(t) = x_3(t) * x_4(t)$



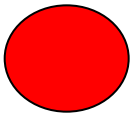
**(α)**

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \cos(10\pi t) - \sin(t)$$

$\cos(10\pi t)$  περιοδικό με περίοδο  $T_A = \frac{1}{5} \text{ sec}$

$\sin(t)$  περιοδικό με περίοδο  $T_B = 2\pi \text{ sec}$

Λόγος περιόδων  $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{1}{5}}{2\pi} = \frac{1}{10\pi}$  άρρητος, άρα το  $y_1(t)$  απεριοδικό



(β)

$$y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(\pi t) = \cos(10\pi t) \cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2} [\sin(\pi t + 10\pi t) + \sin(\pi t - 10\pi t)] = \\ = \frac{1}{2} [\sin(11\pi t) - \sin(9\pi t)]$$

$$\sin(11\pi t) \text{ περιοδικό με περίοδο } T_A = \frac{2}{11} \text{ sec}$$

$$\sin(9\pi t) \text{ περιοδικό με περίοδο } T_B = \frac{2}{9} \text{ sec}$$

$$\text{Λόγος περιόδων } \frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{11} \text{ ρητός, άρα το } y_2(t) \text{ περιοδικό με περίοδο } T_2 = 11T_A = 9T_B = 2 \text{ sec}$$



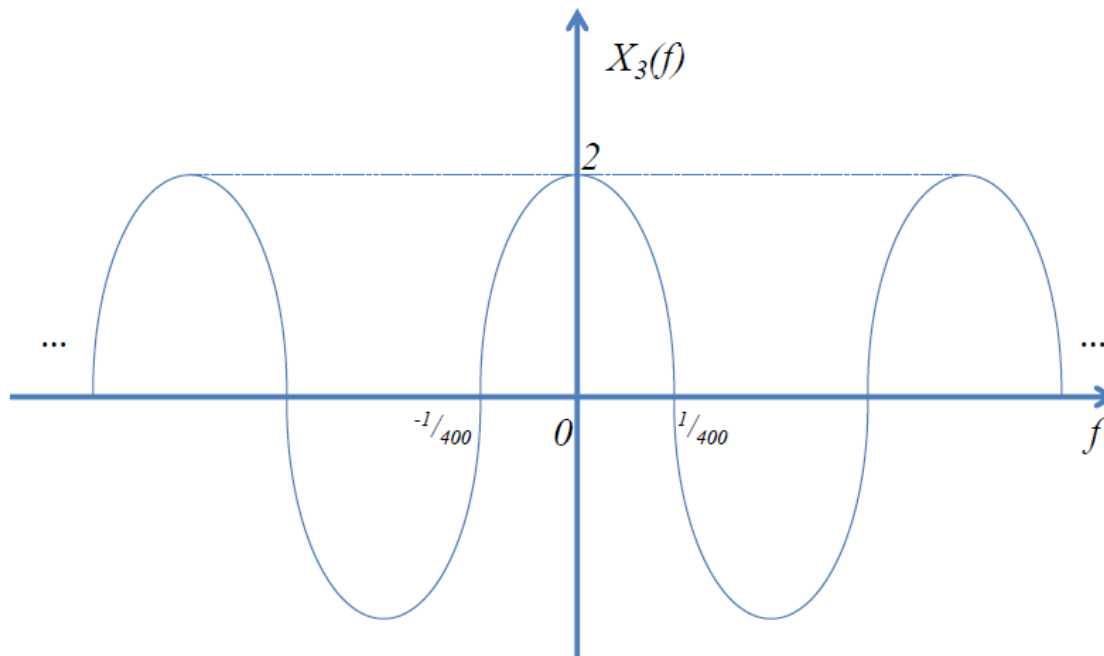
(γ)

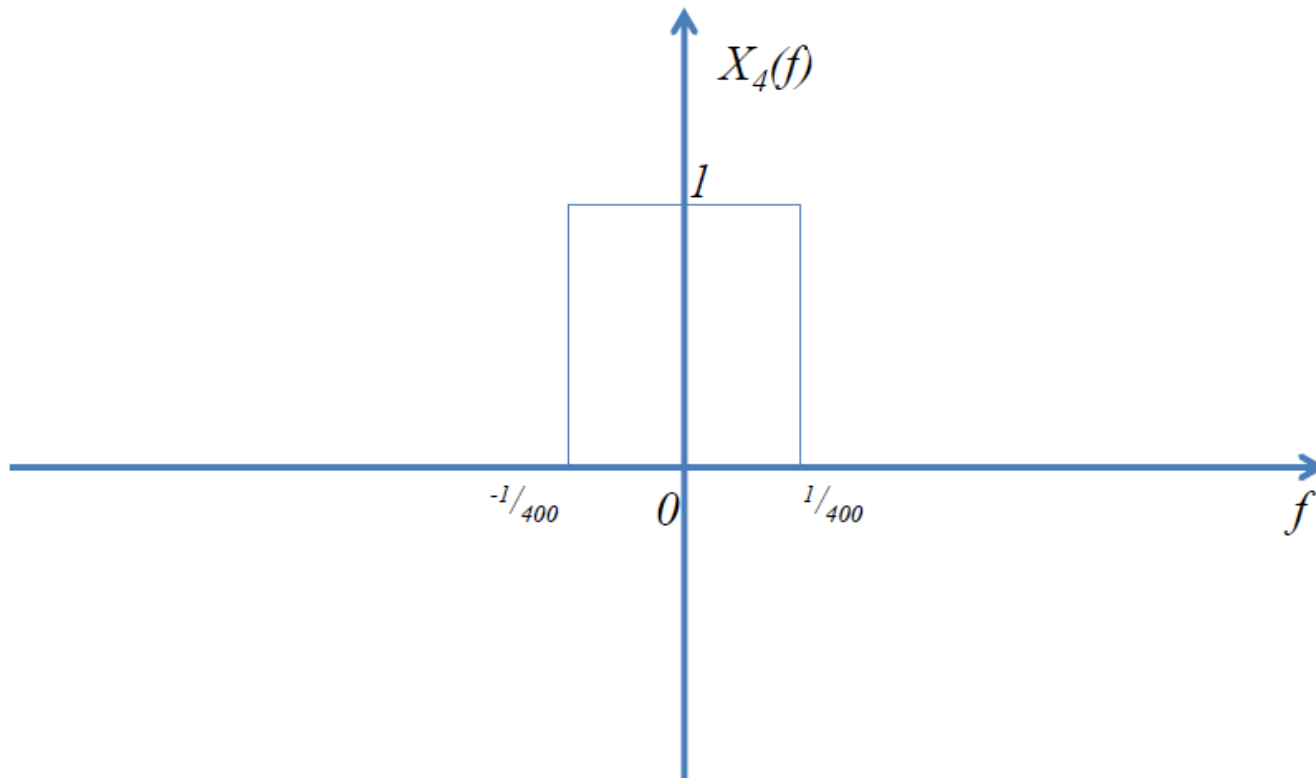
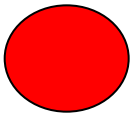
$$y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3(t) \xrightarrow{F} 2 \cos(2\pi f 100) = X_3(f)$$

$$x_4(t) \xrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{1/200}\right) = X_4(f)$$

Τα φάσματα πλάτους των ανωτέρω σημάτων απεικονίζονται παρακάτω

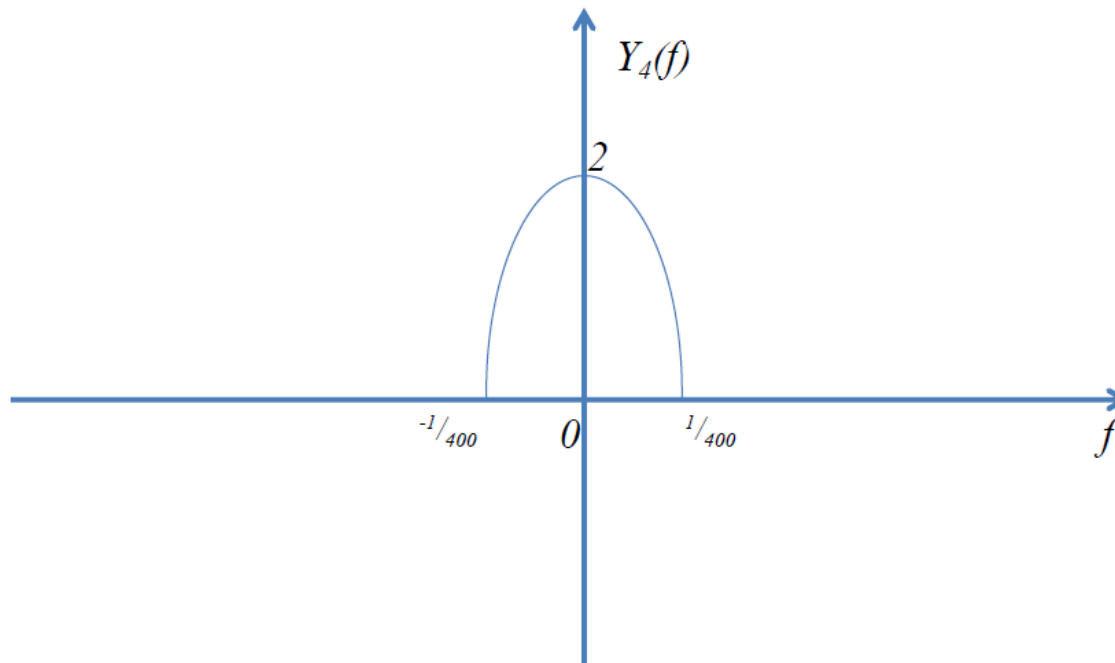




Το φάσμα  $Y_3(f) = X_3(f) + X_4(f)$  είναι συνεχές συνεπώς το σήμα  $y_3(t)$  δεν είναι περιοδικό.

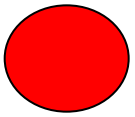
$$(\delta) \quad y_4(t) = x_3(t) * x_4(t) \xrightarrow{F} X_3(f) \cdot X_4(f) = 2 \cos(2\pi f 100) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{1/200}\right)$$

Το φάσμα  $Y_4(f)$  απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Το φάσμα είναι συνεχές, συνεπώς το σήμα  $y_4(t)$  δεν είναι περιοδικό.

## ΘΕΜΑ 3

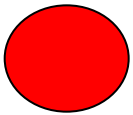


Δίνονται τα σήματα  $x_1(t) = 4 \cos(800\pi t)$  και  $X_2(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$ .

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

(α). Να υπολογιστεί η έκφραση  $x_3(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[ x_1\left(\frac{3t}{2}\right) + x_1(t)x_2(t) \right]$

(β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος  $x_3(t)$ .



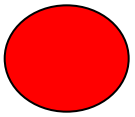
1/

(α), (β)

$$x_1\left(\frac{t}{2}\right) = 4 \cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{t}{2}\right) = 4 \cos(2\pi 200t) \leftrightarrow 2[\delta(f - 200) + \delta(f + 200)] \quad (\text{A})$$

$$\frac{1}{2}x_1\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{1}{2}4 \cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{3t}{2}\right) = 2 \cos(2\pi 600t) \leftrightarrow \delta(f - 600) + \delta(f + 600) \quad (\text{B})$$

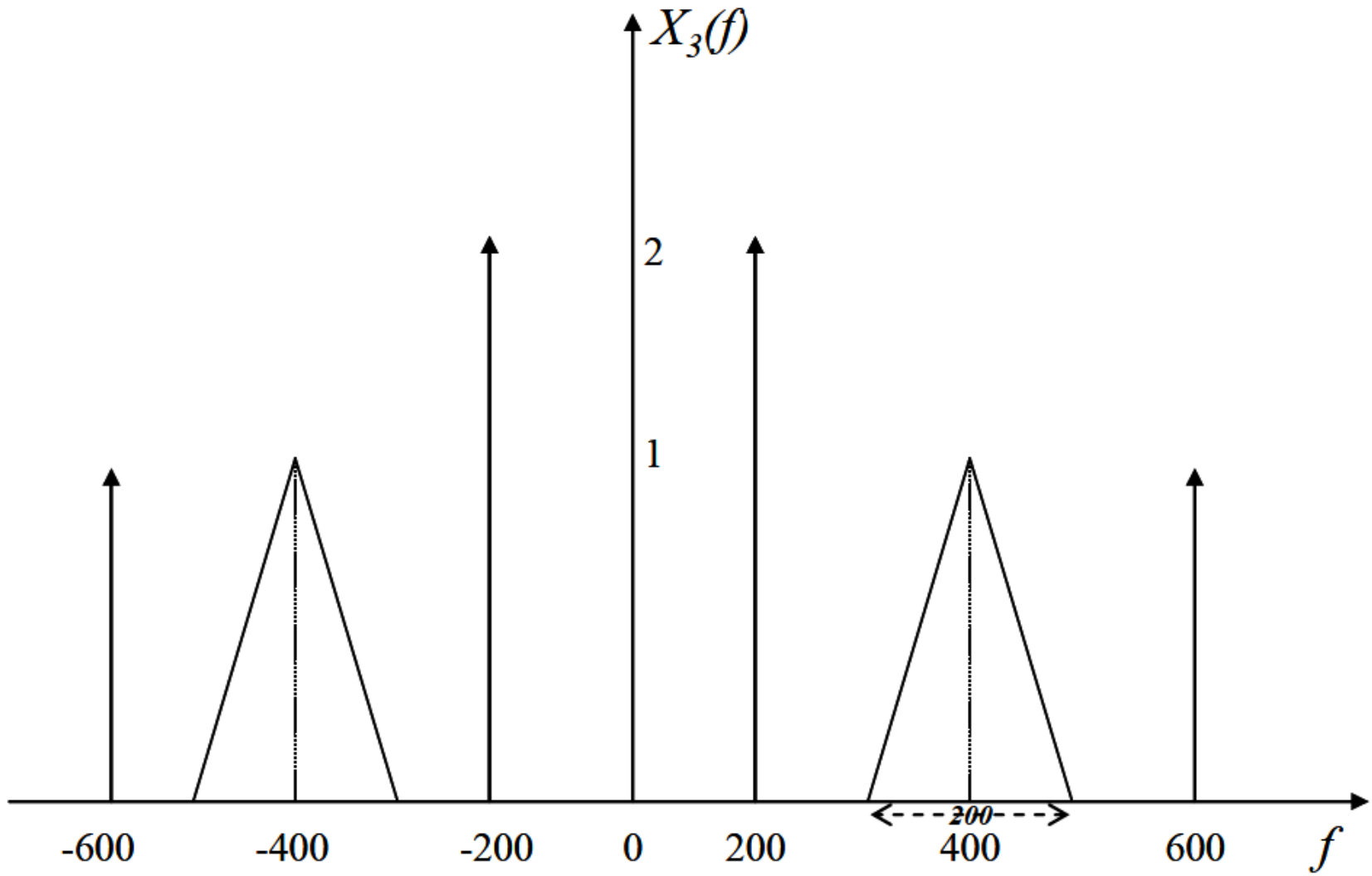
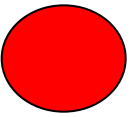
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) &= 2 \cos(2\pi 400t)100 \sin c^2(100t) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \{\delta(f - 400) + \delta(f + 400)\} * \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) = \text{tri}\left(\frac{f - 400}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + 400}{100}\right) \end{aligned} \quad (\text{Γ})$$



Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[ x_1\left(\frac{3t}{2}\right) + x_1(t)x_2(t) \right] = 4 \cos(2\pi 200t) + 2 \cos(2\pi 600t) + 200 \cos(2\pi 400t) \sin^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2 \left[ \delta(f - 200) + \delta(f + 200) \right] + \left[ \delta(f - 600) + \delta(f + 600) \right] + \left[ \text{tri}\left(\frac{f - 400}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + 400}{100}\right) \right]$$



## ΘΕΜΑ 4

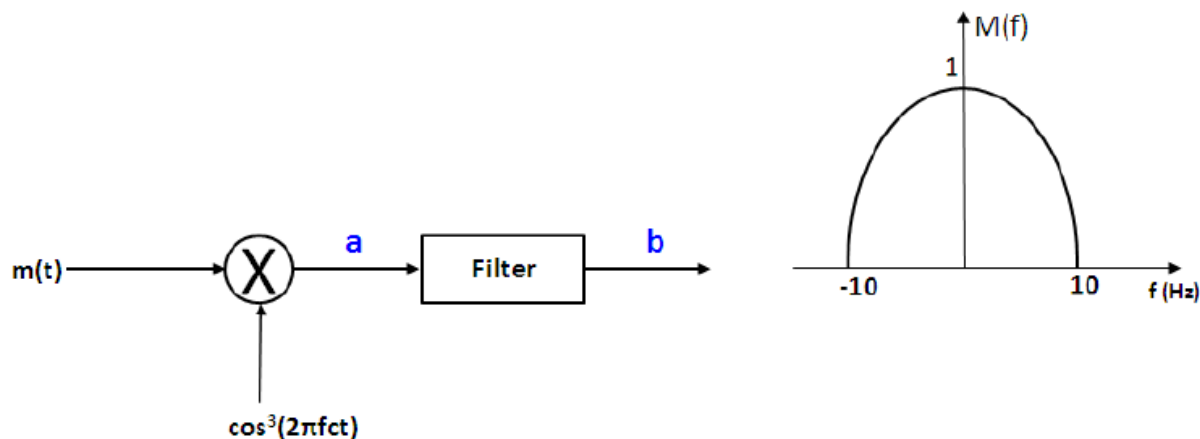
*Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με την έννοια της διαμόρφωσης και του φάσματος αλλά και τη χρήση φίλτρων.*

*Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/2005-2006/Θ4, ΓΕ1/0910/Θ5, ΓΕ5/0708/Θ4, ΓΕ2/2011-12/Θ1*

Να σχεδιαστεί σύστημα διαμόρφωσης DSB όπου το εξαγόμενο σήμα στο σημείο **b** να είναι της μορφής

$$k \cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

όπου  $m(t)$  είναι ένα σήμα βασικής ζώνης  $B=10$  Hz με φάσμα πλάτους  $M(f)$  (βλ. σχήμα) και  $k$  είναι μία σταθερά. Το προς σχεδίαση σύστημα διαμόρφωσης απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα

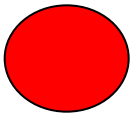


- (α) Να βρεθεί στο σημείο **a** η έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου.
- (β) Να σχεδιαστεί το φάσμα της κυματομορφής στο σημείο **a**.
- (γ) Τι φίλτρο χρησιμοποιείται και ποια είναι η ελάχιστη επιτρεπτή συχνότητα  $f_c$  του φέροντος;
- (δ) Αν το φέρον διαμόρφωσης είναι το  $\cos^2(2\pi f_c t)$ , να εξεταστεί αν το παραπάνω σύστημα διαμόρφωσης με την επιλογή του φίλτρου στο (γ) εξακολουθεί να παράγει το σήμα της μορφής:

$$k \cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Υπόδειξη : Όπως παρατηρείτε και στο σχήμα, το φέρον σήμα είναι της μορφής  $\cos^3(2\pi f_c t)$





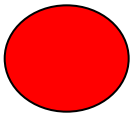
$$y = \cos^3(2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) \cdot \frac{1 + \cos(2\pi 2f_c t)}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi 2f_c t) =$$

$$\frac{1}{2} \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\pi(2f_c + f_c)t) + \cos(2\pi(2f_c - f_c)t)] =$$

$$\frac{1}{2} \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 3f_c t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi f_c t) =$$

$$\frac{3}{4} \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 3f_c t)$$



(α). Με βάση το σχήμα, στο σημείο (α) θα έχω

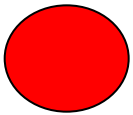
$$\begin{aligned} z &= m(t) \cdot y(t) = m(t) \cdot \left( \frac{3}{4} \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 3f_c t) \right) = \\ &= \frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 3f_c t) \end{aligned}$$

- Το σήμα  $\frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$  αποτελεί το επιθυμητό σήμα ενώ
- το σήμα  $\frac{1}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 3f_c t)$  αποτελεί το ανεπιθύμητο σήμα εξαιτίας του όρου  $3f_c$ , το οποίο και θα πρέπει να απορριφθεί από το φίλτρο

Ώστε, το σήμα που είναι και το τελικό μετά και από το φίλτρο

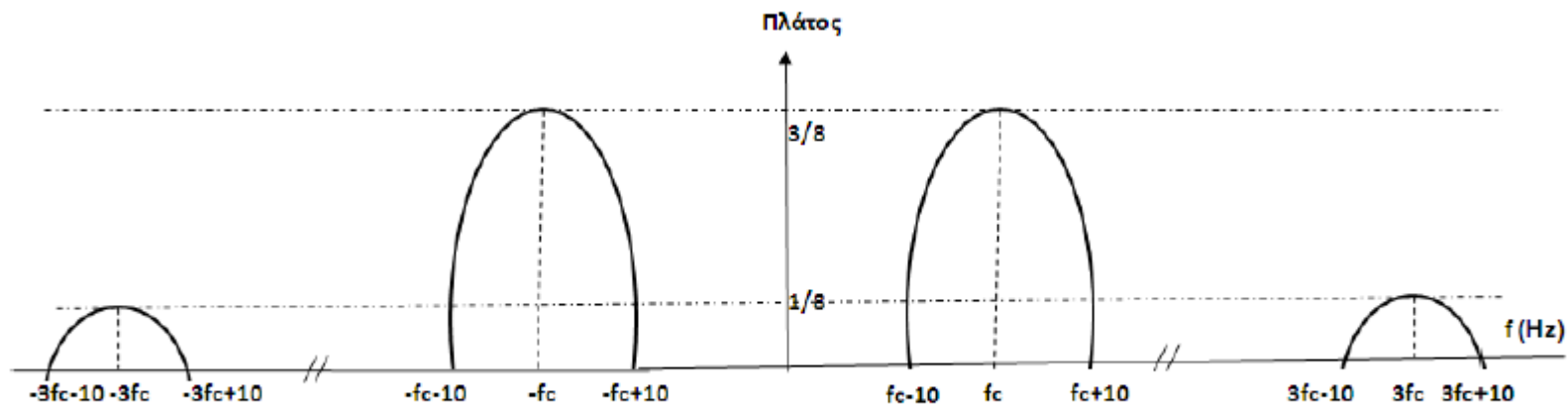
$$\frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

και επομένως είναι της μορφής που ζητά η άσκηση αφού  $k=3/4$ .



(β). Με βάση το θεώρημα της διαμόρφωσης και το φάσμα  $M(f)$ , το φάσμα στο σημείο α θα είναι το άθροισμα δύο φασμάτων, το καθένα από τα οποία προκύπτει ως διαμόρφωση DSB-SC του φέροντος (ένα συχνότητας  $f_c$  και ένα  $3f_c$ ) από το σήμα πληροφορίας ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[z(t)] &= \mathfrak{F}\left[m(t)\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t) + m(t)\frac{1}{4}\cos(2\pi 3f_c t)\right] \\ &= \mathfrak{F}\left[m(t)\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t)\right] + \mathfrak{F}\left[m(t)\frac{1}{4}\cos(2\pi 3f_c t)\right] \\ &= \frac{3}{8}\left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right] + \frac{1}{8}\left[M(f-3f_c) + M(f+3f_c)\right]\end{aligned}$$

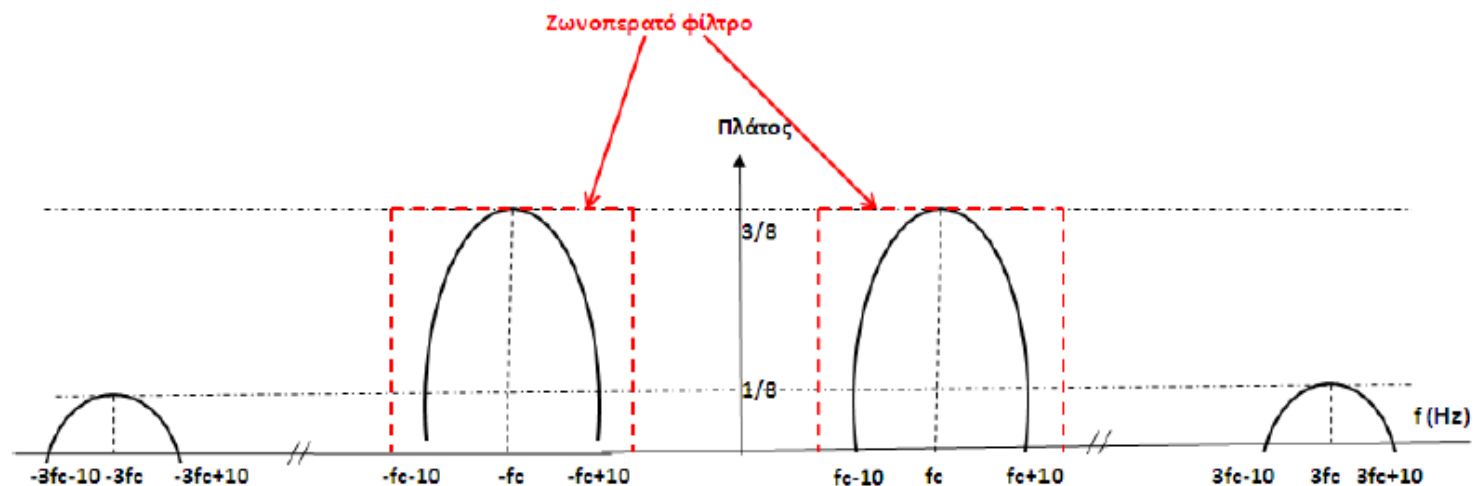


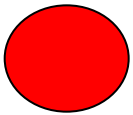
(γ). Το φίλτρο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί είναι ζωνοπερατό με κέντρο το  $f_c$  και το  $-f_c$  ώστε να αποκόψει τις πολύ υψηλές συχνότητες των  $3f_c$  διατηρώντας τις συχνότητες  $f_c$  και  $-f_c$ , δηλαδή

η κεντρική συχνότητα του φίλτρου θα είναι  $f_c - 10 \leq f_{\text{φίλτρου}} \leq f_c + 10\text{Hz}$  με εύρος φίλτρου τις ακόλουθες συχνότητες:

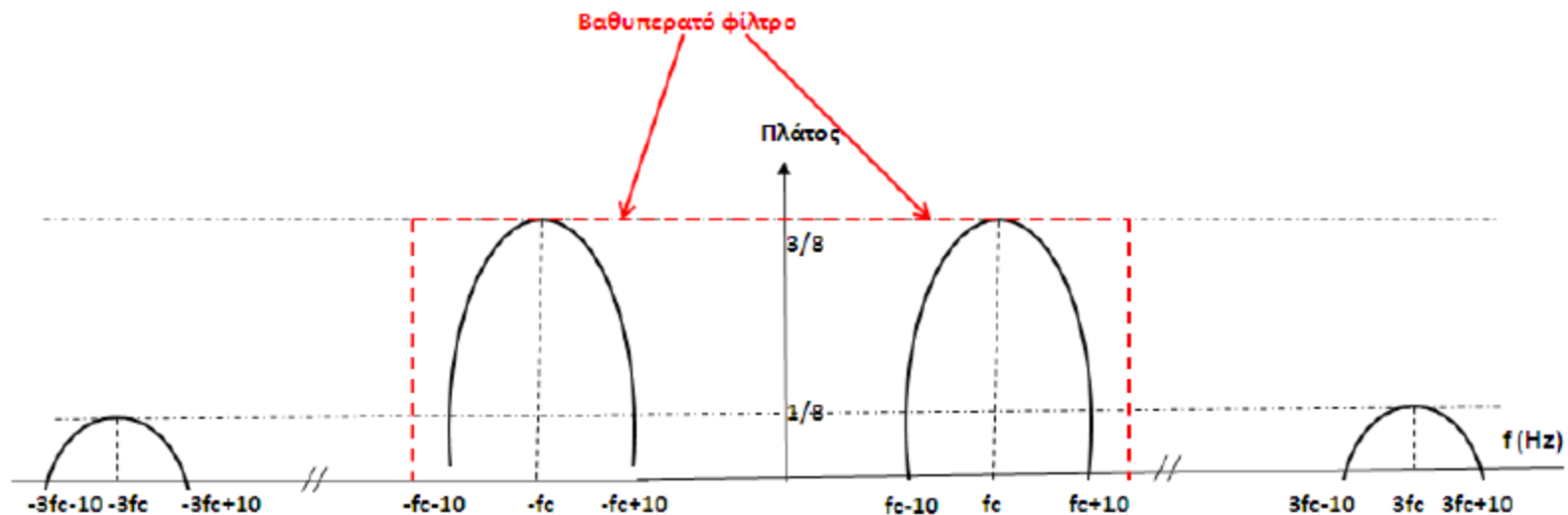
- $3f_c - 10 > f_{\text{cutoff}} > f_c + 10$
- $0 < f_{\text{cutoff}} < f_c - 10$

καθώς και η συμμετρική του ως προς τον άξονα.

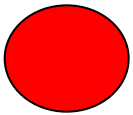




- ή βαθυπερατό με συχνότητα αποκοπής μεγαλύτερη από  $f_c + 10 \text{ Hz}$



Η ελάχιστη επιτρεπτή συχνότητα φέροντος είναι οποιαδήποτε συχνότητα για την οποία ισχύει  $f_c - 10 \gg 0$ . Οπότε  $f_c \gg 10$ . Η  $f_{c,\min}$  θα μπορούσε να είναι 10 Hz αλλά ο πρακτικός κανόνας είναι η  $f_c$  να είναι δύο φορές τουλάχιστον μεγαλύτερη από την μέγιστη συχνότητα του σήματος.



(δ). Αν το φέρον διαμόρφωσης είναι το  $\cos^2(2\pi f_c t)$  τότε θα έχουμε

$$y = \cos^2(2\pi f_c t) = \frac{1 + \cos(2\pi 2f_c t)}{2}$$

Οπότε

$$z = m(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 2f_c t)) = \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_c t)$$

Επομένως στο σημείο α θα έχω δύο σήματα

- Το σήμα  $\frac{1}{2} m(t)$  δεν είναι της ζητούμενης μορφής όπως δίνεται στην άσκηση.
- το σήμα  $\frac{1}{2} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_c t)$  επίσης δεν είναι της ζητούμενης μορφής εξαιτίας του όρου  $2f_c$

Συνεπώς το σύστημα διαμόρφωσης με ζωνοπερατό ή το βαθυπερατό φίλτρο δεν μπορεί να παράγει στην έξοδο το ζητούμενο σήμα αν το φέρον διαμόρφωσης είναι της μορφής  $\cos^2(2\pi f_c t)$

# Ερωτήσεις

---

