ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ-3

$3^{η}$ ΟΣΣ

04.02.2017

Ν.Δημητρίου

Σημείωση: Η παρουσίαση αυτή είναι συμπληρωματική της ύλης των βιβλίων (τόμος Β / μέρη Α,Β και τόμος Α) καθώς και των 2 παρουσιάσεων στο study.eap.gr (oss3_PLH22_DigiComms_2017, PLH22_info_theory_3rdOSS_2016-7) και περιέχει παραπομπές σε συγκεκριμένα σημεία της ύλης αυτής

Σχόλιο για τη ΓΕ2 (i)

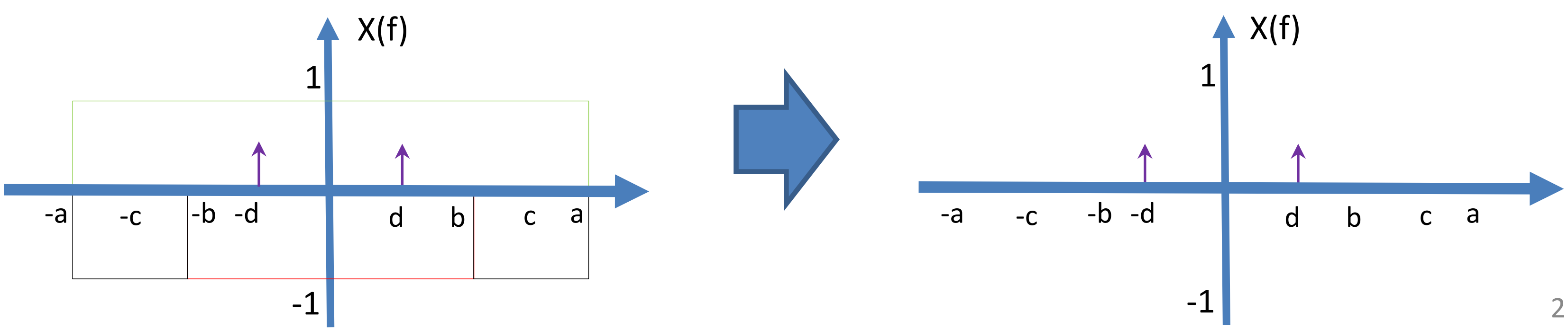
- Στη διερεύνηση περιοδικότητας για σήματα που περιέχουν στη χρονική κυματομορφή συναρτήσεις όπως η sinc() ή η $\text{sinc}^2()$ η απάντηση ότι ‘είναι μη περιοδικό διότι περιλαμβάνει τον όρο sinc()’ δεν είναι πλήρης.
- Αντιπαράδειγμα:
  - Έστω το σήμα

  $x(t)=2a\,\text{sinc}(2at)-2b\,\text{sinc}(2bt)-e^{j2\pi ct}(a-b)\,\text{sinc}((a-b)t)-$

  $-e^{-j2\pi ct}(a-b)\,\text{sinc}((a-b)t)+\cos(2\pi dt)$ με ΜΣ Fourier

  $X(f)=\text{rect}(f/2a)-\text{rect}(f/2b)-\text{rect}((f-c)/(a-b))-\text{rect}((f+c)/(a-b))+0.5(\delta(f-d)+\delta(f+d)).$

  Για κατάλληλες τιμές των α,b,c,d τα φάσματα των sinc() αλληλοαναιρούνται και μένει μόνο το συνημίτονο (άρα το σήμα είναι περιοδικό)



Σχόλιο για τη ΓΕ2 (ii)

- Για τη διερεύνηση περιοδικότητας σε σήματα με άπειρο εύρος ζώνης, η απάντηση ότι αυτά στον χρόνο έχουν πεπερασμένη διάρκεια και άρα είναι μη περιοδικά δεν είναι πλήρης.
- Αντιπαράδειγμα: Ένα άπειρο άθροισμα παλμών δ() στο πεδίο των συχνοτήτων (με συχνότητες ακέραια πολλαπλάσια μεταξύ τους) είναι περιοδικό και αντιστοιχεί στο πεδίο του χρόνου σε επίσης άπειρο άθροισμα παλμών δ().
- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:** *Για να αποφανθούμε αν ένα σήμα (που περιέχει όρους εκτός από ημίτονα/συνημίτονα) είναι περιοδικό ή όχι υπολογίζουμε το φάσμα πλάτους του και ελέγχουμε αν αυτό είναι συνεχές ή διακριτό. Αν είναι διακριτό, ελέγχουμε αν οι διακριτές συχνότητες έχουν λόγο ρητό , τότε και μόνο το σήμα θα είναι περιοδικό.*

Περιεχόμενα

- Ψηφιακές Επικοινωνίες
  - Διαμόρφωση FM (τόμος Β/ μέρος Β σελ.81-88)
  - Δειγματοληψία (τόμος Β/ μέρος Α σελ. 111-117)
  - Διαμόρφωση PCM (τόμος Β/ μέρος Α σελ. 118-131)
  - Παραδείγματα
- Θεωρία Πληροφορίας
  - Πιθανότητες, ΤΜ, Συναρτήσεις Μάζας/Πυκνότητας Πιθανότητας (τόμος Α σελ. 22-26)
  - Ποσότητες Πληροφορίας, Εντροπία (τόμος Α σελ. 27-43)
  - Πηγές Συμβόλων χωρίς μνήμη (τόμος Α σελ. 47-57)
  - Κωδικοποίηση Συμβόλων (Fano, Shannon, Huffmann) (τόμος Α σελ.58-68)
  - Πηγές με μνήμη (τόμος Α σελ.69-76)
  - Παραδείγματα

Ψηφιακές Επικοινωνίες

Διαμορφώσεις Γωνίας

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f x(t) \Leftrightarrow \varphi(t) = k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

Σήμα πληροφορίας

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda\right]$$

Στιγμιαία γωνία

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

Στιγμιαία κυκλική συχνότητα

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 2\pi f_c + k_f\, x(t)$$

Στιγμιαία συχνότητα

$$f(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = f_c + \underbrace{\frac{k_f}{2\pi} x(t)}_{\text{απόκλιση συχνότητας } \Delta f(t)}$$

Διαφάνειες 3-7
Αρχείου oss3_PLH22_DigiComms_2017

Μέγιστη απόκλιση συχνότητας

$$\Delta f_{max} = \max\left|\frac{kf}{2\pi}x(t)\right| = \frac{kf}{2\pi}\max\{|x(t)|\}$$

πεδίο χρόνου

Λόγος απόκλισης: $D = \frac{\Delta f_{max}}{f_x} = \frac{kf}{2\pi f_x}\max\{|x(t)|\}$

Εύρος ζώνης FM σήματος

Κανόνας Carson $\quad W \approx 2(D+1)f_x = 2\left(\max(\Delta f) + f_x\right)$

f_x: εύρος ζώνης σήματος πληροφορίας

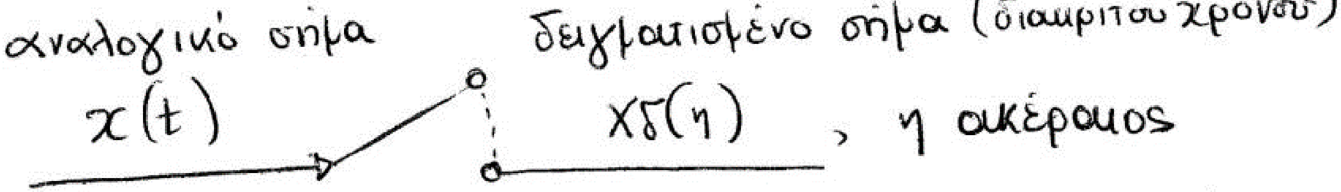
εξετάζουμε το σήμα πληροφορίας στο πεδίο του χρόνου για το $\max|x(t)|$

και στο πεδίο συχνοτήτων για το f_x

Δειγματοληψία

2.

Δειγματοληψία.



$x(t)$ → $x_\delta(\eta)$, η ακέραιος

Λήψη δειγμάτων ανά χρόνο T_δ (περίοδος δειγματοληψίας)

Συχνότητα δειγματοληψίας: $f_\delta = \frac{1}{T_\delta}$

Έκφραση δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου

$$x_\delta(\eta) = x(t)\Big|_{t=\eta T_\delta}$$

Διαφάνειες 15-29
Αρχείου oss3_PLH22_DigiComms_2017

Παράδειγμα

$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10t)$$

με $T_\delta = \frac{1}{20}$ sec

Το δειγματισμένο σήμα γράφεται:

$$x_\delta(n) = x(t)\Big|_{t \to nT_\delta} = \cos\left(2\pi \cdot 10\, n \cdot \frac{1}{20}\right) \quad , n \text{ ακέραιος}$$

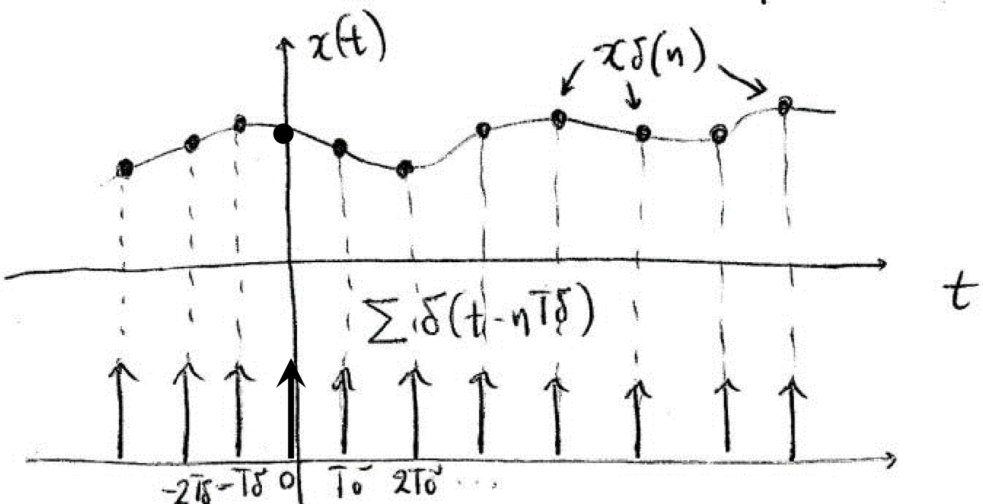
3

Φάσμα Δειγματισμένου σήματος

Δειγματοληψία: Γινόμενο με άπειρους παλμούς δ.

Αν έχουμε περίοδο δειγματοληψίας Tδ

τότε $$x_\delta(t) = x(t)\cdot \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \delta(t-\eta T_\delta)$$



ΜΣ Fourier:

συνέλιξη

$$X_\delta(f) = X(f) * F\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_\delta)\right)$$

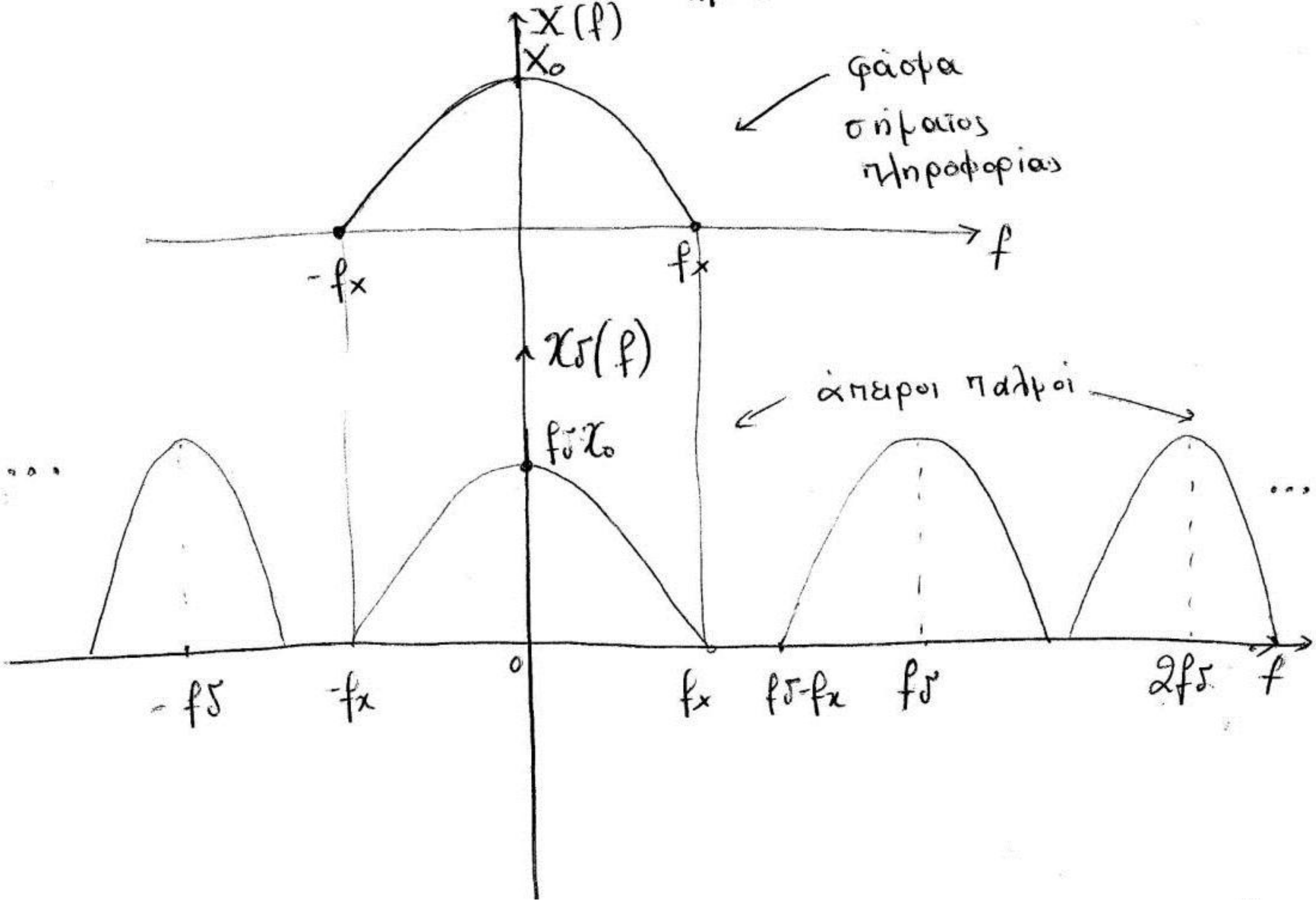
από πίνακες ΜΣ Fourier.

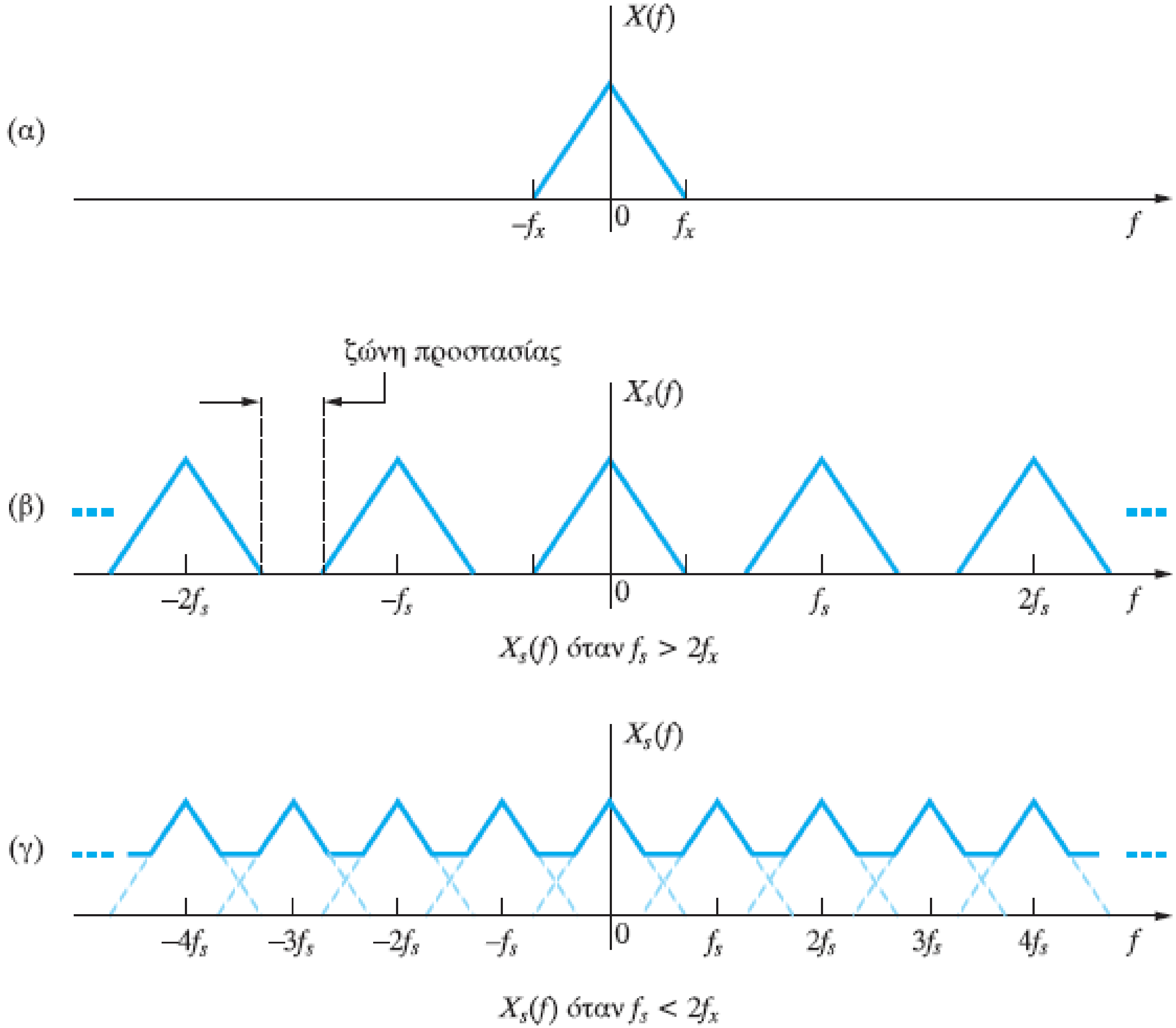
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_\delta) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T_\delta}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T_\delta}\right)$$

Άρα

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_\delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T_\delta}\right) = \frac{1}{T_\delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f-\frac{m}{T_\delta}\right)$$

Δηλ. $x_\delta(t) \xleftrightarrow{F} f_\delta \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m f_\delta)$




(α)
$X(f)$
$-f_x$
0
f_x
f
ζώνη προστασίας
(β)
$X_s(f)$
$-2f_s$
$-f_s$
0
f_s
$2f_s$
f
$X_s(f)$ όταν $f_s > 2f_x$
(γ)
$X_s(f)$
$-4f_s$
$-3f_s$
$-2f_s$
$-f_s$
0
f_s
$2f_s$
$3f_s$
$4f_s$
f
$X_s(f)$ όταν $f_s < 2f_x$

Για την ανακατασκευή του αρχικού φάσματος $X(f)$

- Θα πρέπει να μην υπάρχει αλληλοεπικάλυψη

$$f_\delta - f_x \geq f_x \Rightarrow f_{\delta\, min} = 2 f_x$$

ελάχιστη συχνότητα

δειγματοληψίας (κριτήριο Nyquist)

- Με χρήση βαθυπερατού φίλτρου με

συχνότητα αποκοπής $f_c \geq f_x$ \} λαμβάνεται το αρχικό $x(f)$

και πλάτος $\frac{1}{f_\delta}$

Παράδειγμα

ΘΕΜΑ 1

ΓΕ3/1415

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό Fourier βασικών σημάτων, την δειγματοληψία, την χρήση φίλτρων την μονοπλευρική διαμόρφωση, και τις διαμορφώσεις γωνίας.*

Σχετικές ασκήσεις:*ΓΕ1/1314/Θ3, ΓΕ2/1112/Θ5δ, ΓΕ2/1011/Θ2, ΓΕ2/1415/Θ5, ΓΕ1/1314/Θ5*

Δίνεται το σήμα $x(t) = 12sinc(6t) - sinc^2(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος $x(t)$ καθώς και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του (f_s).

(β) Να απλοποιηθεί η αναλυτική έκφραση του φάσματος του δειγματισμένου σήματος $Y(f)=f_s\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(f-mf_s)\right\}*X(f)$ ώστε να προκύψει σχέση χωρίς τη συνέλιξη και κατόπιν να υπολογίσετε τη χρονική κυματομορφή του σήματος.

(γ) Σχεδιάστε το $Y(f)$ για $m = 0, \pm 1$ αν $f_s{}' = \frac{2}{3}f_s$. Τι παρατηρείτε;

(δ) Το *Y(f)* διέρχεται από κατάλληλο ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο και προκύπτει φάσμα σήματος το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το αποτέλεσμα της διαμόρφωσης του $x(t)$ κατά SSB κάτω πλευρικής ζώνης με συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 6*KHz*. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου.

(ε) Το σήμα $x(t)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 2\pi$ συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους 2 *Volt* και συχνότητας 10kHz. Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος.

(α)

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

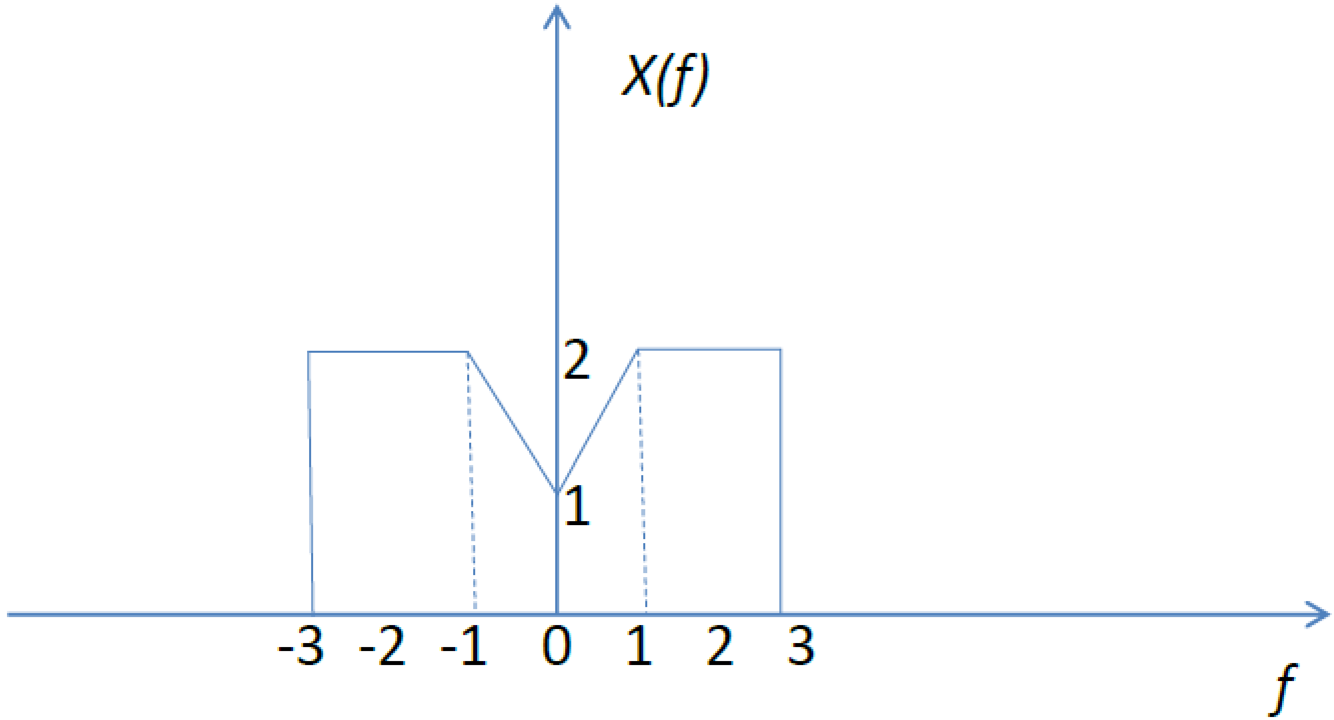
και

$$sinc(t)r \overset{F}{\leftrightarrow} rect(f)$$
$$asinc(at) \overset{F}{\leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

Επομένως

$$\chi(t) = 12sinc(6t) - sinc^2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 2rect\left(\frac{f}{6}\right) - tri(f) = X(f)$$

με φάσμα



Η μέγιστη συχνότητα είναι 3Hz επομένως η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 6Hz.

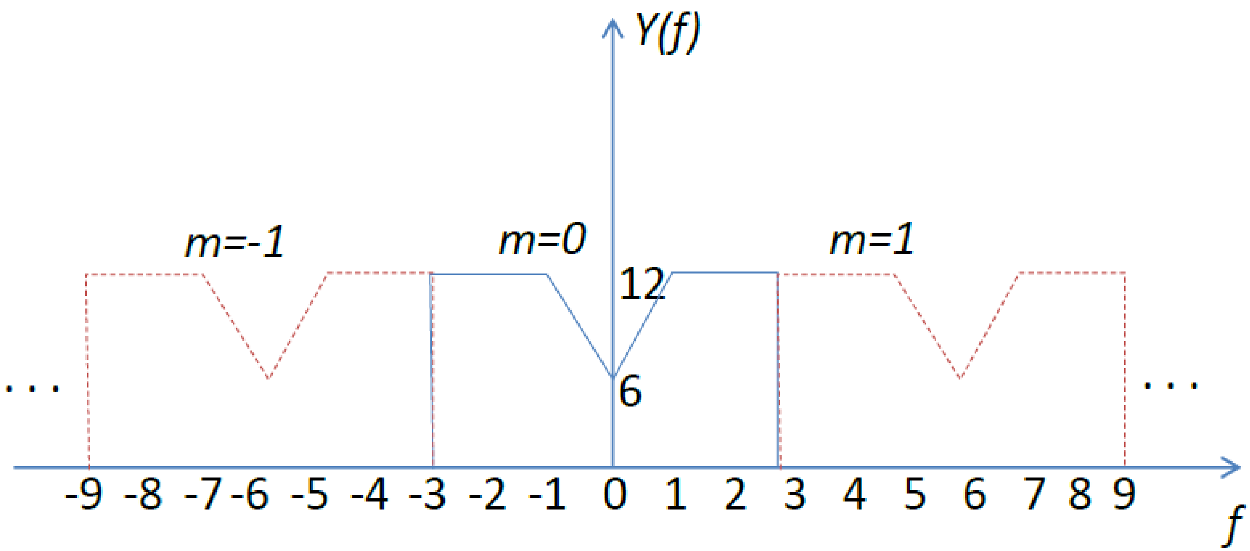
(β)

$$Y(f) = f_s\left\{\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \delta(f - mf_s)\right\} * X(f) = f_s \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X(f - mf_s) =$$

$$= 6 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left[2rect\left(\frac{f-6m}{6}\right) - tri(f-6m)\right]$$

$$y(n) = x(t)_{t=nTs} = 12sinc\left(6n\frac{1}{6}\right) - sinc^2\left(\frac{n}{6}\right)=12sinc(n) - sinc^2\left(\frac{n}{6}\right)$$

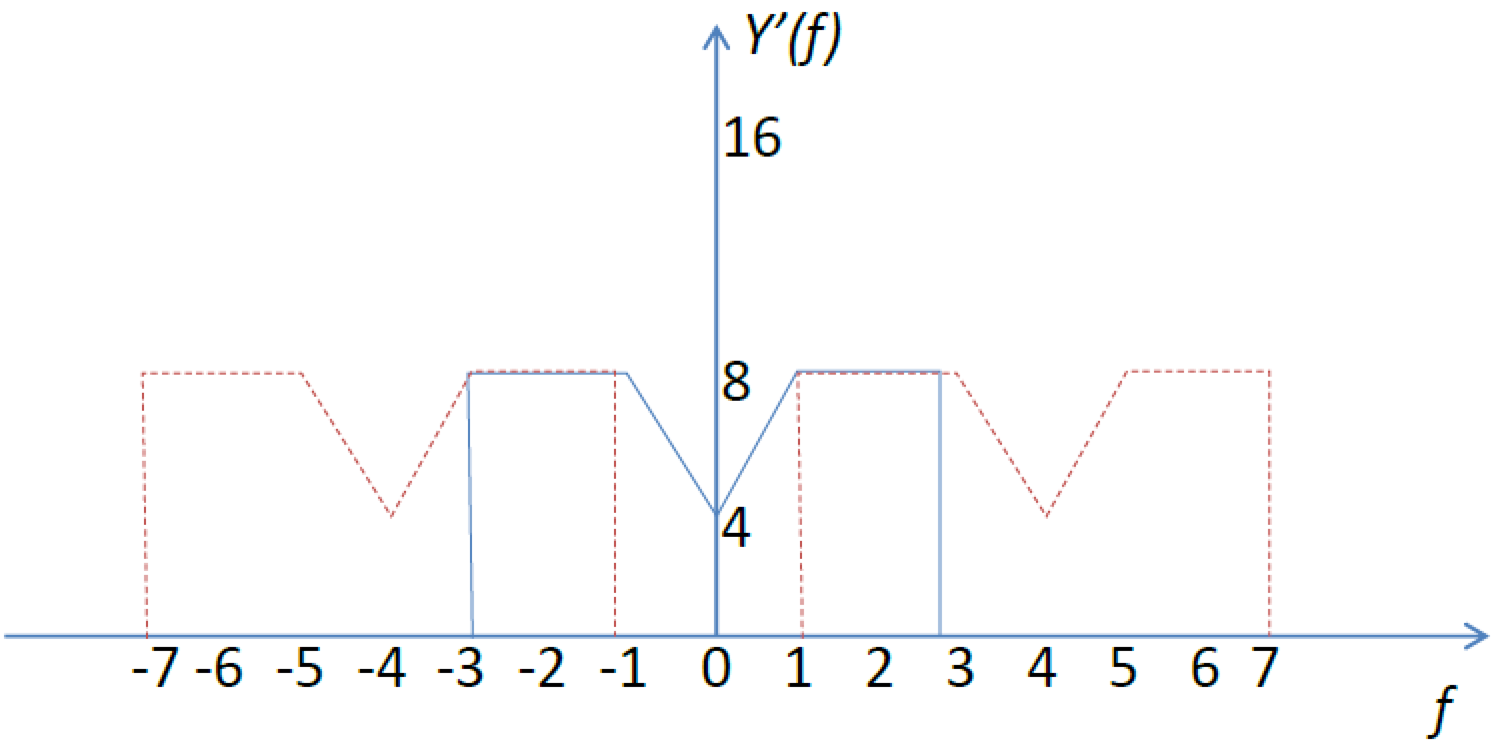
για $\mathrm{m} = 0, \pm 1$ έχουμε



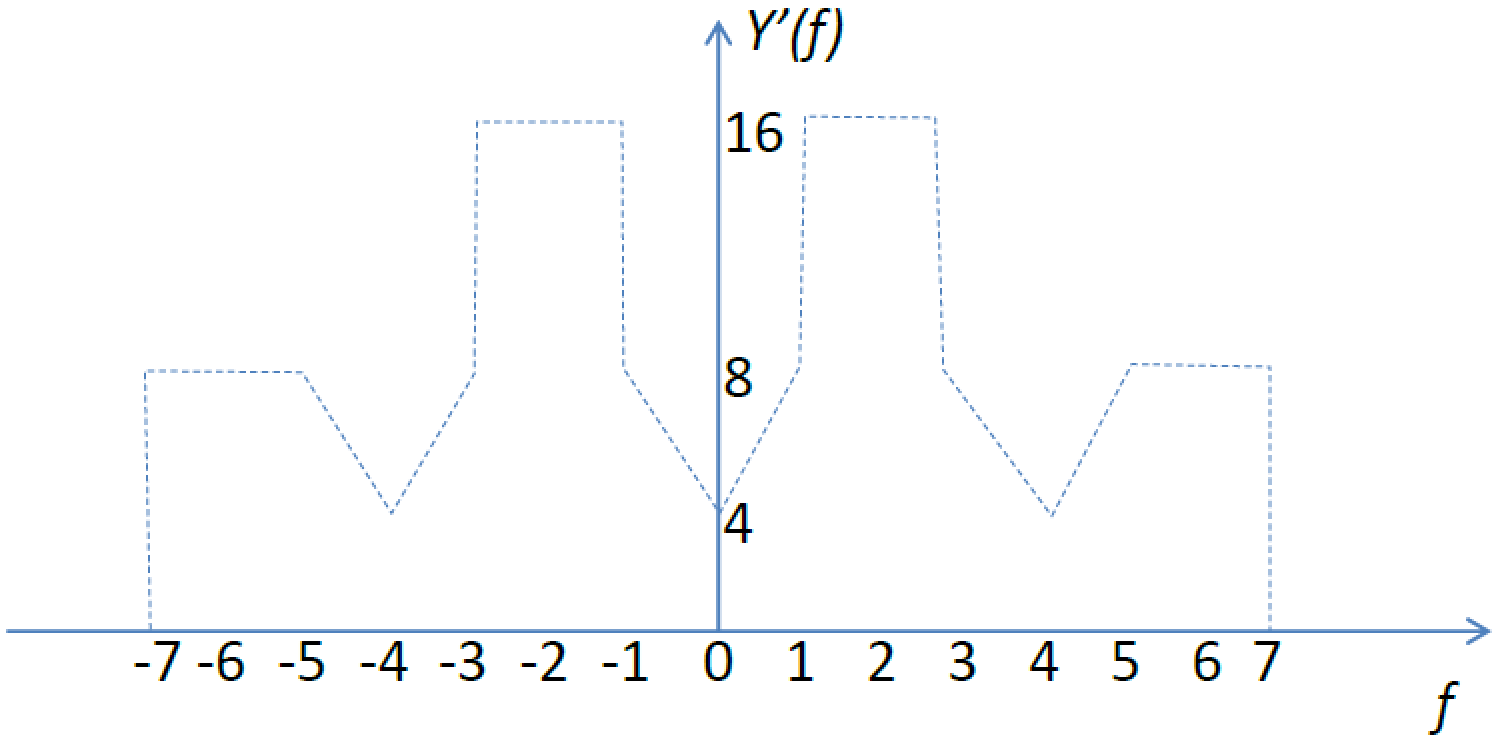
(γ) Αν $f_s' = \frac{2}{3} f_s$ δηλαδή $f_s' = 4Hz$ τότε

$$Y(f) = f_s' \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} X(f - mf_s') = 4 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left[2rect\left(\frac{f-4m}{6}\right) - tri(f-4m)\right]$$

και για $\mathrm{m} = 0, \pm 1$ έχουμε

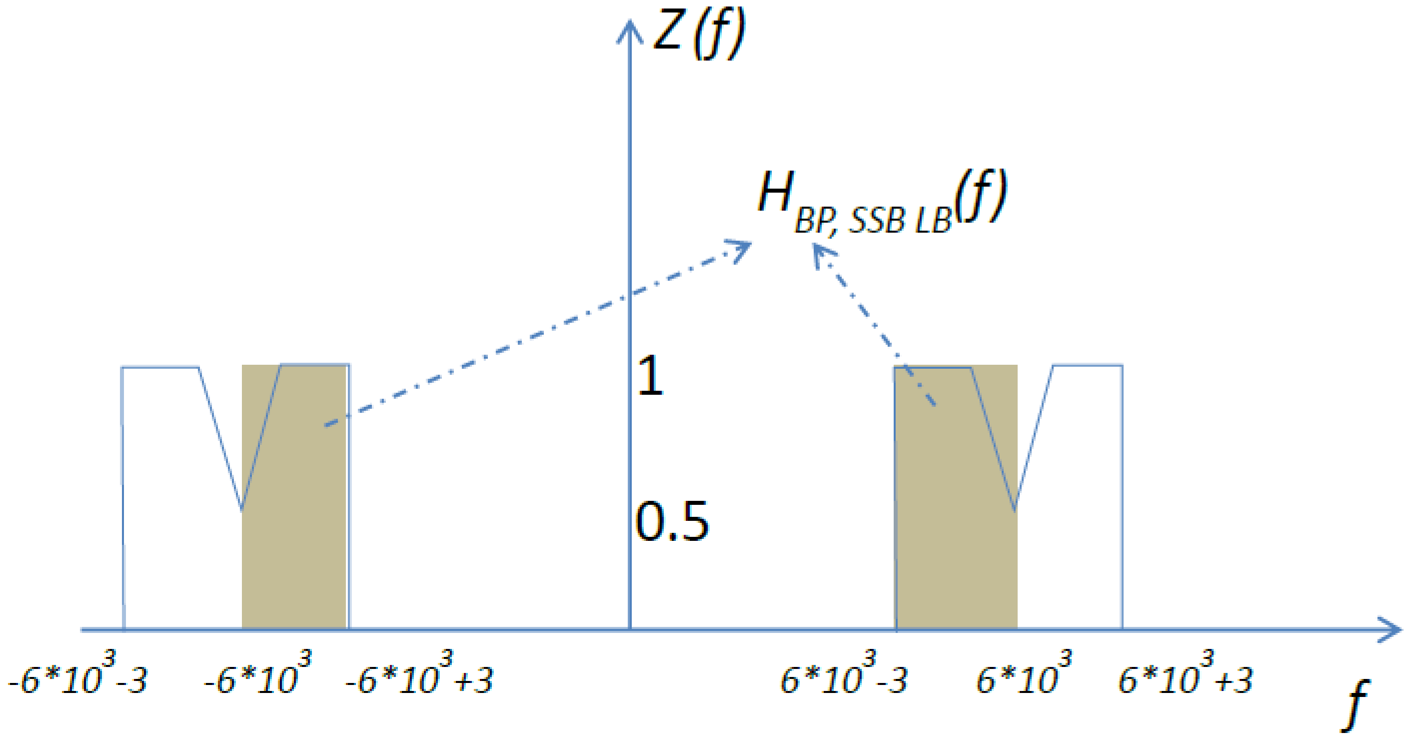


και τελικά



το οποίο υποφέρει από aliasing λόγω χρήσης μικρότερης της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.

(δ) το διαμορφωμένο κατά SSB κάτω πλευρικής ζώνης με φέρουσα 6KHz, φαίνεται στο επόμενο σχήμα σκιαγραφημένο.



Το απαιτούμενο ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο είναι

$$H_{BP,SSB\ LB}(f) = \frac{1}{12}\left[rect\left(\frac{f - 6 * 10^3 + 1.5}{3}\right) + rect\left(\frac{f + 6 * 10^3 - 1.5}{3}\right)\right]$$

(ε) Το σήμα

$$x(t) = 12\sin c(6t) - \sin c^2(t)$$

Έχει φάσμα πλάτους το $X(f) = 2rect\left(\frac{f}{6}\right) - tri(f)$

Από την έκφραση στο πεδίο του χρόνου προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή του (στο πεδίο του χρόνου) είναι η:

$$\max|x(t)| = \max\left|12\sin c(6t) - \sin c^2(t)\right| =$$
$$= \max\left[12\sin c(0)\right] - \max\left[\sin c^2(0)\right] = 12 - 1 = 11\ Volt$$

Το εύρος ζώνης του σήματος είναι 3Hz.

Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(|x(t)|\right) = \frac{2\pi}{2\pi}11 \ = 11Hz$$

Και ο λόγος απόκλισης είναι

$$D = \frac{11Hz}{3Hz} = 3.66$$

Άρα με βάση τον κανόνα Carson έχουμε:

$$W = 2(3.66 + 1)\cdot 3\ Hz = 27.96\ Hz$$

Το διαμορφωμένο FM σήμα γράφεται:

$$x_{FM}(t) = A_0 \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + k_f \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)\, d\lambda\right) =$$

$$= 2\cos\left(2\pi 10000 t + 2\pi \int_{-\infty}^{t} \left\{12 \sin c(6\lambda) - \sin c^2(\lambda)\right\} d\lambda\right)$$

ΘΕΜΑ 3

ΓΕ2 / 1112

***Στόχος της άσκησης** είναι η εξοικείωση με θέματα διαμόρφωσης FM, υπολογισμούς του φάσματος της συνέλιξης σημάτων, προσδιορισμού της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας, καθώς και διαμορφώσεων AM.*

***Σχετικές ασκήσεις:**ΓΕ2/1011/Θ1,6 , ΕΞ2005Β/Θ4, ΓΕ2/1011/Θ4*

(α) Δίνεται το σήμα $x(t) = 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)$ (όπου $a > 0$), με φάσμα πλάτους $X(f)$.

Ζητούνται τα εξής:

Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας των σημάτων:

(i) $x(t)$.

(ii) $x_1(t) = \delta(t) + x(t)$.

(iii) $x_2(t) = x(t) \cdot x(2t)$.

(iv) Το σήμα $y(t)$ με φάσμα $Y(f) = X(f) * X(f)$ διαμορφώνει κατά συχνότητα (FM) ένα συνημιτονικό φέρον με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 30\pi$. Να προσδιορίσετε την έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογίσετε το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος (*Υπόδειξη: Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας για διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από τυχαίο σήμα πληροφορίας z(t) δίνεται από τη σχέση:* $\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi} \max(|z(t)|)$).

(α-i) Έχουμε ότι:

$$x(t) = 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Δηλ. το φάσμα είναι τετραγωνικός παλμός με μέγιστη συχνότητα *α Hz* άρα $f_{s,min}=2\alpha$ *Hz*.

(α-ii) $x_1(t) = \delta(t) + x(t) \xleftrightarrow{F} 1 + rect\left(\frac{f}{2a}\right)$

Το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης, δεν ορίζεται μέγιστη συχνότητα συνεπώς δεν εφαρμόζεται το κριτήριο Nyquist.

(α-iii) $x_2(t) = x(t) \cdot x(2t) = 2a \sin c(2at) \cdot 2a \sin c(4at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right) * \frac{1}{2} rect\left(\frac{f}{4a}\right)$

Το φάσμα της συνέλιξης των 2 σημάτων έχει ως μέγιστη συχνότητα το άθροισμα των επιμέρους μέγιστων συχνοτήτων, δηλ. α+2α=3α Hz άρα $f_{s,min}=6\alpha$ *Hz*.

(α-iv) Το σήμα με φάσμα $Y(f)=X(f)*X(f)$ αντιστοιχεί στο πεδίο του χρόνου με το

$$y(t)=x(t)x(t)=2a\cdot\operatorname{sinc}(2at)\cdot 2a\cdot\operatorname{sinc}(2at)=$$

$$=4a^2\cdot\operatorname{sinc}^2(2at)\xleftrightarrow{F}4a^2\frac{1}{2a}tri\left(\frac{f}{2a}\right)=2a\cdot tri\left(\frac{f}{2a}\right)=Y(f)$$

Το διαμορφωμένο σήμα FM γράφεται:

$$y_{FM}(t)=A_c\cdot\cos\left(2\pi f_c t+k_f\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)d\lambda\right)=\cos\left(2\pi f_c t+k_f\int_{-\infty}^{t}4a^2\cdot\operatorname{sinc}^2(2a\lambda)d\lambda\right)$$

Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W=2(D+1)f_y$$

όπου $D=\dfrac{\Delta f_{\max}}{f_y}$

Το σήμα πληροφορίας $y(t)$ έχει εύρος ζώνης ίσο με $f_y=f_{\max}=2aHz$

$y(t) = 4a^2 \cdot \mathrm{sinc}^2(2at)$

ισχύει ότι $\max|y(t)| = \max|4a^2 \cdot \mathrm{sinc}^2(2at)| = 4a^2$ (η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $4a^2 \cdot \mathrm{sinc}^2(at)$ λαμβάνεται για $t = 0$).

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max(|y(t)|) = \frac{30\pi}{2\pi}(4a^2) = 60a^2 Hz$$

οπότε, $D = \dfrac{\Delta f_{\max}}{f_y} = \dfrac{60a^2}{2a} = 30a$

και τελικά το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος θα ισούται με:

$W = 2(30a+1)\cdot 2a\ Hz = 120a^2 + 4a\ Hz$

Διαμόρφωση PCM

Διαμόρφωση PCM

5.

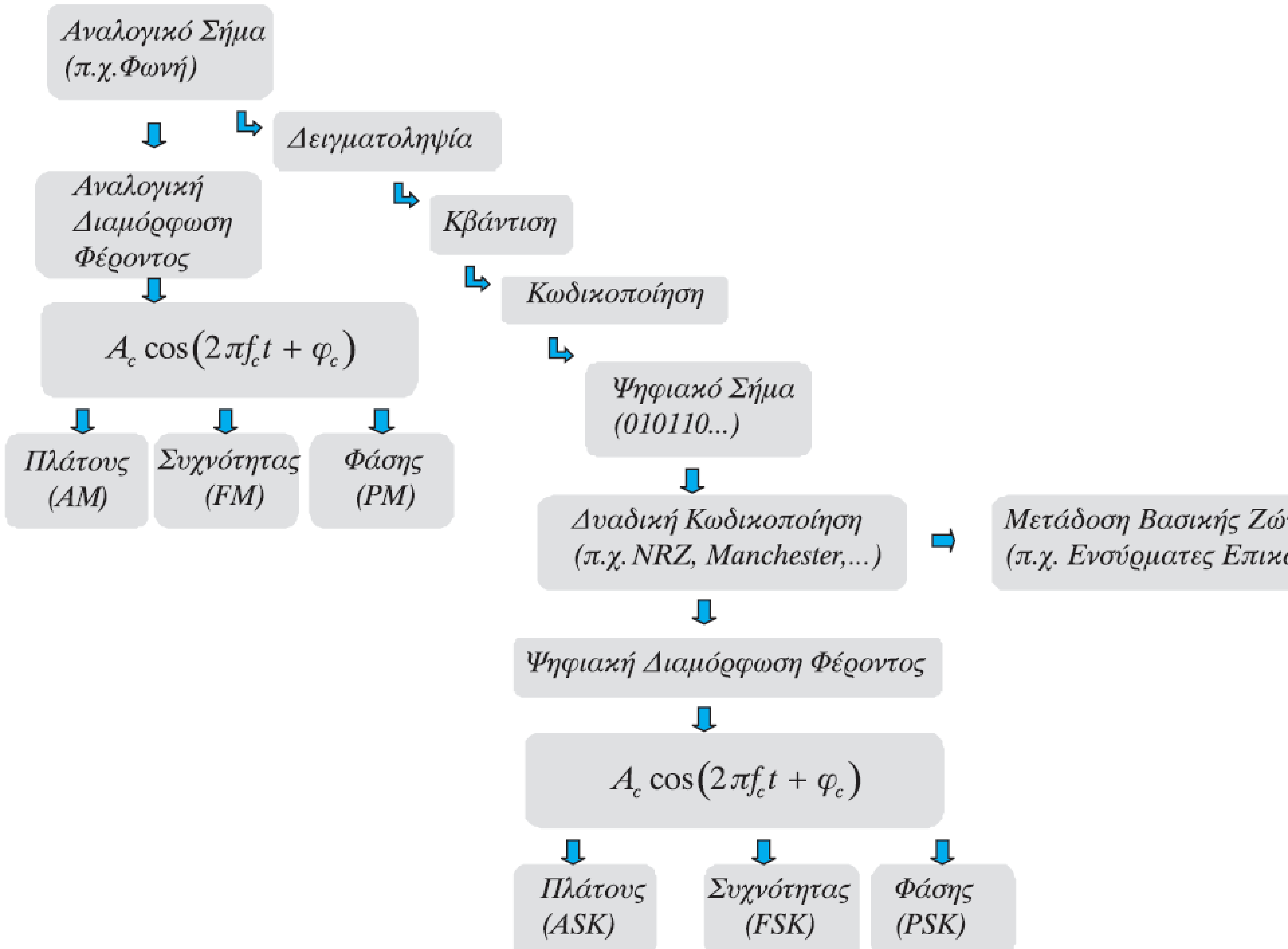
Δειγματοληψία - Κβάντιση - Κωδικοποίηση

"Διακριτοποίηση" πεδίου ορισμού"

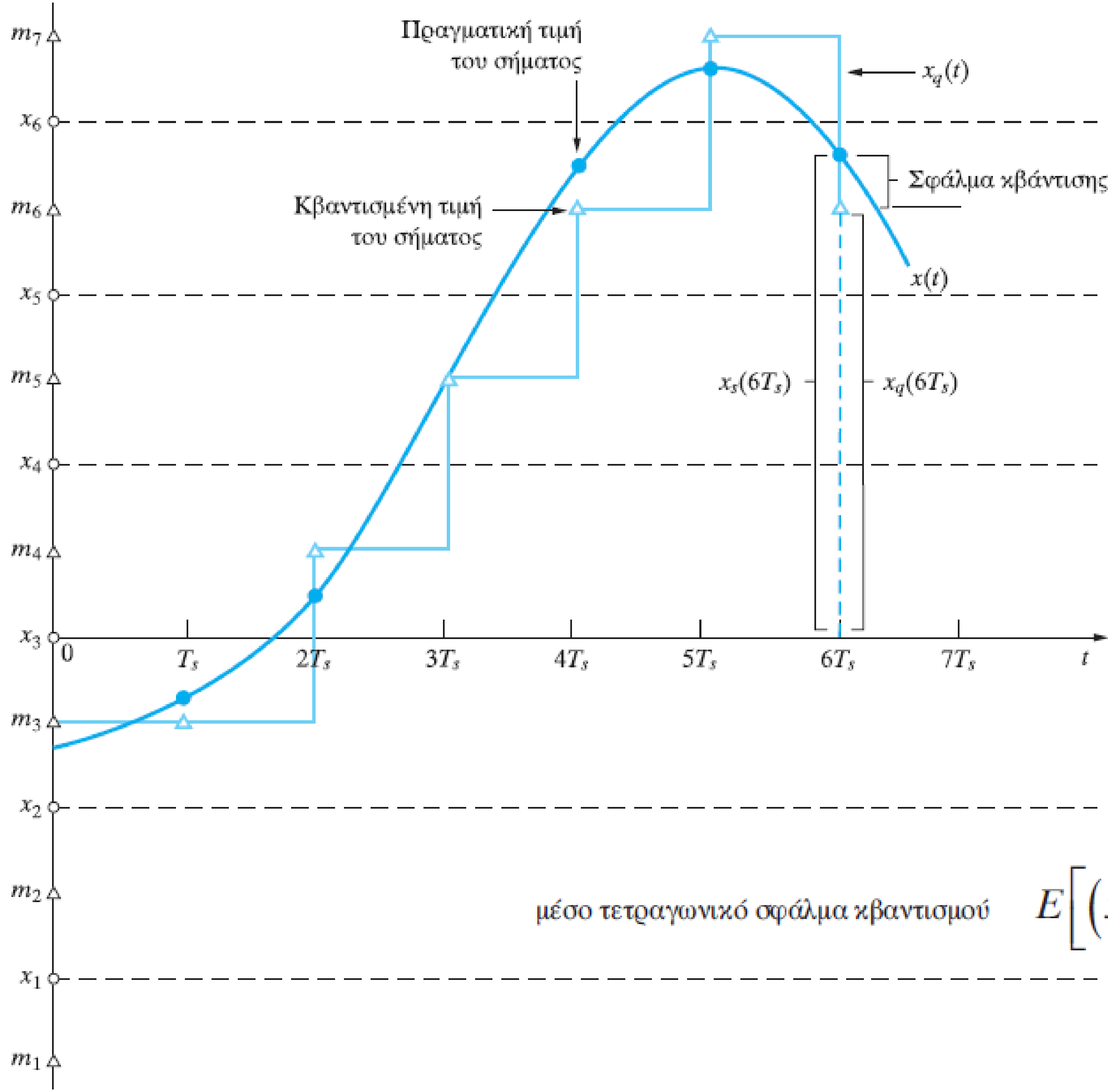
"Διακριτοποίηση" πεδίου τιμών

Αποτύπωση σταθμών κβάντισης με δυαδικά bits

Διαφάνειες 30-33
Αρχείου oss3_PLH22_DigiComms_2017

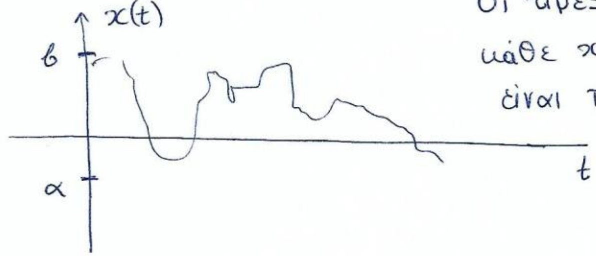


Αναλογικό Σήμα (π.χ.Φωνή)
Δειγματοληψία
Αναλογική Διαμόρφωση Φέροντος
Κβάντιση
Κωδικοποίηση
$A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$
Ψηφιακό Σήμα (010110...)
Πλάτους (AM)
Συχνότητας (FM)
Φάσης (PM)
Δυαδική Κωδικοποίηση (π.χ. NRZ, Manchester,...)
Μετάδοση Βασικής
(π.χ. Ενσύρματες
Ψηφιακή Διαμόρφωση Φέροντος
$A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$
Πλάτους (ASK)
Συχνότητας (FSK)
Φάσης (PSK)

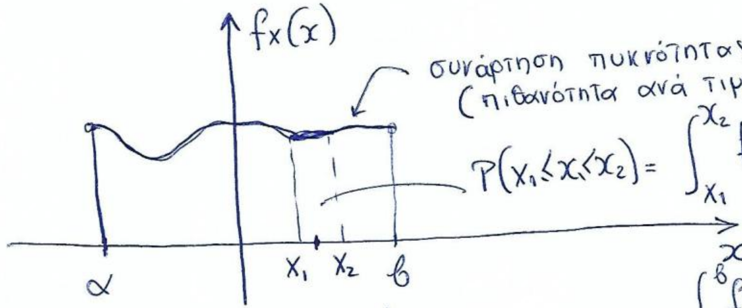


μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού $E\left[\left(x(t)-x_q(t)\right)^2\right]$

Τυχαία σήματα (μη ντετερμινιστικά)



Οι τιμές τους σε κάθε χρονική στιγμή είναι τυχαίες.



συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (πιθανότητα ανά τιμή)

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\,dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_x(x)\,dx = 1$$

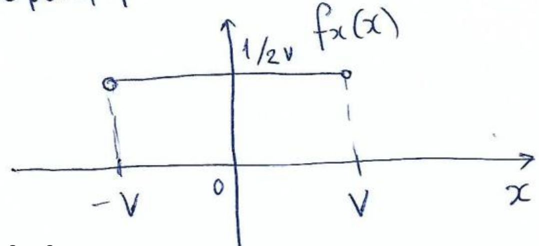
συνεχές σύνολο τιμών

Μέση τιμή σήματος $E(x(t)) = \int_{\alpha}^{\beta} x f_x(x)\,dx.$

Μέση τετραγωνική τιμή σήματος $E(x^2(t)) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f_x(x)\,dx$

↳ Μέση ισχύς

Ομοιόμορφη κατανομή



Διαφάνειες 34-36
Αρχείου oss3_PLH22_DigiComms_2017

Αναλογικό σήμα $x(t)$.

Μέση ισχύς σήματος $E(x^2)$

Κβαντισμένο σήμα $x_q(t)$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού (θόρυβος) $E\left((x-x_q)^2\right)$

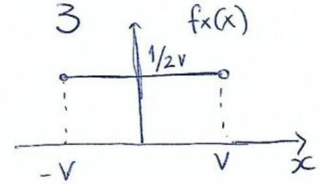
Σηματοθορυβικός λόγος Κβάντισης $SNR_q = \dfrac{E(x^2)}{E\left((x-x_q)^2\right)}$

Για ομοιόμορφη κβάντιση $E\left((x-x_q)^2\right) = \dfrac{\Delta^2}{12}$

Για <u>ομοιόμορφα κατανεμημένο</u> σήμα μεταξύ

2 τιμών $V, -V$, $E(x^2) = \dfrac{V^2}{3}$

Άρα $SNR_q = \dfrac{E(x^2)}{E\left[(x-x_q)^2\right]} = \dfrac{V^2/3}{\Delta^2/12}$



Αν έχουμε L στάθμες κβάντισης ισχύει $L\Delta = 2V$

Άρα $SNR_q = \dfrac{\frac{L^2\Delta^2}{4\cdot 3}}{\Delta^2/12} = L^2$.

Σε decibel $SNR_q = 10\log_{10} L^2 = 20\log_{10} L$

Για ανομοιόμορφα κατανεμημένο σήμα θα πρέπει να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_{x_{min}}^{x_{max}} x^2 f_X(x)\,dx$

Υποθέτοντας L στάθμες κβάντισης

Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης: $SNR_q = 10\log(L^2)$

Δυαδικά bits ανά στάθμη κβάντισης: $\eta = \lceil \log_2(L) \rceil$

Αν f_s η συχνότητα δειγματοληψίας $\left(\frac{\text{samples}}{\text{sec}}\right)$

ο ρυθμός μετάδοσης του δειγματισμένου σήματος είναι

$$f_s\left(\frac{\text{samples}}{\text{sec}}\right) \times \log_2 L\left(\frac{\text{bits}}{\text{sample}}\right) = f_s \cdot \log_2 L\left(\frac{\text{bits}}{\text{sec}}\right)$$

Στα δυαδικά συστήματα τα κανάλια βασικής ζώνης

μεταφέρουν $2\ \frac{\text{bits/sec}}{\text{Hz}}$

Άρα απαιτούμενο εύρος ζώνης PCM:

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L \ (Hz)$$

Παράδειγμα

ΘΕΜΑ 3	ΓΕ3/1415

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις τεχνικές πολυπλεξίας σημάτων και την παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM).*

Σχετικές Ασκήσεις: *ΓΕ2/0910/Θ7, ΓΕ2/1011/Θ7, ΓΕ2/1112/Θ7*

Σε ένα στούντιο εγγραφής τα δύο ακουστικά σήματα, από το δεξιό και το αριστερό μικρόφωνο (Left (L) ,Right (R)), δειγματοληπτούνται και τα δείγματα ψηφιοποιούνται από έναν αναλογικο/ψηφιακό μετατροπέα. Θεωρείστε ότι το εύρος ζώνης των ακουστικών σημάτων περιορίζεται περίπου στα 20 kHz. Η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist.

(α) Υπολογίστε το ρυθμό δειγματοληψίας των δύο ακουστικών σημάτων

(β) Αν απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος μεγαλύτερος από 92 dB υπολογίστε το πλήθος των σταθμών κβάντισης. Υποθέστε ότι τα δείγματα των δύο ακουστικών σημάτων κβαντίζονται με ομοιόμορφο κβαντιστή PCM.

(γ) Ποια η επιδείνωση του σηματοθορυβικού λόγου αν χρησιμοποιηθούν οι μισές στάθμες από εκείνες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα; Παρατηρήστε τι γίνεται για διαδοχικούς υποδιπλασιασμούς και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με τον αριθμό των bits που χρησιμοποιούνται.

(δ) Υπολογίστε τον συνολικό αριθμό των bits και bytes και για τα δύο ακουστικά σήματα (L,R) που προκύπτουν για ένα μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών.

(ε) Αν τα δύο ακουστικά σήματα πολυπλεχθούν κατά TDM (πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου) και μεταδοθούν από τον ίδιο δίαυλο, υπολογίστε το ελάχιστο εύρος ζώνης του διαύλου για την τεχνική PCM και υποδείξτε το ρυθμό μετάδοσης στο δίαυλο.

(α) Τα δύο ακουστικά σήματα δειγατοληπτούνται το καθένα χωριστά. Επειδή η μέγιστη συχνότητα των ακουστικών σημάτων είναι τα 20 kHz, σύμφωνα με τον Nyquist ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι τουλάχιστο 40 kHz. Επιπλέον, στην εκφώνηση αναφέρεται ότι η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist, συνεπώς για κάθε ακουστικό κανάλι έχουμε

Ρυθμός Δειγματοληψίας = 40 kHz * 1,1025 = 44,1 kHz (β) Προκειμένου κάθε σήμα να μεταδοθεί με PCM με σηματοθορυβικό λόγο SNR > 92 dB, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log_{10} L$

Άρα ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών κβάντισης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$SNR = 20\log_{10} L \geq 92 \Rightarrow L \geq 10^{92/20} \approx 39,811$$

Άρα επειδή θα πρέπει το πλήθος των σταθμών να είναι δύναμη του 2, τελικά θα έχουμε $2^{16} = 65.536$ στάθμες.

(γ) Χρησιμοποιώντας $2^{16} = 65.536$ στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος

$$SNR = 20\log_{10} L = 20\log_{10}\left(65.536\right) = 96,3\ dB$$

Αν υποδιπλασιάσουμε τις στάθμες τότε θα χρησιμοποιήσουμε 15 bits για την κάθε κωδική λέξη και θα έχουμε $2^{15} = 32.768$ στάθμες. Άρα ο σηματοθορυβικός λόγος θα είναι

$$SNR = 20\log_{10} L = 20\log_{10}\left(32.768\right) = 90,3\ dB$$

Άρα η επιδείνωση με τη μείωση ενός bit είναι 6 dB.

Το ίδιο ισχύει για κάθε μείωση κατά 1 bit (π.χ. με 16.384 στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος 84.3 dB, κλπ.)

(δ) Με συχνότητα δειγματοληψίας 44.100 Hz, έχουμε 44.100 δείγματα/sec. Με 16 bits/δείγμα προκύπτει ρυθμός 44.100 x 16 = 705.600 bits/sec από κάθε ακουστικό σήμα. Για μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών δηλαδή 180 sec προκύπτουν ανά κανάλι

705.600 bits/sec x 180 sec = 127,008 x 10^6 bits = 15,876 Mbytes

Συνολικά για τα δύο κανάλια

2 x 705.600 bits/sec x 180 sec = 254,016 x 10^6 bits = 31,752 Mbytes

(ε) Αν χρησιμοποιηθεί πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου, τότε το πλαίσιο θα περιέχει δύο χρονοθυρίδες και ο ελάχιστος ρυθμός που πρέπει να μπορεί να υποστηρίζει ο δίαυλος είναι το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών δειγματοληψίας, δηλαδή 2 x 44.100 samples/sec = 88.200 samples/sec.

Επειδή όμως θα χρησιμοποιηθεί τεχνική PCM με κβαντοποίηση σε 65.536 στάθμες, το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι

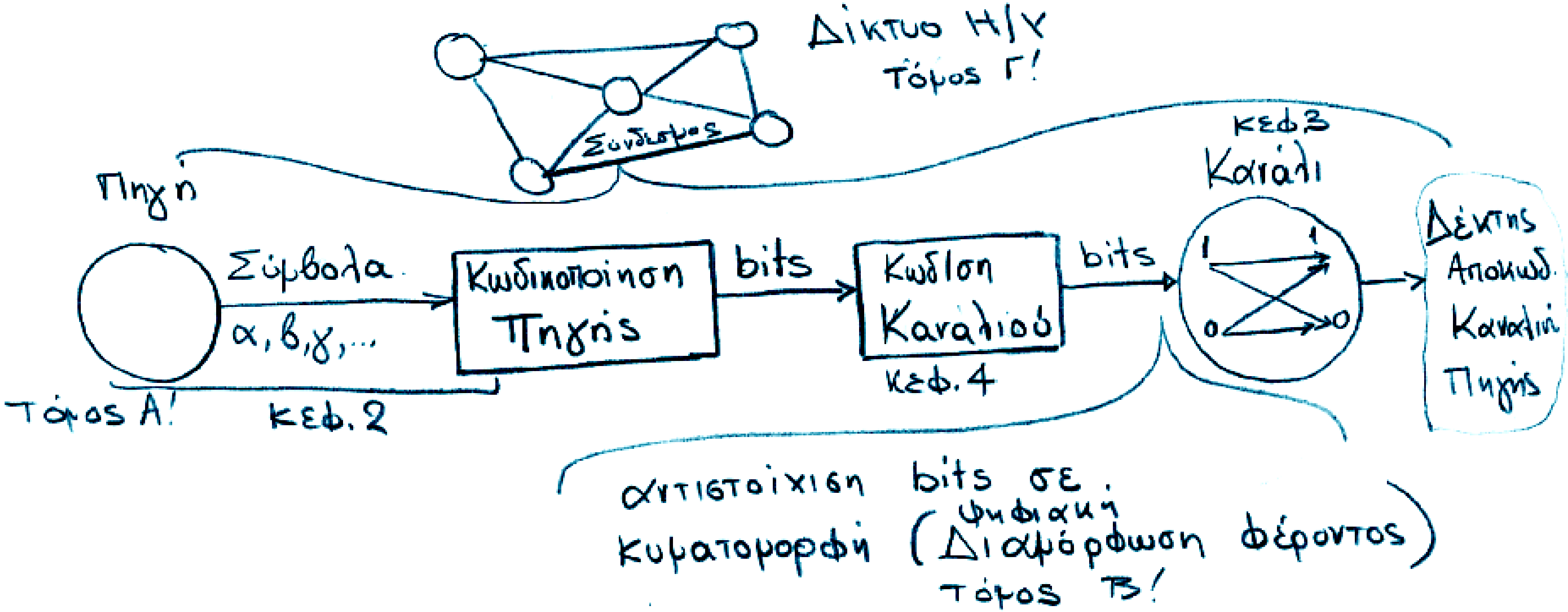
$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} \times 88.200 \times \log_2 65.536 = 44.100 \times 16 = 705600\ Hz = 705,6\ kHz$$

Ο ρυθμός μετάδοσης είναι $705,6 \times 2 = 1411,2\ kbps = 1,4112\ Mbps$

Θεωρία Πληροφορίας

Επικοινωνιακό Μοντέλο

Επικοινωνία: Μεταβίβαση Πληροφορίας



Ειδικά θέματα:

1) Πιθανότητες - Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

2) Ποσότητα Πληροφορίας

3) Πηγές Συμβόλων με/χωρίς μνήμη

4) Κωδικοποίηση πηγής

- Σύμβολα Πηγής ⟶ Δομικές μονάδες σήματος πληροφορίας
  ↳ τυχαία η διαδοχή τους (τυχαία μεταβλητή)
- Σφάλματα λόγω θορύβου στο κανάλι ⟶ τυχαία μεταβλητή
  ⇒ Χρήση πιθανοτήτων

για την περιγραφή της ροής πληροφορίας

από την πηγή διαμέσου του καναλιού στο δέκτη

Πιθανότητες· Εισαγωγή

Τυχαίο Πείραμα (Το αποτέλεσμά του δεν είναι εκ των προτέρων βέβαιο)

Π.χ. ρίψη νομίσματος, ζάρια, ορθή αποστολή πακέτου από κόμβο Α στον κόμβο Β.

$$\text{Πείραμα} \to \left.\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{array}\right\}$$

Ατομικά Αδιαίρετα Αποτελέσματα ή Ενδεχόμενα, Δειγματικά Σημεία

Διαφάνειες 26-32
Αρχείου PLH22_info_theory_3rdOSS_2016-7

Ο δειγματικός χώρος ορίζεται ως το σύνολο των ενδεχομένων $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$

και αντιστοιχίζεται σε μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ με τη σχέση } \underbrace{P(S_i) = P(X = x_i)}_{\text{"πιθανότητα ενδεχομένου } S_i\text{"}} = P(x_i)$$

"η τ.μ. X να ισούται με x_i"

Ιδιότητες Πιθανοτήτων

- Το άθροισμα των πιθανοτήτων <u>όλων</u> των ενδεχομένων ισούται με 1 $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$.

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου <u>Πάντα</u> ανήκει στο διάστημα $[0,1]$ $0 \leq P(x_i) \leq 1$

↑ απίθανο ↑ βέβαιο

Συνάρτηση Συνδυασμένης Πιθανότητας δύο ενδεχομένων x_i, y_j δύο τ.μ. X, Y

$P(x_i, y_j)$: πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$ ταυτόχρονα

$\quad \shortparallel$

$P(y_j, x_i)$

Υπο συνθήκη πιθανότητα : πιθανότητα $X = x_i$ με δεδομένο ότι $Y = y_j$

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

x_i: ενδεχόμενο εμφάνισης

y_j: δεδομένο

ισχύει επίσης ότι:

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)} = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i/y_j)P(y_j) = P(y_j/x_i)P(x_i)$

Όταν τα x_i, y_j είναι μεταξύ τους <u>ανεξάρτητα</u>

(δηλ το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του άλλου)

Έχουμε :

$$P(x_i/y_j) = P(x_i)$$

$$P(y_j/x_i) = P(y_j)$$

Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$

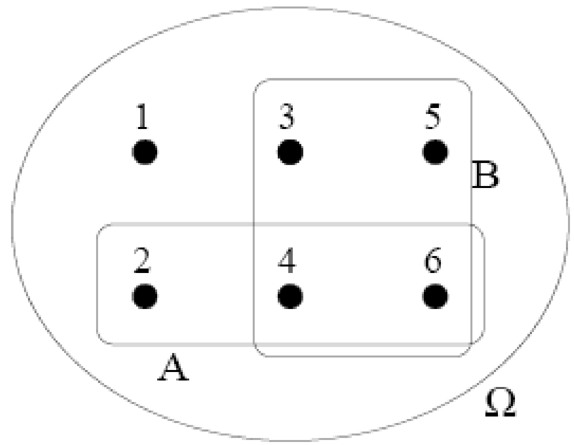
Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής X

Αν $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με $\{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\}$

ισχύει ότι

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i).$$

Παράδειγμα



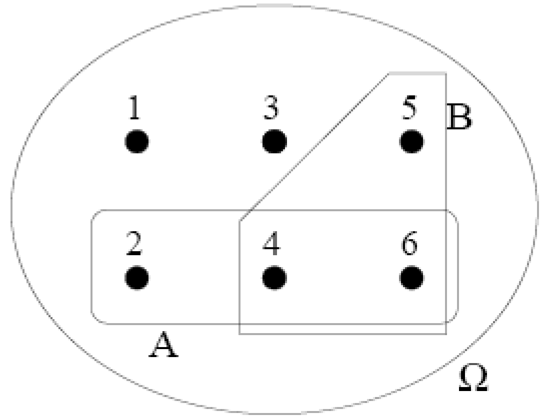
$A = \{\text{Το ζάρι φέρνει άρτιο}\}$

$B = \{\text{Το ζάρι φέρνει } \geq 3\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow A\&B \text{ είναι } \underline{\text{ανεξάρτητα}}$$

Πηγή http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/class_notes/TEL412_lecture02.pdf

Παράδειγμα



$A = \{\text{Το ζάρι φέρνει άρτιο}\}$

$B = \{\text{Το ζάρι φέρνει } \geq 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) > P(A)P(B) \Rightarrow A \& B \text{ δεν είναι } \underline{\text{ανεξάρτητα}}$$

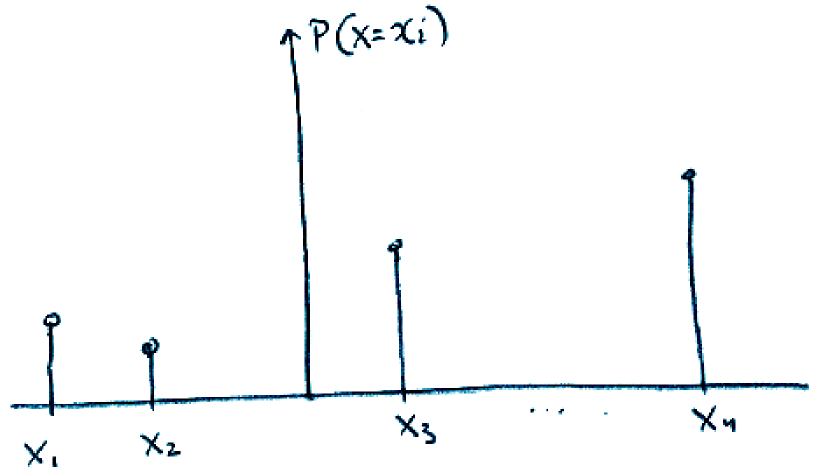
Επίσης $\frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} > P(A) \Rightarrow \underbrace{P(A|B)}_{=\frac{2}{3}} > \underbrace{P(A)}_{=\frac{1}{2}} \Rightarrow$ Η πραγματοποίηση του B αυξάνει την πιθανότητα για το A.

Πηγή http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/class_notes/TEL412_lecture02.pdf

Για 1 τυχαία μεταβλητή <u>διακριτή</u>

X με διακριτά ενδεχόμενα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

το σύνολο των πιθανοτήτων $P(X=x_i) = p(x_i) = \{p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)\}$ ορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας μάζας. (σελ. 23)



ιστόγραμμα τ.μ. X

Ιδιότητες:

- $0 \le p(x_i) \le 1$
- $\sum^{n} p(x_i) = 1$

Συνάρτηση κατανομής αθροιστικής πιθανότητας τ.μ. X

$$F(X \le x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i) \qquad 0 \le F(X \le x) \le 1$$

Για μια τ.μ X <u>συνεχή</u> (παίρνει τιμές από συνεχές διάστημα)

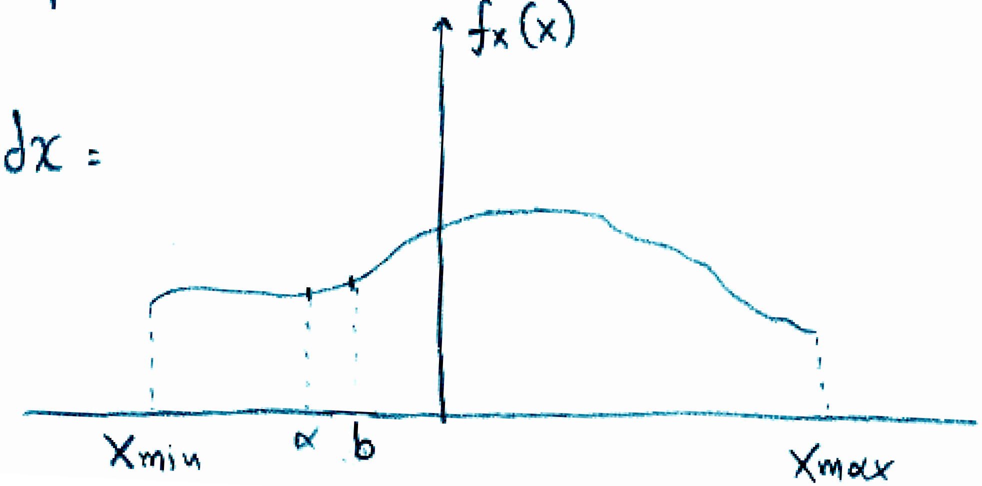
$X \in [x_{min}, x_{max}]$

Συνάρτηση κατανομής $F(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_x(x)\,dx$

$f_x(x)$: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{\alpha}^{b} f_x(x)\,dx =$$

$$= F(X \leq b) - F(X \leq \alpha)$$



Για 2 διακριτές τ.μ.

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$

η συνδυασμένη πιθανότητα μάζας ορίζεται

ως: $P(X = x_i, Y = y_j)$ $\rightarrow$ ισοδυναμεί με πίνακα $n \times m$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς X:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \quad i = 1, \ldots, n$$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς Y

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) \quad j = 1, \ldots, m$$

→ Ποσότητα Πληροφορίας ή Πληροφοριακό Περιεχόμενο $H(x_i)$ γεγονότος x_i τυχαίας μεταβλητής X (σελ. 28)

Αν πιθανότητα εμφάνισης του x_i η $P(x_i)$

τότε $H(x_i) = -\log_2[P(x_i)]$ bits

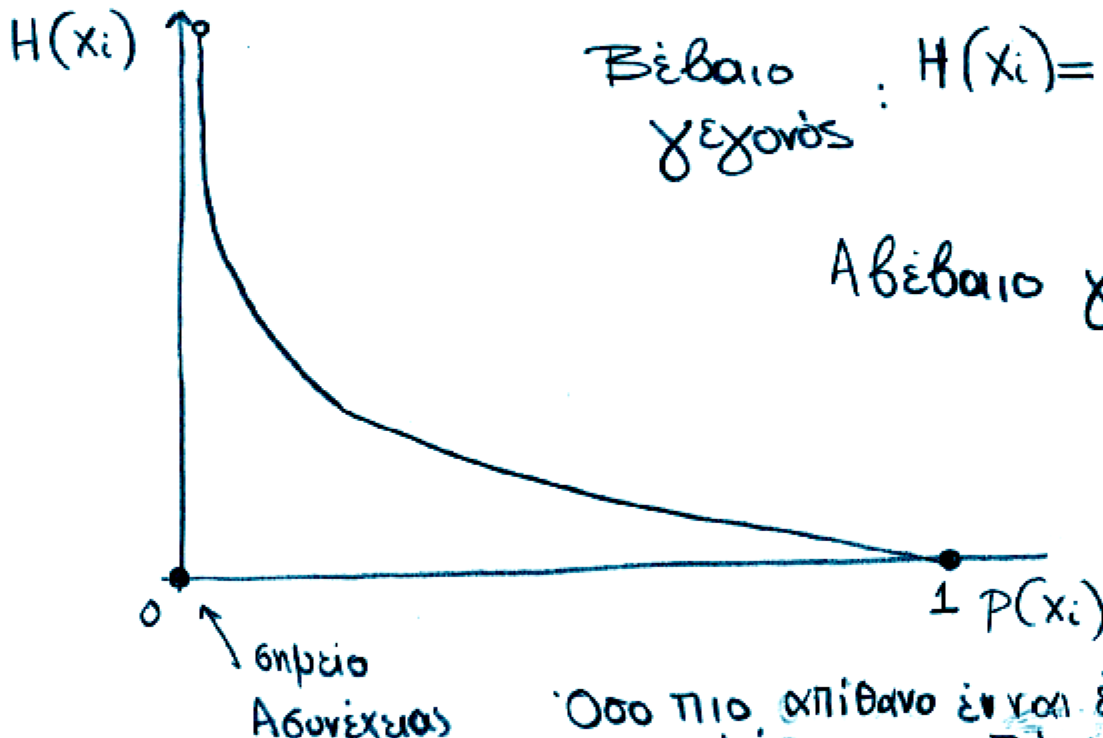
* Παρακάτω όπου $\log(x)$ θα εννοείται ο δυαδικός λογάριθμος

$H(x_i) = 1$ bit όταν

$P(x_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow H(x_i) = -\log\frac{1}{2} = -\cancel{\log 1}^{0} + \log 2 = 1$ bit

→ ποσότητα πληροφορίας για αβεβαιότητα μεταξύ 2 ισοπίθανων γεγονότων

Διαφάνειες 48-61
Αρχείου PLH22_info_theory_3rdOSS_2016-7



Βέβαιο γεγονός : $H(x_i)=0$ όταν $P(x_i)=0$

$P(x_i)=1$

Αβέβαιο γεγονός

$H(x_i)$ αντιστρόφως ανάλογο του $p(x_i)$

Όσο πιο απίθανο είναι ένα γεγονός τόσο μεγαλύτερο το πληροφοριακό περιεχόμενό του.

Σημείωση για $\log_\alpha x$:

Συνήθως $\alpha = 2, 10, e$

Σύμβαση $\log_e \to \ln$

Αν $a^y = x$ τότε $y = \log_\alpha x$ (όπου $x > 0$)

Ιδιότητες: $\log_\alpha(x \cdot y) = \log_\alpha(x) + \log_\alpha(y)$

$$\log_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \log_\alpha(x) - \log_\alpha(y)$$

$$\log_\alpha(x^b) = b \cdot \log_\alpha(x)$$

$$\log_\alpha(1) = 0 \quad , \quad \log_\alpha \alpha = 1$$

Calculator

$$\log_\alpha x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} \alpha}$$

Διαφάνεια 46
Αρχείου PLH22_info_theory_3rdOSS_2016-7

→ Μέση Ποσότητα Πληροφορίας ή μέση πληροφορία ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ή εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log[p(x_i)] = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, H(x_i)$$

μέση τιμή, άθροισμα $H(x_i)$ με συντελεστές βαρύτητας τις πιθ. εμφάνισης $p(x_i)$

→ Για κάθε τ. μ. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ισχύει ότι

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(n)$$

* $H(X)=0$ όταν έχουμε βέβαιο γεγονός $p(x_i)=1$
$p(x_j)=0 \quad \forall j \neq i$

* H(X)=log(n) όταν έχουμε μέγιστη αβεβαιότητα

⇒ ομοιόμορφη κατανομή τ. μ.

δηλ. $p(x_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

π.χ. τ.μ. με 2 πιθανά γεγονότα

σελ. 28 σχ. 1.4

$X = \{x_1, x_2\}$

Έστω $p(x_1) = \rho$

$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1-\rho$

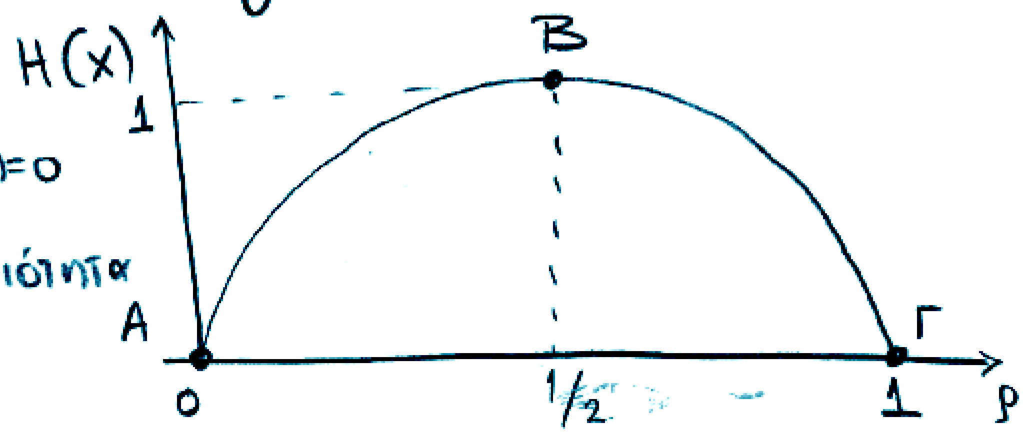
$$H(X) = -p(x_1)\log\big(p(x_1)\big) - p(x_2)\log\big(p(x_2)\big) =$$

$$= -\rho\log\rho - (1-\rho)\log(1-\rho)$$

Σημεία Α,Γ βέβαιο γεγονός $H(x)=0$

Σημείο Β: μέγιστη αβεβαιότητα

$H(x) = \log 2 = 1$



Σχέσεις για 2 τ.μ. X, Y $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

Συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log\left[P(x_i,y_j)\right]$$

Υπο συνθήκη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X/Y) = +\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, H(X/y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p(y_j)\left[-\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)\log p(x_i/y_j)\right] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{p(y_j)\, p(x_i/y_j)}_{P(x_i,y_j)} \log p(x_i/y_j)$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} P(x_i,y_j)\cdot\log P(x_i/y_j)$$

Βασική σχέση: $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

Αμοιβαία ποσότητα Πληροφορίας

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

$H(X)$: αβεβαιότητα της τ.μ. X

$H(X/Y)$: αβεβαιότητα της X δεδομένης της Y

$\Downarrow$

διαφορά μεταξύ των X, Y

$\Uparrow$

$H(Y/X)$: αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

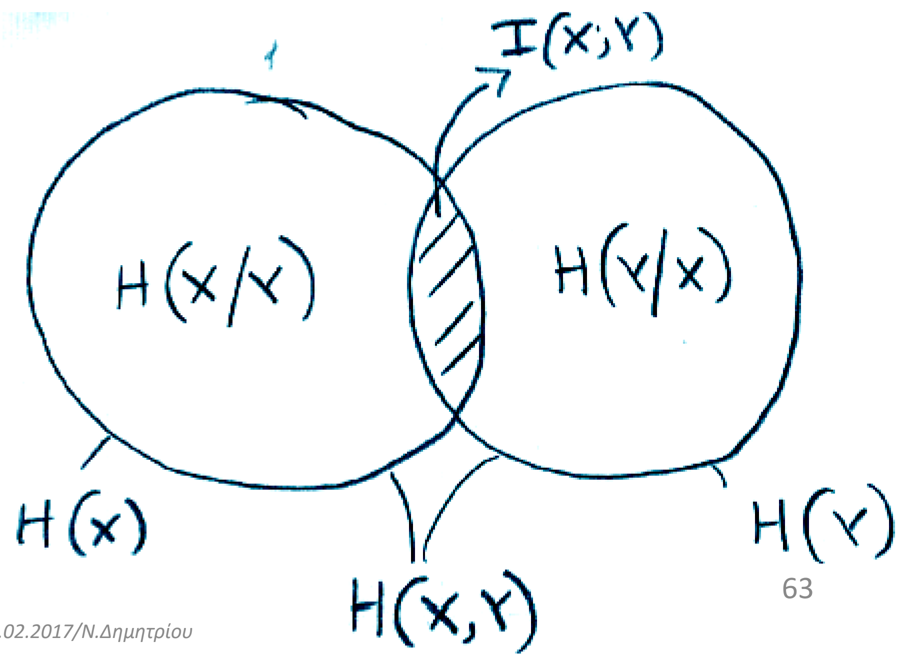
$I(X;Y)$: μέτρο εξάρτησης μεταξύ X, Y

Αν X και Y ανεξάρτητες

$H(X/Y) = H(X) \quad H(Y/X) = H(Y)$

$I(X;Y) = 0$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$



Παραδείγματα / Ποσότητα πληροφορίας-Εντροπία

Θέμα 2/ΓΕ 2003-04

Δίνονται 2 τ.μ. X, Y και ο πίνακας συνδυασμένων πιθανοτήτων τους

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	4	2	1	1
y_2	2	4	1	1
y_3	2	2	2	2
y_4	8	0	0	0

×32

÷32

$P(x_i, y_j)$

Y \ X	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$
$y_1=1$	1/8	1/16	1/32	1/32
$y_2=2$	1/16	1/8	1/32	1/32
$y_3=3$	1/16	1/16	1/16	1/16
$y_4=4$	1/4	0	0	0

Ζητούμενα:

1) $H(X)$, $H(Y)$
2) $H(X/Y)$, $H(Y/X)$
3) $H(X,Y)$
4) $I(X;Y)$

Εντροπια $H(x) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \log[p(x_i)]$

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας

ως προς x_i:

$$p(x_1) = \sum_{j=1}^{4} p(x_1, y_j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(αθροίζουμε τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα)

$$p(x_2) = \sum_{j=1}^{4} p(x_2, y_j) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$p(x_3) = \sum_{j=1}^{4} p(x_3, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

$$p(x_4) = \sum_{j=1}^{4} p(x_4, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

Άρα, $H(x) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) -$

$- p(x_3)\log(p(x_3)) - p(x_4)\log(p(x_4)) =$

$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) = 1,75$ bits

Ομοίως για το Υ:

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας ως προς y_j

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_2) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_3) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_4) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_4) = \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{4}$$

Άρα, $$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log(p(y_j)) = \left[-\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right)\right] \cdot 4 = 2 \text{ bits}$$

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i,y_j)\left[\log P(x_i/y_j)\right] \qquad (1)$$

$$= -\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\cdot\sum_{i=1}^{4}\left[p(x_i/y_j)\ \log\left(P(x_i/y_j)\right)\right]$$

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i,y_j)}{P(y_j)}$$

Υπολογίζοντας τις υπο συνθήκη πιθανότητες και εφαρμόζοντας τη σχέση (1) μπορεί να υπολογισθεί η $H(X/Y)$

Εναλλακτική λύση: (αποφεύγοντας υπολογισμούς $P(x_i/y_j)$)

Ισχύει ότι $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

$$\Rightarrow H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

από τον πίνακα υπολογίζεται η $H(X,Y)$ και με την παραπάνω σχέση υπολογίζεται το ζητούμενο

$$H(x,x) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i,y_j)\log\left[p(x_i,y_j)\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \quad \Rightarrow 1\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) - \quad \Rightarrow 2\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - 0\log(0) - \quad \Rightarrow 3\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) \quad \Rightarrow 4\eta \text{ στήλη}$$

$$\log\left(\frac{1}{4}\right) = \log(4^{-1}) = \log(2^{-2}) = -2\log 2 = 2$$

Είναι: $$\log\left(\frac{1}{8}\right) = \log\left(8^{-1}\right) = \log\left[\left(2^{3}\right)^{-1}\right] = \log\left(2^{-3}\right) =$$

$$= -3\log(2) = -3$$

$$\log\left(\frac{1}{16}\right) = \log\left(16^{-1}\right) = \log\left(2^{-4}\right) = -4\log 2 = -4$$

$$\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log\left(32^{-1}\right) = \log\left(2^{-5}\right) = -5\log 2 = -5$$

Εξήγηση για το $\log(0)$

Κανονικα, $\lim\limits_{x\to 0} \log(x) = -\infty$

Όμως στην περίπτωση μας, όπου υπολογίζουμε την ποσότητα πληροφορίας $H(x_i) = -\log(p(x_i))$, ισχύει ότι $H(x_i) = 0$ όταν ισχύει $\begin{cases} p(x_i) = 1 \\ \text{ή} \\ p(x_i) = 0 \end{cases}$

Άρα, θέτουμε $\log(0) = 0$ (μόνο στην περίπτωση υπολογισμών ποσότητας πληροφορίας)

Άρα,

$$H(X,Y) = -\frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{4}(-2) -$$

$$- \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$$

$$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$$

$$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 =$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{8} + \frac{6 \cdot 4}{16} + \frac{4 \cdot 5}{32} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{6+12+5+4}{8} = \frac{27}{8} = 3,375 \text{ bits}$$

Άρα, $H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = 3,375 - 2 = 1,375 \text{ bits}$

και $H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = 3,375 - 1,75 = 1,625 \text{ bits}$

και $I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 1,75 - 1,375 = 0,375 \text{ bits}$

ΓΕ4/
1112/Θ1

Δίδεται η τυχαία μεταβλητή X, η οποία αναπαριστά το επίπεδο χοληστερίνης ενός ατόμου, με δύο δυνατά αποτελέσματα, x_1= «χοληστερίνη εντός επιτρεπτών ορίων» και x_2= «υψηλή χοληστερίνη». Επίσης, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή W, η οποία αναπαριστά το αν το άτομο ασκείται σωματικά, με w_1= «επιδίδεται σε σωματική άσκηση» και w_2= «δεν ασκείται σωματικά», την Y για το είδος της εργασίας του με y_1= «δεν κάνει δουλειά γραφείου» και y_2= «κάνει δουλειά γραφείου» και, τέλος, τη Z για το είδος διατροφής που ακολουθεί, με z_1= «μεσογειακή διατροφή» και z_2= «διατροφή πλούσια σε ζωϊκά λίπη». Οι πιθανότητες $p(x_i, w_j, y_k)$ του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών (X, (W, Y)) και $p(x_i, y_k, z_l)$ του (X, (Y, Z)) περιέχονται στους κατωτέρω πίνακες.

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

Ζητείται να υπολογίσετε

1. Τις $H(X)$, $H(W)$, $H(Y)$ και $H(Z)$,
2. Τις συνδυασμένες ποσότητες πληροφορίας $H(X, Y)$, $H(X, Z)$, $H(X,W)$, $H(X, W, Z)$ και $H(X,Y, Z)$,
3. Τις υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας $H(X/W)$, $H(X/Y)$, $H(X/Z)$, $H(X/(W,Y))$, και $H(X/(Y,Z))$.

Επίσης, ζητείται

4. να επιλέξετε εκείνη την τυχαία μεταβλητή εκ των W, Y, Z, ή εκείνον τον συνδυασμό δύο τυχαίων μεταβλητών εκ των (W, Y) και (Y, Z) που επιτρέπει την καλύτερη πρόβλεψη της X, όταν γίνεται γνωστή η τιμή της τυχαίας αυτής μεταβλητής ή οι τιμές του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών. Αιτιολογήστε

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

p(w1,y1)=1/4+1/16=5/16

p(w1,y2)=1/16+1/8=3/16

p(w2,y1)=1/8+1/16=3/16

p(w2,y2)=0+5/16=5/16

p(w1)=5/16+3/16=8/16

p(y1)=5/16+3/16=8/16

p(w2)=3/16+5/16=8/16

p(y2)=5/16+3/16=8/16

p(x2)=1/16+1/8+1/16+5/16=9/16

p(x1)=1/4+1/16+1/8=7/16

p(x1,w1)=1/4+1/16=5/16

p(x1,w2)=1/8+0=1/8

p(x2,w1)=1/16+1/8=3/16

p(x2,w2)=1/16+5/16=6/16

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

p(y1,z1)=1/4+1/16=5/16

p(y1,z2)=1/8+1/16=3/16

p(y2,z1)=1/16+3/16=4/16

p(y2,z2)=0+1/4=1/4

p(z1)=5/16+4/16=9/16

p(z2)=3/16+1/4=7/16

ΓΕ4/1112/Θ1

Οι υπό συνθήκη πιθανότητες περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα (υπενθυμίζουμε ότι $p(\phi/\chi)=\dfrac{p(\phi,\chi)}{p(\chi)}$, σελίδες 25-26 του βιβλίου):

X/W	x_1	x_2
w_1	5/8	3/8
w_2	2/8	6/8

X/Y	x_1	x_2
y_1	6/8	2/8
y_2	1/8	7/8

X/Z	x_1	x_2
z_1	5/9	4/9
z_2	2/7	5/7

(X/(W,Y))	x_1	x_2
(w_1,y_1)	4/5	1/5
(w_1,y_2)	1/3	2/3
(w_2,y_1)	2/3	1/3
(w_2,y_2)	0	1

(X/(Y,Z))	x_1	x_2
(y_1,z_1)	4/5	1/5
(y_1,z_2)	2/3	1/3
(y_2,z_1)	1/4	3/4
(y_2,z_2)	0	1

1. Με τον τύπο της σελίδας 28 του βιβλίου υπολογίζουμε τις εντροπίες *H(X)*, *H(W)*, *H(Y)* και *H(Z)*.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log p(x_i, w_j) = -\frac{7}{16}\log\frac{7}{16} - \frac{9}{16}\log\frac{9}{16} = 0{,}9879 \text{ bits.}$$

H(W)=H(Y)=1 bit και H(Z)=H(X)=0,9879 bits.

2. Για τον υπολογισμό της συνδυασμένης ποσότητας πληροφορίας *H(X, W)*, *H(X, Y)*, *H(X,Z)*, *H(X, W, Z)* και *H(X,Y, Z)* δείτε το σχετικό τύπο στη σελίδα 34 του βιβλίου:

$$H(X,W) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, w_j)\log p(x_i, w_j)$$

$$= -\frac{5}{16}\log\frac{5}{16} - \frac{2}{16}\log\frac{2}{16} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{16} - \frac{6}{16}\log\frac{6}{16} = 1{,}882719 \text{ bits.}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε *H(X, Y)=1,67738 bits* και *H(X, Z)=1,92318 bits.*

$$H(X,(W,Y)) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p(x_i, w_j, y_k)\log p(x_i, w_j, y_k)$$

$$= -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - 0 - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{5}{16}\log\frac{5}{16} = 2{,}52439 \text{ bits.}$$

Αντίστοιχα, $H(X,(Y,Z)) = 2{,}5778$ bits.

3. Για τον υπολογισμό των υπό συνθήκη ποσοτήτων πληροφορίας *H(X/W)*, *H(X/Y)*, *H(X/Z)*, *H(X/(W,Y))*, και *H(X/(Y,Z))* μπορούμε να κάνουμε χρήση του τύπου της σελίδας 36 του βιβλίου ή της πρότασης 1.3 που περιέχεται στη σελίδα 37 του βιβλίου.

$$H(X/W) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, w_j)\log p(x_i / w_j)$$

$$= -\frac{5}{16}\log\frac{5}{8} - \frac{2}{16}\log\frac{2}{8} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{8} - \frac{6}{16}\log\frac{6}{8} = 0{,}882 bits.$$

Εφαρμόζοντας την πρόταση 1.3, έχουμε *H(X/W)=H(X,W)-H(W)=1,882719-1=0,882719 bits.*

Παρόμοια, υπολογίζουμε *H(X/Y)=0,6774 bits*, *H(X/Z)=0,93419*, *H(X/(W,Y))=0,57 bits*, και *H(X/(Y,Z))= 0,60 bits.*

4. Για την επιλογή της καταλληλότερης εκ των δεδομένων τυχαίων μεταβλητών W, Y και Z ή του καταλληλότερο εκ των συνδυασμών (W, Y) και (Y,Z), πρέπει να λάβουμε υπόψη είτε τις σχετικές αμοιβαίες πληροφορίες μεταξύ της X και εκάστης ή εκάστου εξ΄ αυτών είτε τις αντίστοιχες υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας. Συγκεκριμένα, η υψηλότερη αμοιβαία πληροφορία αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή ή τον συνδυασμό των τυχαίων μεταβλητών που περιέχει περισσότερη πληροφορία για την X και είναι επομένως η ζητούμενη λύση, ενώ η χαμηλότερη υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή ή τον συνδυασμό τυχαίων μεταβλητών που αφήνει τη μικρότερη αβεβαιότητα ως προς την έκβαση της X και είναι επομένως η καταλληλότερη λύση για την πρόβλεψη της X. Από τα αποτελέσματα του ερωτήματος 3, η καλύτερη πρόβλεψη της X επιτυγχάνεται με προηγούμενη γνώση του συνδυασμού (W,Y).

Αυτό μπορεί επίσης να δειχθεί και με τις αμοιβαίες πληροφορίες, οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

$I(X;W) = H(X)-H(X/W) = 0,9879-0,882 = 0,1059$ bits,

$I(X;Y) = H(X)-H(X/Y) = 0,9879-0,6774 = 0,3105$ bits,

$I(X;Z) = H(X)-H(X/Z) = 0,9879-0,93419 = 0,0537$ bits,

$I(X;(W,Y)) = 0,9879-0,57 = 0,4179$ bits,

$I(X;(Y,Z)) = 0,9879-0,60 = 0,3879$ bits.

→ Πηγές Συμβόλων

* Ισοπίθανα & Ανεξάρτητα Διαδοχικά Σύμβολα

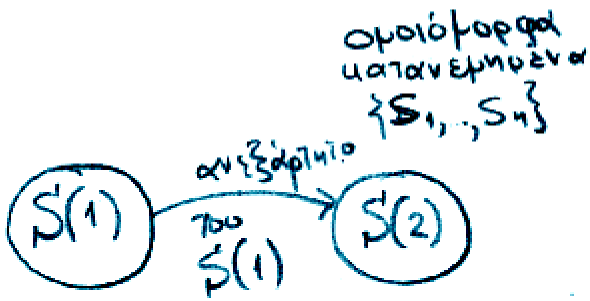
$$\text{τ.μ. } \mathbf{S} = \{\overbrace{s_1, s_2, \ldots, s_n}^{n \text{ πιθανά σύμβολα}}\}$$

$$\bigcirc \longrightarrow \ldots S(i), S(i-1) \ldots S(3), S(2), S(1)$$

$$P(S(i) = s_1) = p(s_1) = p(s_2) = \ldots = p(s_n) = \frac{1}{n}$$

⇒ Εντροπία Πηγής $H_0(S) = \log(n)$ (μέγιστη)

⇒ Ομοιόμορφη Κωδικοποίηση συμβόλων · τέλεια εντροπία $H_0(S)$.



Διαφάνειες 62-69
Αρχείου PLH22_info_theory_3rdOSS_2016-7

π.χ. αλφάβητο

$p('\alpha') = 11{,}7\%$

$p('\psi') = 0{,}1\%$

* Όχι ισοπίθανα αλλά διαδοχικά ανεξάρτητα (πηγή χωρίς μνήμη)

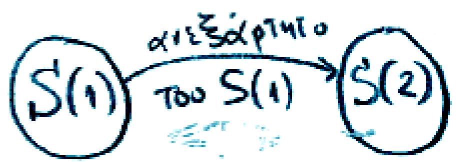
σύμβολα $\quad p(S_i) \neq p(S_j) \qquad p(S(n+1)/S(n)) = p(S(n+1))$

$\exists\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε

Εντροπία πηγής $\quad H_1(S) < H_0(S)$

$\Rightarrow$ Με χρήση ανομοιόμορφης κωδικοποίησης (βασισμένης στις $p(S_i)$) επιτυγχάνεται η συμπίεση της εντροπίας των τελικών συμβόλων της πηγής

ανομοιόμορφα κατανεμημένα $\{s_1, \ldots, s_n\}$



* Όχι ισοπίθανα αλλά εξαρτημένα διαδοχικά σύμβολα

$\exists_{i,j} \quad p(S_i) \neq p(S_j)$

Πηγές Markov

$$p(S(n+1)/S(n)) \neq p(S(n+1))$$

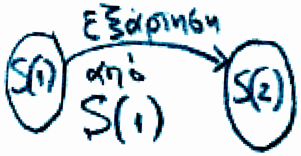
π.χ. αλφάβητο
$p(S(n+1)=\text{'α'}/S(n)=\text{'τ'}) > p(S(n+1)=\text{'π'}/S(n)=\text{'τ'})$

Εντροπία πηγής $\quad H_2(S) < H_1(S)$

(λιγότεροι βαθμοί ελευθερίας στην εκπομπή κάθε συμβόλου)

⇒ με χρήση ανομοιόμορφης κωδ/σης βασισμένης στις $p(S_i(k+1)/S_j(k))$
περαιτέρω συμπίεση της εντροπίας της πηγής

ανομοιόμορφα κατανεμημένα $\{s_1,\dots,s_n\}$



Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Ορισμοί**
  - **Μη ιδιάζων κώδικας**
    - Όταν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές
  - **Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος**
    - Όταν και οι ακολουθίες των κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές
  - **Άμεσος ή Μη Προθεματικός κώδικας**
    - Κάθε μοναδικά αποκωδικοποίησιμος κώδικας που επιτρέπει την άμεση αποκωδικοποίηση της κωδικής λέξης χωρίς να χρειάζεται να λάβει υπόψη του τις επόμενες κωδικές λέξεις.
    - Ο άμεσος κώδικας αποτελείται από κωδικές λέξεις οι οποίες δεν αποτελούν μέρος (προθέματα άλλων)

Διαφάνειες 75-106
Αρχείου PLH22_info_theory_3rdOSS_2016-7

Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Παράδειγμα**
  - Μη ιδιάζων, I,II,III,IV
  - Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος, II,III,IV. O I δεν είναι αφού ΦΦΦΦ, ΦΦΨ, ΨΨ όλα έχουν κωδική λέξη την ίδια, 0000
  - Άμεσοι κώδικες, II και III
  - O κώδικας IV δεν είναι άμεσος αφού χρειάζεται να γνωρίζουμε ψηφία που ανήκουν στην επόμενη κωδική λέξη, π.χ. 01101110 0?

	I	II	III	IV
Φ	0	00	0	0
Χ	11	01	10	01
Ψ	00	10	110	011
Ω	01	11	1110	0111

ΘΣ / ΓΕ 0203

Πηγή 8 συμβόλων

S_i	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ
$p(s_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Τ.μ.

$$\sum_{i=1}^{8} P(S_i) = 1$$

Σύμβολα με χαμηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο:

↓

Σύμβολα με υψηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Ε, Β

$$H(s_i) = -\log[P(s_i)] \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}} = -\log\frac{1}{4} = -(\log 1 - \log 4) =$$

$$= -(0 - \log 2^2) = -(-2\log 2) = 2\ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}.$$

Σύμβολα με υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο

↓

Σύμβολα με χαμηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Δ, Ζ

$$H(s_i) = -\log\left(\frac{1}{32}\right) = -(\log 1 - \log 32) = -(0 - \log 2^5) =$$

$$= 5\log 2 = 5 \text{ bits/symbol}$$

Μέσο Πληροφοριακό Περιεχόμενο Πηγής

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} p(s_i)\log[p(s_i)] = -p(A)\log[p(A)] - p(B)\log(p(B)) -$$

$$-p(\Gamma)\log(p(\Gamma)) - p(\Delta)\log(p(\Delta)) - p(E)\log(p(E)) - p(Z)\log(p(Z)) -$$

$$-p(H)\log(p(H)) - p(\Theta)\log(p(\Theta)) = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} -$$

$$-\frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\log 8 + \frac{2}{4}\log 4 + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{2}{32}\log 32 = \frac{3}{8}\cdot 3 + \frac{2}{4}\cdot 2 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{2}{32}\cdot 5 =$$

$$= \frac{36}{32} + \frac{32}{32} + \frac{8}{32} + \frac{10}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875 \text{ bits/symbol}$$

Αν τα σύμβολα ήταν ισοπίθανα (πιθανότητες εμφάνισης ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή)

$$p(S_i) = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{8}$$

$$H(S_i) = \log(\eta) = \log 8 = 3\,\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = -\eta\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = \log\eta = \log 8 = 3\,\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

Τρόποι Κωδικοποίησης

(A) Ομοιόμορφη (Θεωρώντας ίδιο αριθμό bits ανά σύμβολο)

Α	000 ← 3 bits/symbol → Μέσο μήκος κώδικα
Β	001
Γ	010
Δ	011
Ε	100
Ζ	101
Η	110
Θ	111

Ⓑ Ανομοιόμορφη (βασισμένη στην εντροπία της πηγής)

Σκοπός: Κατασκευή κατάλληλου κώδικα του οποίου το μέσο μήκος να προσεγγίζει την εντροπία των συμβόλων της πηγής $H(S) < \overline{L} < \log n$

2.6875 bits/symbol

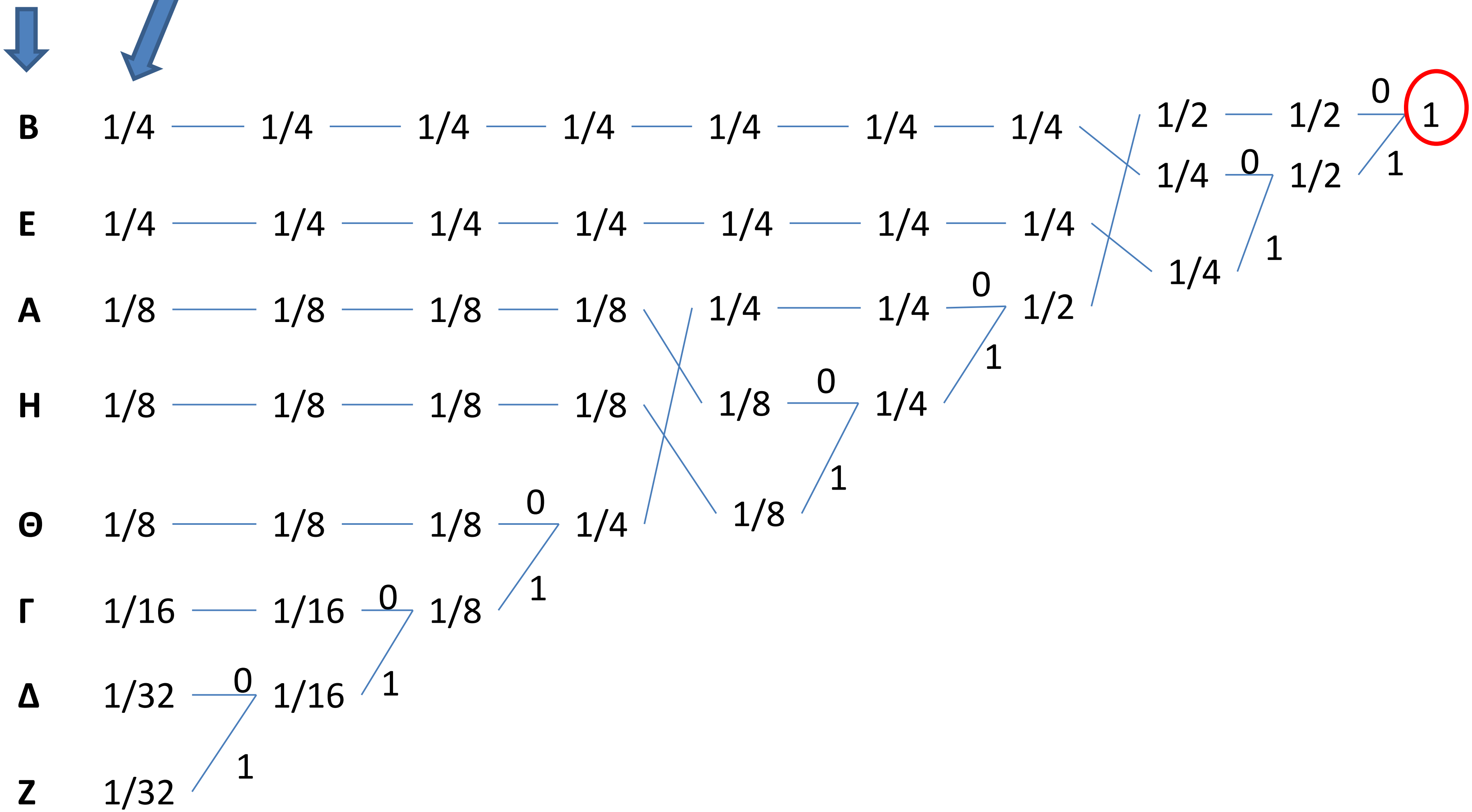
3 bits/symbol

Κωδικοποιηση Huffman
(JPEG, MPEG)

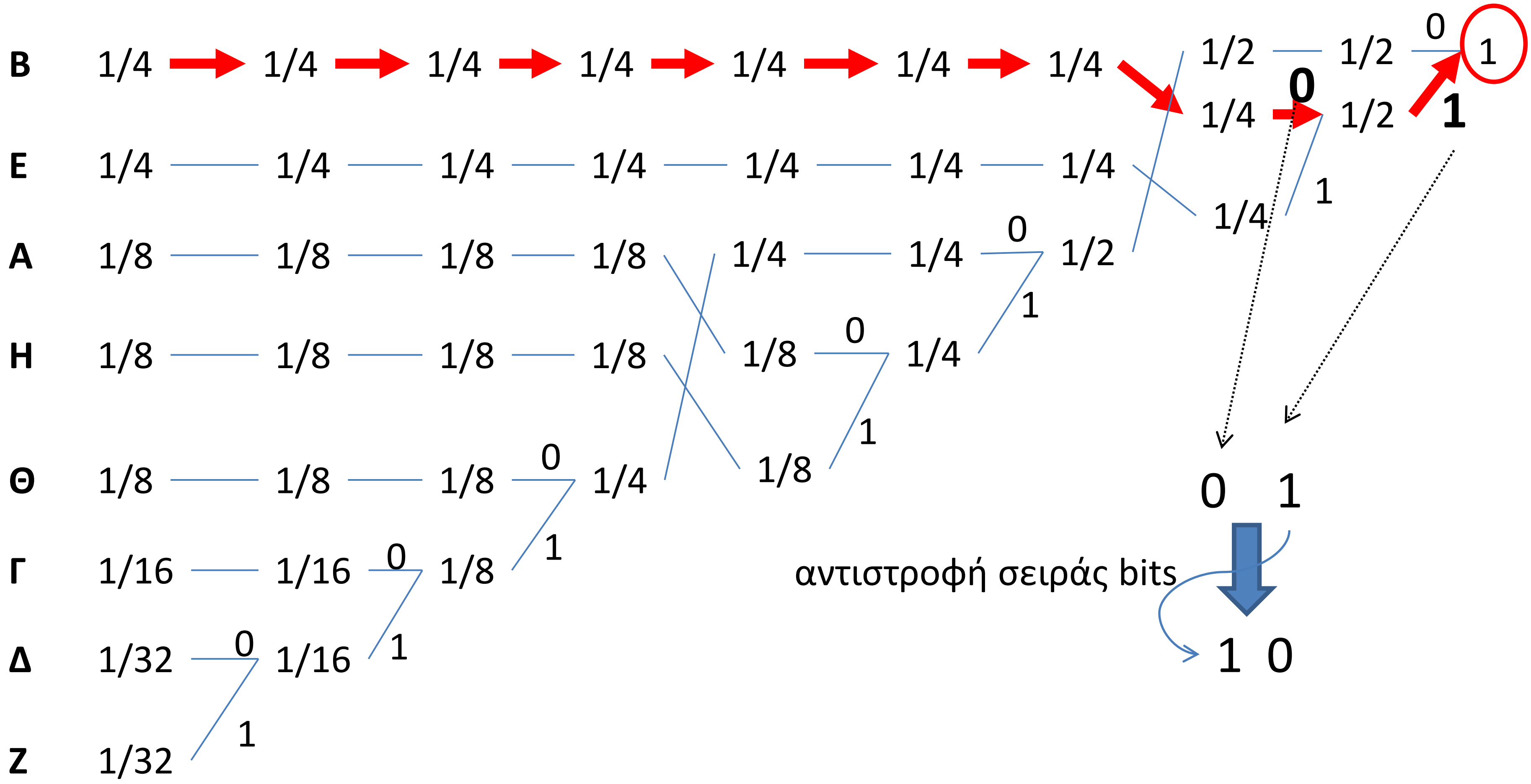
Άριστος κώδικας: max επίδοση

1. Διάταξη κατά φθινουσα $P(S_i)$
2. Τα 2 τελευταία σύμβολα ενώνονται σε 1 με $P(\text{αθροιστική}) = P(S_i) + P(S_j)$
3. Αναδιάταξη Συμβόλων.
4. Επανάληψη του 2 μέχρι να καταλήξουμε σε 2 σύμβολα.
5. Από το τέλος στην αρχή σχηματίζουμε τον κώδικα για κάθε σύμβολο.

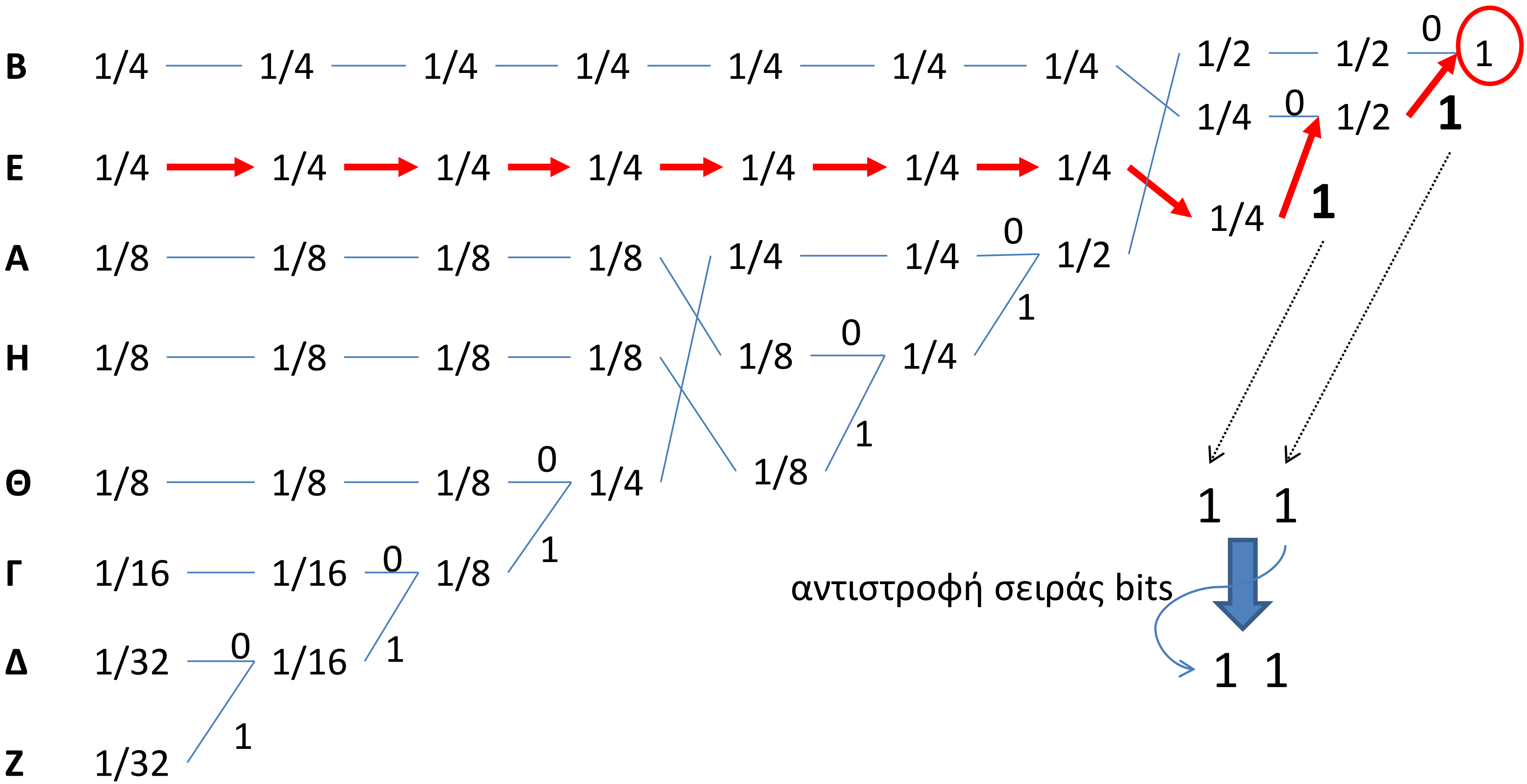
Σύμβολο Si **Πιθανότητα P(Si)**



Σύμβολο Β

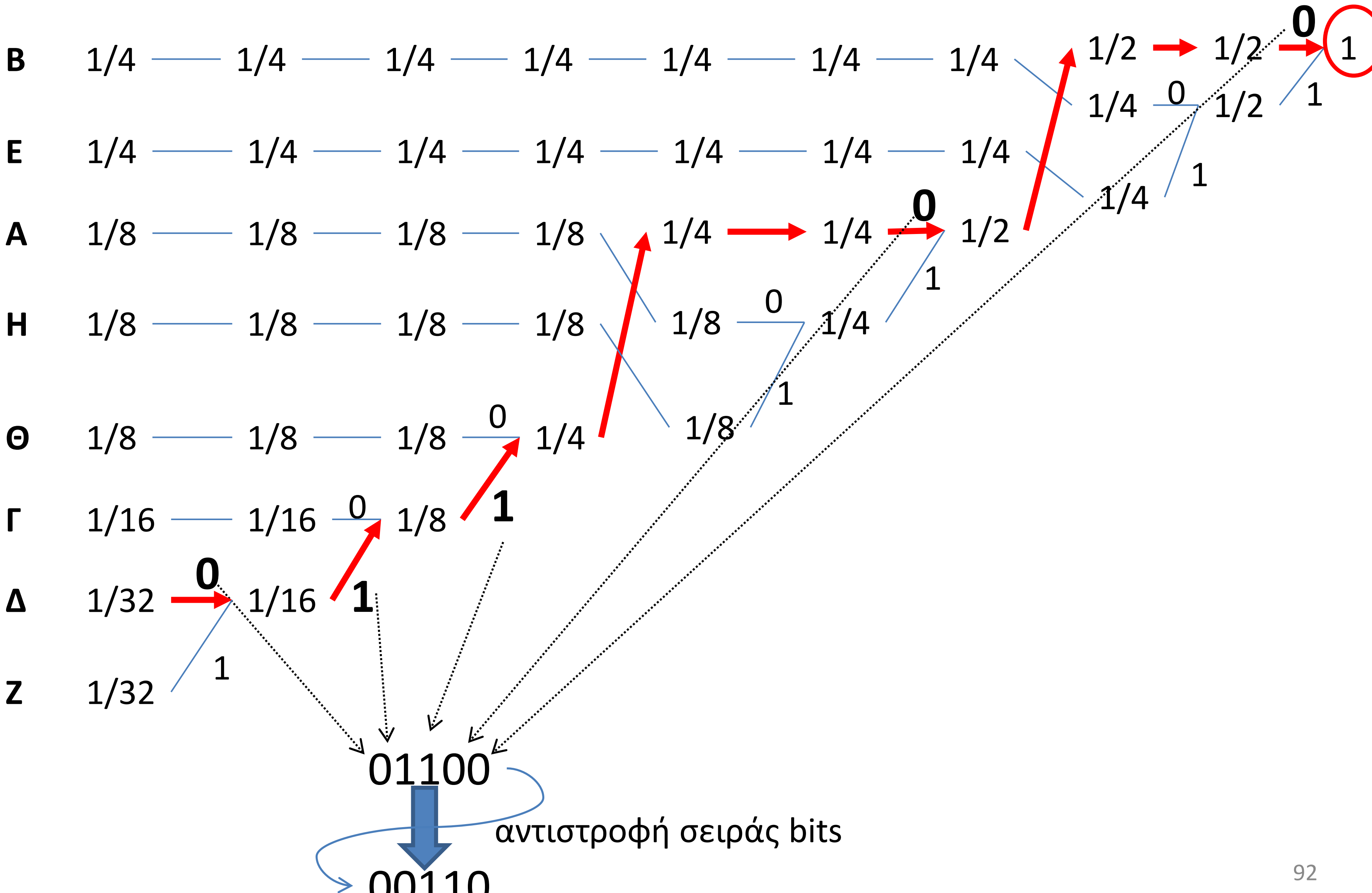

Β 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 1
Ε 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2
Α 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2 1/4
Η 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Ζ 1/32
0
1
0 1
αντιστροφή σειράς bits
1 0

Σύμβολο Ε



Β 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
Ε 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
Α 1/8 1/8 1/8 1/8
Η 1/8 1/8 1/8 1/8
Θ 1/8 1/8 1/8
Γ 1/16 1/16
Δ 1/32 1/16
Ζ 1/32
0 1 1/8 0 1 1/4 0 1 1/4 1/4 1/8 0 1 1/8 1/4 1/4 0 1 1/2
1/2 1/4 0 1/4 1 1/2 1/2 1 0 1
1 1
αντιστροφή σειράς bits
1 1

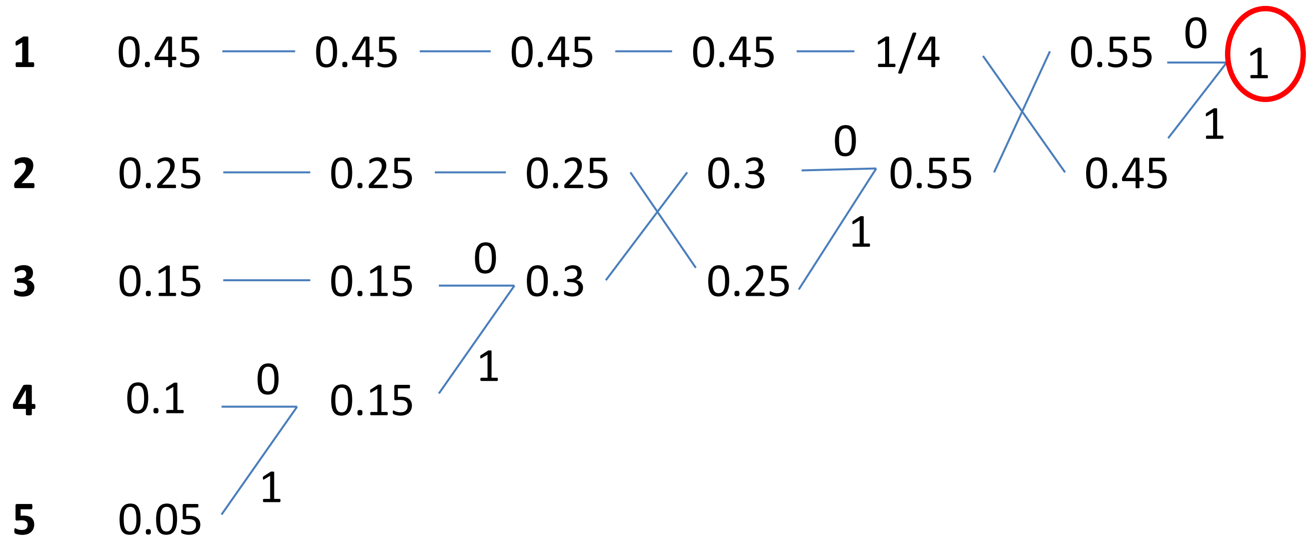
Σύμβολο Δ



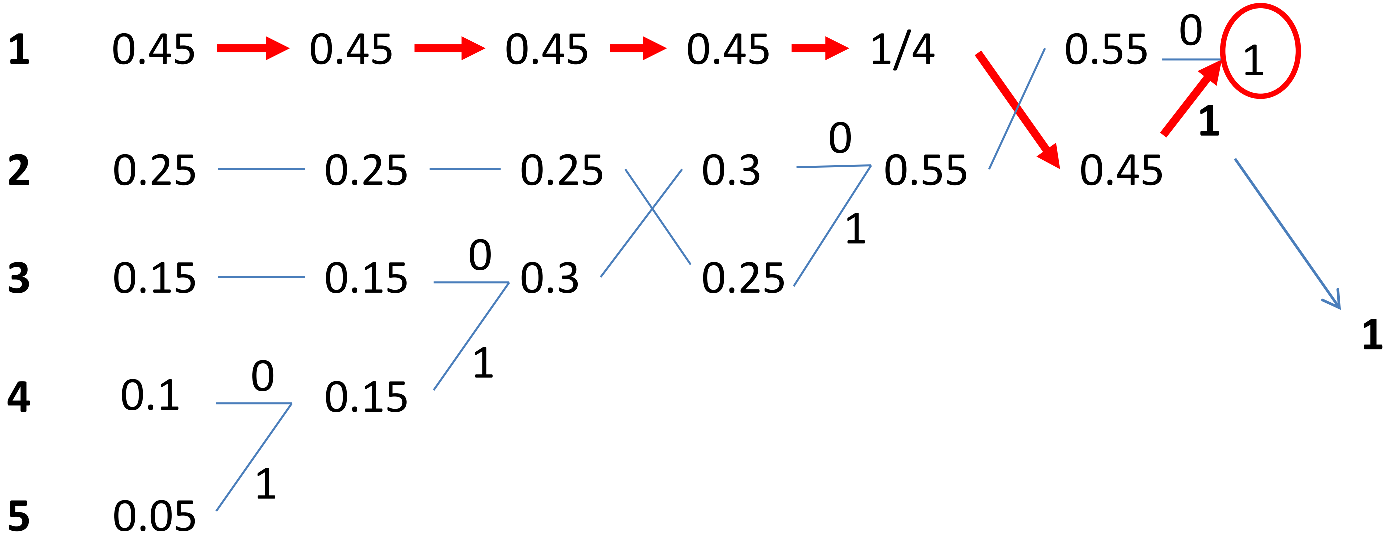
Β 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 1
Ε 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2
Α 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2
Η 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Ζ 1/32
0
1
01100
αντιστροφή σειράς bits
00110

Πρόσθετο Παράδειγμα κωδικοποίησης Huffman

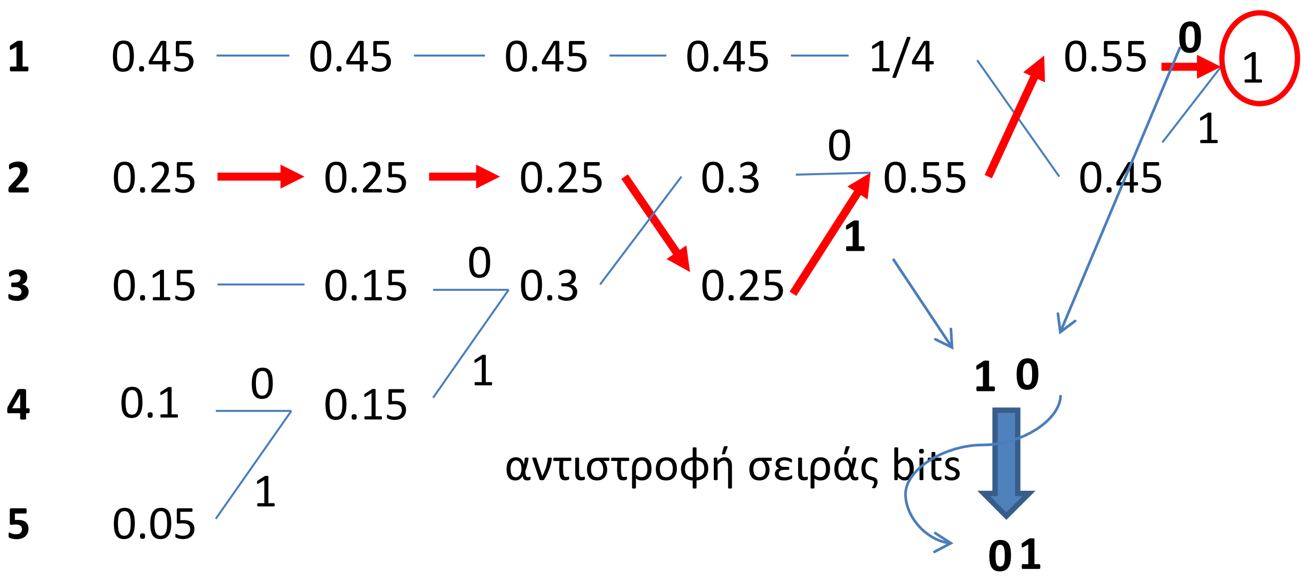
Σύμβολα



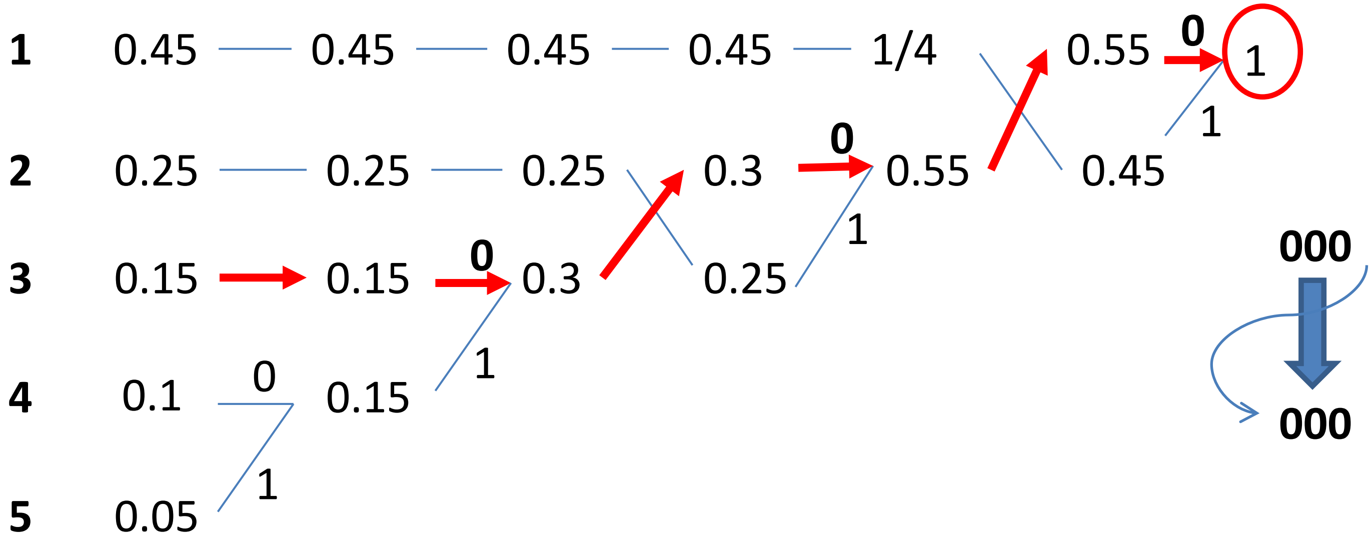
Σύμβολο 1



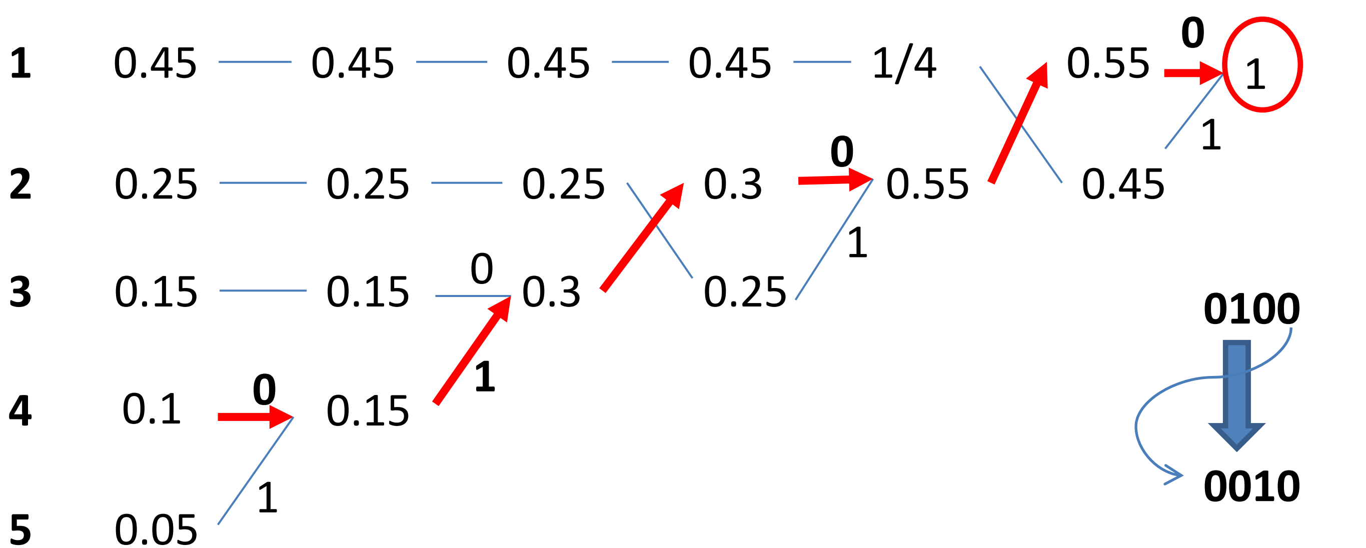
Σύμβολο 2



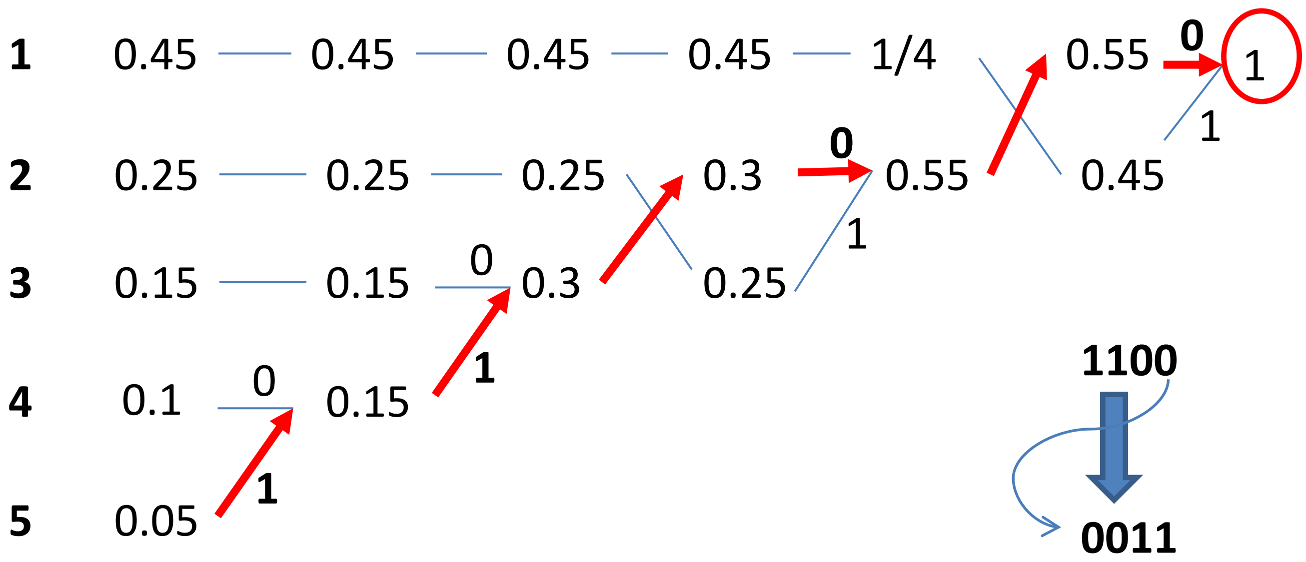
Σύμβολο 3



Σύμβολο 4



Σύμβολο 5


1 0.45 0.45 0.45 0.45 1/4 0.55 0 1 1
2 0.25 0.25 0.25 0.3 0 0.55 0.45
3 0.15 0.15 0 0.3 0.25 1
4 0.1 0 0.15 1
5 0.05 1
1100
0011

Κωδ. Huffmann με
Χρήση δυαδικού δένδρου

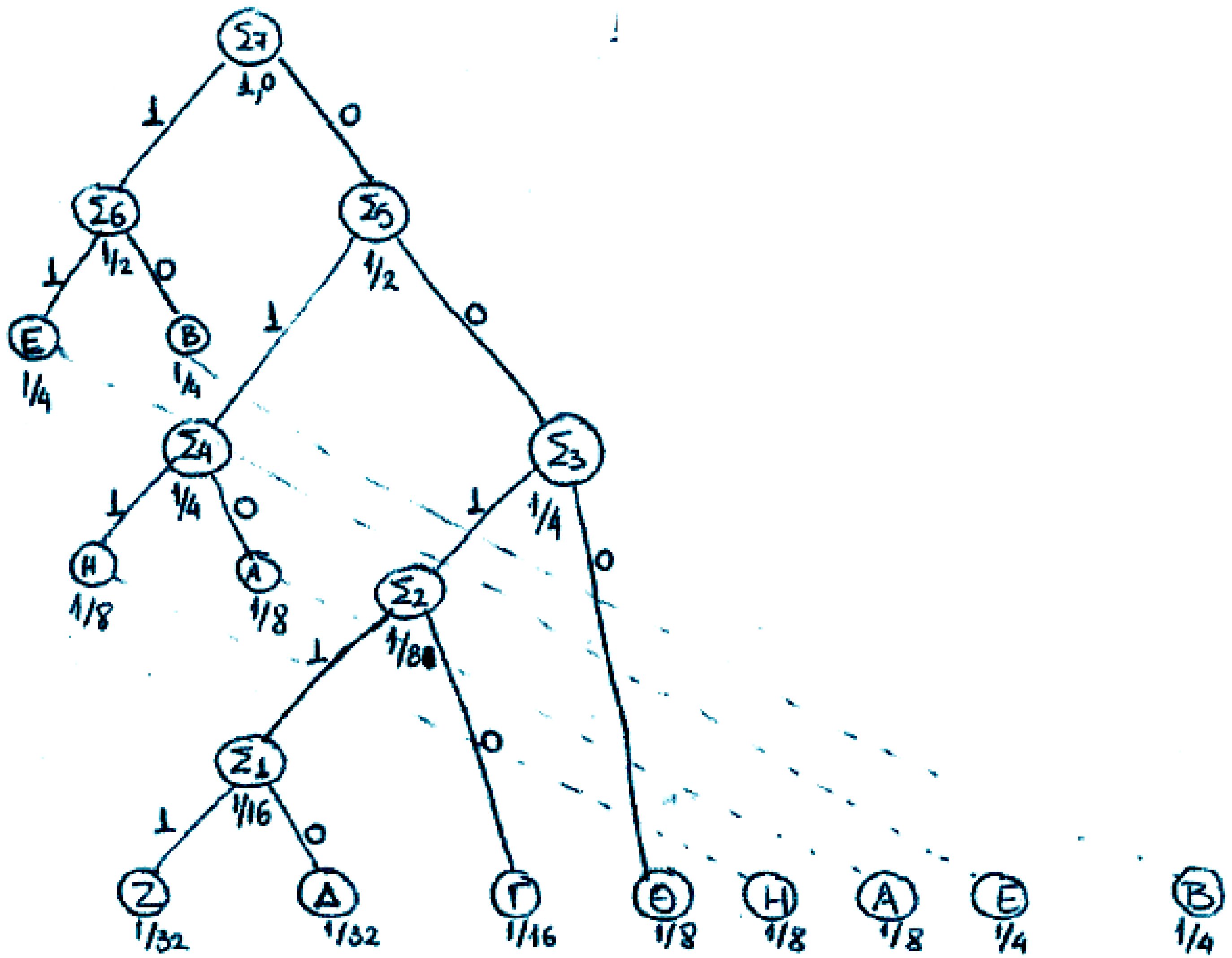
1. Τοποθέτηση συμβόλων με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων: ΖΔΓΘΗΑΕΒ
2. Ομαδοποίηση Ζ, Δ στο $Σ_1$ $P_{Σ_1} = 1/32 + 1/32 = 1/16$
3. $Σ_1$ Γ Θ Η Α Ε Β σε αύξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα
   ομαδοποίηση $Σ_1$, Γ στο $Σ_2$ $P_{Σ_2} = 1/16 + 1/16 = 1/8$
4. $Σ_2$ Θ Η Α Ε Β σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα
   ομαδοποίηση $Σ_2$, Θ στο $Σ_3$ $P_{Σ_3} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
5. $Σ_3$ Η Α Ε Β ΟΧΙ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα
   αναδιάταξη συμβόλων: Η Α $Σ_3$ Ε Β
   ομαδοποίηση Η, Α στο $Σ_4$ $P_{Σ_4} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
6. $Σ_4$ $Σ_3$ Ε Β σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα
   ομαδοποίηση $Σ_4$, $Σ_3$ στο $Σ_5$ $P_{Σ_5} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
7. $Σ_5$ Ε Β ΟΧΙ σε αυξ σειρά πιθανοτήτων άρα
   αναδιάταξη συμβόλων: Ε Β $Σ_5$
   ομαδοποίηση Ε, Β στο $Σ_6$ $P_{Σ_6} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
8. Ομαδοποίηση $Σ_6$, $Σ_5$ στο $Σ_7$ $P_{Σ_7} = 1,0$
9. Ανάθεση '1' στα αριστερά παιδιά και '0' στα δεξιά παιδιά κάθε κόμβου.

Σε κάθε βήμα διατάσσουμε τα σύμβολα με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων και ομαδοποιούμε τα 2 αριστερότερα

10. Αντιστοίχιση κωδ. λέξεων ανά σύμβολο.

Β: Διαδρομή $Σ_7 \to Σ_6 \to$ Β: 10
Ε: Διαδρομή $Σ_7 \to Σ_6 \to$ Ε 11
Α: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_4 \to$ Α: 010
Η: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_4 \to$ Η: 011
Θ: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to$ Θ 000
Γ: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to Σ_2 \to$ Γ: 0010
Δ: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to Σ_2 \to Σ_1 \to$ Δ: 00110
Ζ: -"- $Σ_7 \to Σ_5 \to Σ_3 \to Σ_2 \to Σ_1 \to$ Ζ: 00111

Στην επόμενη σελίδα παρατίθεται η κωδ/ση Huffman με τη χρήση δυαδικού δένδρου.



Σ7
1,0
Σ6
1/2
Σ5
1/2
E
1/4
B
1/4
Σ4
1/4
Σ3
1/4
H
1/8
A
1/8
Σ2
1/8
Σ1
1/16
Z
1/32
Δ
1/32
Γ
1/16
Θ
1/8
H
1/8
A
1/8
E
1/4
B
1/4

Πλεονασμός πηγής

$$r_{ed} = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log N} = 1 - \frac{2{,}6875}{3} = 10{,}4\%$$

Επίδοση Κώδικα

$$\alpha = \frac{H(C)}{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i \log q} \quad \text{σελ. } 57$$

$$H(C) = 2{,}6875 \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$\log q = \log 2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \frac{1}{4}2 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{16}4 + \frac{1}{32}\cdot 5 + \frac{1}{32}5 =$$

$$= 1 + \frac{9}{8} + \frac{18}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875$$

Άρα $\alpha = 100\%$

$\alpha < 100\%$ όταν $l_i^* = -\log(p_i) \notin \mathbb{N}$

Κωδικοποίηση Αλγ. Fano.

① Διάταξη με φθίνουσα $P(S_i)$ — q κωδικά σύμβολα

② Διαχωρισμός σε q υποομάδες (για δυαδικό $q=2$) με όσο το δυνατόν ίσες αθροιστικές πιθανότητες

③ Αντιστοίχιση σε κάθε υποομάδα ενός κωδ. συμβόλου

④ Ξανά το ② για κάθε υποομάδα.

		l_i	με ανάθεση πρώτα του 1 και μετά το 0.
B	1/4	0 0	(11)
E	1/4	0 1	(10)
A	1/8	1 0 0	(011)
H	1/8	1 0 1	(010)
Θ	1/8	1 1 0	(001)
Γ	1/16	1 1 1 0	(0001)
Δ	1/32	1 1 1 1 0	(00001)
Z	1/32	1 1 1 1 1	(00000
	1		

ΟΜΑΔΟΠΟΙΟΥΜΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ!

Κωδικοποίηση Shannon

① Διάταξη συμβόλων με φθίνουσα $p(S_i)$

② Υπολογισμός Αθροιστικής πιθανότητας $\Pi_i = \sum_{k=1}^{i-1} p(S_k)$, $\Pi_1 = 0$

③ Υπολογισμός πλήθους κωδικών συμβόλων (μήκους κωδικής λέξης) για κάθε σύμβολο $l_i = \lceil -\log(p(s_i)) \rceil$

④ Εύρεση Δυαδικού Αναπτύγματος για κάθε Π_i

Αλγόριθμος:

for $k = 1 : l_i$

$\Pi(i) \leftarrow \Pi(i) \cdot 2$

if $\Pi(i) \geq 1$

$\psi_k = 1$

$\Pi(i) \leftarrow \Pi(i) - 1$

else

$\psi_k = 0$

end

end

S_i	$P(s_i)$	Π_i	$l_i = -\log P(s_i)$	κωδικολέξεις
B	1/4 = 0,25	0	2	00
E	1/4 = 0,25	0,25+0 = 0,25	2	01
A	1/8 = 0,125	0,25+0,25 = 0,5	3	100
H	1/8 = 0,125	0,125+0,5 = 0,625	3	101
Θ	1/8 = 0,125	0,125+0,625 = 0,75	3	110
Γ	1/16 = 0,0625	0,125+0,75 = 0,875	4	1110
Δ	1/32 = 0,03125	0,0625+0,875 = 0,9375	5	11110
Z	1/32 = 0,03125	0,03125+0,9375 = 0,96875	5	11111

π.χ για το Δ

$k = 1:5$, $\Pi_\Delta = 0,9375$

$k=1$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,9375 \times 2 = 1,875 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,875 - 1 = 0,875 \end{cases}$

$k=2$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,875 \times 2 = 1,75 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_2 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,75 - 1 = 0,75 \end{cases}$

$k=3$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,75 \times 2 = 1,5 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_3 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1,5 - 1 = 0,5 \end{cases}$

$k=4$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0,5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_4 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1 - 1 = 0 \end{cases}$

$k=5$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0 \times 2 = 0 < 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_5 = 0 \\ \text{END} \end{cases}$

Παραδείγματα Κωδικοποίησης

ΘΕΜΑ 4 ΓΕ4/1112

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μέτρων ποσότητας πληροφορίας και την εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης. Σχετικά θέματα μπορείτε να βρείτε σε ΓΕ4 περασμένων ετών, όπως ΓΕ4/2010-11/Θ3, ΓΕ4/2009-10/Θ2, ΓΕ4/2008-09/Θ3, ΓΕ4/2006-7/Θ4 και* Θ3/ΓΕ/2004-5.

Θεωρούμε την πηγή που εκπέμπει τα στατιστικά ανεξάρτητα σύμβολα Α, Β, Γ, Δ, Ε, το πληροφορικό περιεχόμενο των οποίων περιέχεται στον ακόλουθο πίνακα:

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)
Α	1.81
Β	1.38
Γ	2.42
Δ	3.14
Ε	4.96

Ζητούνται τα εξής:

1. Η εντροπία της πηγής.
2. Κώδικας Shannon για τα σύμβολα της πηγής και η επίδοσή του.
3. Κώδικας καλύτερος αυτού που προέκυψε στο ερώτημα 2 και η επίδοσή του.

1). Γνωρίζω ότι το πληροφορικό περιεχόμενο της πηγής εκφράζεται από το $-log_2(p(x_i))$. Οπότε θα έχουμε π.χ. Σύμβολο "Α": $-log_2(p(x_1)) = 1.81 \rightarrow p(x_1) = 0.285$

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Οπότε η εντροπία της πηγής θα δίνεται από

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{6} p(x_i) \cdot log_2(p(x_i))$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα θα έχουμε

$$H(X) = -\left[\begin{matrix} 0.285 \cdot log_2(0.285) + 0.384 \cdot log_2(0.384) + 0.186 \cdot log_2(0.186) \\ +0.113 \cdot log_2(0.113) + 0.032 \cdot log_2(0.032) \end{matrix}\right]$$
$$= 0.516 + 0.530 + 0.451 + 0.355 + 0.158 = 2.01$$

2). Για τη μέθοδο Shannon θα χρησιμοποιήσουμε τη φθίνουσα σειρά των συμβόλων

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
B	1.38	0.384
A	1.81	0.285
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
E	4.96	0.032

Και μετά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Shannon

Προκειμένου να βρεθεί η απόδοση της πηγής, θα πρέπει να υπολογισθεί το μέσο μήκος του κώδικα

				Ανάπτυγμα Pi					
Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Μήκος li	Αθροιστικές πιθανότητες	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	Κωδική Λέξη
Β	0.384	2	0	0	0	0	0	0	00
Α	0.285	2	0.384	0	1	1	0	0	01
Γ	0.186	3	0.669	1	0	1	0	1	101
Δ	0.113	4	0.855	1	1	0	1	1	1101
Ε	0.032	5	0.968	1	1	1	1	0	11110

$$L = \sum_{i=1}^{5} p(x_i) \cdot l_i$$

$$L = 0.384 \cdot 2 + 0.285 \cdot 2 + 0.186 \cdot 3 + 0.113 \cdot 4 + 0.032 \cdot 5 = 2.508$$

Οπότε η απόδοση της πηγής ορίζεται ως

$$n = \frac{H(S)}{L} = 80.14\%$$

Shannon

$H(xi)=-\log(p(xi)=>p(xi)=2^{(-H(xi))}$

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol) $(H(x_i))$_	Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων $2^{(-H(xi))}$
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

ΓΕ4/1112/Θ4

p(xi)	-log(p(xi))	Li	Πi	Code
0,384	1,380821784	2	0	00
0,285	1,810966176	2	0,384	01
0,186	2,426625474	3	0,669	101
0,113	3,145605322	3	0,855	1101
0,032	4,965784285	5	0,968	11111

2x0,855 → 1,71 ⇒ 1

2x0,71 → 1,42 ⇒ 1

2x0,42 → 0,84 ⇒ 0

2x0,84 → 1,68 ⇒ 1

Shannon

$H(xi)=-\log(p(xi)) \Rightarrow p(xi)=2^{(-H(xi))}$

ΓΕ4/1112/Θ4

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol) $(H(x_i))$_	Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων $2^{(-H(xi))}$
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

p(xi)	-log(p(xi))	Li	Πi	Code
0,384	1,380821784	2	0	00
0,285	1,810966176	2	0,384	01
0,186	2,426625474	3	0,669	101
0,113	3,145605322	3	0,855	1101
0,032	4,965784285	5	0,968	11110

	x 2		
0,968	→	1,936	⇒ 1
0,936	→	1,872	⇒ 1
0,872	→	1,744	⇒ 1
0,744	→	1,488	⇒ 1
0,488	→	0,976	⇒ 0

ΘΕΜΑ 6

ΓΕ3 2014-15

Στόχος της άσκησης *είναι η εξάσκηση στην εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης πηγής.*
Σχετικές ασκήσεις: *Θ7/ΓΕ4/2004-5, Θ4/ΓΕ4/2006-7, Θ3/ΓΕ4/2007-8, Θ3 κ Θ4/ΓΕ4/2008—9, Θ4/ΓΕ4/2009-10, Θ3/ΓΕ4/2010-11, Θ4/ΓΕ4/2011-12, Θ4/ΓΕ4/2012-3.*

Θεωρούμε διακριτή πηγή που εκπέμπει τα σύμβολα *A, B, Γ, Δ, E, Z και H*. Οι αντίστοιχες πιθανότητες εκπομπής έχουν ως εξής: {0.15, 0.12, 0.10, 0.05, 0.48, 0.05, 0.05}.

Ζητείται:

(α) Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Fano.

(β) Να σχηματισθεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Shannon.

(γ) Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Huffman.

(δ) Ποια είναι η βέλτιστη από τις κωδικοποιήσεις που προκύπτουν στα ερωτήματα α-γ? Τεκμηριώστε την απάντηση σας υπολογίζοντας την απόδοση του κάθε κώδικα. Είναι ο βέλτιστος κώδικας που υπολογίσατε και άριστος;

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να ακολουθηθούν τα προβλεπόμενα σε κάθε αλγόριθμο κωδικοποίησης βήματα. Για τον υπολογισμό της επίδοσης των κωδίκων που σχηματίσατε να εφαρμόσετε τον αντίστοιχο τύπο.*

(α) Κώδικας Fano

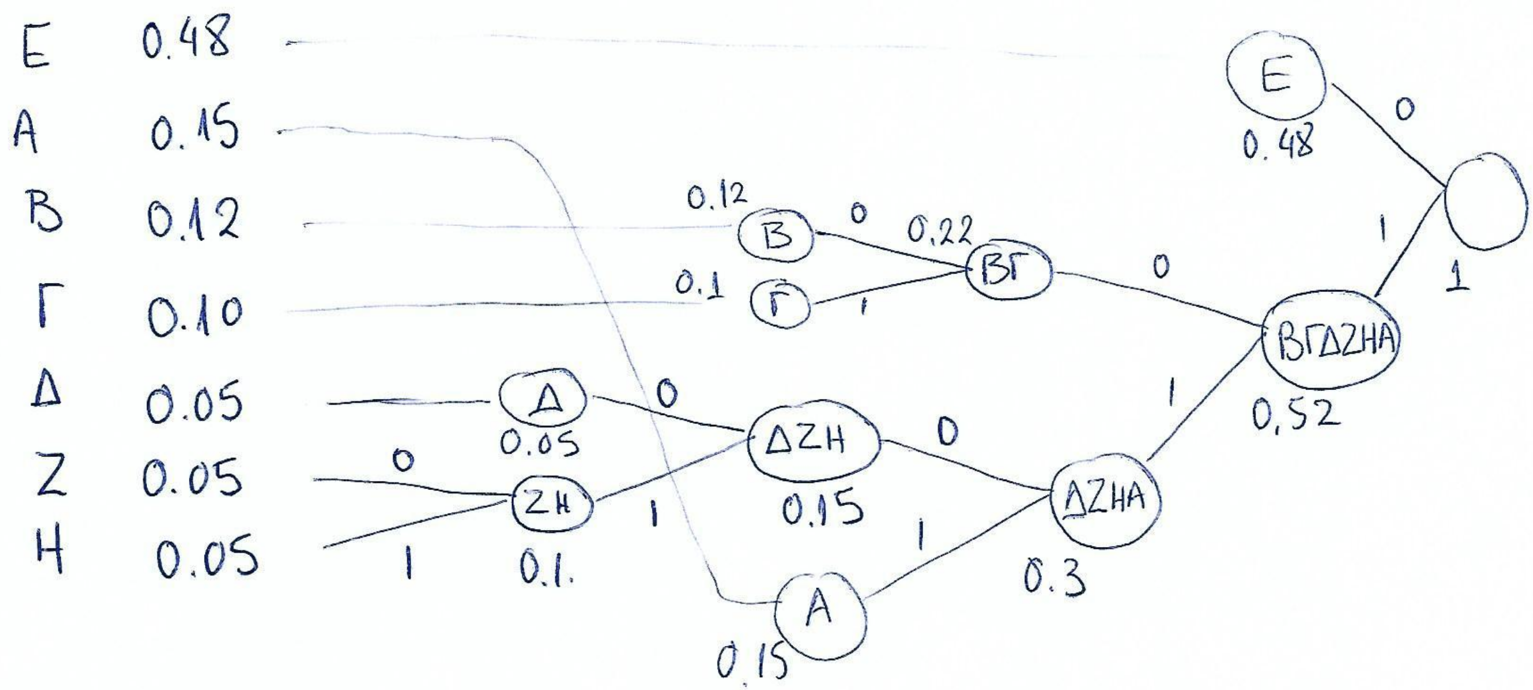
Σύμβολα	Πιθανότητες εκπομπής	Κωδική λέξη
Ε	0.48	0
Α	0.15	100
Β	0.12	101
Γ	0.10	1100
Δ	0.05	1101
Ζ	0.05	1110
Η	0.05	1111

(β) Κώδικας Shannon

ΣΥΜΒΟΛΑ	Πιθανότητες	P_i	<=l_i	l_i>	l_i	Ανάπτυγμα	Κώδικας
Ε	0.48	0	1,05889	2,05889	2	.00000000	00
Α	0.15	0.48	2.7369	3.7369	3	.01111010	011
Β	0.12	0.63	3,05889	4,05889	4	.10100001	1010
Γ	0.1	0.75	3.32	4.32	4	.11000000	1100
Δ	0.05	0.85	4.32	5.32	5	.11011001	11011
Ζ	0.05	0.90	4.32	5.32	5	.11100110	11100
Η	0.05	0.95	4.32	5.32	5	.11110011	11110

(γ) Κώδικας Huffman

Σύμβολα							Κώδικας
Ε	0.48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,52 (0)	1
Α	0.15	0,15	0,15	0,22	0,3 (0)	0,48 (1)	000
Β	0.12	0,12	0,15	0,15 (0)	0,22 (1)		010
Γ	0.1	0,10	0,12 (0)	0,15 (1)			011
Δ	0.05	0,1 (0)	0,10 (1)				0010
Ζ	0.05 (0)	0,05 (1)					00110
Η	0.05 (1)						00111



Ε	0
Α	111
Β	100
Γ	101
Δ	1100
Ζ	11010
Η	11011

Μεθοδολογία δένδρου Huffman
Διαφάνειες 116-122
Αρχείου PLH22_info_theory_3rdOSS_2016-7

Δυαδικός κώδικας Fano

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 1 + (0{,}15 + 0{,}12) \times 3 + (0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05) \times 4 = 2{,}29$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i) \log_2 2} = \frac{2{,}2658}{2{,}29} = 0{,}989457$$

Δυαδικός κώδικας Shannon

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 2 + 0{,}15 \times 3 + (0{,}12 + 0{,}10) \times 4 + (0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05) \times 5 = 3{,}04$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i)} = \frac{2,2658}{3,04} = 0,7453$$

Δυαδικός κώδικας Huffman

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 1 + (0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}10) \times 3 + 0{,}05 \times 4 + (0{,}05 + 0{,}05) \times 5 = 2{,}29$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i) \log_2 2} = \frac{2{,}2658}{2{,}29} = 0{,}989457$$