ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3

4^{η} ΟΣΣ

19.03.2017

Σχόλια για τη ΓΕ3 &

Συμπληρωματικές Διαφάνειες στα Κανάλια Επικοινωνίας και τους Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

Νίκος Δημητρίου

Σχόλια ΓΕ3

A

$$y(t) = \alpha\, \mathrm{sinc}^2(at) \longleftrightarrow \mathrm{tri}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

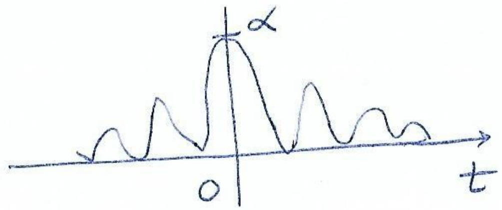
$$x(t) = \sqrt{\alpha}\, \mathrm{sinc}(\alpha t)$$

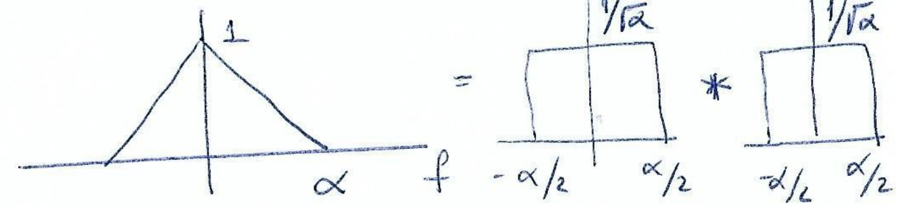
$$\Updownarrow$$

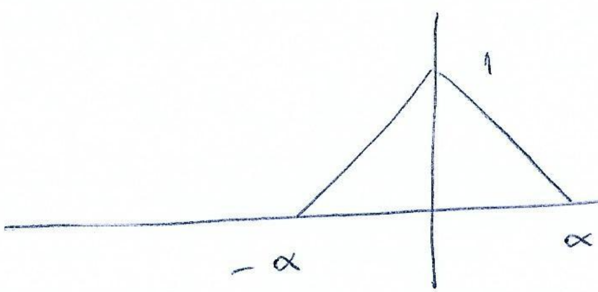
$$X(f) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}\, \mathrm{rect}(f/\alpha)$$

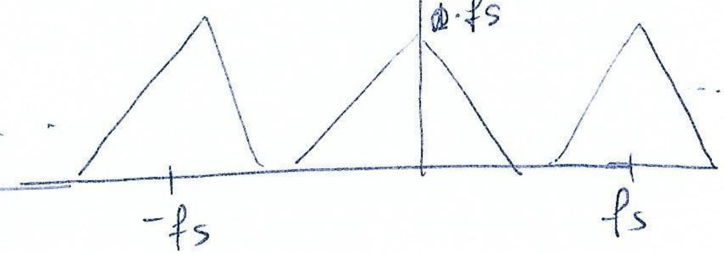
Για το θέμα 1

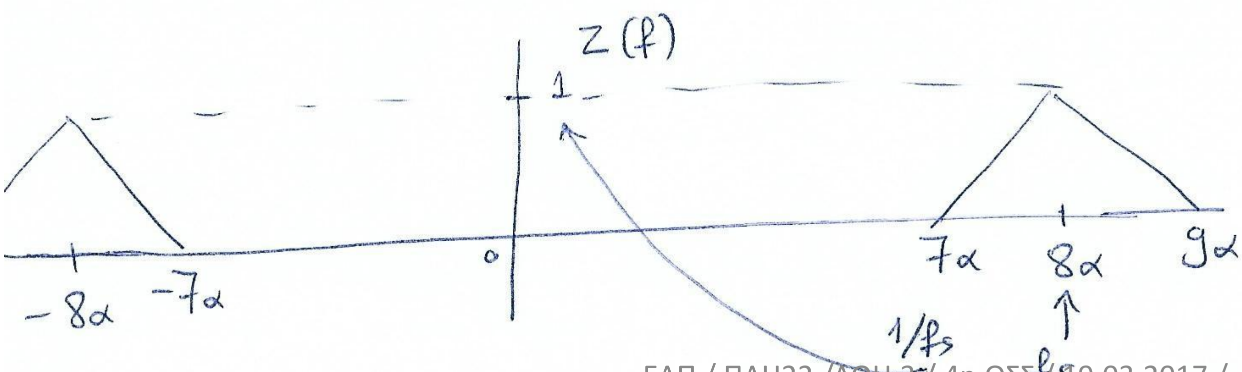
$$\max|y(t)| = a \qquad f_y = \alpha$$







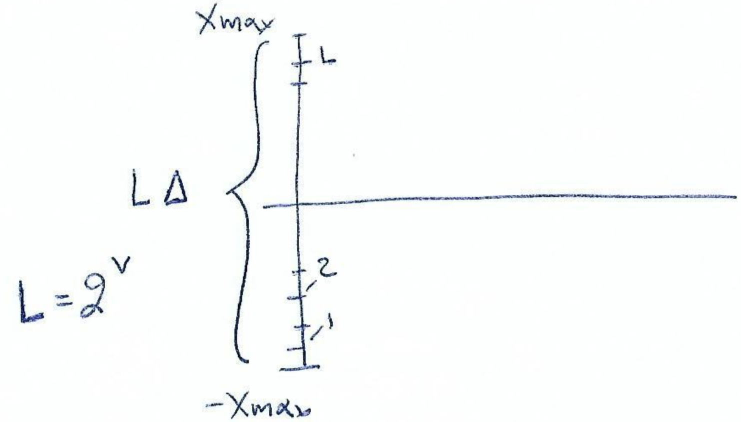




3

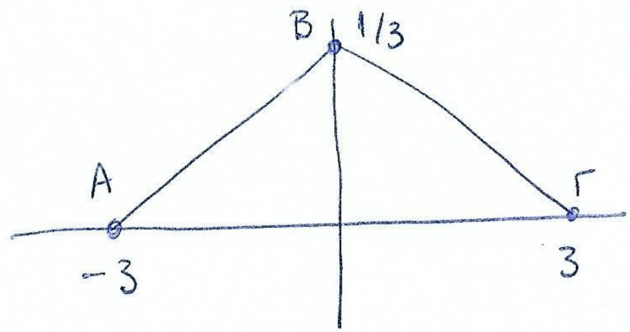
B

Για το θέμα 3



$$E\left(X^2(t)\right) = \int_{-3}^{3} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-3}^{0} x^2 \underbrace{\left(\frac{x+3}{9}\right)} dx + \int_{0}^{3} x^2\left(\frac{-x+3}{9}\right) dx$$

Προσδιορισμός εξίσωσης ευθείας



Ευθεία AB: μορφή $y = ax + b$ (αναζήτηση α, b)

σημείο Α: $x = -3 \quad y = 0$

$$0 = a\cdot(-3) + b \Rightarrow -3a + b = 0$$

σημείο Β: $x = 0,\ y = 1/3 \Rightarrow 0\cdot a + b = 1/3 \Rightarrow b = 1/3$

άρα $-3\alpha + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9}$

εξίσωση (AB): $y = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3} = \frac{x+3}{9}$

Όμοια για την ευθεία (ΒΓ)

$$y = \frac{-x+3}{9}$$

Για το θέμα 3

$$SNR = \frac{E(x^2(t)) \cdot 3 \cdot 4^v}{x_{max}^2} = \frac{\frac{\cancel{3}}{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}^2} \cdot 4^v = \frac{1}{2} 4^v$$

$$SNR = 10 \log \frac{4^v}{2} = 10 \log_{10} 4^v - 10 \log_{10} 2 = 10 v \log 4 - 10 \log_{10} 2$$

Για 1 λιγότερο bit/sample

$$SNR'_{(v-1)} = 10 \log_{10} 4^{(v-1)} - 10 \log_{10} 2 = 10 (v-1) \log_{10} 4 - 10 \log_{10} 2 =$$

$$= 10 v \log_{10} 4 - 10 \log_{10} 2 - 10 \log_{10} 4 = SNR(v) - 6{,}02\,dB$$

Για κάθε 1 λιγότερο bit/sample πτώση SNR κατά 6.02 dB

Για το θέμα 5

Δ

$$P(\cancel{\Lambda}) = P(A/\Lambda)\cdot P(\cancel{\Lambda}) + P(\Theta/\Lambda)\cdot \cancel{P(\Lambda)}$$

$$3\,P(\Theta/\Lambda) + P(\Theta/\Lambda) = 1 \Rightarrow P(\Theta/\Lambda) = 1/4$$

$$P(A/\Lambda) = 3/4$$

$$P(A,\Lambda) = P(A/\Lambda)\cdot P(\Lambda) = \frac{3}{4}\cdot 0.6 = 0.45$$

$$P(A) = P(A,\Lambda) + P(A,\sim\Lambda) \Rightarrow P(A,\sim\Lambda) = 0.5 - 0.45 = 0.05$$

$$P(A/\sim\Lambda) = \frac{P(A,\sim\Lambda)}{P(\sim\Lambda)} = \frac{0,05}{0.4} = 0.125$$

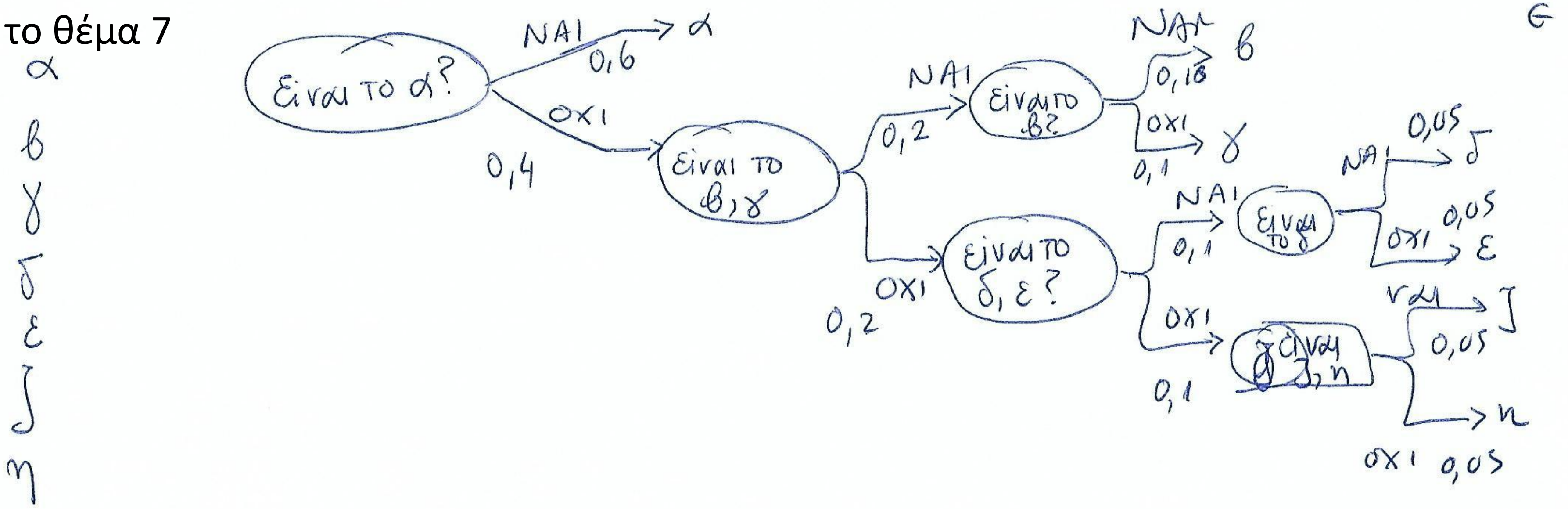
$$X\{x_1, x_2\}$$

$$Y\{y_1, y_2\}$$

$$P(x_i) = P(x_i; y_1) + P(x_i; y_2)$$

$$P(y_1/x_i) + P(y_2/x_i) = 1$$

Για το θέμα 7



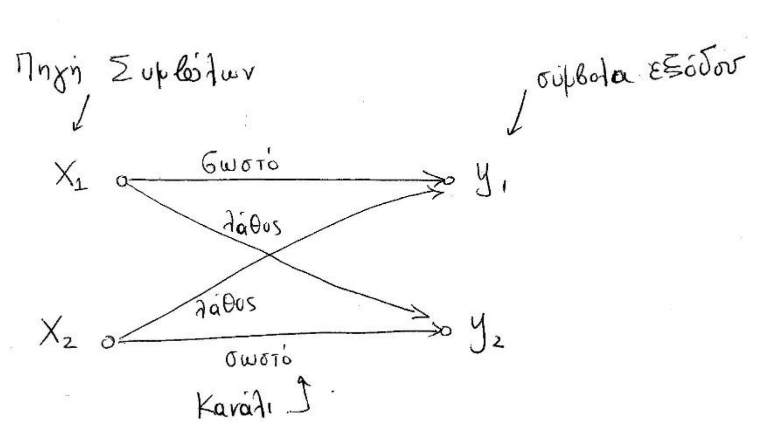
Κανάλια Επικοινωνίας

Σκοπός: Μεταφορά συμβόλων διαμέσου του καναλιού διατηρώντας την κατανομή των μεταξύ τους πιθανοτήτων $p(x_i)$

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 5-19

1)

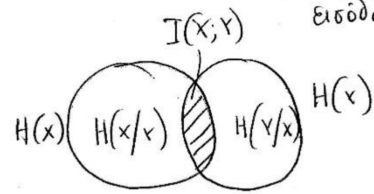
Κανάλια Επικοινωνίας



Πίνακας Μετάβασης Καναλιού

$$P = [p_{ij}] = P(y_j/x_i) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \overbrace{\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array}}^{\text{σύμβολα εξόδου}} \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix}$$

σύμβολα εισόδου



$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρει το κανάλι.

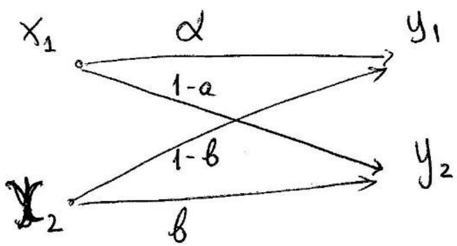
αβεβαιότητα της Y

αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

Χωρητικότητα καναλιού

$$C = \max(I(X;Y))$$

Παράδειγμα. Ενθόρυβο κανάλι. 3)



$$P=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{c} \alpha \\ 1-b \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 1-\alpha \\ b \end{array}\right] \end{array}$$

$$H(Y/X) = -p(y_1/x_1)\log\left[p(y_1/x_1)\right]\cdot p(x_1) -$$

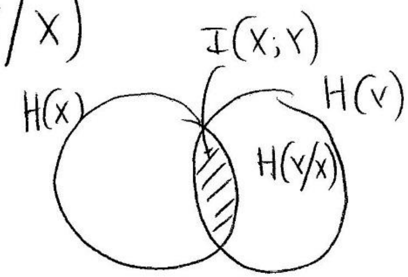
$$- p(y_1/x_2)\log\left[p(y_1/x_2)\right]p(x_2) - p(y_2/x_1)\log\left[p(y_2/x_1)\right]p(x_1) -$$

$$- p(y_2/x_2)\log\left[p(y_2/x_2)\right]\ p(x_2) =$$

$$= -\alpha\log(\alpha)\,p(x_1) - (1-b)\log(1-b)\,p(x_2) - (1-a)\log(1-a)\,p(x_1) -$$

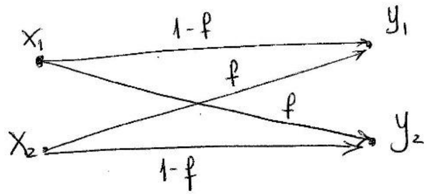
$$- b\log(1-b)\,p(x_2) \neq 0$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



$$C = \max_{p(x_i)}\left\{I(X;Y)\right\}$$

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι



$$p(y_1) = (1-f)\,p(x_1) + f\,p(x_2)$$

$$p(y_2) = f\,p(x_1) + (1-f)\,p(x_2)$$

Αμοιβαία Πληροφορία.

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{2} p(y_j)\log p(y_j)$$

$$H(Y/X) = -(1-f)\log(1-f)\,p(x_1) - f\log(f)\,p(x_2) -$$

$$-(1-f)\log(1-f)\,p(x_2) - f\log(f)\,p(x_1) =$$

$$= p(x_1)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] + p(x_2)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] =$$

$$= \left[p(x_1) + p(x_2)\right]\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] = -(1-f)\log(1-f) - f\log f =$$

$= H(f)$ ανεξάρτητη των πιθανοτήτων των εισόδων.

Άρα $I(X;Y) = H(Y) - H(f)$

$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)}\{H(Y) - H(f)\} = \max_{p(x_i)}\{H(Y)\} - H(f)$$

Μέγιστη $H(Y) \Rightarrow$ ομοιόμορφα κατανεμημένες $p(y_j) = \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$ 6

<u>Έλεγχος:</u> Υπάρχουν κατάλληλες $p(x_i)$ που να δίνουν ομοιόμορφες $p(y_j)$?

<u>Ναι</u> εφόσον σε συμμετρικά κανάλια ομοιόμορφα κατανεμημένη είσοδοι οδηγούν σε ομοιόμορφα κατανεμημένες εξόδους

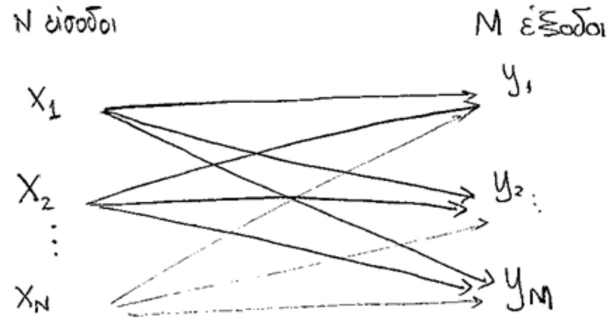
Αν $p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} p(y_1) = (1-f)\cdot\frac{1}{2} + f\,\frac{1}{2} = \frac{1-f+f}{2} = \frac{1}{2} \\ p(y_2) = f\,\frac{1}{2} + (1-f)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα $C = \max_{p(x_i)} H(Y) - H(f) = 1 - H(f)$

<u>Παρατηρήσεις:</u> *Η έξοδος μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη εάν ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

- *Η είσοδος είναι ομοιόμορφά κατανεμημένη και το κανάλι είναι συμμετρικό ή αθόρυβο*
- *Η είσοδος δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα κατανεμημένη αλλά το κανάλι είναι συμμετρικό με f=1/2*
- *Το κανάλι είναι ενθόρυβο γενικής μορφής (βλ. διαφάνεια 3) και με κατάλληλους συνδυασμούς των πιθανοτήτων $p(y_j/x_i)$ και $p(x_i)$ προκύπτουν ομοιόμορφές $p(y_j)$*

Κανάλια Επικοινωνίας



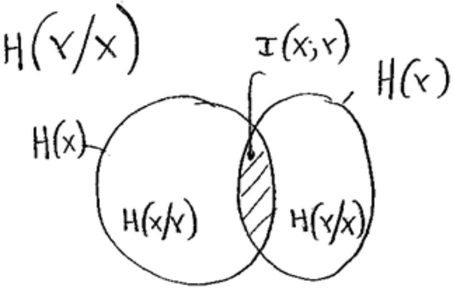
Πίνακας Μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_N \end{array} & \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_2) & \cdots & P(y_M/x_1) \\ \vdots & & & \\ & & & \\ P(y_1/x_N) & & \cdots & P(y_M/x_N) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{M} P(y_j/x_i) = 1$ (Το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα)

Αμοιβαία Πληροφορία:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 20-29

Χωρητικότητα:

$$C = \max\left[I(X;Y)\right]$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j)\cdot \log\left[p(y_j)\right]$$

στήλη j του πίνακα P(Y/X)

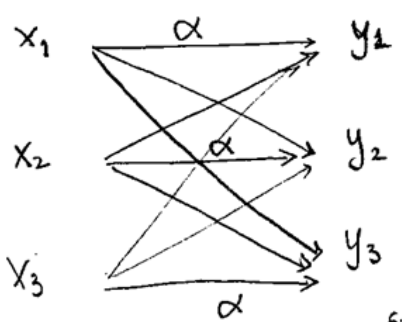
$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(y_j/x_i)\cdot p(x_i)$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left\{p(y_j/x_i)\cdot \log\left[p(y_j/x_i)\right]\cdot p(x_i)\right\}$$

Ειδικές Περιπτώσεις

Συμμετρικό Κανάλι $\rightarrow N = M$

$\rightarrow p(y_i/x_i) = \alpha \quad \forall i$



$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

συμμετρικό Κανάλι 3 εισόδων - εξόδων

Μερικώς Συμμετρικό Κανάλι

Οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών.

π.χ. $P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \end{bmatrix}$

Ιδιότητα Συμμετρικών / Μερικώς Συμμετρικών Καναλιών: 3

$$H(Y/X) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i) \log[p(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

Εξήγηση:

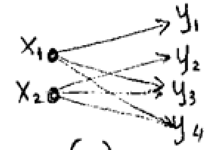
$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\{p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)]\, p(x_i)\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\Big\{p(x_i)\underbrace{\Big\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)]\Big\}}_{\text{Το ίδιο άθροισμα δίνουν όλες οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αφού αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών}}\Big\}$$

$$= -\underbrace{\sum_{i=1}^{N}[p(x_i)]}_{=1}\cdot\Big\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)]\Big\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

Παράδειγμα διαφάνειας 30 9



παρατήρηση:
μερικώς
συμμετρικό
κανάλι.

$$P(Y/X)= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$P(x_1)=a$

$P(x_2)=1-a$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log p(y_j)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(y_j/x_i)\cdot p(x_i)$$

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) =$$

$$= p(y_1/x_1)\cdot p(x_1) + p(y_1/x_2)\cdot p(x_2) =$$

$$= 0,8\cdot a + 0\,(1-a) = 0,8\,a$$

όμοια

$$p(y_2) = 0,8\,(1-a)$$

$$p(y_3) = 0,1$$

$$p(y_4) = 0,1$$

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 30-34

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log p(y_j) = 0,66 - 0,8a\log(0,8a) -$$
$$-0,8\,(1-a)\log\left[0,8\,(1-a)\right]$$

Υπολογισμός $H(Y/X)$ στοιχεία πίνακα $P(Y/X)$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i)\log[P(y_j/x_i)]\cdot P(x_i) =$$

δεδομένο

$$= -\sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i)\log P(y_j/x_i)$$

$i=1$ ή 2
επειδή το κανάλι
είναι μερικώς
συμμετρικό

$$= -[0,8\log(0,8) + 0,1\log 0,1 + 0,1\log 0,1] = 0,9219$$

Χωρητικότητα

$$C = \max[I(X;Y)] = \max[H(Y) - H(Y/X)]$$

- γ) Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή *α.*
- Είναι

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}[H(Y) - H(Y/X)] \\
&= \max_{p(x)}\left[0{,}66 - 0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575 - 0{,}66)\right] \\
&= \max_{p(x)}\left[-0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575\right].
\end{aligned}
$$

- Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του a που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο.

- Επομένως,

$$\frac{dI(X;Y)}{da} = \left[-0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a) - 0{,}2575\right]'$$

$$= -0{,}8\left[(a)'\log(0{,}8a) + a(\log(0{,}8a))'\right]$$

$$-0{,}8\left[(1-a)'\log(0{,}8(1-a)) + (1-a)(\log(1-a))'\right]$$

$$= -0{,}8\left[\log(0{,}8a) + a\frac{\log e}{a}\right] - 0{,}8\left[(-1)\log(0{,}8(1-a)) + (1-a)(-1)\frac{1}{1-a}\log e\right]$$

$$= -0{,}8\log(0{,}8a) - 0{,}8\log e + 0{,}8\log(0{,}8(1-a)) + 0{,}8\log e$$

$$= -0{,}8\left[\log(0{,}8a) - \log(0{,}8(1-a))\right] = -0{,}8\log\frac{0{,}8a}{0{,}8(1-a)} = 0 \Rightarrow$$

$$\log\frac{a}{1-a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{1-a}\right) = 2^0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Σημείωση: Εφόσον έχουμε μερικώς συμμετρικό κανάλι μπορούσαμε να πούμε ότι η μέγιστη H(Y) που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφα κατανεμημένες εξόδους προκύπτει από ομοιόμορφα κατανεμημένες εισόδους άρα α=1/2 χωρίς να γίνει παραγώγιση

- Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του *a*, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού
- *C=0,8 bits/symbol.*

ΘΕΜΑ 5 ΕΞ2016Α

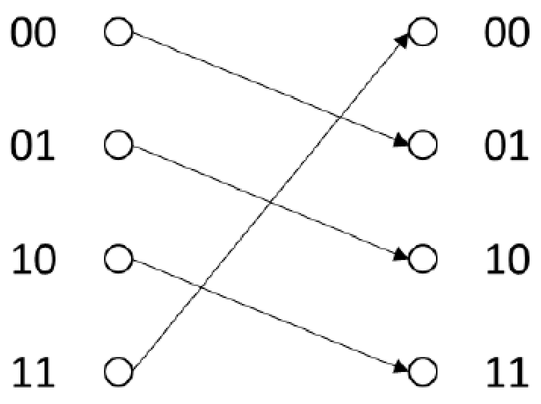
Ένα κανάλι χωρίς μνήμη, C1, μεταδίδει ζευγάρια δυαδικών ψηφίων όπου το κάθε διακριτό ζευγάρι μεταδίδεται από διαφορετική είσοδο ενώ αντίστοιχα τα ζευγάρια αυτά εμφανίζονται σε διακριτές εξόδους του σύμφωνα με την παρακάτω αντιστοίχιση (είσοδος → έξοδος): 00→01, 01→10, 10→11, 11→00.

α) Να σχεδιάσετε το κανάλι και να βρείτε τον πίνακα μετάβασης του καναλιού και το είδος του καναλιού.

β) Αν κάθε ψηφίο {0,1} παράγεται ανεξάρτητα από το προηγούμενο και σύμφωνα με τις πιθανότητες p(0)=1/3 και p(1)=2/3, να βρείτε την αμοιβαία πληροφορία του καναλιού.

γ) Ποια η χωρητικότητα του καναλιού και για ποιες τιμές των p(0) και p(1) επιτυγχάνεται;

α) Εφόσον το κανάλι μεταδίδει ζευγάρια δυαδικών ψηφίων οι πιθανές είσοδοι του καναλιού είναι 4 δηλαδή {00, 01,10,11} και αντίστοιχα 4 είναι και οι έξοδοι του καναλιού. Με δεδομένο ότι το κανάλι συμπεριφέρεται σύμφωνα με την αντιστοίχιση της εκφώνησης το κανάλι αλλά και ο πίνακας μετάβασης είναι όπως παρακάτω



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το κανάλι είναι χωρίς θόρυβο.

β) Με δεδομένο ότι η παραγωγή των δυαδικών ψηφίων είναι ανεξάρτητη μεταξύ του αυτό σημαίνει ότι οι πιθανότητες για κάθε ζεύγος δυαδικών ψηφίων είναι

P[00]=p(0)*p(0)=1/3*1/3=1/9
P[01]=p(0)*p(1)=1/3*2/3=2/9
P[10]=p(1)*p(0)=2/3*1/3=2/9
P[11]=p(1)*p(1)=2/3*2/3=4/9

Άρα η αμοιβαία πληροφορία του αθόρυβου καναλιού είναι

$$I(X)=H(X)=H\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right)=1.837\ bits$$

γ) Συνεπώς η χωρητικότητα του καναλιού επιτυγχάνεται όταν μεγιστοποιείται η εντροπία H(X) όταν δηλαδή έχουμε 4 ισοπίθανες εισόδους, P(X=i)=1/4 για κάθε i={00, 01, 10, 11} και άρα όταν p(0)=p(1)=1/2. Άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι C=maxH(X)=2 bits

<u>ΘΕΜΑ 4</u> ΕΞ2012Β

Μια ψηφιακή πηγή **3** συμβόλων $\{x_1, x_2, x_3\}$ εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο x_1 από την πηγή είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι πιθανότητες εκπομπής των άλλων δύο συμβόλων είναι ίσες. Να απαντηθούν τα ερωτήματα σε κάθε μία από τις παρακάτω 2 περιπτώσεις

α) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα <u>σε κανάλι χωρίς θόρυβο.</u> Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η χωρητικότητα του καναλιού **C** και η εντροπία της πηγής **H(X)**
- **ii)** Η εντροπία **H(X/Y)**

β) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα <u>σε ενθόρυβο κανάλι</u> με πίνακα μετάβασης,

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η εντροπία της πηγής **H(X)** και η **H(Y/X)**
- **ii)** Η αμοιβαία πληροφορία του ενθόρυβου καναλιού.

Για επιπλέον παραδείγματα
βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides
διαφάνειες 35-43

α). Κανάλι χωρίς θόρυβο

i) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι υπόλοιπες είναι $p(x_2) = p(x_3) = 0.3$
Άρα η εντροπία της πηγής είναι:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2(p(x_i)) = -\left[0.4\cdot\log_2(0.4) + 0.3\cdot\log_2(0.3) + 0.3\cdot\log_2(0.3)\right] \approx 1.57\ bits$$

Γνωρίζω ότι η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς θόρυβο ισούται με τη μέγιστη τιμή του **H(X)** («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89) η οποία προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε
$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{3}$
Η χωρητικότητα δίνεται από

$$C = \max(H(X)) = \log_2 q\Big|_{q=3} = \log_2(3) = 1.58 \text{ bits/symbol}$$

όπου q είναι ο αριθμός συμβόλων εισόδου

ii) Επιπλέον, η εντροπία H(X/Y) ισούται με 0 αφού X=Y κι όπως αποδεικνύεται και στο βιβλίο σελ. 90.

β) Ενθόρυβο Κανάλι

i) Αν στο κανάλι εισαγάγουμε θόρυβο δεν αναμένεται να αλλάξει η εντροπία της πηγής αλλά μόνο η χωρητικότητα του καναλιού η οποία αναμένεται να είναι μικρότερη από αυτή του ερωτήματος (α)
Επομένως η εντροπία της πηγής H(X) είναι ίδια με αυτή του ερωτήματος (α).

Δεδομένου ότι το κανάλι έχει πίνακα μετάβασης

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Η εντροπία H(Y/X) δίνεται από τον τύπο

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{3} p(x_i)H(Y/X=x_i) \qquad (1)$$

Άρα για κάθε i=1,2,3 έχουμε

$$H(Y/X=x_i)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις πιθανότητες κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης έχουμε:

$$H(Y/X=x_1)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_1)\log p(y_j/x_1)=-0.5\log 0.5-0.5\log 0.5-0\log 0=1\,bits$$

$$H(Y/X=x_2)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_2)\log p(y_j/x_2)=-0\log 0-0.25\log 0.25-0.75\log 0.75=0,811\,bits$$

$$H(Y/X=x_3)=-\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_3)\log p(y_j/x_3)=-0.5\log 0.5-0\log 0-0.5\log 0.5=1\,bits$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (1) έχουμε

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{3} p(x_i)H(Y/X=x_i)=0.4\cdot 1+0.3\cdot 0.811+0.3\cdot 1\approx 0,943\,bits \qquad (2)$$

ii).

Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) θα κάνουμε χρήση του τύπου $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εξόδου $P(Y)=\{p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\}$ οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω

$$P[Y]=[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3,x_i)\right]$$

Γνωρίζω ότι ισχύει $p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)$ («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25) και επομένως θα έχουμε

$$P(Y,X)=\begin{bmatrix} p(y_1,x_1) & p(y_2,x_1) & p(y_3,x_1) \\ p(y_1,x_2) & p(y_2,x_2) & p(y_3,x_2) \\ p(y_1,x_3) & p(y_2,x_3) & p(y_3,x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p(x_1)\cdot p(y_1/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_2/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_3/x_1) \\ p(x_2)\cdot p(y_1/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_2/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_2) \\ p(x_3)\cdot p(y_1/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_2/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_3/x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.4\cdot 0.5 & 0.4\cdot 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3\cdot 0.25 & 0.3\cdot 0.75 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0 & 0.3\cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0.225 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Οπότε το ζητούμενο δίνεται από

$$P[Y]=[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3,x_i)\right]=$$

$$=[0.35 \quad 0.275 \quad 0.375]$$

$$p(y_1)=0.35$$

$$p(y_2)=0.275$$

$$p(y_3)=0.375$$

Συνεπώς

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{3} p(y_i)\log_2(p(y_i))=-\left[0,35\cdot\log_2(0,35)+0,275\cdot\log_2(0,275)+0,375\cdot\log_2(0,375)\right]=1.573\,bits$$

Από την παραπάνω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού είναι:

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=1.573-0.943\approx 0.63\,bits$$

Σημείωση: Εάν η άσκηση ζητούσε τη χωρητικότητα θα έπρεπε να γίνει διερεύνηση της μεγιστοποίησης της I(X;Y) με παραγώγιση υποθέτοντας παραμετρικές πιθανότητες εισόδων Το κανάλι δεν έχει κάποια συμμετρία οπότε δεν συνεπάγεται ότι ομοιόμορφα καταμενημένες είσοδοι δίνουν ομοιόμορφα καταμενημένες εξόδους.

ΕΞ2011Α

ΘΕΜΑ 4

Έστω η πηγή χωρίς μνήμη S1 που παράγει τα σύμβολα {α,β,γ,δ,ε} βάσει της κατανομής {0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2} και η πηγή με μνήμη S2, η οποία χαρακτηρίζεται από τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

ενώ οι στατικές πιθανότητες π_i, i=1,2,3,4,5 που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος $\boldsymbol{\pi P = \pi}$ είναι όπως στην περίπτωση της πηγής χωρίς μνήμη δηλαδή $\pi_i=0.2$, i=1,2,3,4,5.

α) Να βρείτε ποια από τις δύο πηγές έχει την μικρότερη εντροπία.

β) Αν θεωρήσουμε τον παραπάνω πίνακα μετάβασης ως τον πίνακα μετάβασης ενός καναλιού και ότι η S1 είναι η πηγή συμβόλων που αποστέλλονται με την κατανομή του ερωτήματος (α) πάνω από αυτό το κανάλι βρείτε τα παρακάτω:

(i) Τι είδους *χαρακτηριστικό* κανάλι αντιπροσωπεύει ο πίνακας μετάβασης P;

(ii) Βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού αυτού. Είναι δυνατόν το πληροφορικό περιεχόμενο που μετάδωσε η πηγή S1 πάνω από το κανάλι να είναι ίσο με την χωρητικότητα του καναλιού; Εξηγείστε την απάντησή σας.

α) Η πηγή με μνήμη έχει μικρότερη εντροπία από την αντίστοιχη χωρίς μνήμη λόγω του ότι η εξάρτηση μειώνει την εντροπία της πηγής. Άρα H(S1)>H(S2).

Εναλλακτικά για να υπολογίσουμε την εντροπία της πηγής S1 η οποία είναι χωρίς μνήμη και άρα τα σύμβολα παράγονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο εφαρμόζουμε τον τύπο της εντροπίας

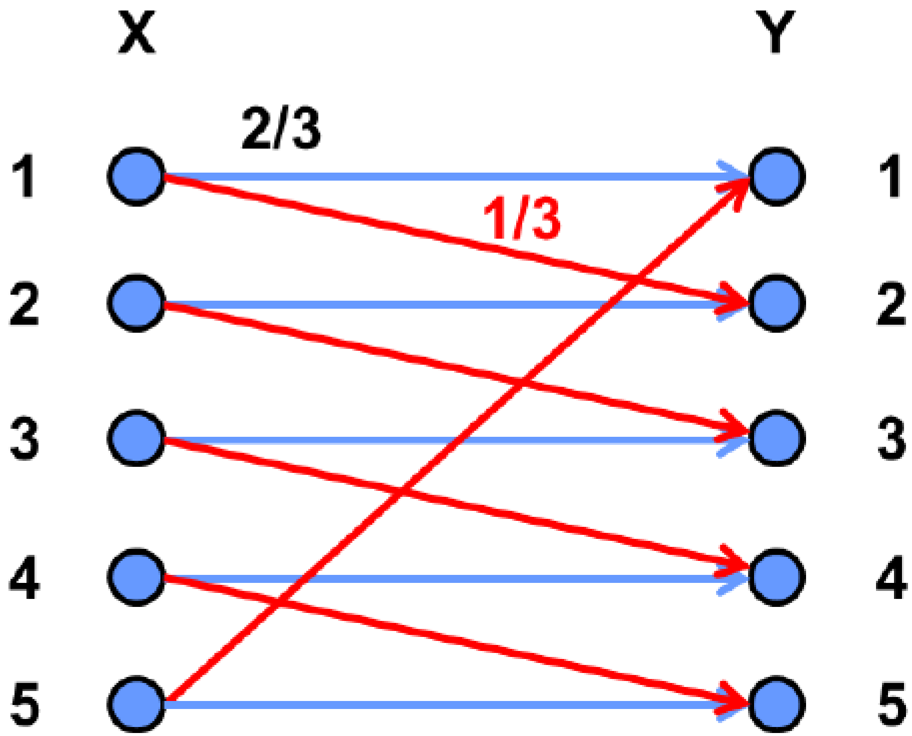
$$H(S1) = -\sum_{i=1}^{5} p_i \log(p_i) = -\sum_{i=1}^{5} 0.2 \log(0.2) = 2.322 \; bits$$

Στην περίπτωση της πηγής με μνήμη S2 η εντροπία της πηγής είναι

$$\begin{aligned} H(S2) &= -\sum_{i=1}^{5} \pi_i \sum_{j=1}^{5} p_{ij} \log(p_{ij}) = -\sum_{i=1}^{5} 0.2 \left(\frac{2}{3} \log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{1}{3}\right) \right) \\ &= -\left(\frac{2}{3} (\log 2 - \log 3) + \frac{1}{3} (\log 1 - \log 3) \right) = \frac{2}{3} 0.585 + \frac{1}{3} 1.585 \\ &= 0.918 \; bits \end{aligned}$$

Οπότε H(S1)>H(S2).

β) Ο πίνακας μετάβασης αντιπροσωπεύει κανάλι το οποίο συμπεριφέρεται ως ενθόρυβη γραφομηχανή.



Για να βρούμε τη χωρητικότητα του καναλιού πρέπει πρώτα να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y)

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

Άρα

$$H(Y/X) = -\left[\sum_{j=1}^{5} P(X=j) \sum_{i=1}^{5} P(Y=i/X=j)\log\left(P(Y=i/X=j)\right)\right]$$

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\left[\sum_{j=1}^{5} P(X=j)\left\{\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right\}\right] \\ &= -\left[\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right] \\ &= H\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$I(X;Y) = H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right)$$

Αφού βρήκαμε την αμοιβαία πληροφορία, προχωρούμε να βρούμε την χωρητικότητα του καναλιού που προκύπτει από αυτή μέσω της μεγιστοποίησή της

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left(H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right) \right)$$

Άρα το πρόβλημα μεγιστοποίησης μεταφέρεται στην μεγιστοποίηση της H(Y) η οποία παίρνει την μέγιστη τιμή όταν οι έξοδοι είναι ισοπίθανοι, δηλαδή όταν

H(0,2)=log5

Άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \log 5 - H\left(\frac{1}{3}\right) bits$$

Επειδή η μεγιστοποίηση της H(Y) είναι συναρτήσει των πιθανοτήτων εισόδου θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει κατάλληλη κατανομή πιθανοτήτων εισόδου η οποία όντως μεγιστοποιεί την εντροπία εξόδου. Πράγματι παρατηρούμε ότι η πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της πηγής εισόδου μεγιστοποιούν την εντροπία της εξόδου.

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{5} P(Y=j/X=i)P(X=i)$$
$$= P(Y=i/X=i)P(X=i) + P(Y=i/X=i-1)P(X=i-1) \quad , \text{ για κάθε i,j=1,2,3,4,5}$$
$$= \frac{2}{3}0.2 + \frac{1}{3}0.2 = 0.2$$

Άρα στην περίπτωσή μας το πληροφορικό περιεχόμενο ισούται με την μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού

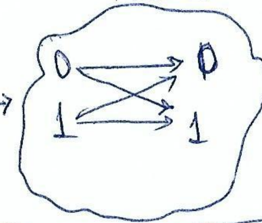
Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

Κωδικοποίηση: Γραμμικοί κώδικες

Μήνυμα — Πλεονασμός(parity)

$$\underbrace{[d_1\ d_2 \cdots d_k][p_1 p_2 \cdots p_{n-k}]}_{\text{Κωδικολέξη } n \text{ bits (στοιχείο κώδικα)}} \longrightarrow \text{Κανάλι} \longrightarrow \text{ληφθείσα λέξη}$$

Κανάλι



$\oplus$ $\underbrace{[0\,0\,1\,0\,0\,1 \ldots 0]}_{\text{πρότυπο σφάλματος}}$

ληφθείσα λέξη

↑ χρήση πλεονασμού για ανίχνευση ή διόρθωση σφαλμάτων

Ρυθμός πληροφορίας $r = \frac{k}{n}$

Γραμμικός κώδικας $\mathbb{C}$: {σύνολο κωδικολέξεων}

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 47-57

ιδιότητες

1) $\forall\ x,y \in \mathbb{C}\ ,\ x+y \in \mathbb{C}$

2) $\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ bits}} \in \mathbb{C}$

Μήκος Κώδικα: n
Διάσταση κώδικα: k

3) $p_i = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i$ Κάθε ψηφίο ισοτιμίας είναι γραμμικός συνδυασμός των ψηφίων μηνύματος ($a_i = 0$ ή 1)

όροι: βάρος κωδικολέξης: Πλήθος των '1' που έχει η κωδικολέξη π.χ $wt(1011) = $ "3"

απόσταση γραμμικού κώδικα: ελάχιστη απόσταση μεταξύ 2 κωδικολέξεων

→ ελάχιστο μη μηδενικό βάρος κωδικολέξης

Κωδικοποίηση / Πλεονασμός

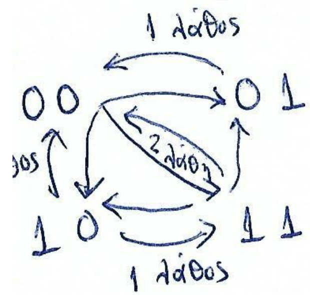
Μήνυμα.

d_1	d_2	$p_1 = d_1 + d_2$	$p_2 = d_1$	$p_3 = d_2$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

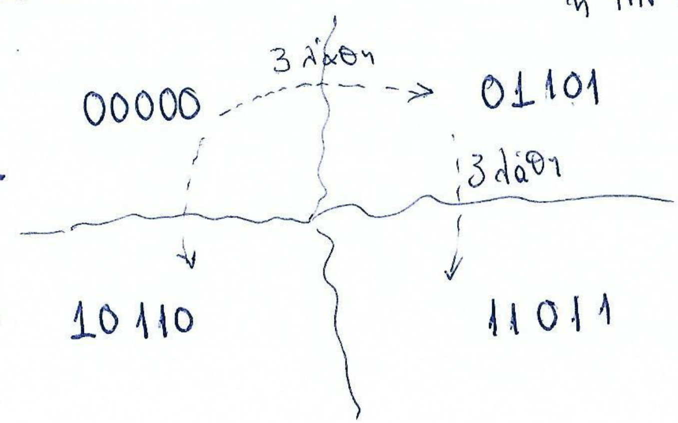
$2^k = 2^2$ κωδικολέξεις

Κώδικας (5,2)

Απόσταση κώδικα: ελάχιστο βάρος $d = 3$ (από 2η κωδικολέξη 01101
ή την 3η -"- 10110)



Κωδικοποίηση



Δημιουργία "απόστασης ασφαλείας" μεταξύ διαφορετικών μηνυμάτων

Κώδικας $\{00000, 01101, 10110, 11011\} = C$

Απόσταση $d=3$. Διορθώνει όλα τα $\frac{d-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ λάθη

π. χ.

Αποστολή $01\,101 \longrightarrow$ λήψη 00101

? έλεγχος σφαλμάτων

Σύγκριση ληφθείσας λέξης με όλες τις κωδικές λέξεις

00101 →	00000	απόσταση	2
	01101	—″—	1 $\xrightarrow[\text{απόσταση}]{\text{ελάχιστη}}$ άρα σωστή λέξη 01101 (σφάλμα στο 2ο bit)
	10110	—″—	3
	11011	—″—	4

Άρα μήνυμα '01'

Ικανότητες διόρθωσης/ανίχνευσης σφαλμάτων

Κώδικας C απόστασης d

$\Rightarrow$ Ανιχνεύει όλα τα σφάλματα ε με $wt(\varepsilon) < d-1$

$\Rightarrow$ Δεν ανιχνεύει ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με $wt(\varepsilon) = d$

$\Rightarrow$ Διορθώνει όλα τα σφάλματα ε με

$$wt(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \leftarrow \text{ακέραιο μέρος}$$

$\Rightarrow$ Δεν διορθώνει ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με

$$wt(\varepsilon) = 1 + \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

σοδύναμη Μέθοδος

Αθροίζουμε τη ληφθείσα λέξη 00101 με όλες τις λέξεις του κώδικα:

$$00101 + \{00000, 01101, 10110, 11011\} =$$

$$= \{00101, 01000, 10011, 11110\} \longrightarrow \text{συνομάδα } C + 00101$$

ελάχιστο ~~[illegible]~~ βάρος άρα επιλέγουμε την αντίστοιχη 2η κωδικολέξη 01101

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 82-91

συνομάδα $C + 00101$ = συνομάδα $C + 01000$

$$01000 + C = \{01000, 00101, 11110, 10011\}$$

αν καταλήγαμε σε 2 υποψήφιες λέξεις με την ίδια απόσταση από τη ληφθείσα:

- → Επιλέγουμε τυχαία μια από τις 2 (Πλήρης Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΠΑΜΠ)
- → Δεν επιλέγουμε και ζητείται επανεκπομπή (Ατελής Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΑΑΜΠ

Πλήθος συνομάδων ενός γραμμικού κώδικα $C(n,k) = 2^{n-k}$

$C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

η 1 συνομάδα είναι η $C + 00000$ (ο ίδιος ο κώδικας)

οι υπόλοιπες $2^{5-2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ συνομάδες προκύπτουν

προσθέτοντας στον κώδικα τις λέξεις

00001, 00010, ..., 00111 (γιατί?)

5

Βάση Κώδικα: Εύρεση γεννήτορα πίνακα Διαστάσεων $k \times n$

$$G_{k \times n} = \left[I_k \;\vdots\; M_{k,n-k} \right]$$

← οι γραμμές αντιστοιχούν σε κωδικολέξεις

...ρφή ...ρισμένης κλιμακωτής ...αξης γραμμών ΠΚΔΓ

π.χ. $C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 66-80-

$k=2, \quad n=5$

$$G = \underbrace{\left[I_2 \;\vdots\; M_{2,3} \right]}_{5 \text{ στήλες}} \Big\} \text{2 γραμμές}$$

Επιλογή 2 στοιχείων του C για το 'χτίσιμο' του I_2 (2η, 3η κωδ/λέξη)

$$G = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

άρα βάση του C: $\{10110, 01101\}$

Χρήση G:

μήνυμα × G = κωδικολέξη

π.χ. για το μήνυμα 11:

$$11 \times \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = 1 \cdot 10110 + 1 \cdot 01101 =$$

$$= 11 \vdots 011$$

Για την αποκωδικοποίηση:

Κατασκευή πίνακα ισοτιμίας H.

$$H = \begin{bmatrix} M_{k,n-k} \\ \hline I_{n-k} \end{bmatrix}$$

ιδιότητα: $G \cdot H = [0]_{k,n-k}$

Για τον κώδικα C με $G = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

M

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} I_3 \end{matrix}$$

$$G \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αποκωδικοποίηση ληφθείσας λέξης c_0:

- πολλαπλασιασμός $c_0 \cdot H$
- Αν $c_0 \cdot H = 0$, τότε c_0 ανήκει στον κώδικα.
- Αν $c_0 \cdot H \neq 0$ τότε το αποτέλεσμα συγκρίνεται με πίνακα ΤΔΑ

Κατασκευή πίνακα Τοπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) 8

υπα Σφάλματος ελαχίστου βάρους x_i	Σύνδρομο $x_i H$
1 0 0 0 0	1 1 0
0 1 0 0 0	1 0 1
0 0 1 0 0	1 0 0
0 0 0 1 0	0 1 0
0 0 0 0 1	0 0 1
0 0 0 1 1 ή 11000	0 1 1
10001 ή 01010	1 1 1

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εαν υπολογιστεί ένα από αυτά τα σύνδρομα
- στην ΠΑΜΠ επιλέγεται τυχαία ένα από τα υποψήφια πρότυπα σφάλματος
- στην ΑΑΜΠ ζητείται επανεκπομπή άρα στα πρότυπα σφάλματος βάζουμε '-'

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides
διαφάνειες 82-91

π.χ. λήψη 1 0000

$10000 \times H = 110$

από πίνακα ΤΔΑ πρότυπο σφάλματος → 10000

άρα σωστή λέξη $10000 + 10000 = \underbrace{00}_{\text{μήνυμα}}000$

λήψη 1 1 1 1 1

$$11111 \times H = 11111 \cdot \begin{bmatrix} 110 \\ 101 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} = 100 \longrightarrow \text{πρότυπο σφάλματος } 00100$$

άρα σωστή λέξη: $11111 + 00100 = \underbrace{11}_{\text{μήνυμα}}011$

Εύρεση Απόστασης Κώδικα.

- $d \leq n-k$ (όριο Singleton)
- Αν έχουμε όλες τις λέξεις του κώδικα: ελάχιστο βάρος μη μηδενικό

$$C = \{00000,\ 01101,\ 10110,\ 11011\}$$

$$0 \qquad \underbrace{3 \qquad\qquad 3}_{d=3} \qquad 4$$

- Από τους G, H:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ελάχιστος αριθμός γραμμών που αθροιζόμενες δίνουν '000'
(ελάχιστες γραμμικά εξαρτημένες γραμμές)

2 ίσες γραμμές? όχι

3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές? ΝΑΙ

π.χ. η 1η, 3η, 4η αθροιζόμενες δίνουν '000'

Δυικός Κώδικας ενός κώδικα $C:(n,k)$

Συμβολίζεται με $C^{\perp}(n, n-k)$

Ιδιότητα: Για κάθε στοιχείο α_i του C και b_j στοιχείο του $C^{\perp}$

ισχύει $\alpha_i \cdot b_j = 0$

οι στήλες του πίνακα H για τον C δίνουν μια βάση

για τον $C^{\perp}$

$C_{(5,2)} = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ άρα μια βάση $C^{\perp} = \{11100, 10010, 01001\}$

Ιδιότητα ~~καθετότητας~~ ορθογωνιότητας $C, C^{\perp}$

π.χ $(01101) \times (10010) = 0\cdot1+1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0$
$= 0$

$11011 \times 11100 = 1\times1+1\times1+0\times1+1\times0+1\times0 =$
$= 1+1+0+0+0 = 0$

Κατασκευή γεννήτορα πίνακα $C^{\perp}$ από τα στοιχεία της βάσης που υπολογίστηκαν:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{δεν έχει μορφή } I_3}$$

δεν έχει μορφή I_3

ακολουθούν γραμμοπράξεις
- πρόσθεση γραμμών
- εναλλαγή γραμμών

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

μορφή ΠΚΔΓ

άρα μια άλλη βάση $C^{\perp} = \{10010, 01001, 00111\}$

$$H_{C^{\perp}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απόσταση ?

$d' \leq 5 - 3 = 2$

ο $H_{C^{\perp}}$ έχει 2 ίσες γραμμές (1η, 4η ή 2η, 5η)

άρα $d = 2$

ΕΞ2016Α

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γραμμικός κώδικας C με πίνακα ελέγχου ισοτιμίας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

α). Ο γεννήτορας πίνακας G.

β). i. Η διάσταση και η απόσταση του κώδικα, δηλαδή οι παράμετροι (7, k, d), καθώς και

ii. Το πλήθος των διαφορετικών συνομάδων του κώδικα.

γ). Να δείξτε ότι η λέξη $s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ δεν είναι κωδική λέξη του γραμμικού κώδικα C

δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

ε) Το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$, η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη $z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

α) Δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας H είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

β). i. Η διάσταση του πίνακα είναι k=4 και η απόστασή του μπορεί να *προσδιορισθεί με τη βοήθεια του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, υπολογίζοντας τον ελάχιστο αριθμό γραμμών του πίνακα των οποίων το άθροισμα είναι 0.*
Οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο αυτό στις γραμμές $1^η$,$4^η$,$6^η$ παρατηρούμε ότι το άθροισμα είναι μηδέν επομένως η ταυτότητα του κώδικα είναι (7,4,3)
ii. Σύμφωνα με το βιβλίο «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 142, το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, διάστασης k=4 και μήκους n=7 ισούται με $2^{7-4} = 8$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη s στον κώδικα C θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.
Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.
Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$

$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζετε και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

Κώδικας Hamming:

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 109-114

Χαρακτηριστικά:

→ Μήκος της μορφής $n = 2^r - 1 \quad r \geq 2$

→ Πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H με όλες τις μη μηδενικές λέξεις μήκους r

→ Διάσταση $k = n - r = 2^r - 1 - r$

→ Απόσταση $d = 3$

→ Ικανότητα διόρθωσης 1 σφάλματος $\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1\right)$

→ Στην ΤΔΑ ο πίνακας συνδρόμων περιλαμβάνει όλες τις γραμμές του H [όλες τις δυνατές λέξεις μήκους r]

Όριο Hamming.

Αν έχουμε κώδικα C με πλήθος κωδικών λέξεων $|C|$ μήκος κωδικολέξης n και απόσταση $d = 2t+1$ ή $d = 2t+2$

τότε ισχύει ότι $$|C| \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{t}\right] \leq 2^n$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Τέλειοι κώδικες

Αν $d = 2t+1$ και ισχύει η ανωτέρω σχέση με το σύμβολο της ισότητας, ο κώδικας είναι **Τέλειος**

Παράδειγμα Κώδικα Hamming

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

← όλες οι δυνατές μη μηδενικές λέξεις 3 bit

$n = 7$

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$k = 4$

$d \leq 7 - 4 = 3$ (όριο Singleton)

$d = 3$ (ιδιότητα Hamming)

Πλήθος κωδικολέξεων

$$|C| = 2^k = 2^4$$

Υπολογισμός ορίου Hamming $d = 2\cdot 1 + 1$

$t = 1$

$$|C| \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{t}\right] =$$

$$= 2^4 \cdot \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1}\right] = 2^4 \cdot \left[\frac{7!}{0!\,7!} + \frac{7!}{1!\cdot 6!}\right] =$$

$$= 2^4 \left[1 + 7\right] = 2^4 \cdot 8 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7 = 2^n.$$

∴ Άρα, <u>τέλειος κώδικας</u>

Πρόσθετα παραδείγματα

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 92-107-

ΘΕΜΑ 2/ΓΕ5/2012-13

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με έννοιες και αλγόριθμους που εφαρμόζονται σε γραμμικούς κώδικες ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις: *Θ3/ΓΕ5/2011-12, Θ4/ΓΕ5/2010-11, Θ4/ΓΕ5/2009-10, Θ5/ΕΞ2009Α και Θ5/ΕΞ2010Β*

Δίνεται κώδικας Hamming μήκους 7 με πίνακα ισοτιμίας τον ακόλουθο:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Να προσδιοριστούν τα α_1, α_2, α_3,

(β). Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

(γ). Δείξτε ότι η λέξη

$$s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

δεν είναι κωδική λέξη του κώδικα.

(δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

(ε).Να βρεθούν το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη

$$z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

α). Επειδή ο κώδικας είναι Hamming μήκους n=7, ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H πρέπει να απαρτίζεται από όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3 (βλ. τον ορισμό κώδικα Hamming, σελ. 151 βιβλίου, Ορισμός 4.6) αφού ισχύει

$$n = 2^r - 1 = 7$$

Επομένως η απόστασή του είναι d=3 και η διάστασή του είναι k=4.

Α! τρόπος.

Με απλή παρατήρηση των γραμμών του H βλέπουμε ότι οι παραμετρικές γραμμές αντιστοιχούν στις λέξεις 101 και 110 οπότε, λόγω και της θέσης των παραμέτρων α_1, α_2, α_3 στις παραμετρικές λέξεις θα έχουμε:

α_1=0, α_2=1, α_3=1.

Β! τρόπος

Για να υπολογίσω τους άγνωστους συντελεστές του πίνακα θα χρησιμοποιήσω τον κανόνα υπολογισμού της απόστασης του με τη χρήση *του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό γραμμών του πίνακα των οποίων το άθροισμα είναι 0.*

Βήμα 1^{ο}

Χρησιμοποιώ τις γραμμές 3^{η}, 4^{η}, 7^{η}

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = 1$$

Επομένως ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$
H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Βήμα 2ο

Χρησιμοποιώ τις γραμμές 1η, 2η, 3η

$$[1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2] + [0 \quad 1 \quad 1] + [\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad 0] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$[1 + 0 + 1 \quad \alpha_1 + 1 + \mathbf{1} \quad \alpha_2 + 1 + 0] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1}$$

Τελικά ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β). Όπως γνωρίζω δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας Η είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη **s** στον κώδικα, θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.

Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.

Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$
\begin{aligned}
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot H &= [0 \quad 0 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 1] \\
[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 1]
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

Παρατηρούμε ότι για κώδικες Hamming οι Τυπικές Διατάξεις Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ "συμπίπτουν"

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$
$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζεται και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 4 /ΓΕ5/2009-10

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με έννοιες και αλγόριθμους που εφαρμόζονται σε γραμμικούς κώδικες ελέγχου σφάλματος. Σχετικές ασκήσεις: Θ3/ΓΕ5/2008-9.*

Θεωρούμε τον δυαδικό κώδικα ο οποίος προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις

1) $x_0 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3$,

2) $x_1 = u_0 \oplus u_1 \oplus u_2$,

3) $x_2 = u_0 \oplus u_1 \oplus u_3$,

4) $x_3 = u_0 \oplus u_2 \oplus u_3$,

5) $x_4 = u_0$,

6) $x_5 = u_1$,

7) $x_6 = u_2$,

8) $x_7 = u_3$

Τα x_i, i=0,1,…,7 είναι τα ψηφία του κώδικα που προκύπτουν από την κωδικοποίηση 4 bits πληροφορίας u_j, j=0,1,2,3

(α) Είναι ο κώδικας συστηματικός; Είναι ο κώδικας γραμμικός; Εάν ναι, ποια είναι η διάστασή του και ποιος ο ρυθμός του κώδικα;

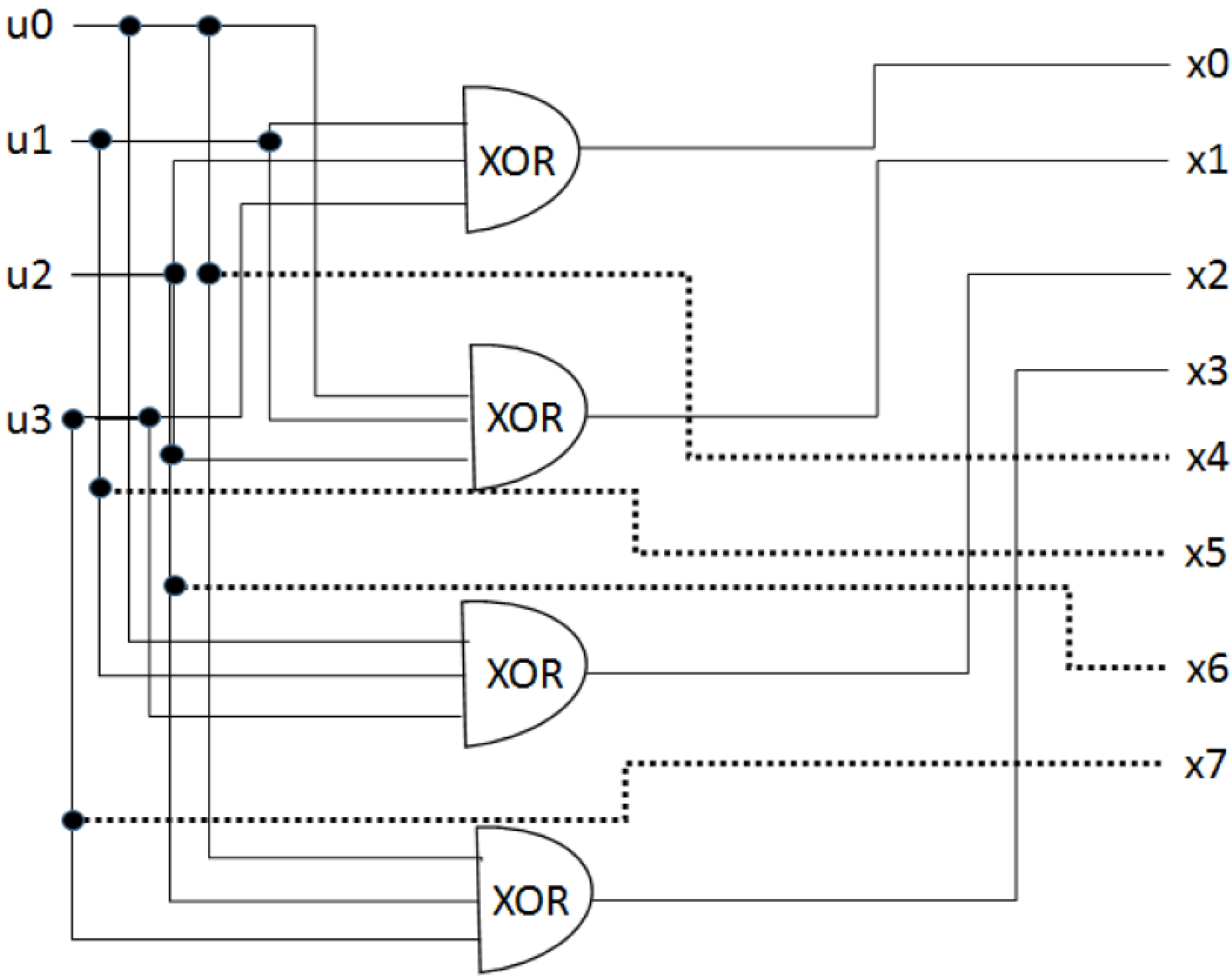
(β) Βρείτε το γεννήτορα πίνακα G καθώς και τον πίνακα ισοτιμίας H.

(γ) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση d_{min}, του κώδικα. Πόσα λάθη ανιχνεύει και πόσα διορθώνει;

(δ) Βρείτε το δυϊκό κώδικα $C^{\perp}$. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τον κώδικα C;

{Υπόδειξη: Για να βρείτε πώς συνδέονται οι δύο κώδικες αρκεί να δημιουργήσετε τις κωδικές λέξεις μέσω των γεννητόρων πινάκων και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους.}

1. Ο κώδικας είναι συστηματικός δεδομένου ότι τα ψηφία πληροφορίας $\mathbf{u_0}$ - $\mathbf{u_3}$ περνούν αυτούσια στον αποκωδικοποιητή αφού καταλαμβάνουν αντίστοιχα τα ψηφία $\mathbf{x_4}$ – $\mathbf{x_7}$ της κάθε κωδικής λέξης. Ο κώδικας είναι γραμμικός γιατί όλες οι εξισώσεις από τις οποίες ορίζεται είναι γραμμικές. Η διάσταση του κώδικα είναι k=4 δεδομένου ότι κωδικοποιούμε 4 ψηφία πληροφορίας και ο κώδικας είναι συστηματικός οπότε οι γραμμές του γεννήτορα πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Τέλος ο ρυθμός του κώδικα είναι k/n=4/8=1/2.Παρακάτω παρατίθεται ενδεικτικά το διάγραμμα του κώδικα (δεν ζητείται από την εκφώνηση)


u0
u1
u2
u3
XOR
XOR
XOR
XOR
x0
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7

2. Ο γεννήτορας πίνακας G θα είναι της μορφής [M I] καθότι τα ψηφία πληροφορίας καταλαμβάνουν τις 4 τελευταίες θέσεις της κάθε κωδικής λέξης. Για το λόγο αυτό μπορούμε να δημιουργήσουμε τον γεννήτορα πίνακα με γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα βάσης δημιουργώντας τον μοναδιαίο πίνακα I_{4x4} στο τέλος του G και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της άσκησης για να βρούμε τον M_{4x4}. Έτσι έχουμε,

$$G = \begin{bmatrix} M & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Sigma\chi\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma \\ x_0 - x_3}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα ο πίνακας ισοτιμίας H που προκύπτει είναι

$$H = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Η ελάχιστη απόσταση d_{min} του κώδικα θα προκύψει από τον πίνακα ισοτιμίας H.

Παρατηρούμε ότι d_{min} > 2 διότι δεν υπάρχουν δύο ίδιες γραμμές στον πίνακα H. Επίσης παρατηρούμε ότι d_{min} > 3 διότι . Όλες οι γραμμές του H έχουν περιττό αριθμό '1'. Παρατηρούμε λοιπόν ότι d_{min} = 4 διότι μπορούν να βρεθούν 4 γραμμές του H που το άθροισμά τους να είναι 0, π.χ. η $1^η$, $2^η$, $3^η$ και $6^η$ γραμμή ή $2^η$, $3^η$, $4^η$ και $5^η$ γραμμή κ.ο.κ.

Έτσι λοιπόν ο κώδικας ανιχνεύει 3 λάθη και διορθώνει 1 λάθος.

4. Γνωρίζουμε ότι οι στήλες του πίνακα ισοτιμίας H του κώδικα C αποτελούν τα διανύσματα βάσης του δυϊκού κώδικα $C^{\perp}$ και άρα δημιουργούν τον γεννήτορα πίνακα $G^{\perp}$ του δυϊκού κώδικα $C^{\perp}$.

Δηλαδή έχουμε ότι

$$G^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & M \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τους δύο γεννήτορες πίνακες μπορούμε να δούμε ότι δημιουργούν τον ίδιο κώδικα. Δηλαδή ο κώδικας C και ο δυϊκός του κώδικας είναι ίδιοι. Ένας κώδικας που ταυτίζεται με τον δυϊκό του λέγεται αυτοδυϊκός.

ΘΕΜΑ 5 ΕΞ2012Β

Δίνονται οι συστηματικοί γραμμικοί κώδικες C1={00000, 10010, 01101, 11111} και C2={000000, 100101, 011010, 111111} και C3= {0000000, 1001011, 0110110, 1111101}. Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Ο ρυθμός πληροφορίας του κάθε κώδικα,
2. Μια βάση σε μορφή ΠΚΔΓ,
3. Τη διάσταση και την απόσταση καθενός από τους κώδικες C1, C2 και C3.
4. Ο αριθμός των σφαλμάτων που ανιχνεύει και διορθώνει καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.
5. Δείξτε από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν ανιχνεύει και από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν διορθώνει σωστά καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.

Απάντηση

1. Αφού όλοι οι κώδικες έχουν 4 κωδικές λέξεις, δηλαδή τα διαφορετικά μηνύματα είναι 4, αρκούν 2 bits για την παράστασή τους. Επομένως, ο ρυθμός πληροφορίας για τον κώδικα C1 είναι 2/5, για τον κώδικα C2 είναι 2/6 και για τον κώδικα C3 είναι 2/7.
2. Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε τις βάσεις των δεδομένων κωδίκων: για τον C1 η βάση είναι {10010, 01101}, για τον C2 {100101, 011010} και για τον C3 {1001011, 0110110}
3. Η διάσταση όλων των κωδίκων είναι 2 και οι αποστάσεις τους 2, 3 και 4, αντίστοιχα διότι είναι οι λέξεις με το ελάχιστο βάρος.
4. Ο κώδικας C1 ανιχνεύει 1 και δεν διορθώνει κανένα σφάλμα, ο κώδικας C2 ανιχνεύει 2 και διορθώνει 1 και C3 ανιχνεύει 3 και διορθώνει 1 σφάλματα.
5. Ο κώδικας C1 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος '10010' γιατί το βάρος του συμπίπτει με την απόσταση και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος '10000' γιατί το βάρος του είναι μικρότερο της απόστασης d-1/2. Ομοίως, ο κώδικας C2 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος '100101' και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος '100001', και ο C3 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος '1001011' και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος '1000001'.