ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

Εισαγωγή στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

1η ΟΣΣ – Τμήμα ΑΘΗ.2 – 09/12/2017

Νίκος Δημητρίου

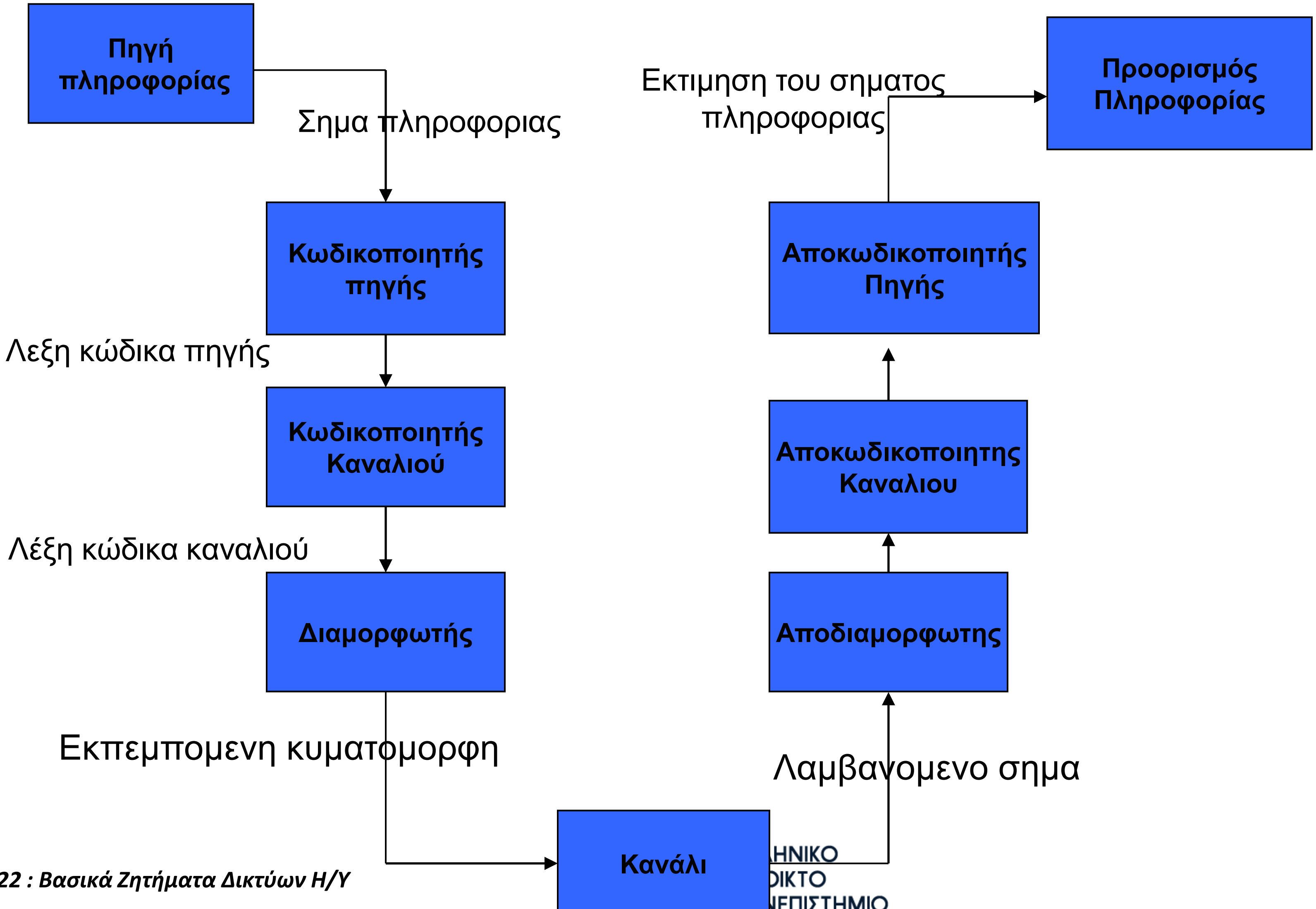
Σημείωση: Οι διαφάνειες αυτές βασίζονται στις παρουσιάσεις της 2ης ΟΣΣ που έχουν αναρτηθεί στο study.eap.gr και έχουν εμπλουτιστεί με περισσότερα παραδείγματα

Στόχοι Μελέτης

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
  – Παροχή Υπηρεσιών προς τους χρήστες
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
  – Τύποι Σημάτων
  – Χαρακτηριστικά Συστημάτων
  – Φάσμα
- Αναλογικές Διαμορφώσεις Πλάτους

Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

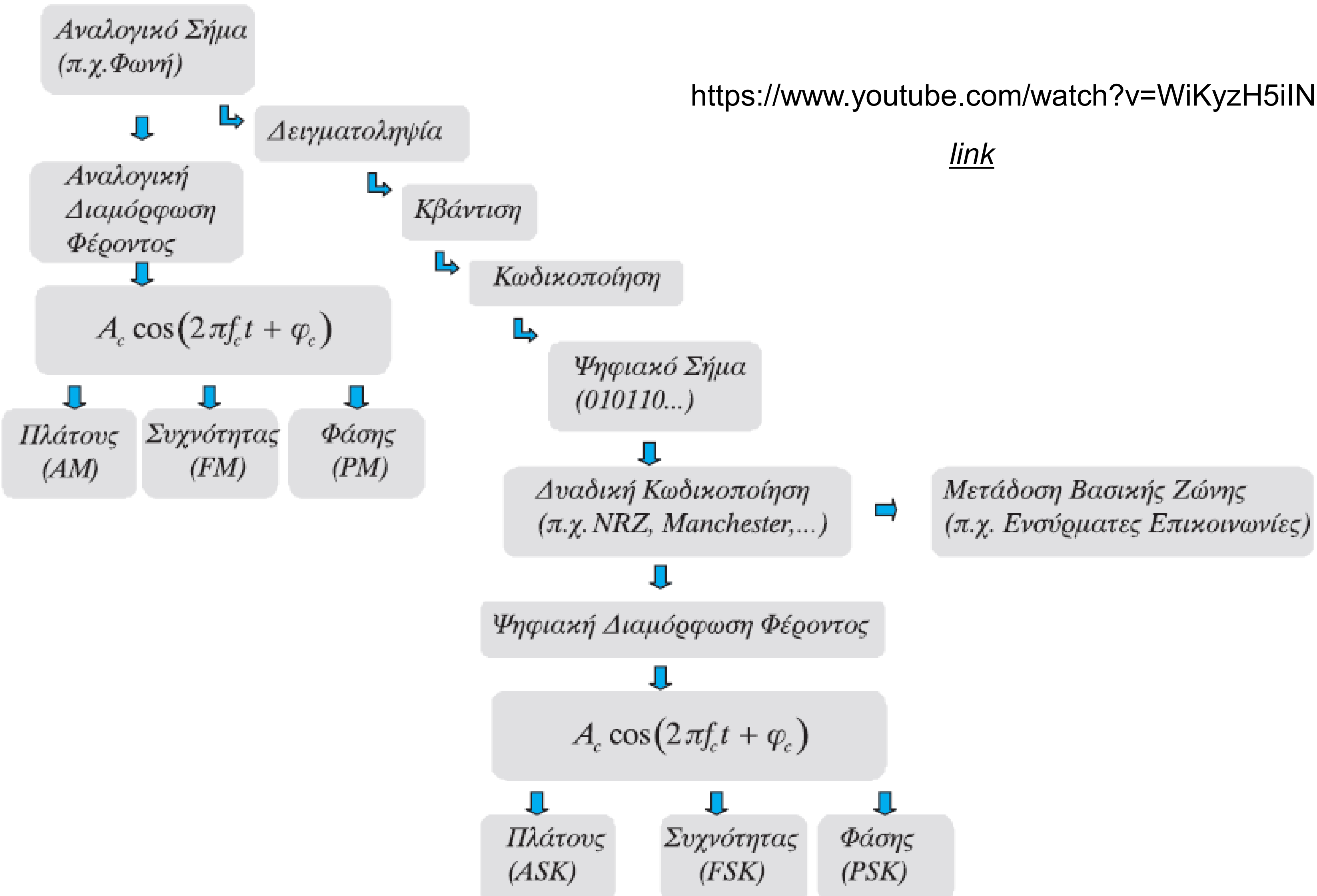
Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



Στάδια Επεξεργασίας σημάτων

https://www.youtube.com/watch?v=WiKyzH5iIN8

link



Σήματα και Συστήματα

Σήμα

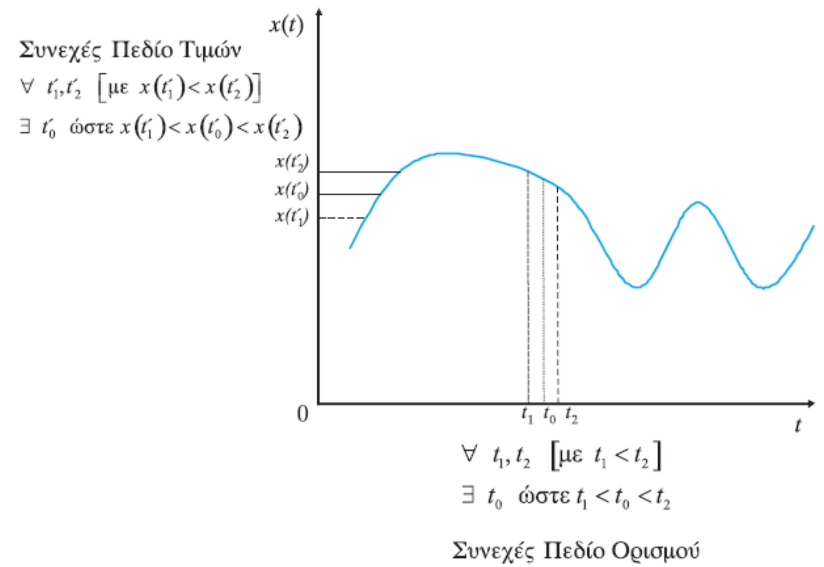
- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
  - Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα

Κατηγορίες Σημάτων

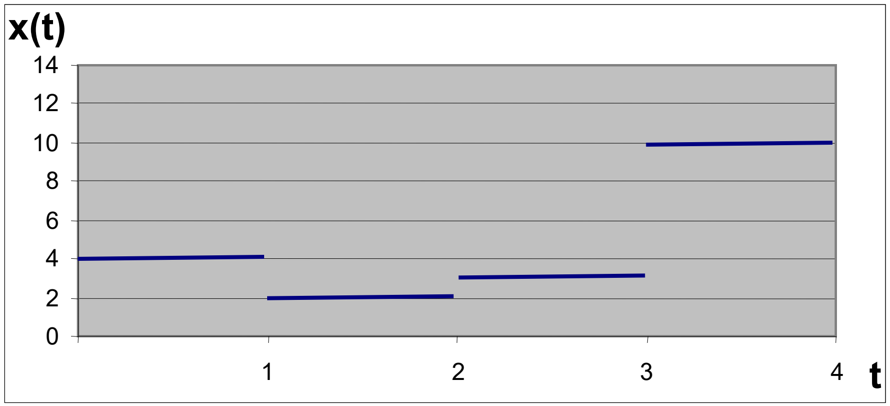
- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
  - Περιοδικά Σήματα
  - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
    - Ημιτονοειδή Σήματα
    - Ορθογώνιος Παλμός
    - Τριγωνικός Παλμός
    - Κρουστικά Σήματα
    - Σήμα Βήματος

Σήματα Συνεχούς Χρόνου (ΣΣΧ)

- Είναι αυτά στα οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος) παίρνει συνεχείς τιμές
- Αναλογικά Σήματα: Είναι αυτά τα ΣΣΧ που και η εξαρτημένη μεταβλητή x(t) παίρνει συνεχείς τιμές
  - x(t)=4t
- Διακριτά Σήματα Συνεχούς Χρόνου: Είναι σήματα ΣΣΧ που η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές

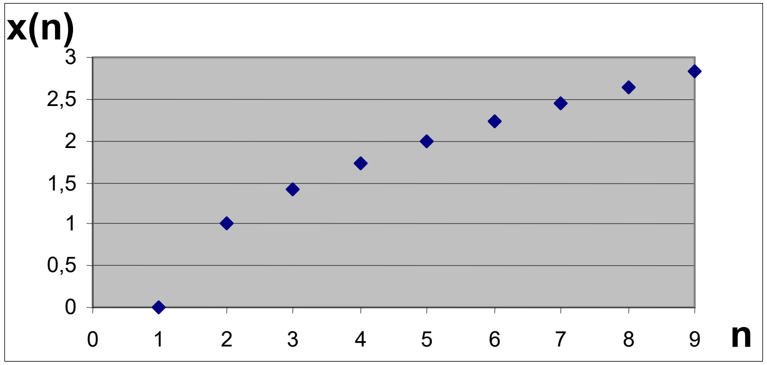


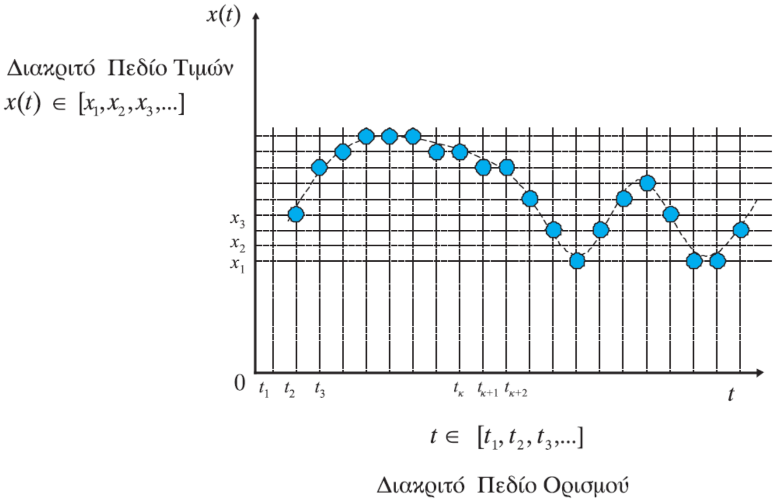
$$x(t)=\begin{cases} 4, & 0\le t\le 1 \\ 2, & 1\langle t\le 2 \\ 3, & 2\langle t\le 3 \\ 10.3\langle t\le 4 & \end{cases}$$



Σήματα Διακριτού Χρόνου (ΣΔΧ)

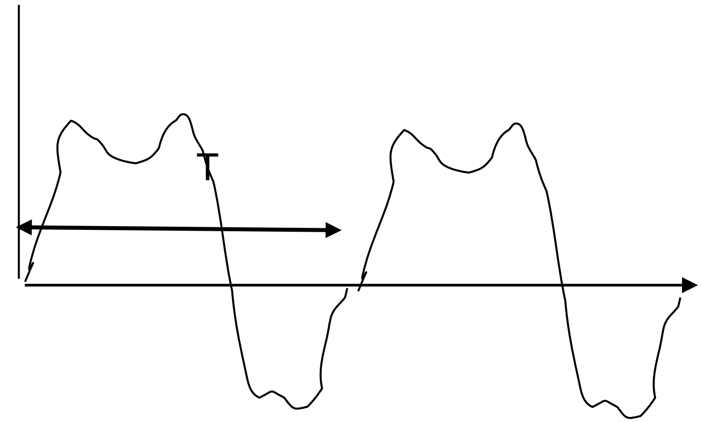
- Ο χρόνος δέχεται μόνο διακριτές τιμές
- Τα σήματα συμβολίζονται ως ακολουθίες
- Αναλογικά ΣΔΧ: Η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει συνεχείς τιμές
  - x(n)=sqrt(n)
- Διακριτά ΣΔΧ: Η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές
- Ψηφιακό Σήμα

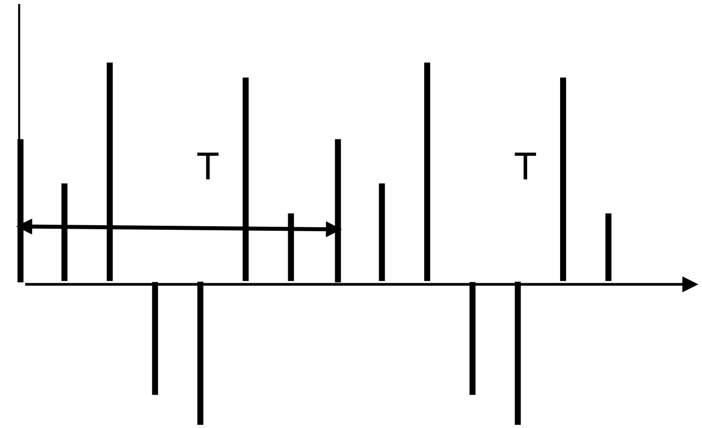




Περιοδικά Σήματα

- Αναλογικό Σήμα
  - Ισχύει η σχέση y(t)=y(t+T)
  - T είναι περίοδος και ορίζει τη μικρότερη χρονική διάρκεια μετά την οποία επιλαμβάνεται
- Διακριτό Σήμα
  - Ισχύει y(n)=y(n+N) για όλα τα n
  - N περίοδος



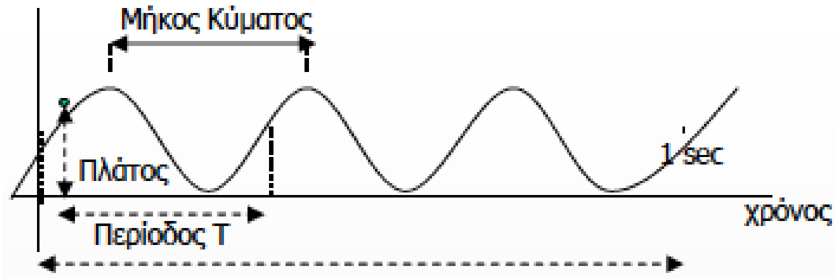


Ημιτονοειδή Σήματα (1)

- Ειδική κατηγορία περιοδικών σημάτων
- Αναλογικού χρόνου
  - Παράσταση

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

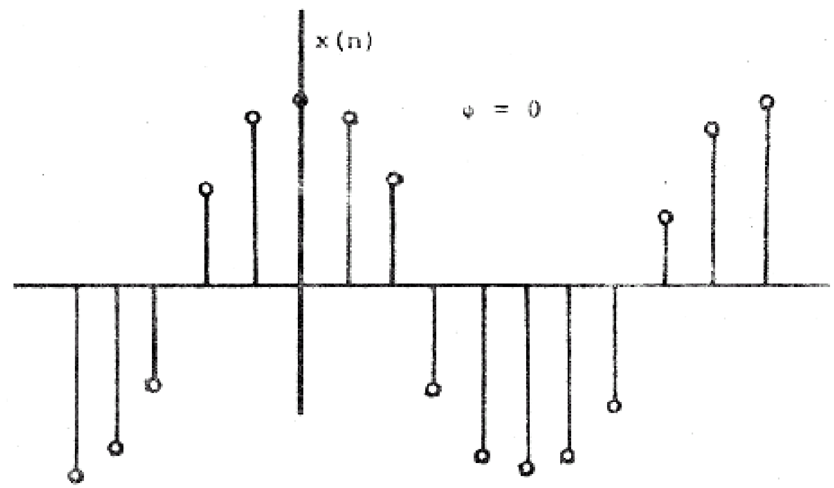
- φ → γωνία φάσης
- Τ → περίοδος
- ω=2πf → κυκλική συχνότητα



- Διακριτού χρόνου
  - Παράσταση

$$x(n) = cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$$

- Ν → Περίοδος
- θ → γωνία φάσης



Octave-Παράδειγμα 1

Ημιτονοειδή Σήματα (2)

- **Συχνότητα f:** Αριθμός πλήρων ταλαντώσεων (κύκλοι) ανά δευτερόλεπτο (σε Hertz - Hz).
  - $f = 1 / T$
- **Περίοδος T:** Διάρκεια πλήρους ταλάντωσης (sec)
  - $T = 1 / f$
- **Μήκος λ:** Η απόσταση στην οποία μεταδίδεται το σήμα σε χρόνο Τ (σε μέτρα).
- **Ταχύτητα μετάδοσης υ:** Η ταχύτητα με την οποία ο σήμα διαπερνά το μέσο μετάδοσης
  - $\upsilon = \lambda \cdot f$
- Στο κενό, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν την ταχύτητα του φωτός
  - $3 \cdot 10^8$ m/sec
- **Πλάτος α:** Η τιμή του σήματος μια χρονική στιγμή.

Περιοδικότητα σημάτων

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$$

Γενίκευση:

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2, ..., T_N θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$$

Παράδειγμα

Βασικά Ζητήματα ΠΛΗ22 8/31

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5\pi t)$ η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}\sec$

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=1,β=10 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \beta T_1 = \alpha T_2 = 4\sec$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25$ Hz

Examples1a,1b

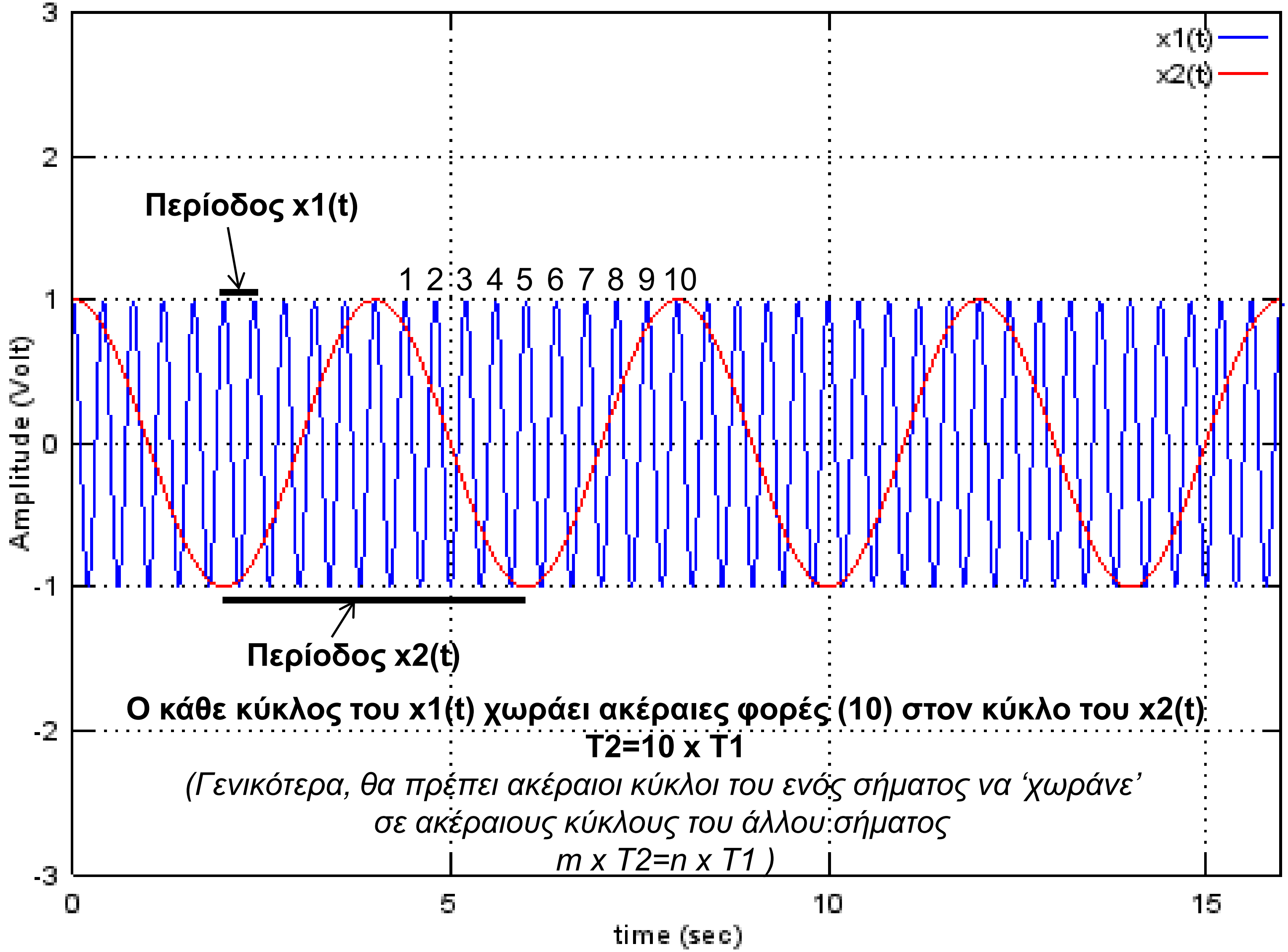
Γραφική απεικόνιση της προηγούμενης άσκησης στο OCTAVE

- *Παραπομπή: Για την εισαγωγή στο OCTAVE δείτε τις διαφάνειες octave_matlab_tutorial_v1.0.ppt*

Example 1a

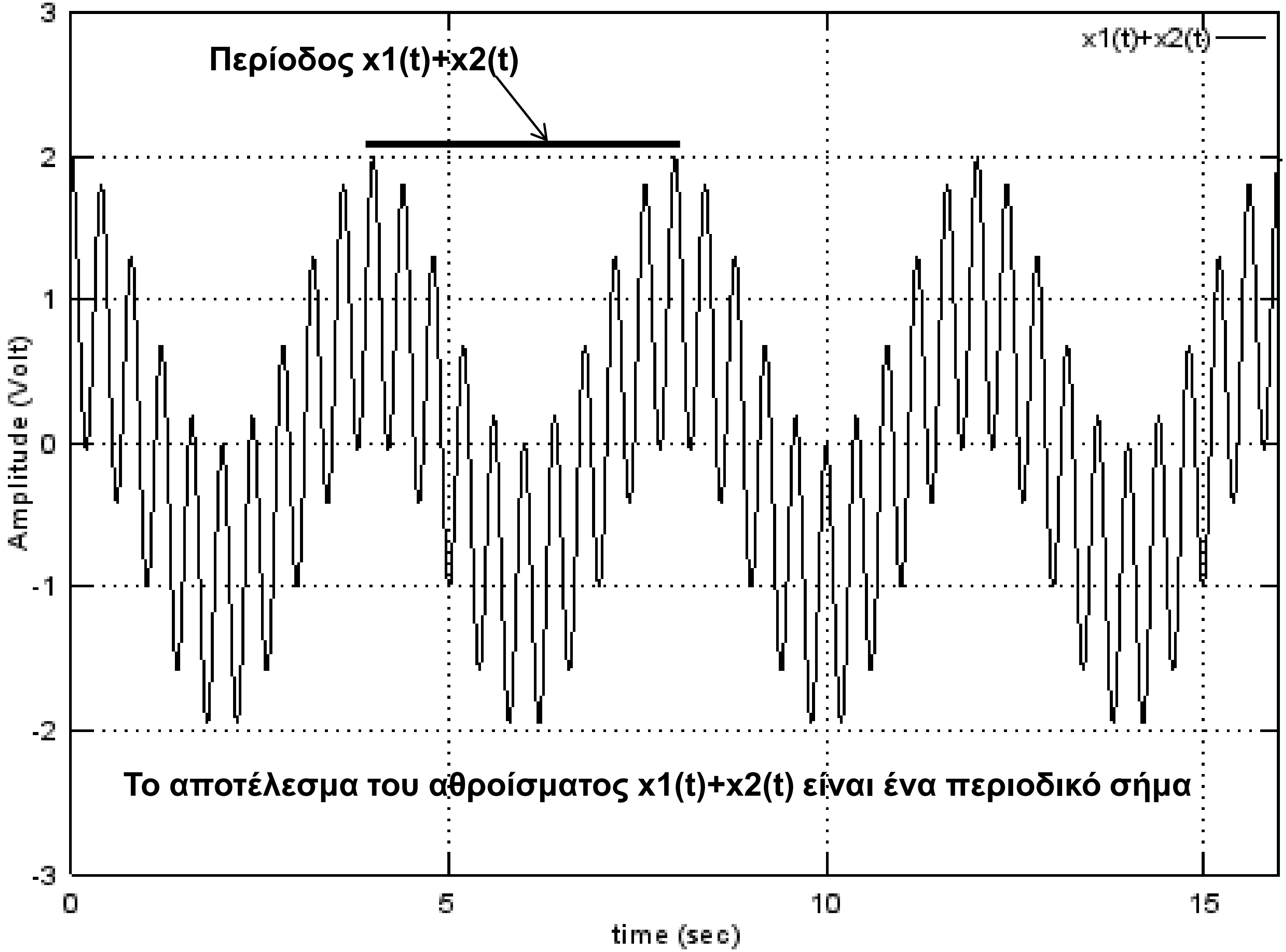
- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*pi.*t); % 1st signal with frequency 2.5Hz
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal ‘b’ is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal ‘r’ is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1a



x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) χωράει ακέραιες φορές (10) στον κύκλο του x2(t)
T2=10 x T1
(Γενικότερα, θα πρέπει ακέραιοι κύκλοι του ενός σήματος να 'χωράνε'
σε ακέραιους κύκλους του άλλου σήματος
m x T2=n x T1)
Amplitude (Volt)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15
time (sec)

Example 1a



Περίοδος x1(t)+x2(t)
x1(t)+x2(t)
3
2
1
0
-1
-2
-3
Amplitude (Volt)
0
5
10
15
time (sec)
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) είναι ένα περιοδικό σήμα

Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \boxed{\cos(5t)} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το ***cos(5t)*** η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5}$ ***sec***

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\,\text{sec}$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} =$ π/10 Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

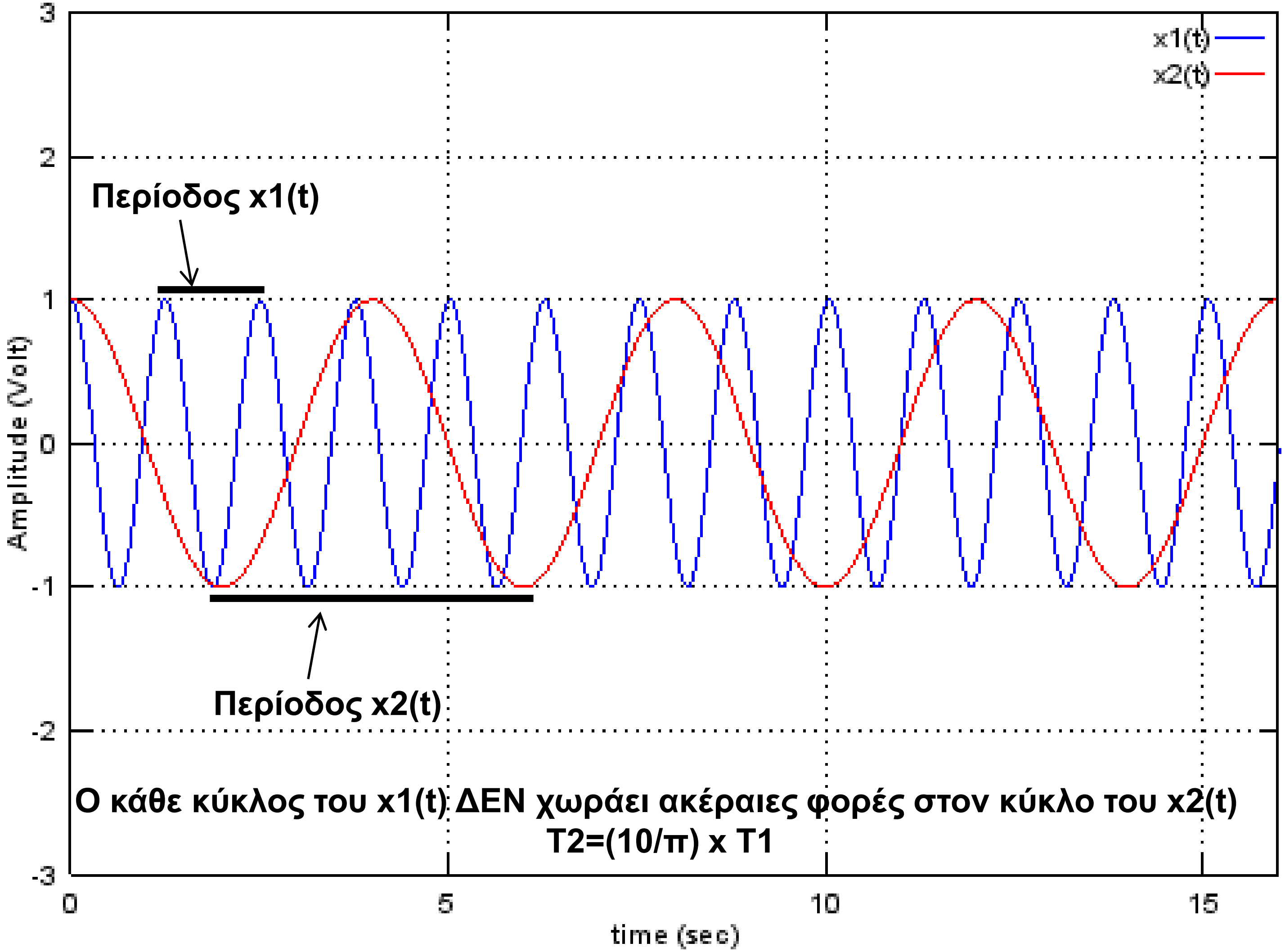
Example 1b

- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz

Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a

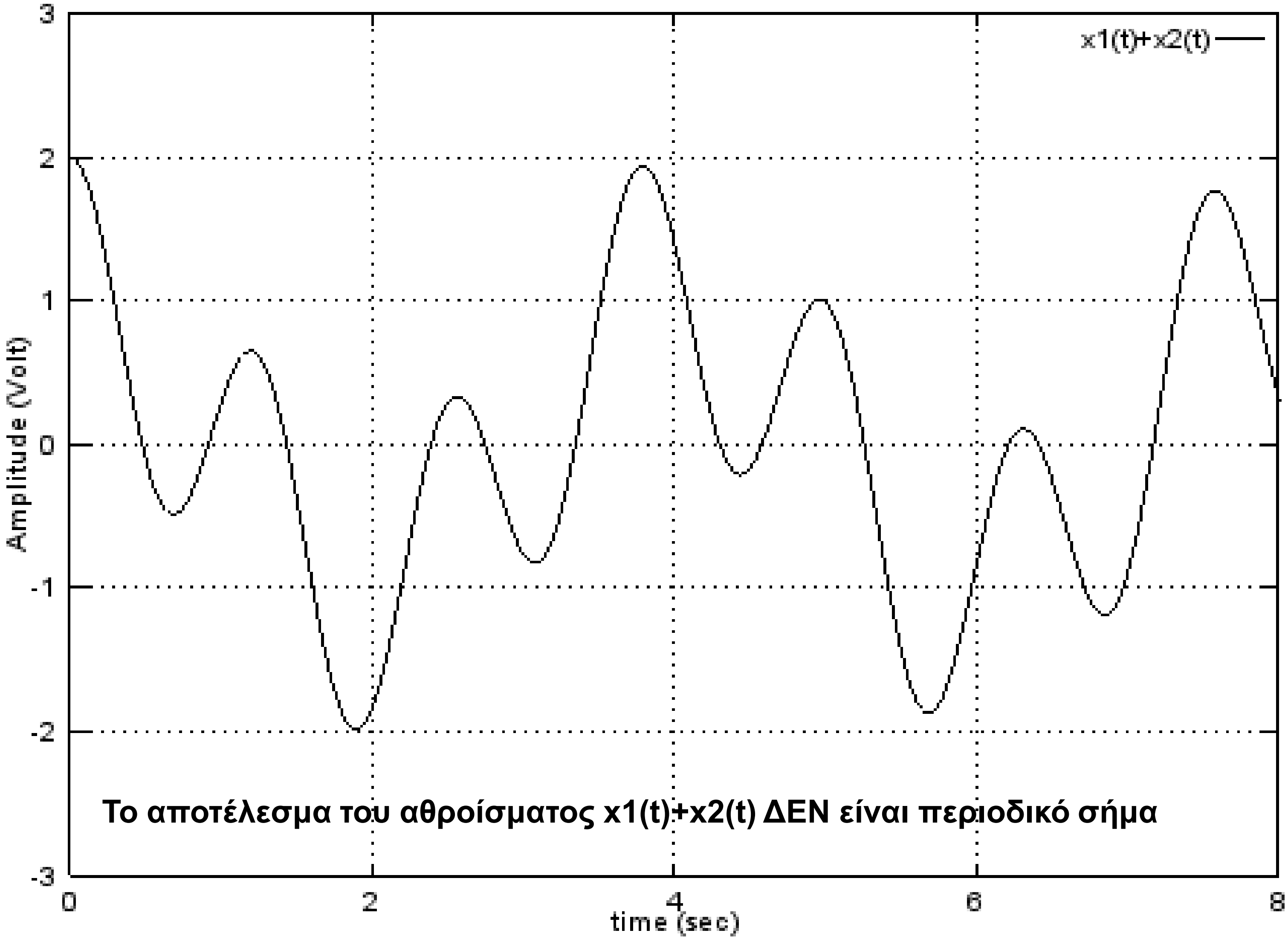
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal 'b' is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1b



x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) ΔΕΝ χωράει ακέραιες φορές στον κύκλο του x2(t)
T2=(10/π) x T1
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Example 1b



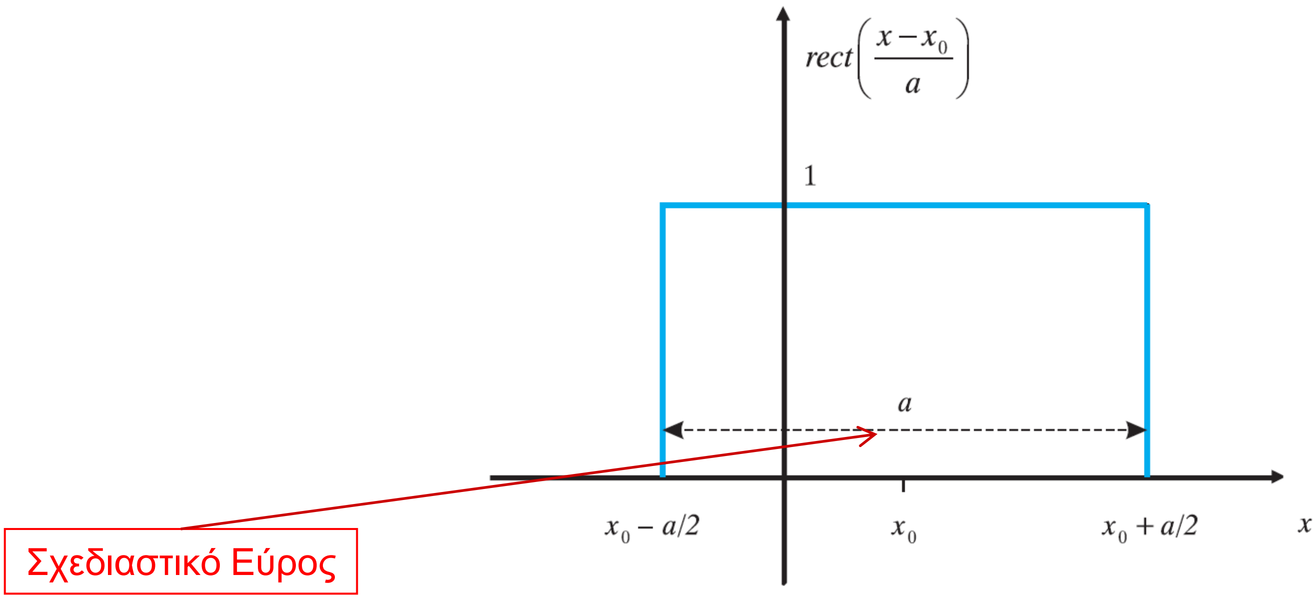
x1(t)+x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) ΔΕΝ είναι περιοδικό σήμα

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, \text{ όταν } |x-x_0|<\dfrac{a}{2}, \text{ δηλ. } x_0-\dfrac{a}{2}<x<x_0+\dfrac{a}{2}\\[2ex] 0, \text{ όταν } |x-x_0|>\dfrac{a}{2}, \text{ δηλ. } \begin{cases} x<x_0-\dfrac{a}{2}\\ \text{ή}\\ x>x_0+\dfrac{a}{2}\end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$

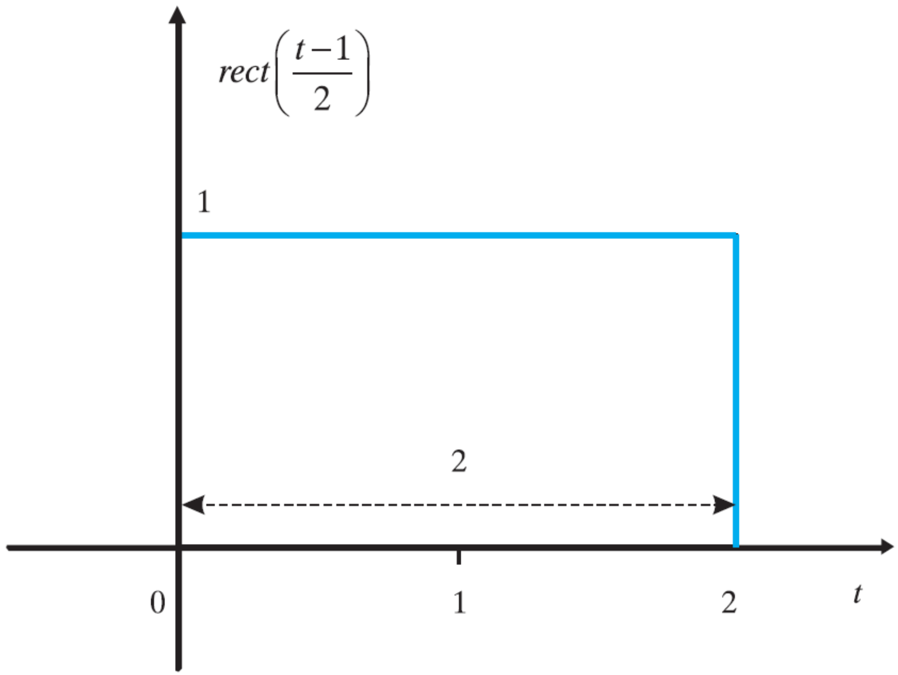


Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (2)

- Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0,2)$.

- $x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$



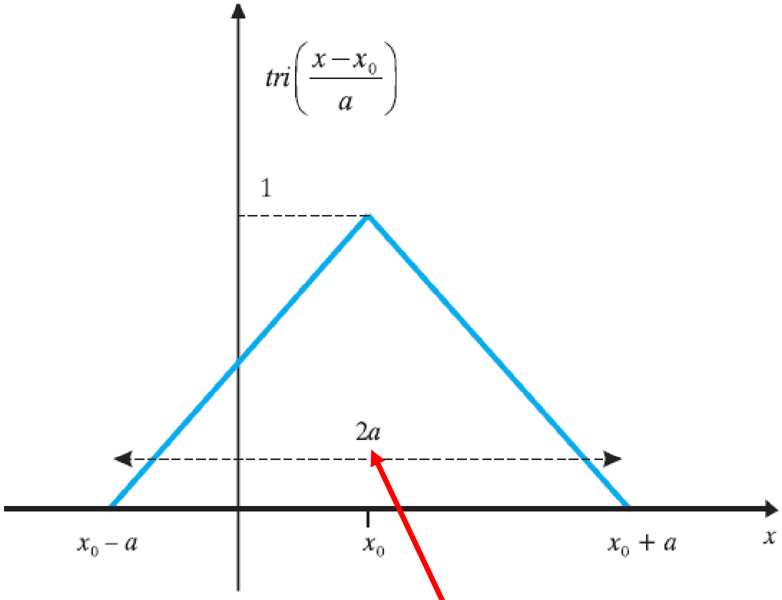
ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Σήμα Τριγωνικός Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-x_0|}{a}, \text{ όταν } |x-x_0|<a, \text{ δηλ.} x_0-a<x<x_0+a \\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>a, \text{ δηλ.} \begin{cases} x<x_0-a \\ \text{ή} \\ x>x_0+a \end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$



Προσοχή στην αναλυτική έκφραση για τα ολοκληρώματα

Σχεδιαστικό Εύρος

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

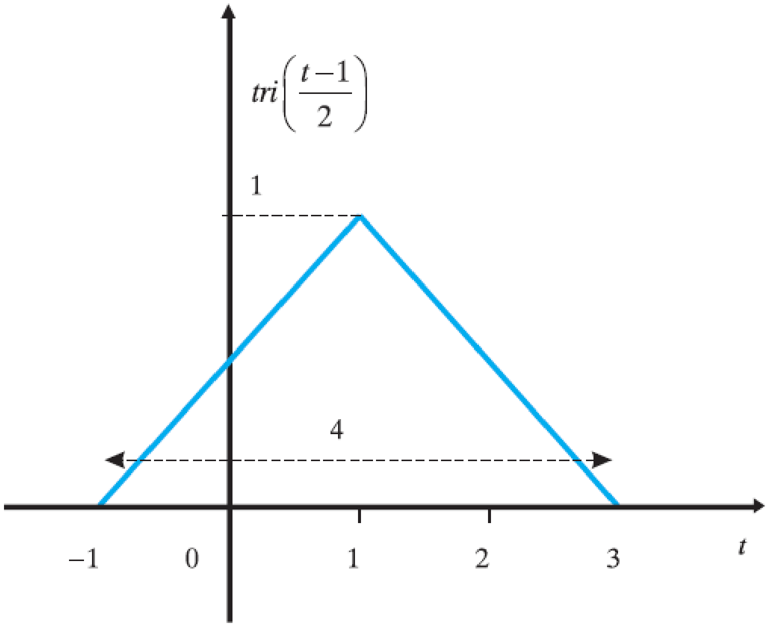
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (2)

- Παραδείγματα

• $x(t) = tri\left(\dfrac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2},\ t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$.



ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

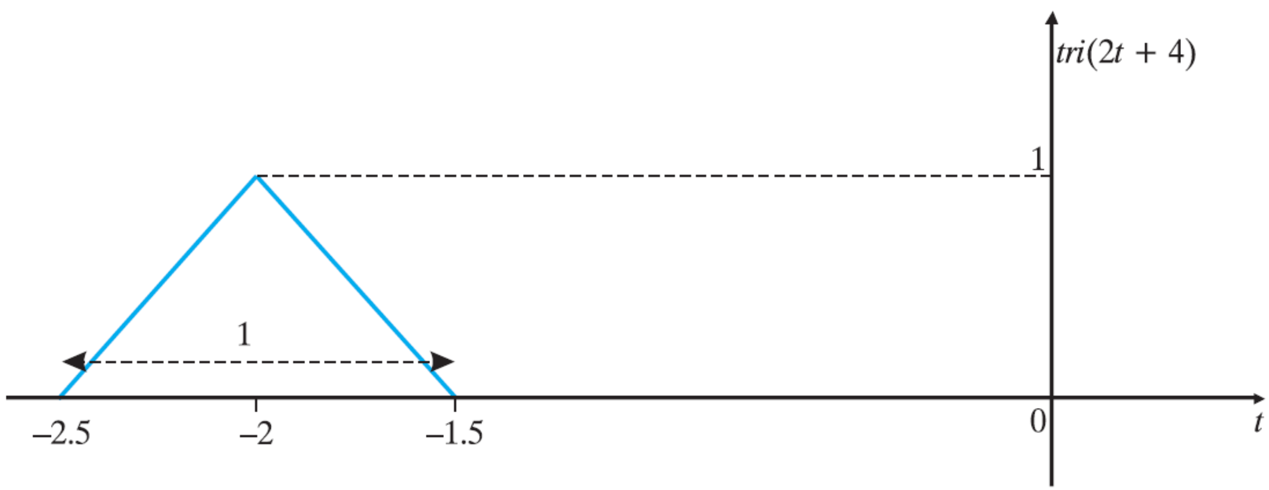
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (3)

- $x(t) = tri(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι: $x(t) = tri(2t+4) = tri(2(t+2)) = tri\left(\frac{t+2}{1/2}\right) = tri\left(\frac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \frac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}) = (-2.5, -1.5)$.



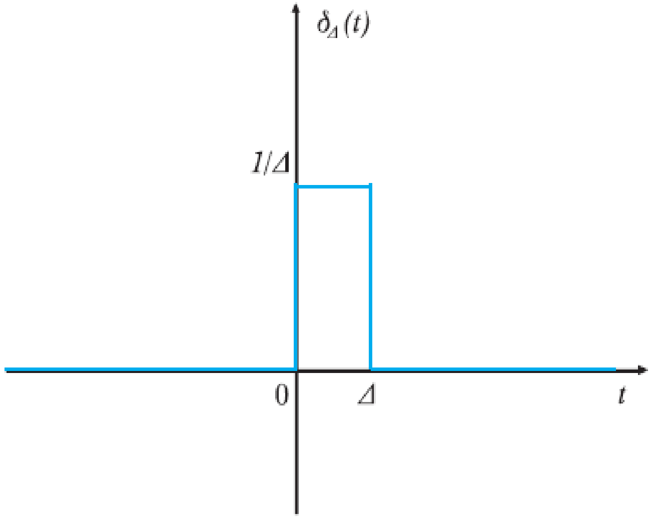
Λαμβάνεται ένας ορθογωνικός παλμός (μοναδιαίου εμβαδού) της εξής μορφής:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 0, \text{ οταν } t < 0 \\ \dfrac{1}{\Delta}, \text{ οταν } 0 < t < \Delta \\ 0, \text{ οταν } t > \Delta \end{cases}$$

όπου Δ>0.

Δηλαδή, ισχύει ότι

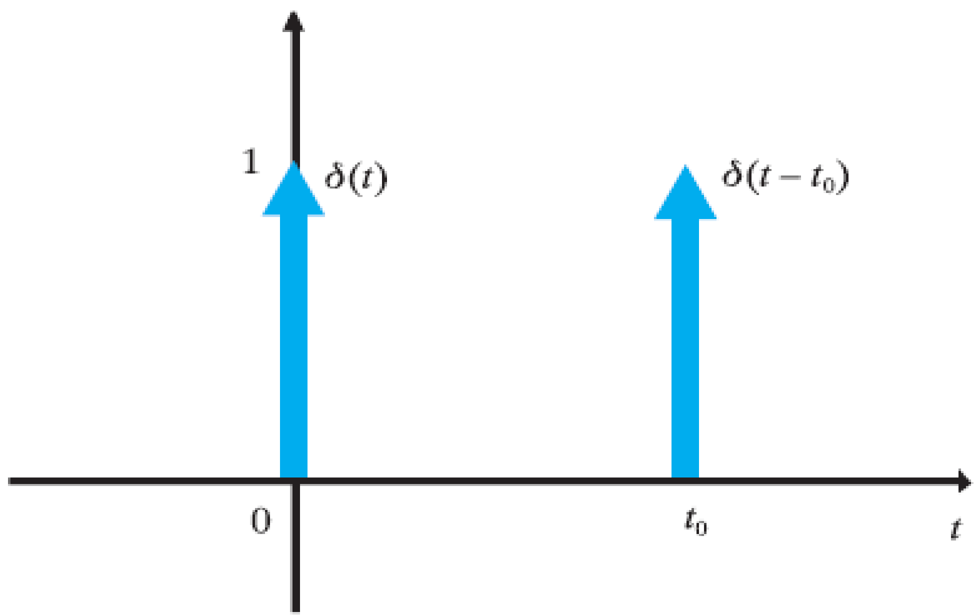
$$\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} rect\left(\frac{t - \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \right)$$



Σχήμα 2.19

Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \rightarrow 0$), η χρονική διάρκεια του παλμο μηδενίζεται και το πλάτος του απειρίζεται, ενώ το εμβαδό του παραμένει ίσο με 1. κρουστική συνάρτηση $\delta(t)=\lim_{\Delta\rightarrow 0}\left[\delta_{\Delta}(t)\right]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες

- $\delta(t) = 0, \text{ οταν } t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0, \text{ οταν } t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$
- $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

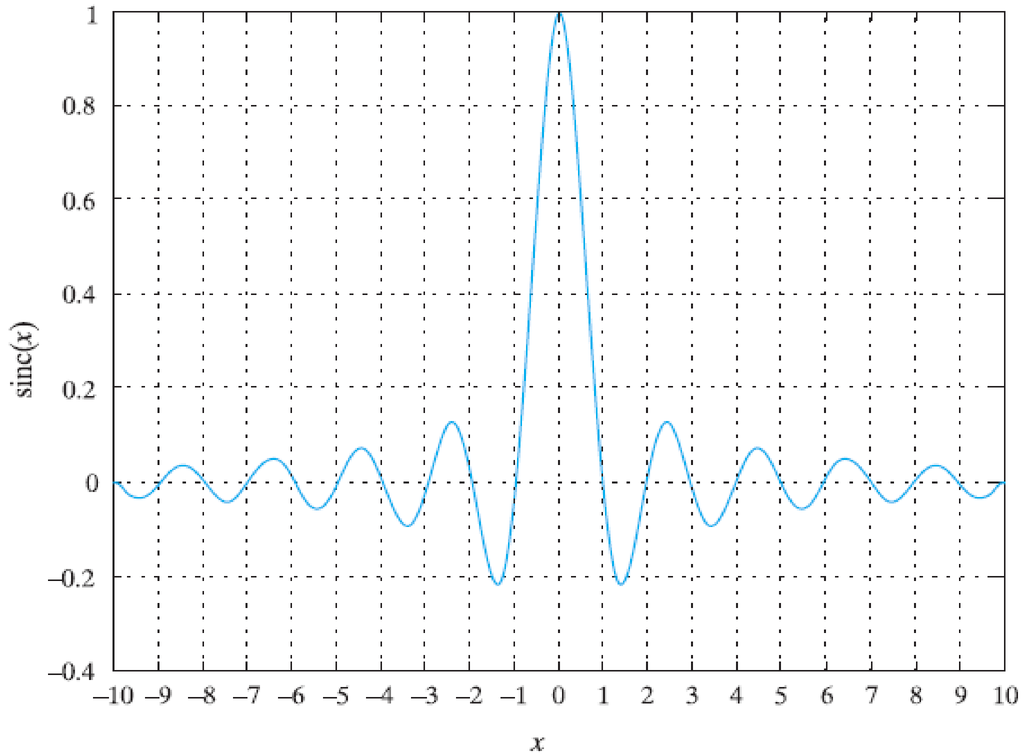
2.2.7.3 Συνάρτηση sinc

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:

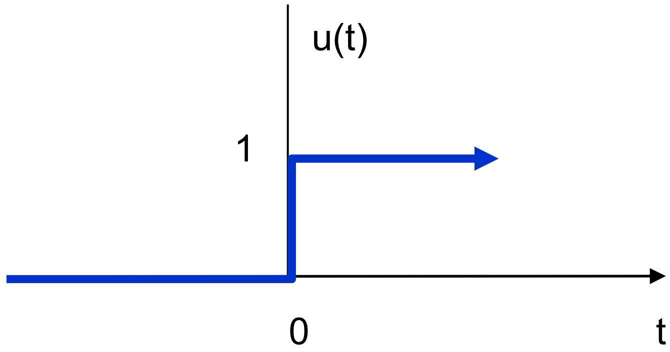


Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

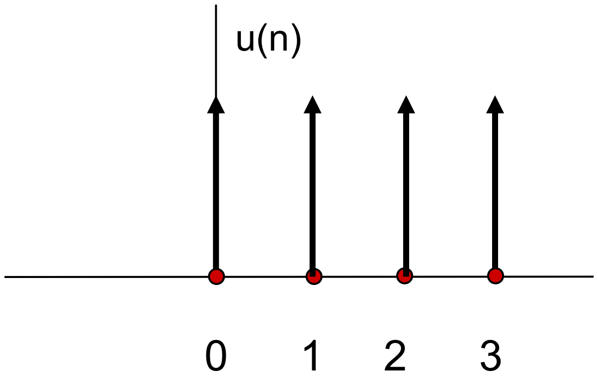
Σήμα Βήματος (1)

- Αναλογικό Σήμα
  - Ορισμός $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ N/A & t = 0 \end{cases}$
  - Ιδιότητες
    - Παραγώγιση $\frac{d}{dt}[u(t)] = \delta(t)$
    - Ολοκλήρωση $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)$



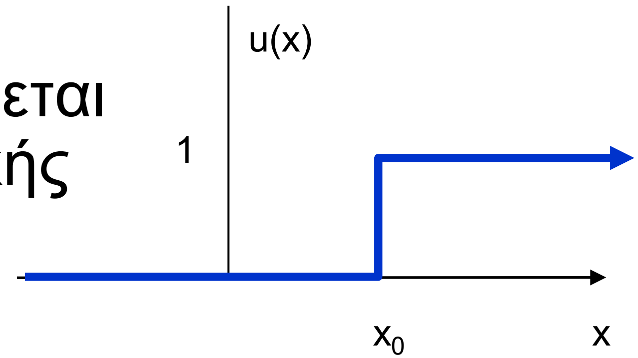
- Διακριτό Σήμα
  - Ορισμός

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

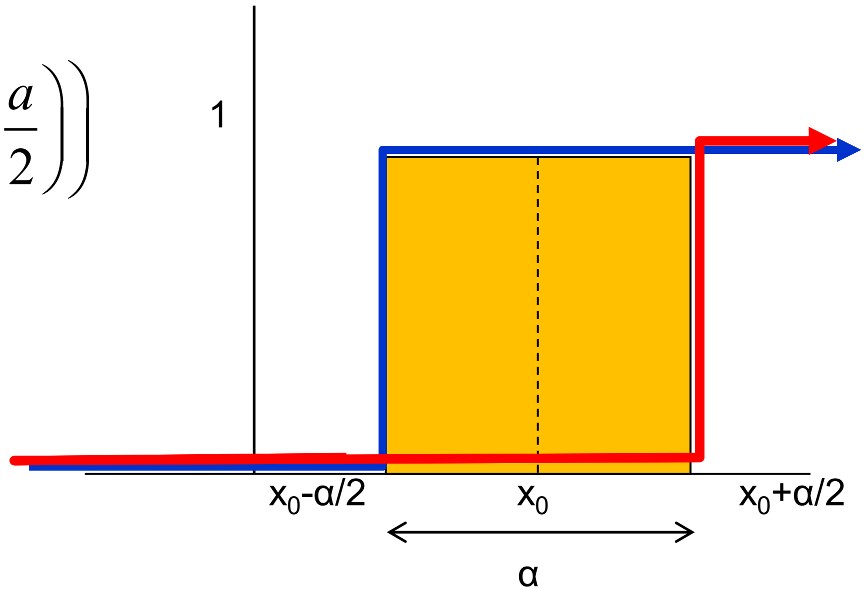


Σήμα Βήματος (2)

- Ο ορθογώνιος παλμός περιγράφεται και μέσω της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

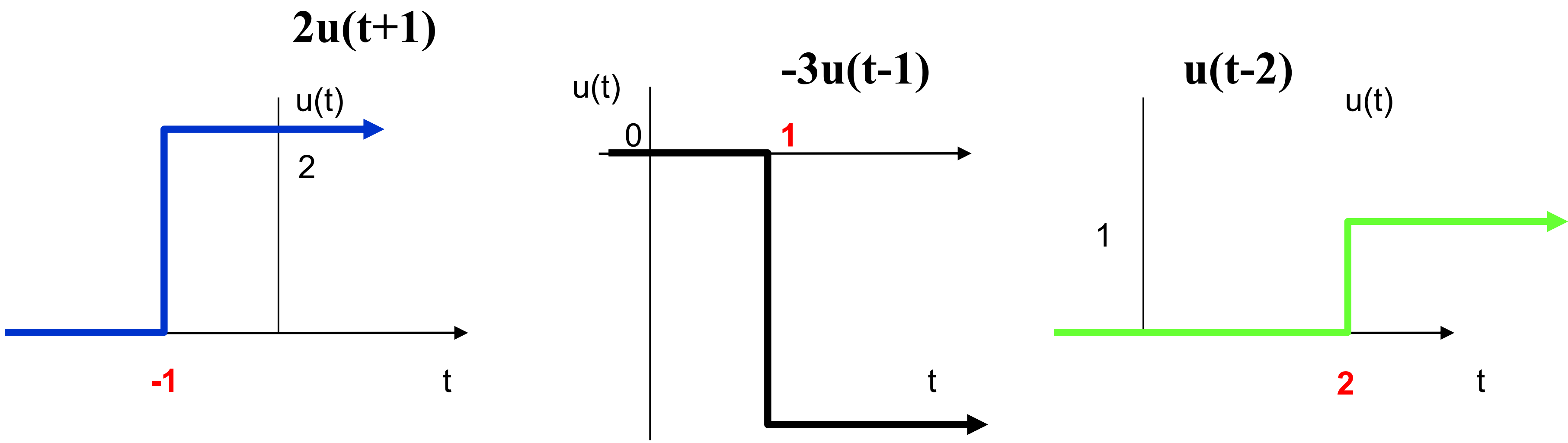


$$rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=u\left(x-\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right)-u\left(x-\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right)$$



Σήμα Βήματος (3)

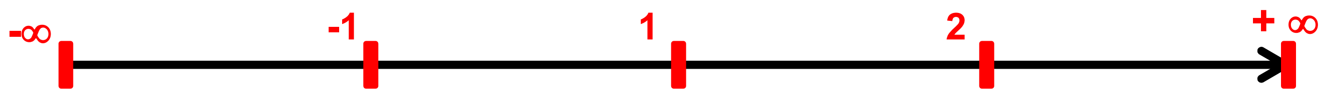
- <u>Παραδείγματα</u>
  - Να σχεδιαστεί το σήμα x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)
- <u>Μέθοδος</u>
- <u>Βήμα 1:</u> Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους



- <u>Βήμα 2:</u> Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1** και **2**

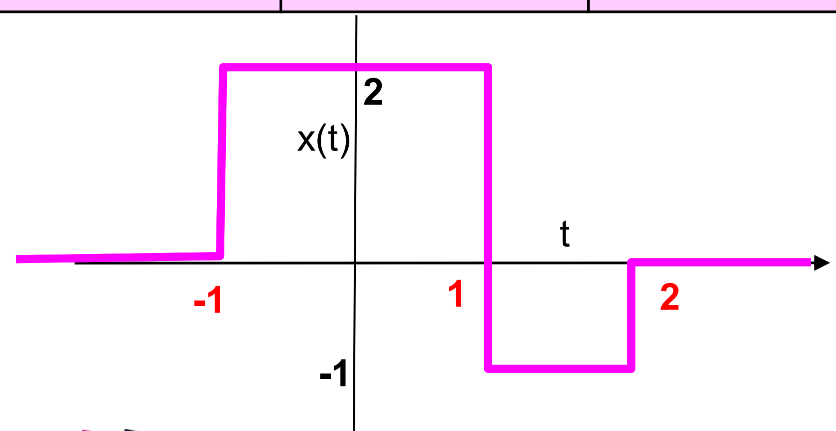
Σήμα Βήματος (4)

- Βήμα 3: Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



2u(t+1)	0	2	2	2
-3u(t-1)	0	0	-3	-3
u(t-2)	0	0	0	1
x(t)	0	2	-1	0

  - Βήμα 4:
  - Γραφική Παράσταση



Υπέρθεση Σημάτων (1)

- Εργασία 1η, (2009), Θέμα 4

- Δίνεται το σήμα

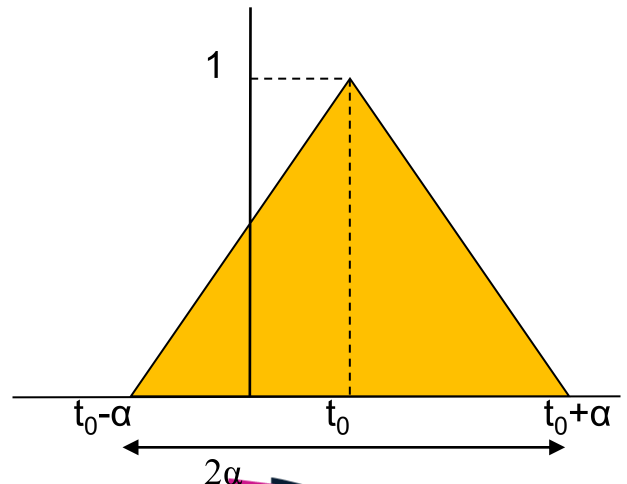
$$x(t) = -2\Lambda(\frac{t+2}{2}) + 2\Lambda(\frac{t}{2}) - 2\Lambda(\frac{t-2}{2})$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα *x(t)*.

Υπέρθεση Σημάτων (2)

- <u>Βήμα 1ο</u>: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

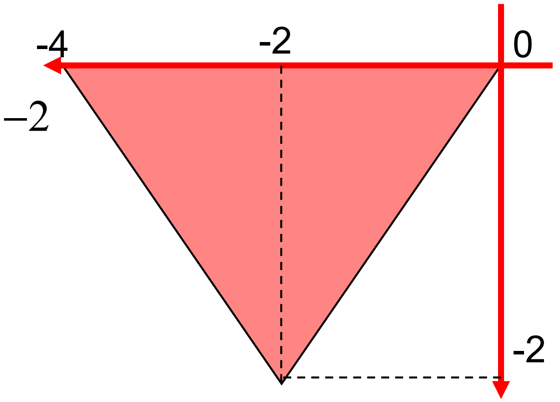
$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases} 1-\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad t_0<t<a+t_0 \\ 1-\dfrac{-(t-t_0)}{a}=1+\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad -a+t_0<t<t_0 \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad \left|t-t_0\right|>a \quad \acute{\eta} \quad -a+t_0>t \;\&\; t>t_0+a \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (3)

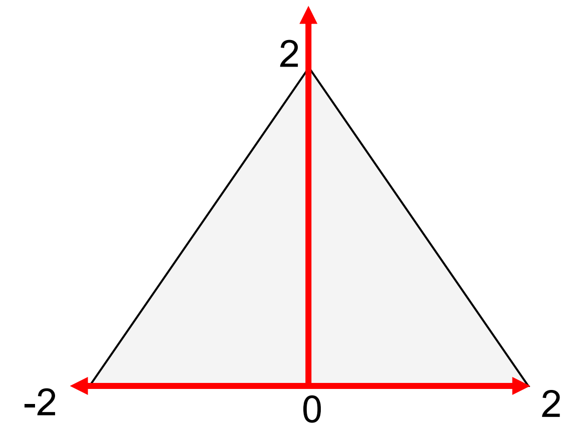
- Αρα 1ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right)=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t+2)}{2}\right]=-4-t, \text{όταν } -2<t+2<0\Rightarrow -4<t<-2\\ -2\left[1-\frac{(t+2)}{2}\right]=t, \text{όταν } 0<t+2<2\Rightarrow -2<t<0\\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0\end{cases}$$



2ο σήμα

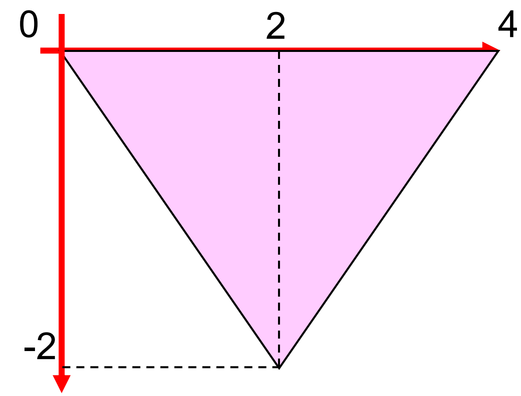
$$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)=\begin{cases}2\left[1-\frac{-(t)}{2}\right]=2+t, \text{όταν } -2<t<0\\ 2\left[1-\frac{(t)}{2}\right]=2-t, \text{όταν } 0<t<2\\ 0, \text{όταν } t<-2 \text{ ή } t>2\end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (4)

- 3ο σήμα

$$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t-2)}{2}\right]=-t, \text{όταν -2<}t-2<0\Rightarrow 0<t<2\\ -2\left[1-\frac{(t-2)}{2}\right]=t-4, \text{όταν 0<}t-2<2\Rightarrow 2<t<4\\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0\end{cases}$$



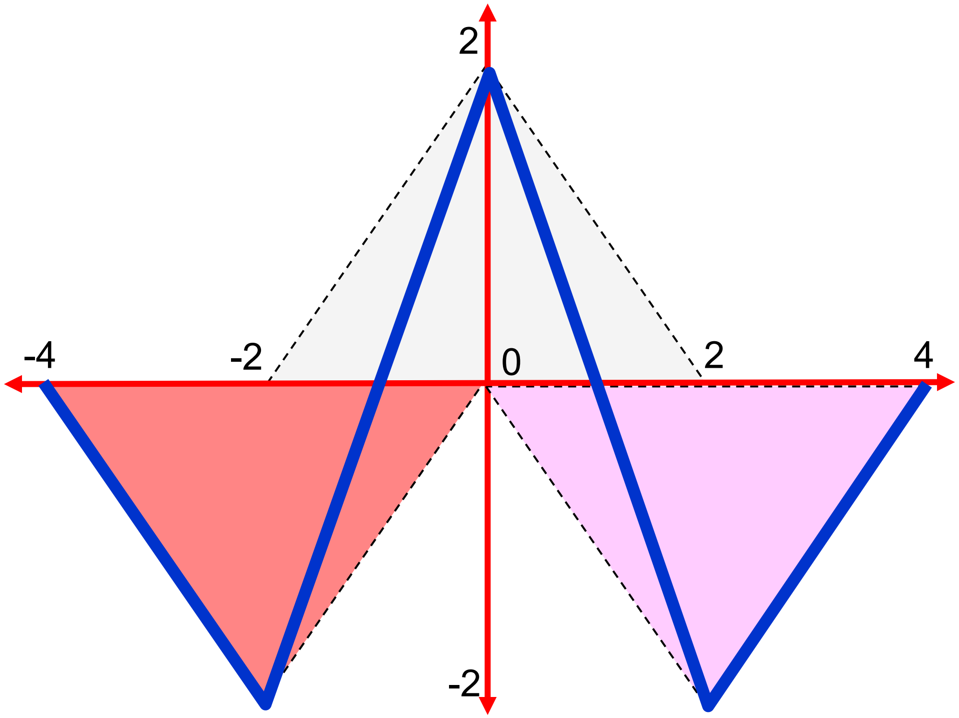
Υπέρθεση Σημάτων (5)

- Βήμα 2ο: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα

$-2\Lambda(\frac{t+2}{2})$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda(\frac{t}{2})$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})$	0	0	0	-t	t-4
x(t)	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

Υπέρθεση Σημάτων (6)

- <u>Βήμα 3ο</u>: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα



Υπέρθεση Σημάτων (7)

- Από Εργασία 1η, (2009), Θέμα 6(β)

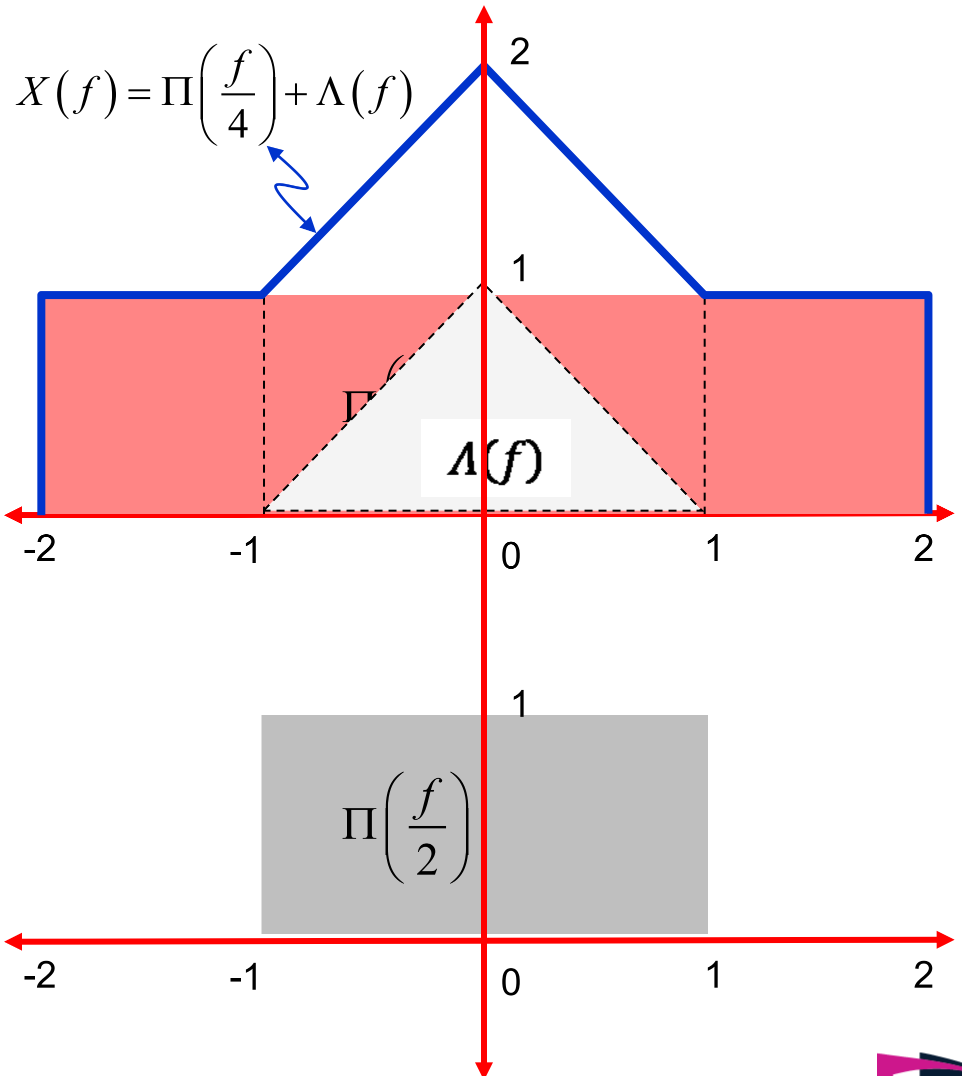
- Δίνεται το X(f) και H(f) που είναι
- $$X(f)=\Pi\left(\frac{f}{4}\right)+\Lambda(f)$$ και $$\mathrm{H}(f)=\Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

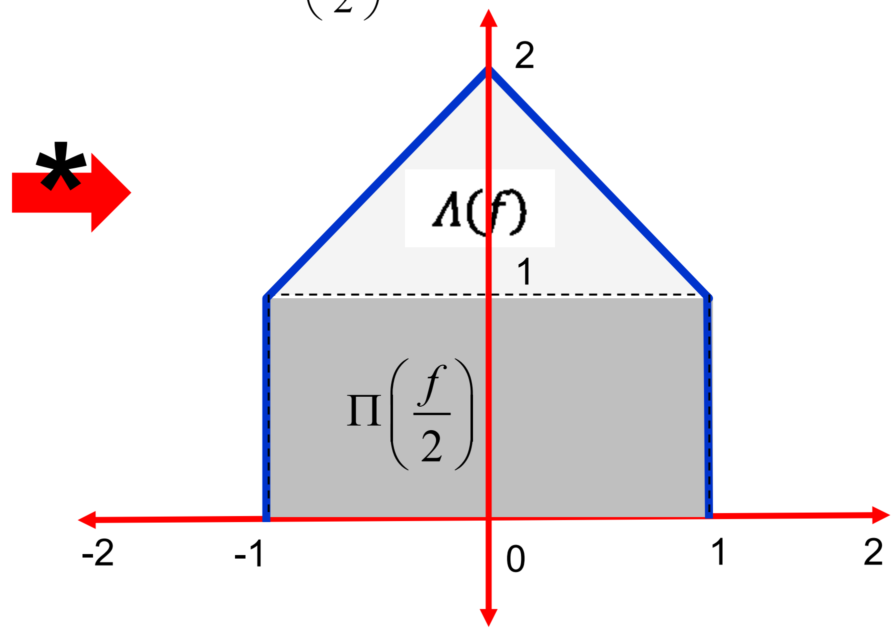
$$Y(f)=X(f)\cdot H(f)$$

Υπέρθεση Σημάτων (8)

$$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)$$



$$Y(f) = \left[\Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)\right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$
$$= \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$
$$= \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f)$$

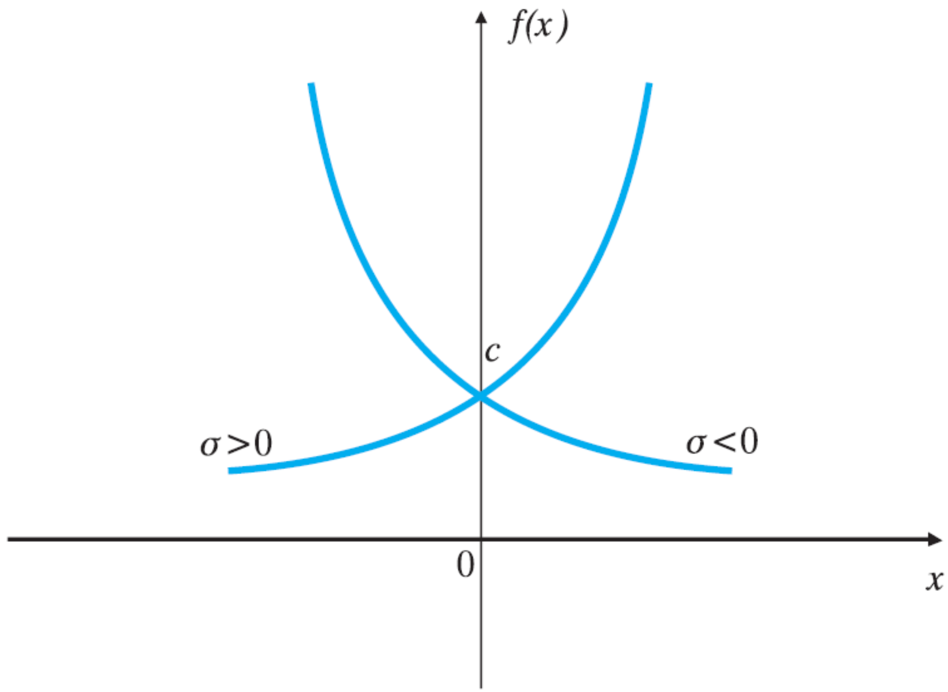


Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (1)

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\sigma x}, \text{ όπου } c,\ \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



Φάσμα πλάτους Σημάτων – Μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων

Παράδειγμα.

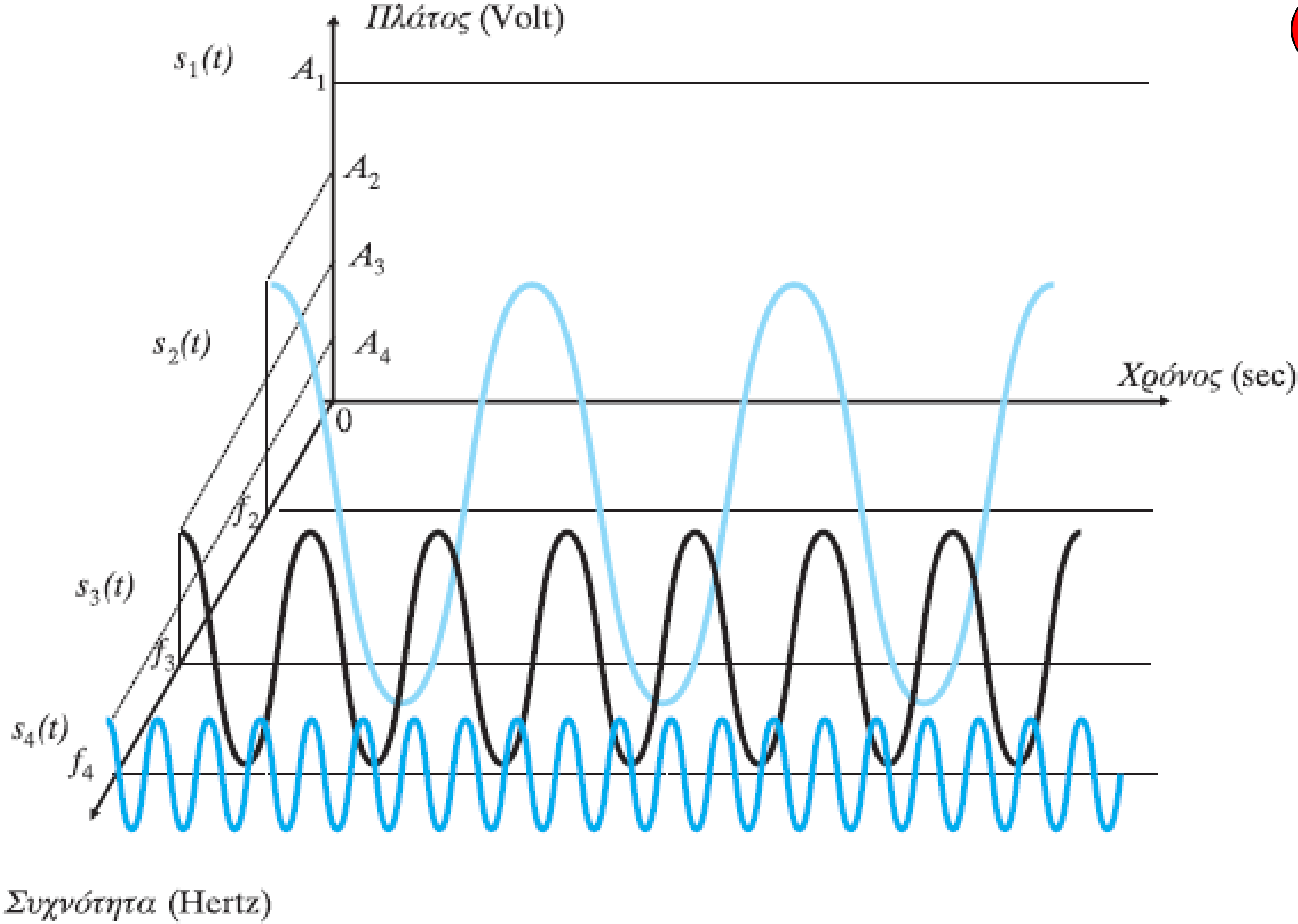
Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t)=s_1(t)+s_2(t)+s_3(t)+s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t)=A_1$$
$$s_2(t)=A_2\cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_3(t)=A_3\cos(2\pi f_3 t)$$
$$s_4(t)=A_4\cos(2\pi f_4 t)$$
$$f_2<f_3<f_4$$
$$A_1>A_2>A_3>A_4$$

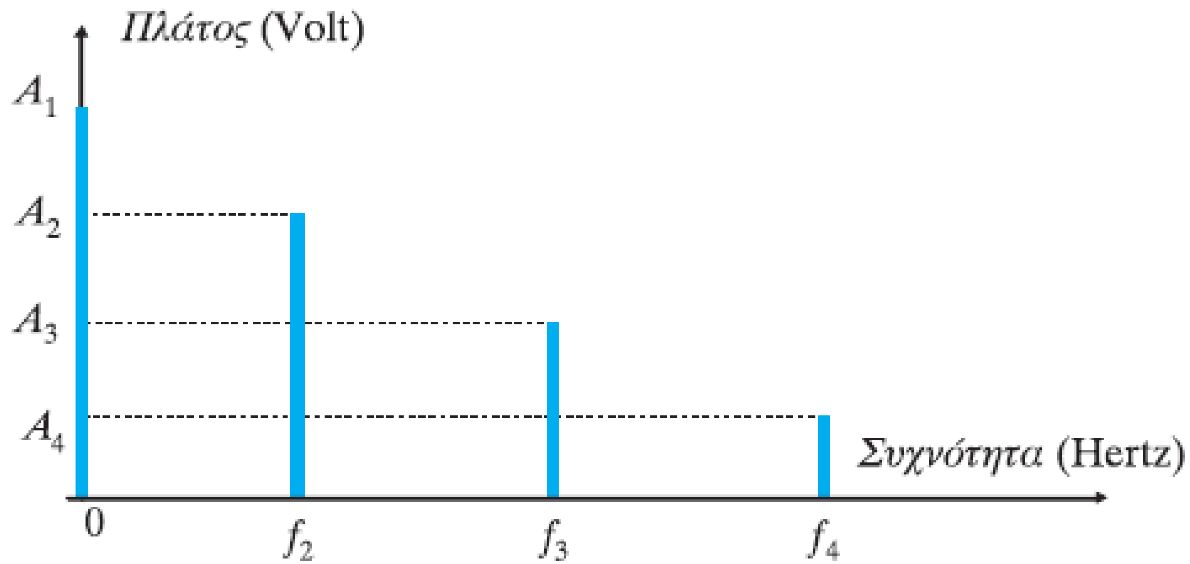
Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (2)

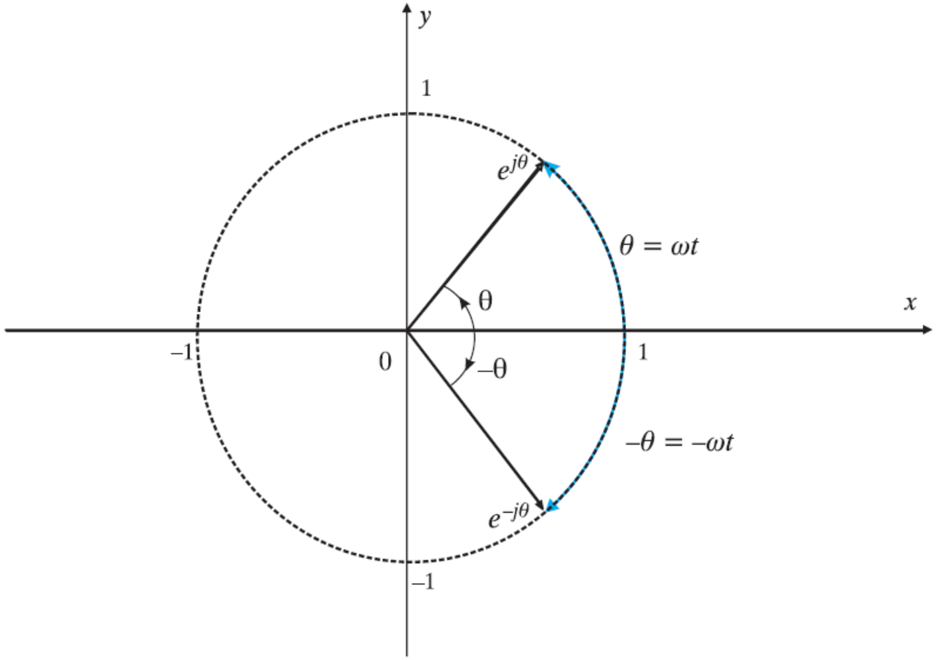
- Έκφραση περιοδικών σημά εκθετικών

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

- Με χρήση σχέσεων
- Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (i)

- Μιγαδικοί αριθμοί:

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

Ο μιγαδικός αριθμός «j» ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

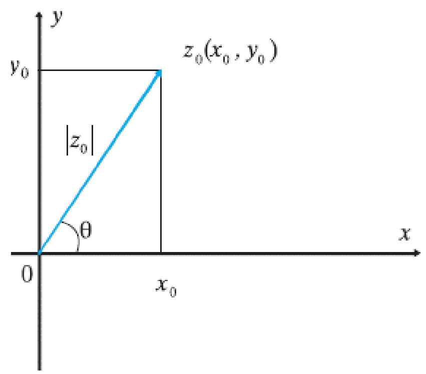
Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy)\cdot(x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Ο πολλαπλασιασμός του «j» επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.

ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες (στο δισδιάστατο πεδίο που ορίζεται από τους άξονες των πραγματικών και φανταστικών αριθμών) ως ένα διάνυσμα μέτρου $|z_0|$ και φάσης θ.



Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (ii)

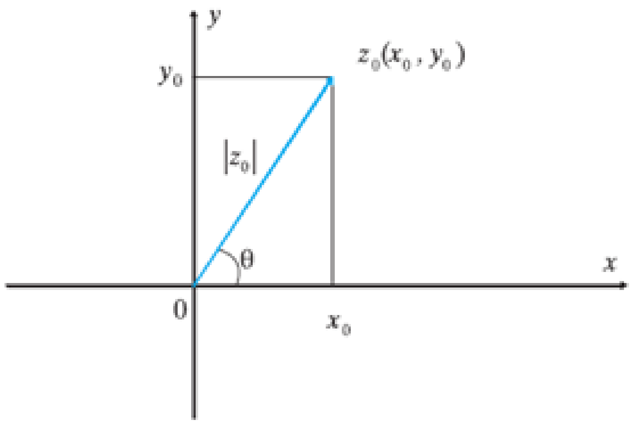
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0|\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0|\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0|\left[\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0|e^{j\theta}$$

Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (iii)

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$\left|e^{j\theta}\right|=\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}=\sqrt{1}=1$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta}=\cos(-\theta)+j\sin(-\theta)=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)+\cos(\theta)-j\sin(\theta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)-\cos(\theta)+j\sin(\theta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos(\theta)\Leftrightarrow\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin(\theta)\Leftrightarrow\sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

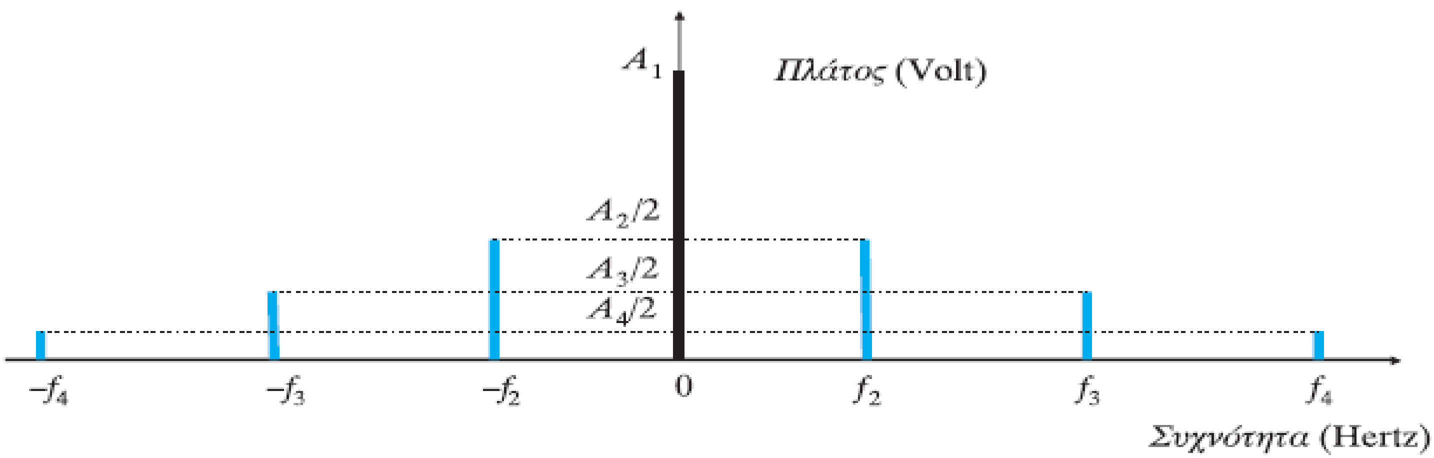
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

(συνέχεια από τη διαφάνεια 50)

$$s(t) = A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} =$$

$$= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t}$$

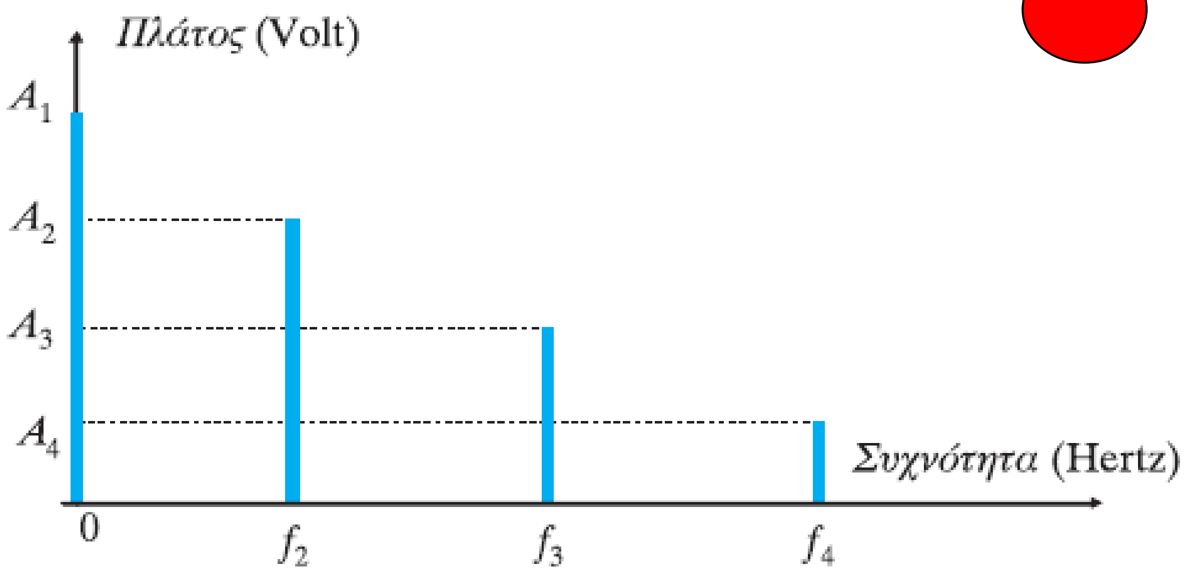
Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):

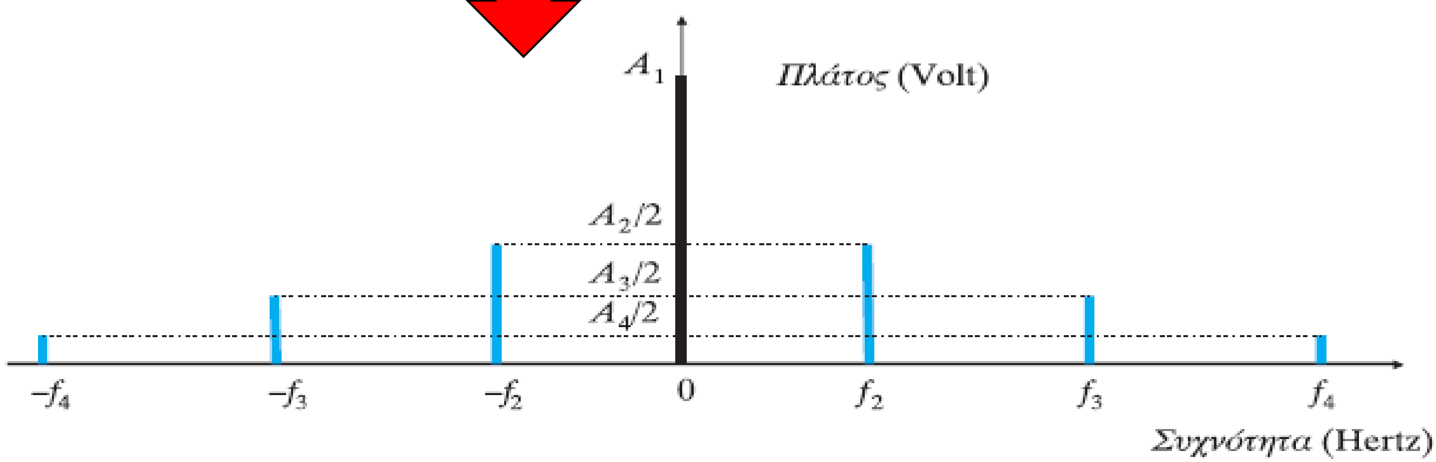


Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.





Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

- Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων:
  - Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT)=x(t)\ \text{για}\ k=1,2,\dots$$

  - Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N \quad m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

  - Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από **διακριτούς** παλμούς σε συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση

$$f=k_1 f_1=k_2 f_2=\dots=k_N f_N\ ,\ k_1,k_2\dots k_N$$

Μετασχηματισμός Fourier

Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορει να θεωρηθει σαν ενας εργαλειο με το οποιο βλεπουμε ενα σημα απο μια αλλη οπτικη γωνια:
  - Κοιτάξτε πόσο διαφορετική μπορει να φανει μια καρεκλα οτα την βλέπουμε απο διαφορες γωνιες

- Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σηματος:
  - Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολές συναρτήσει του χρόνου
  - Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

Μετασχηματισμός Fourier (1)

- Ο μετασχηματισμος (Μ/Σ) Fourier του σηματος x(t) ειναι ο:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- Ο αντιστροφος Μ/Σ Fourier διδεται απο την σχεση:

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

- Συμβολίζουμε ένα ζεύγος Μ/Σ Fourier ως εξής: x(t)⇔X(f)

Άλλη Μορφή Μ/Σ Fourier

- Ισοδύναμες αναφορές με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}df$$

- Η κυκλική συχνότητα ω=2πf μετριέται σε radians/sec και dω=2πdf

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (1)

Σημείωση: δείτε τον πίνακα 2.3.5Α, σελ. 54-55 (τόμος Β, μέρος Β)

- Γραμμικότητα

$$x_1(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_1(f),\quad x_2(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_2(f) \Leftrightarrow a x_1(t) + b x_2(t) \leftrightarrow a\mathrm{X}_1(f) + b\mathrm{X}_2(f)$$

- Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου και Συχνότητας

$$x_1(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \qquad \frac{1}{|a|} x_1\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow X_1(af)$$

- Χρονική καθυστέρηση

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)\exp(-j2\pi f t_0)$$

- Δυϊσμός

Αν x(t) ⇔ X(f) => X(-t) ⇔ x(f) & X(t) ⇔ x(-f)

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (2)

- Συνδυασμός Αλλαγής Κλίμακας & Χρονικής Ολίσθησης

$$x_1(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \exp\left(-j2\pi f \frac{t_0}{a}\right)$$

- Ολίσθηση Συχνότητας

$$\exp(j2\pi f_c t) x(t) \leftrightarrow X(f - f_c)$$

- Συνέλιξη σημάτων στο πεδίο του χρόνου

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{x(t)} * \mathrm{g(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{x(t)} * \mathrm{g(t)} \xleftrightarrow{F} Y(f) = X(f) G(f)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (3)

- Παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)X(f)$$

- Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

- Διαμόρφωση

$$x(t)\cdot\cos(2\pi f t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f-f_c) + \frac{1}{2}X(f+f_c)$$

- Θεώρημα Parseval $E = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1
$x(t)=1$	$\delta(f)$

Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t} x(t) = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(f)\delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(f)H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$[X(f) * Y(f)]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$ ή $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$	$y(t) = X(t)$	$Y(f) = x(-f)$

Παραδείγματα

$$\sin c^2(t) \leftrightarrow tri(f)$$

$$4\sin c^2(4t) \leftrightarrow tri(\frac{f}{4})$$

Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect(t-10) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f\cdot 10}\text{sinc}(f)$$

Ιδιότητα χρονικής μετατόπισης

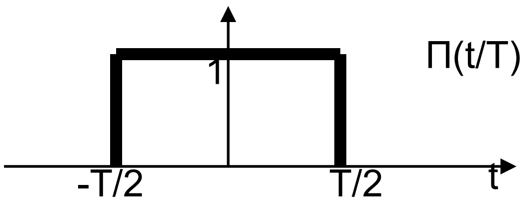
$$\cos(2\pi 10t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-10)+\delta(f+10)\right] \Leftrightarrow$$

Ιδιότητα δυϊσμού

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(t-10)+\delta(t+10)\right] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi 10(-f)) = \cos(2\pi 10 f)$$

Παραδείγματα (1)

- Τετραγωνικός Παλμός



$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

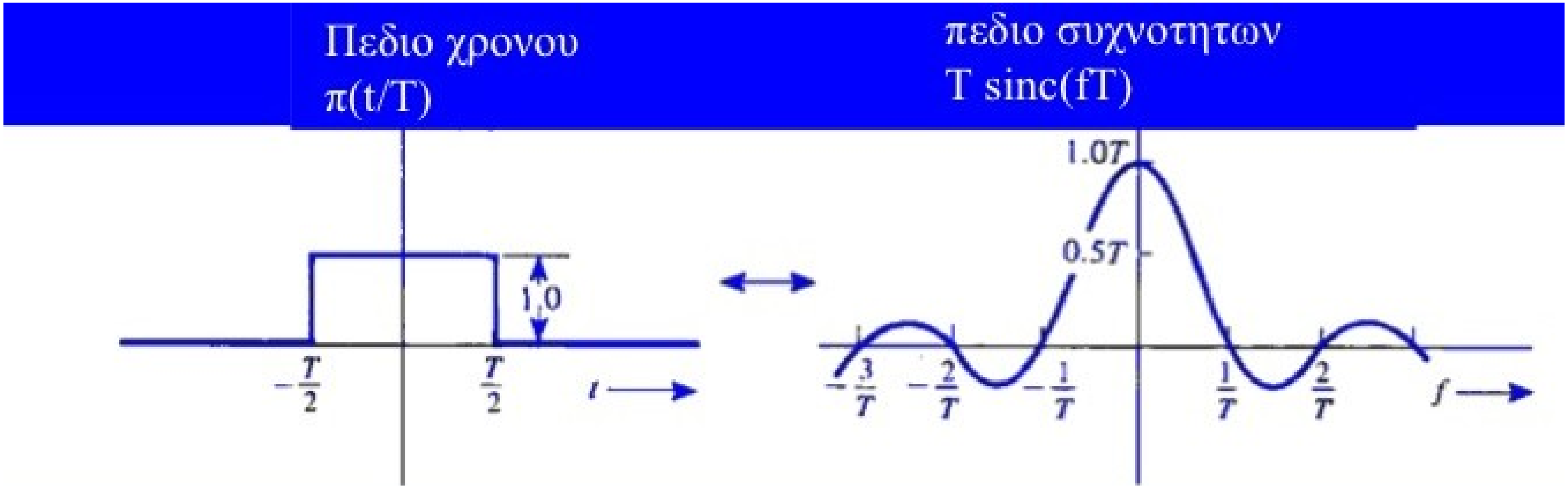
$$F[\Pi(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f}$$

- Αλλά $\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)/2j = \sin(x)$
- Αποτέλεσμα:

$$\Pi(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \cdot \sin c(fT)$$

Παραδείγματα (2)

- Είδαμε ότι Π(t/T) ⇔ Tsinc(f·T)
- Παρατηρήσεις:
  - Η διάρκεια του παλμού είναι αντιστρόφως ανάλογη του εύρους φάσματος
  - Η ασυνέχεια στο πεδίο του χρόνου οδηγεί σε απεριόριστο φάσμα



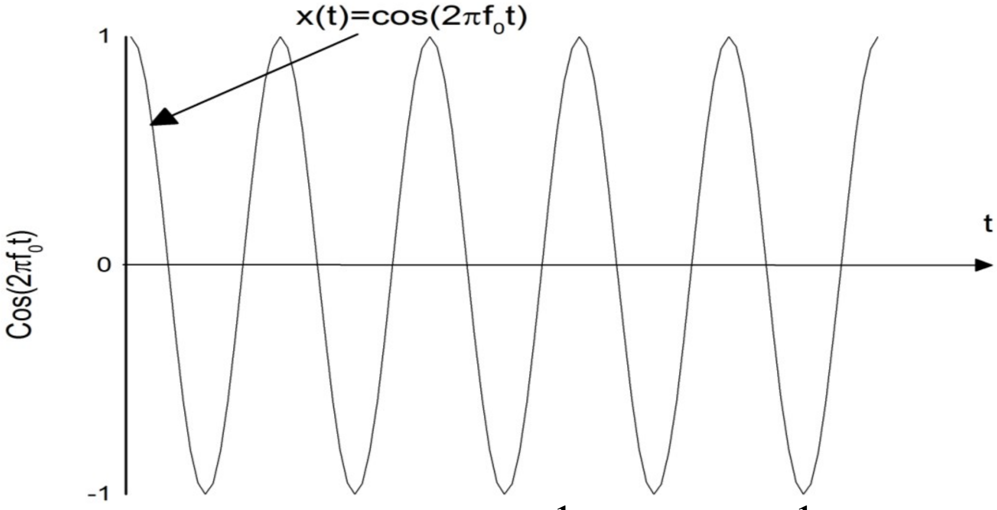
Παραδείγματα (3)

- Μερικές φορές ειναι ευκολότερο να βρουμε ενα σήμα στο χρόνο υπολογιζοντας τον αντιστροφο Μ/Σ
  - Δίνεται $X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_c)+\frac{1}{2}\delta(f+f_c)$
  - Βρίσκουμε

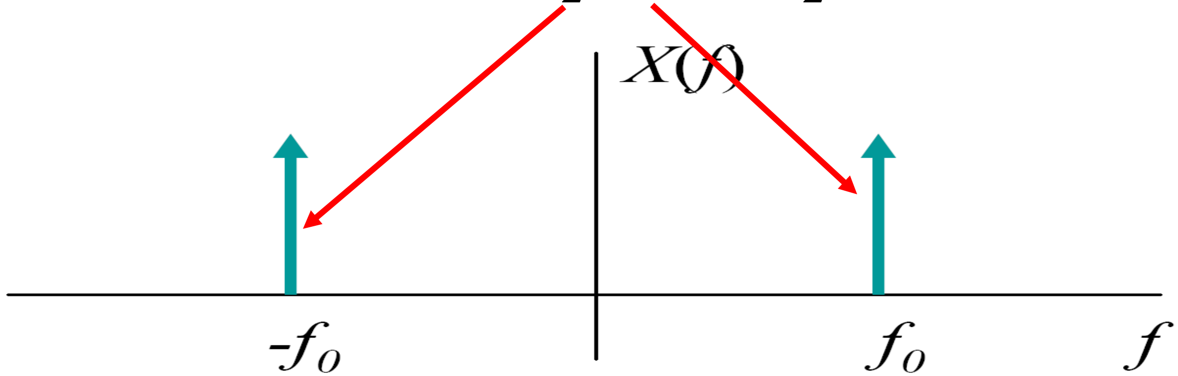
$$x(t)=F^{-1}\{X(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(f-f_c)e^{j2\pi ft}df+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(f+f_c)e^{j2\pi ft}df$$

$$=\frac{e^{j2\pi f_c t}+e^{-j2\pi f_c t}}{2}=\cos(2\pi f_c t)$$

Παραδείγματα (4)

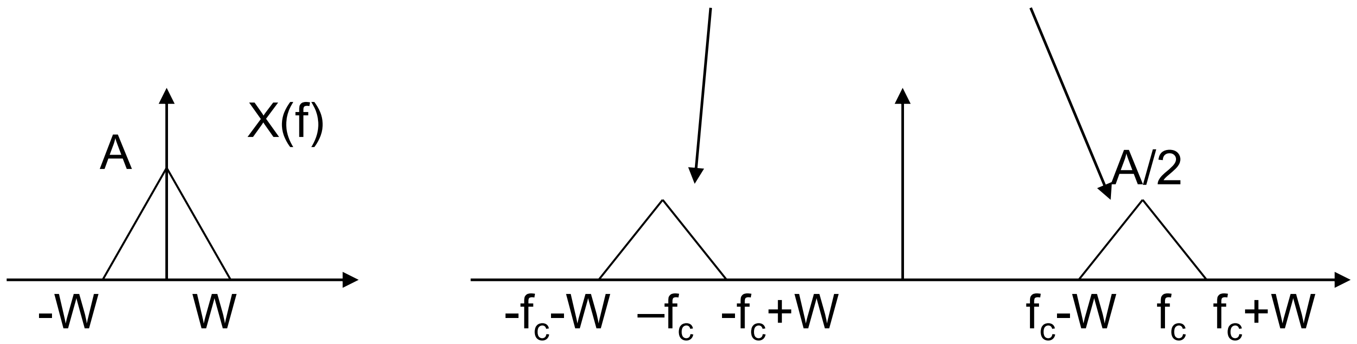


$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



Παραδείγματα (5)

- $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$

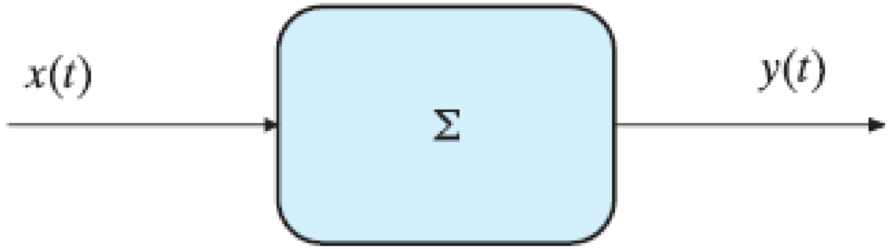


2.3.3.7 *Συνέλιξη*

Η έννοια της συνέλιξης σχετίζεται με τη χαρακτηριστική σχέση εισόδου-εξόδου σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα *x(t)* και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα *y(t)*.



Σχήμα 2.24

Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου

Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S\left(x(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t))$$

και

$$y_2(t) = S(x_2(t))$$

τότε:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))$$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t)),\ y_2(t) = S(x_2(t)), \ldots,\ y_k(t) = S(x_k(t))$$

τότε:

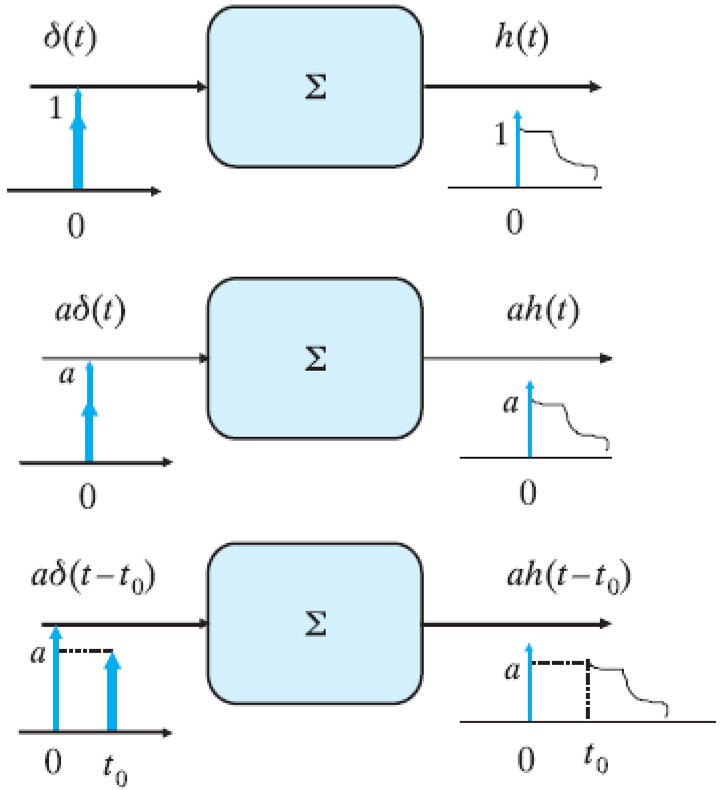
$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_k y_k(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(t) =$$

$$= S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \ldots + \alpha_k x_k(t)) = S\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, εαν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0, το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0.

Δηλαδή, αν $y(t) = S[x(t)]$ τότε $y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$.

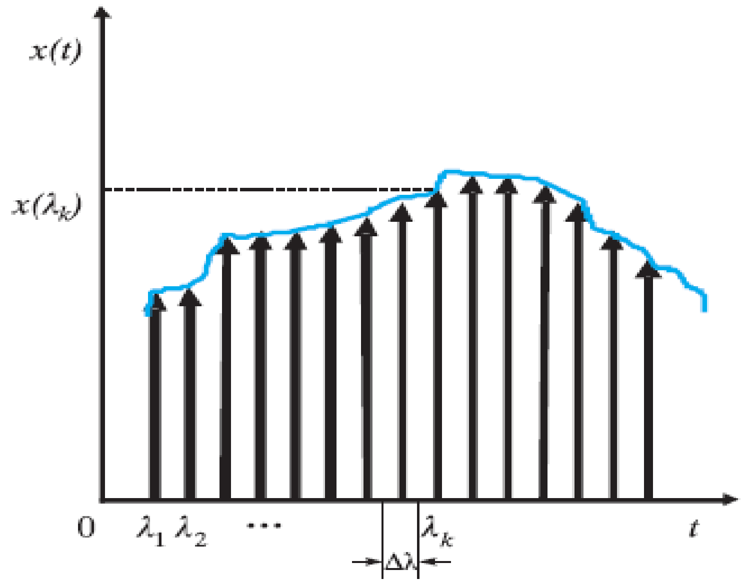
Η $\boxed{\text{κρουστική απόκριση}}$ ενός συστήματος $h(t)$ είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



Σχήμα 2.25

Κρουστική απόκριση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



Σχήμα 2.26

Αναπαράσταση σήματος εισόδου ως αθροίσματος παλμών

οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)\delta(t-\lambda_i)$$

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)h(t-\lambda_i) \xrightarrow{\Delta\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda = x(t)*h(t)$$

Η πράξη $x(t) * h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t), h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$$

αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος
οπότε ισχύει:

$$\begin{array}{ccccc} y(t) = & x(t) & * & h(t) \\ \updownarrow F & \updownarrow F & & \updownarrow F \\ Y(f) = & X(f) & \cdot & H(f) \end{array}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

Φίλτρα

Φίλτρα

- Το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας H(f) παίρνει σημαντικές τιμές μόνο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων
- Κατηγορίες Φίλτρων
  – Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (LPF): επιτρέπει τη διέλευση όλων των συνιστωσών του σήματος εισόδου με συχνότητες κάτω από ένα όριο b
  – Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (HPF): Το ιδανικό HPF αποκόπτει όλες τις συνιστώσες του σήματος εισόδου με συχνότητες μικρότερες από b και αφήνει τη διέλευση όλων των συνιστωσών πάνω από b χωρίς παραμόρφωση
  – Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (BPF): Διέλευση μιας συγκεκριμένης ζώνης συχνότητας

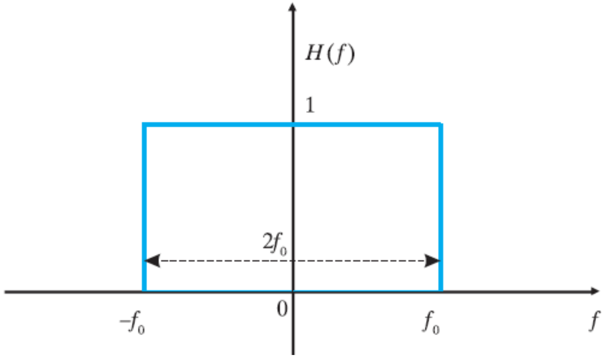
Φίλτρα

- Βαθυπερατά
  - Χαμηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Υψιπερατό
  - Υψηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Ζωνοπερατό
  - Συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζωνοφρακτικό
  - Φράση συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζώνες διέλευσης και αποκοπής

Τύποι Φίλτρων

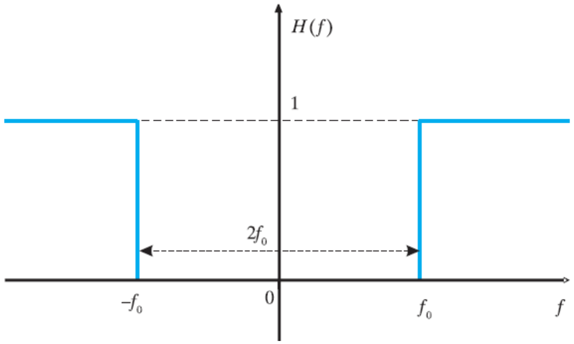
- Ιδανικό Βαθυπερατό (Low Pass)

$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|\le f_0\\ 0, & |f|>f_0\end{cases}$$



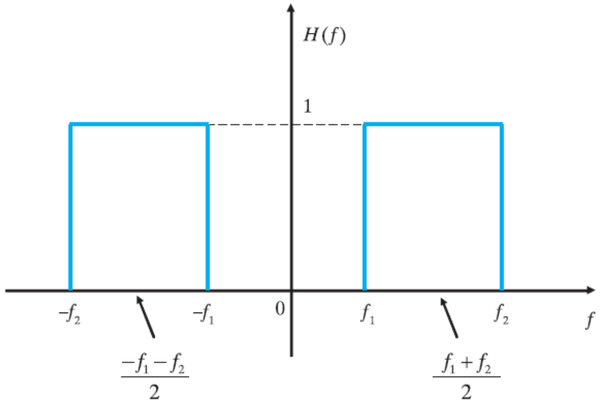
- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}0, & |f|\le f_0\\ 1, & |f|>f_0\end{cases}$$



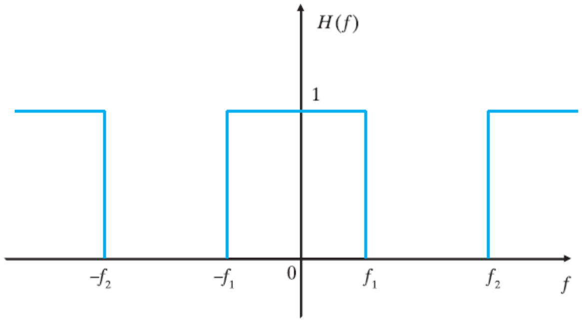
- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}1, & f_1\le|f|\le f_2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

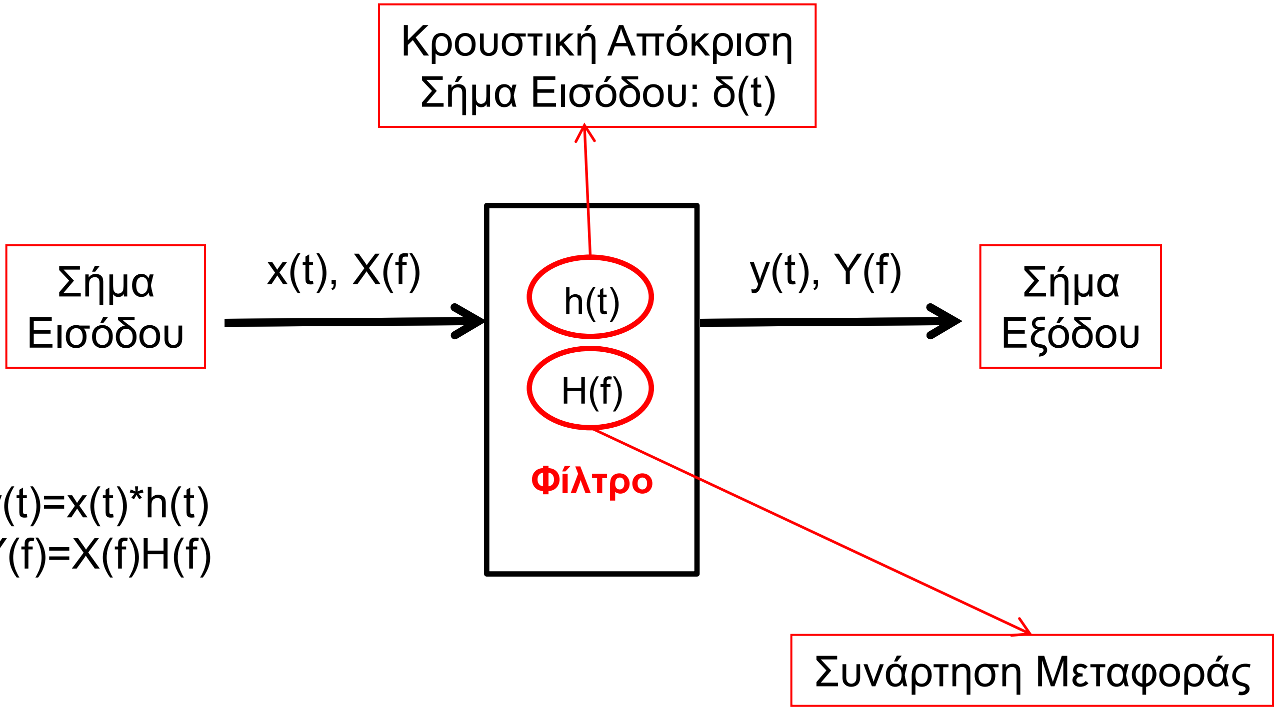


- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}0, & f_1\le|f|\le f_2\\ 1, & \text{αλλού}\end{cases}$$



Ορολογία Φίλτρων

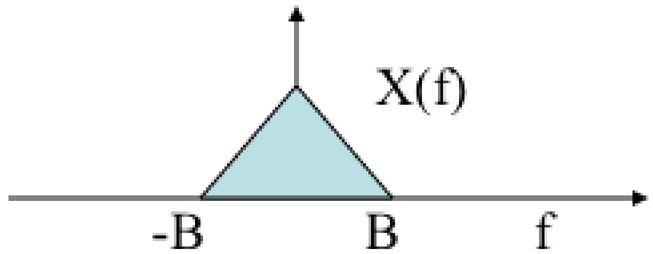


$y(t)=x(t)*h(t)$

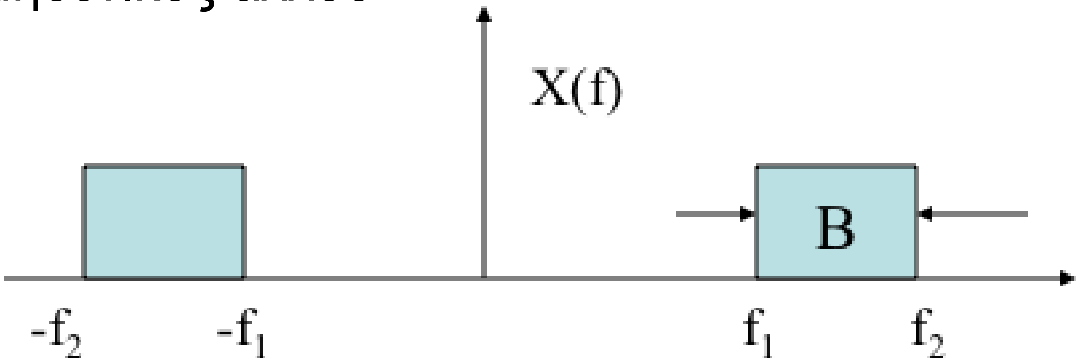
$Y(f)=X(f)H(f)$

Σηματα Βασικης Ζωνης και Ζωνοπερατα
Baseband and Bandpass Signals

- ‘Ενα σήμα x(t) Βασικής Ζώνης με εύρος φάσματος B είναι ένα σήμα για το οποίο ο Μ/Σ Fourier X(f) ειναι μη μηδενικός για $|f| \leq B$, και ειναι μηδενικός X(f) = 0 για |f| > B.



- Ένα ζωνοπερατό σήμα x(t) με εύρος φάσματος B = f2 – f1 είναι ένα σήμα για το οποίο ο X(f) ειναι μη μηδενικός για $0 < f_1 < |f| < f_2$, και είναι μηδενικός αλλού



Διαμορφώσεις Πλάτους-Βασικές αρχές

- Βασίζονται στην ιδιότητα μετατόπισης φάσματος

Αν

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

Τότε

$$x(t)\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(f-f_c)+X(f-f_c)\right]$$

Είδη διαμορφώσεων πλάτους

- Double Side Band (DSB) $x_{DSB}(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{Σήμα πληροφορίας}} \cdot \underbrace{A_c \cos(2\pi f_c t)}_{\text{Φέρον σήμα}}$
- Single Side Band (SSB) Προκύπτει από την DSB με κατάλληλο φιλτράρισμα μιας πλευρικής ζώνης
- AM $x_{AM}(t) = [1 + x(t)] \cdot A_c \cos(2\pi f_c t)$

Διαμόρφωση Διπλο-πλευρικής Ζώνης (DSB)

- Το σήμα μηνύματος x(t) πολλαπλασιάζεται με το φέρον σήμα $\cos 2\pi f_c t$

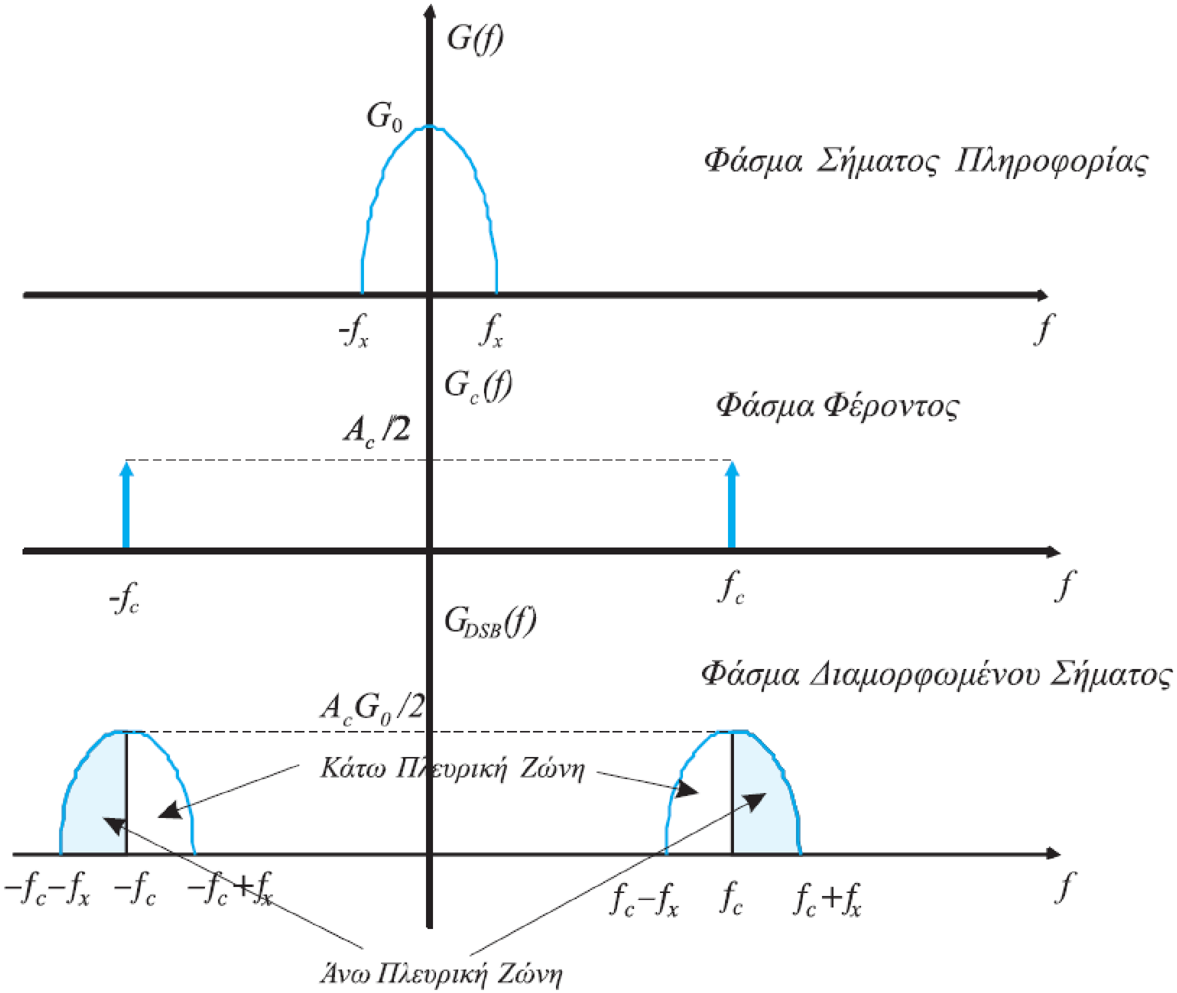
$$y_{DSB}(t) = x(t) \cdot cos(2\pi f_c t)$$

- Στο πεδίο της συχνότητας αυτό ανάγεται σε

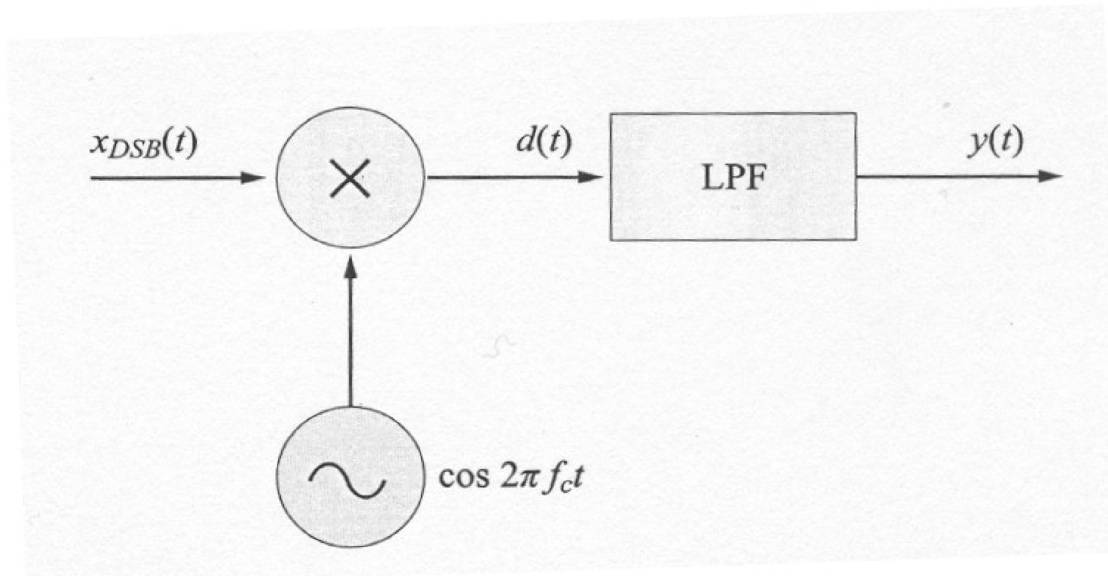
$$Y(f) = \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c)$$

- Δύο φάσματα Συχνοτήτων
  - Πάνω Πλευρική Ζώνη f>fc
  - Κάτω Πλευρική Ζώνη f<fc

Διαμόρφωση DSB : Πεδίο συχνότητας



Αποδιαμόρφωση DSB



Πεδίο χρόνου

$$d(t) = x_{DSB}(t)\cos 2\pi f_c t \Leftrightarrow d(t) = x(t)\cos^2 2\pi f_c t \Leftrightarrow$$

$$d(t) = \frac{1}{2}x(t)\left(1+\cos 4\pi f_c t\right) \Leftrightarrow d(t) = \frac{x(t)}{2} + \cancelto{0}{\frac{x(t)}{2}\cos 4\pi f_c t}$$

Πεδίο συχνότητας

$$d(t) = \frac{1}{2}x(t)\left(1+\cos 4\pi f_c t\right) \xleftrightarrow{\text{Fourier Transform}} D(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X(f)\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-2f_c)+\delta\left(f+2f_c\right)\right]\right\} \Leftrightarrow$$

$$D(f) = \frac{1}{2}X(f) + \cancelto{0}{\frac{1}{4}\left[X\left(f-2f_c\right)+X\left(f+2f_c\right)\right]}$$

Διαμόρφωση ΑΜ (1)

- Το σήμα ΑΜ δημιουργείται με την προσθήκη του φέροντος σε ένα σήμα DSB

$$x_{AM}(t) = A_c\left[1 + x(t)\right]\cos 2\pi f_c t = A(t)\cos 2\pi f_c t$$

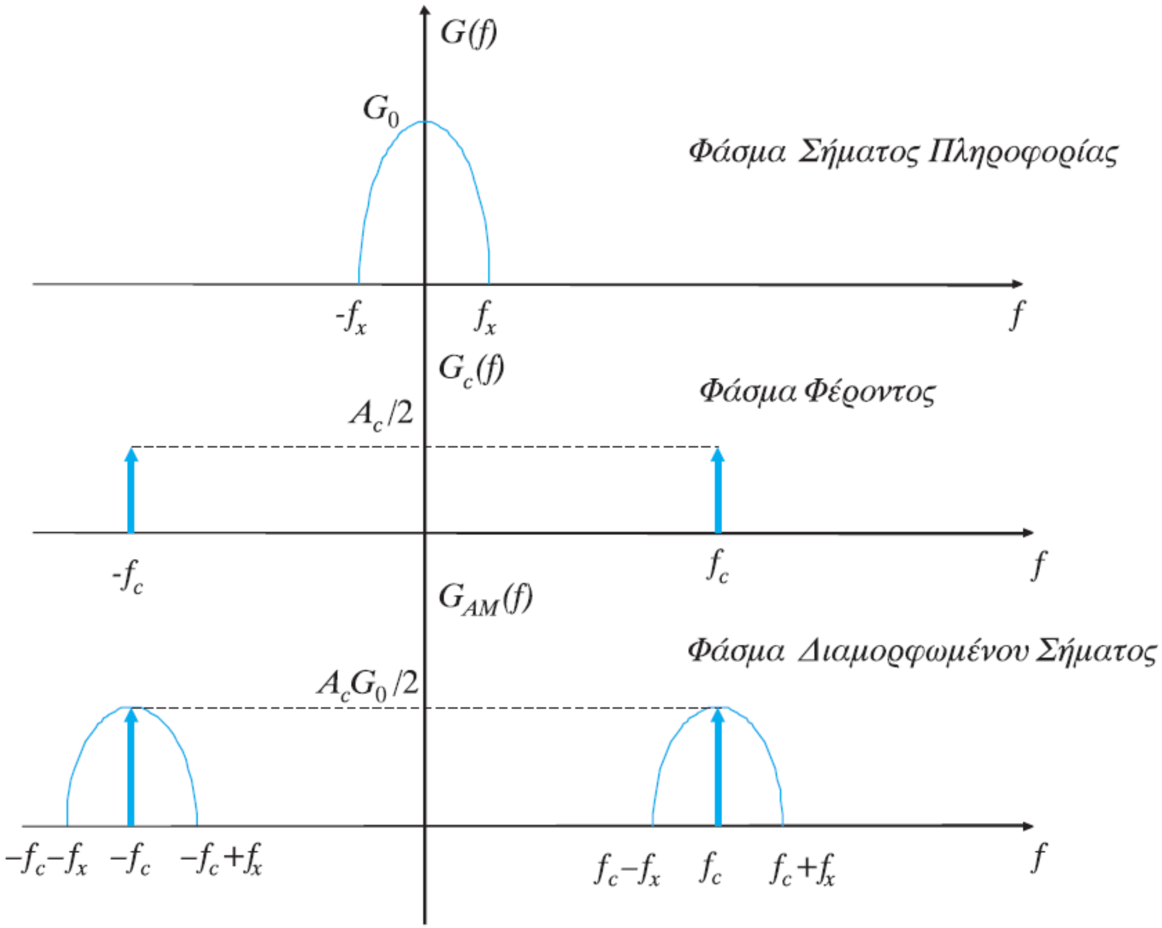
  – x(t) σήμα μηνύματος
  – Ac, fc πλάτος και συχνότητα φέροντος σήματος
  – A(t) περιβάλλουσα του διαμορφωμένου σήματος

- Στο πεδίο της συχνότητας το προηγούμενο ανάγεται σε

$$X_{AM}(f) = \frac{1}{2}A_c\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right] + \frac{1}{2}A_c\left[X(f - f_c) + X(f + f_c)\right]$$

Δεδομένου ότι $A_c\cos 2\pi f_c t \xleftrightarrow{\text{Fourier transform}} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]$

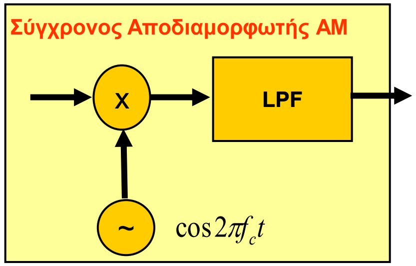
Διαμόρφωση ΑΜ: Πεδίο της συχνότητας



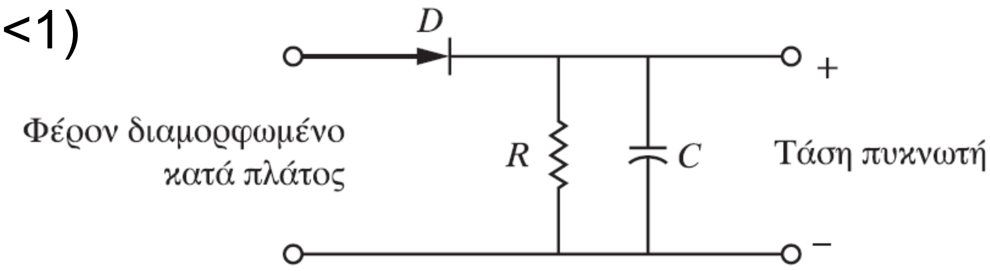
Το φάσμα του σήματος ΑΜ είναι πανομοιότυπο με το φάσμα του σήματος DSB, διαφέροντας μόνο στην προσθήκη της φασματικής συνιστώσας του φέροντος

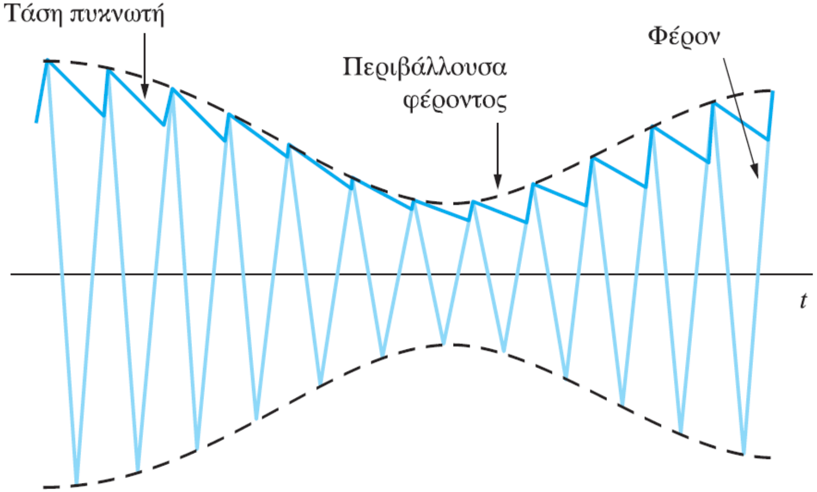
Αποδιαμόρφωση ΑΜ

- Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση
  - Όπως στα σήματα DSB



- Με φωρατή περιβάλλουσας (όταν μ<1)

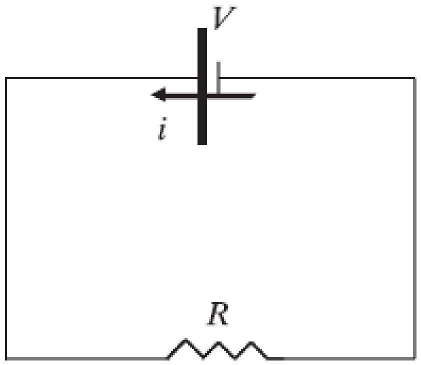




Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (1)

2.4.1 Στιγμιαία ισχύς/ενέργεια

Θεωρούμε καταρχήν το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος:



Σχήμα 2.27

Ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος

Υποθέτουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση V είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το χρόνο. Η ισχύς που παράγεται στο κύκλωμα και καταναλώνεται στην αντίσταση ισούται με:

$$P = V \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (2)

Και η αντίστοιχη ενέργεια που έχει παραχθεί στο κύκλωμα και έχει καταναλωθεί στην αντίσταση σε χρόνο t ισούται με το γινόμενο της ισχύος επί τον αντίστοιχο χρόνο, δηλαδή:

$$E(t) = P \cdot t = V \cdot i \cdot t = i^2 \cdot R \cdot t = \frac{V^2}{R} \cdot t$$

Οι μονάδες ισχύος είναι τα Watt (1W = 1Joule/sec) και ενέργειας είναι τα Joule ή οι Wh ($1\text{Wh} = 1\text{Watt} \times 1\text{hour} = 1\frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \times 3.600\,\text{sec} = 3.600\,\text{Joule}$)

Εάν στο παραπάνω σχήμα υποθέσουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε οι ανωτέρω σχέσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R = \frac{V^2(t)}{R}$$

$$E(t) = \int_0^t P(t) \cdot dt = \int_0^t V(t) \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^t i^2(t) \cdot R \cdot dt = \int_0^t \frac{V^2(t)}{R} \cdot dt$$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (3)

Για τηλεπικοινωνιακά συστήματα θεωρούμε ότι $R = 1\Omega$, οπότε το τηλεπικοινωνιακό σήμα $x(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί εξίσου με την εφαρμοζόμενη τάση ή το ρεύμα στις ανωτέρω σχέσεις, οι οποίες μετασχηματίζονται ως εξής:

Στιγμιαία ισχύς πραγματικού σήματος $P(t) = x^2(t)$

Ενέργεια πραγματικού σήματος $E(t) = \int_0^t x^2(t) \cdot dt$

Προκειμένου οι ανωτέρω ορισμοί να ισχύουν και για μιγαδικά σήματα $x(t)$ (των οποίων η ισχύς εξαρτάται μόνο από το μέτρο τους), οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

Στιγμιαία ισχύς σήματος $P(t) = |x(t)|^2$

Ενέργεια σήματος $E(t) = \int_0^t |x(t)|^2 \cdot dt$

Σημείωση: Για πραγματικά σήματα $x(t)$ ισχύει ότι $|x(t)|^2 = x^2(t)$.

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (4)

2.4.2 Μέση ισχύς

Γενικά, για ένα μέγεθος $m(t)$ που μεταβάλλεται με το χρόνο, η χρονική μέση τιμή του μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ($t_1 < t_2$) ορίζεται ως:

$$\overline{m(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} m(t) \cdot dt$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να εκφράσουμε τη μέση ισχύ ενός σήματος $x(t)$ λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή του καθ' όλη τη διάρκειά του (ή ισοδύναμα από $-\infty$ έως $+\infty$) ως εξής:

$$\overline{P(t)} = P_x = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt \right\} \overset{\substack{t_1\to -T \\ t_2 \to T}}{=} \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt \right\}$$

Αντίστοιχα, η ενέργεια αυτού του σήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$E_x = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty} \left\{ (t_2 - t_1) \cdot P_x \right\} = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (5)

2.4.3 Σήματα ενέργειας – ισχύος

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$0 < E_x < +\infty$$

ονομάζονται ενεργειακά. Παραδείγματα σημάτων ενέργειας είναι διάφοροι παλμοί (τετραγωνικός, τριγωνικός), δηλαδή σήματα πεπερασμένης διάρκειας. Τα σήματα αυτά έχουν μηδενική ισχύ.

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ

$$0 < P_x < +\infty$$

ονομάζονται σήματα ισχύος. Παραδείγματα σημάτων ισχύος είναι τα περιοδικά και τα σήματα άπειρης διάρκειας (π.χ. το σήμα $x(t) = c,\ 0 < t < +\infty$). Τα σήματα αυτά έχουν άπειρη ενέργεια.

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (6)

2.4.4 Ταυτότητα Parseval – Μέση ισχύς περιοδικών σημάτων

Για τα περιοδικά σήματα η σχέση υπολογισμού της μέσης ισχύος μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

Έστω σήμα $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 τέτοια ώστε να ισχύει $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$x(t+nT_0)=x(t),\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Στον υπολογισμό της μέσης ισχύος μπορούμε να περιορίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στη διάρκεια μιας περιόδου:

$$P_x = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\} \overset{t_2\to t_1+nT_0}{=} \lim_{nT_0\to\infty}\left\{\frac{1}{nT_0}\int_{t_1}^{t_1+nT_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{nT_0}\left[n\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right]\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\}=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt$$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (7)

Για τα περιοδικά σήματα που γράφονται με τη μορφή μιγαδικής σειράς Fourier ως:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft} \text{ , όπου } V_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi nft}dt=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)e^{-j2\pi nft}dt$$

και έχουν ΜΣ Fourier:

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n\cdot\delta(f-nf_0)\,,\ f_0=\frac{1}{T_0}$$

η μέση ισχύς μπορεί να γραφεί ως:

$$P_x=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)\cdot x^*(t)\cdot dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{V_n^*\cdot V_n\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|V_n\right|^2$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται ταυτότητα Parseval για περιοδικά σήματα.

Δηλαδή, βρίσκοντας την έκφραση του περιοδικού σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέση ισχύ του υπολογίζοντας το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών των όρων που περιλαμβάνει το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων.

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Παράδειγμα (1)

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

Α΄ τρόπος: Υπολογισμοί με ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Το $x(t)$ έχει περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Η μέση ισχύς, σύμφωνα με την παραπάνω ενότητα, θα ισούται με:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} |A_0 \cos(2\pi f_0 t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} [A_0 \cos(2\pi f_0 t)]^2 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t)\cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(2\pi f_0 t)\cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\cdot dt =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1}{2}\cdot dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2}\cdot dt\right] = \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{1}{2}[t]_{t_1}^{t_1+T_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} (\sin(4\pi f_0 t))' \cdot dt\right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{1}{2}[t_1 + T_0 - t_1] + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}[\sin(4\pi f_0 t)]_{t_1}^{t_1+T_0}\right] =$$

$$\frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}[\sin(4\pi f_0 (t_1 + T_0)) - \sin(4\pi f_0 (t_1))]\right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\left[\sin\left(4\pi f_0 t_1 + 4\pi f_0 \frac{1}{f_0}\right) - \sin(4\pi f_0 t_1)\right]\right] = \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + 0\right] = \frac{A_0^2}{2}$$

Παράδειγμα (2)

Β΄ τρόπος: Υπολογισμοί από τη σειρά Fourier – με την ταυτότητα Parseval

Το $x(t)$ μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς Fourier με τη χρήση της σχέσης Euler:

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{A_0}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Επίσης, ο ΜΣ Fourier του $x(t)$ ισούται με: $X(f) = \frac{A_0}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2}\delta(f + f_0)$

οπότε η μέση ισχύς υπολογίζεται (με χρήση της ταυτότητας Parseval) ως εξής:

$$P_x = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{A_0^2}{4} + \frac{A_0^2}{4} = \frac{A_0^2}{2}.$$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.2/ΟΣΣ2/9.12.2017/Ν.Δημητρίου

Ερωτήσεις

Παραδείγματα

ΘΕΜΑ 1 2017Β

Δίνονται τα σήματα $x(t)=\cos(2\pi 30t)$ και $y(t)=\cos(10t)$

Για τα παρακάτω σήματα να διερευνηθεί (α) η περιοδικότητα και η δειγματοληψία (με το κριτήριο Nyquist) και (β) να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) οι αντίστοιχες περίοδοι και οι ελάχιστες συχνότητες δειγματοληψίας τους:

Ερώτηση 1: $a(t)=1+x(t)+y(t)$

Ερώτηση 2: $b(t)=x(t)+y(t)\cdot rect\left(\frac{t}{10}\right)$

Ερώτηση 3: $c(t)=\left[x(t)+y(t)\right]*20\mathrm{sinc}^2(20t)$

Ερώτηση 4: $d(t)=\mathrm{sinc}(60t)\cdot t\cdot x(t)$

Σημείωση: Εδώ να εστιάσετε στα ερωτήματα για την περιοδικότητα, η δειγματοληψία θα καλυφθεί εκτενώς στην 3η ΟΣΣ

(α)

$$a(t)=1+x(t)+y(t)=1+\cos(2\pi 30t)+\cos(10t)=$$

$$=1+\cos(2\pi 30t)+\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)$$

$$\cos(2\pi 30t)$$

Περίοδος $T_1=\dfrac{1}{30}\sec$

$$\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)$$

Περίοδος $T_2=\dfrac{2\pi}{10}\sec$

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\dfrac{1}{30}}{\dfrac{2\pi}{10}}=\frac{1}{6\pi}$$

Άρρητος άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 30 Hz άρα το σήμα έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας 60Hz.

(β)

$$b(t)=\cos(2\pi 30t)+\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)\cdot rect\left(\frac{t}{10}\right)$$

$$\mathrm{B}(f)=\frac{1}{2}\left[\delta(f-30)+\delta(f+30)\right]+\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]*10\mathrm{sinc}(10f)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(f-30)+\delta(f+30)\right]+\frac{1}{2}\left[10\mathrm{sinc}\left(10\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\right)+10\mathrm{sinc}\left(10\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right)\right]$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης άρα δεν ορίζεται συχνότητα Nyquist.

(γ)

$$c(t)=\left[x(t)+y(t)\right]*20\operatorname{sinc}^2(20t)=\left[\cos(2\pi 30t)+\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)\right]*20\operatorname{sinc}^2(20t)$$

$$C(f)=\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-30)+\delta(f+30)\right]+\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]\right\}\cdot tri\left(\frac{f}{20}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\left(tri\left(\frac{\left(\frac{10}{2\pi}\right)}{20}\right)\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\left(tri\left(\frac{\left(-\frac{10}{2\pi}\right)}{20}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\left(-\frac{1}{20}\left(\frac{10}{2\pi}\right)+1\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{20}\left(-\frac{10}{2\pi}\right)+1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{10}{40\pi}\right)+1\right)\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]$$

Το σήμα είναι ένας τόνος συχνότητας 10/2π Hz (άρα η περίοδοςτου είναι 2π/10 Hz) και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 20/2π Hz.

Σημείωση: Το ερώτημα δεν απαιτούσε τον ακριβή υπολογισμό του πλάτους των παλμών δ (με βάση την τιμή του τριγωνικού παλμού στα σημεία 10/2π Hz, -10/2π Hz).

(δ)

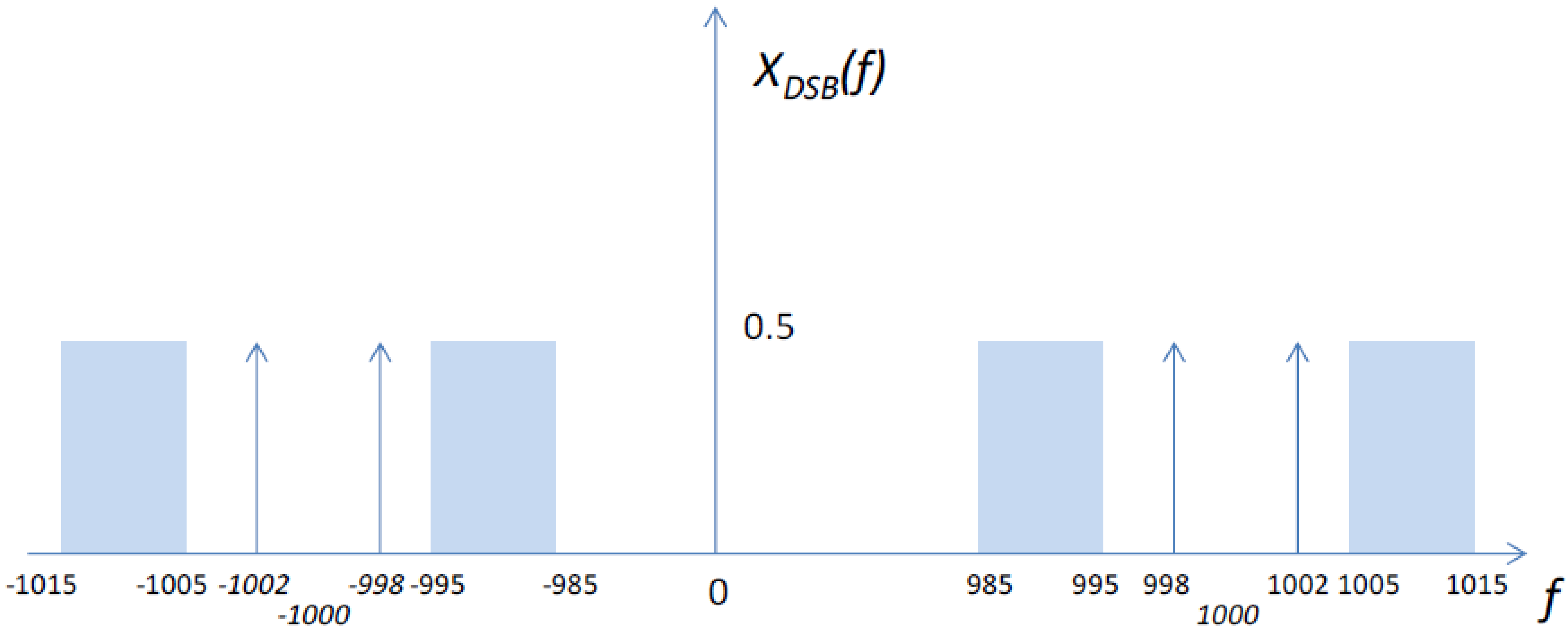
$$d(t) = \operatorname{sinc}(60t) \cdot t \cdot x(t) =$$

$$= \frac{\sin(60\pi t)}{60\pi t} t \cdot \cos(2\pi 30t) = \frac{1}{60\pi} \sin(2\pi 30\pi t) \cos(2\pi 30t) = \frac{1}{60\pi} \frac{1}{2} \sin(2\pi 60\pi t)$$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο ίση με 1/60 sec.
Το σήμα είναι ένας τόνος συχνότητας 60 Hz και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 120 Hz.

ΘΕΜΑ 2 2016B

Δίνεται το φάσμα του διαμορφωμένου κατά DSB σήματος:



όπου έχει χρησιμοποιηθεί φέρον συχνότητας 1KHz και μοναδιαίου πλάτους.

α) Να υπολογιστεί η έκφραση του μηνύματος $x(t)$

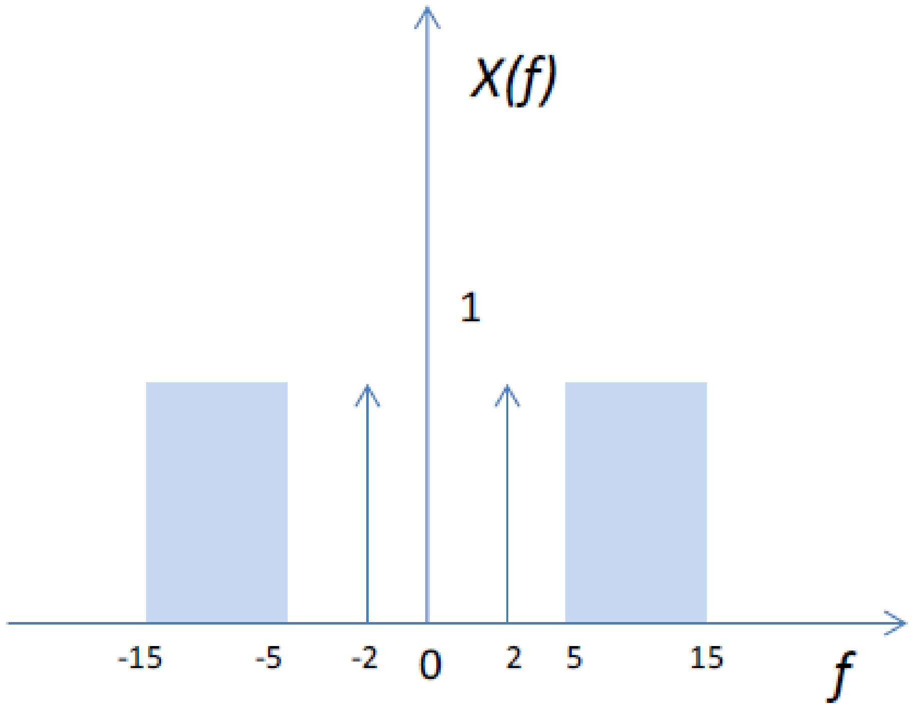
β) Να υπολογιστούν το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος και του μηνύματος

γ) Να βρεθεί η περίοδος (αν υπάρχει) του σήματος

$x(t) * 8sinc(8t)$

(Το σύμβολο '*' υποδηλώνει συνέλιξη)

α)
Αφού χρησιμοποιείται φέρον μοναδιαίου πλάτους και φέρουσας συχνότητας 1KHz το σήμα βασικής ζώνης θα είναι:



$$X(f) = \{\delta(f-2) + \delta(f+2)\} + rect\left(\frac{f+10}{10}\right) + rect\left(\frac{f-10}{10}\right) =$$

Ισχύει ότι:

$$e^{\pm j2\pi 10t} 10sinc(10t) \overset{F}{\leftrightarrow} rect\left(\frac{f \mp 10}{10}\right)$$

Επομένως το σήμα $\chi(t)$ είναι:

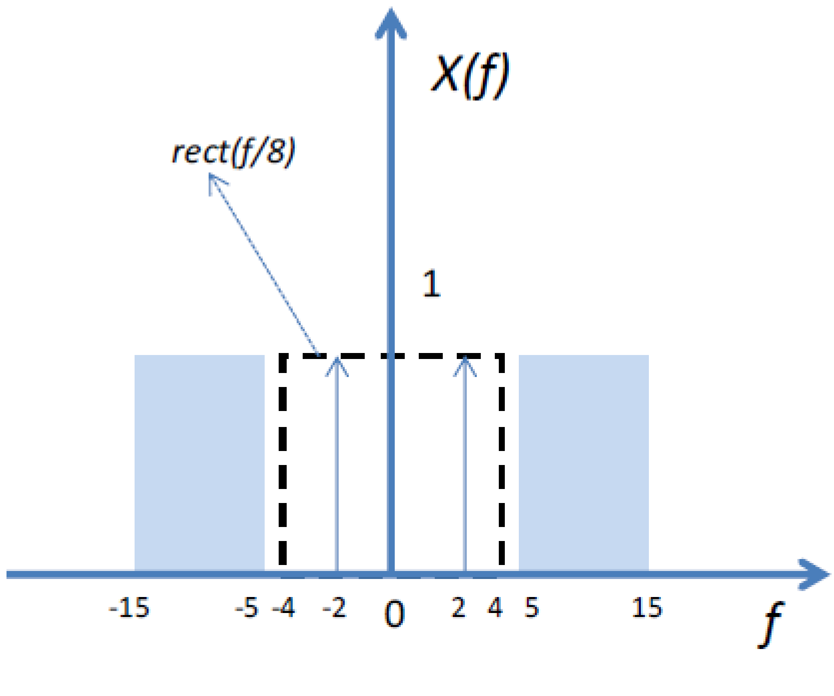
$$x(t) = 10sinc(10t)\{e^{j2\pi 10t} + e^{-j2\pi 10t}\} + 2cos(2\pi 2t) =$$
$$= 10sinc(10t)2cos(2\pi 10t) + 2cos(2\pi 2t) =$$
$$= 20sinc(10t)cos(20\pi t) + 2cos(4\pi t)$$

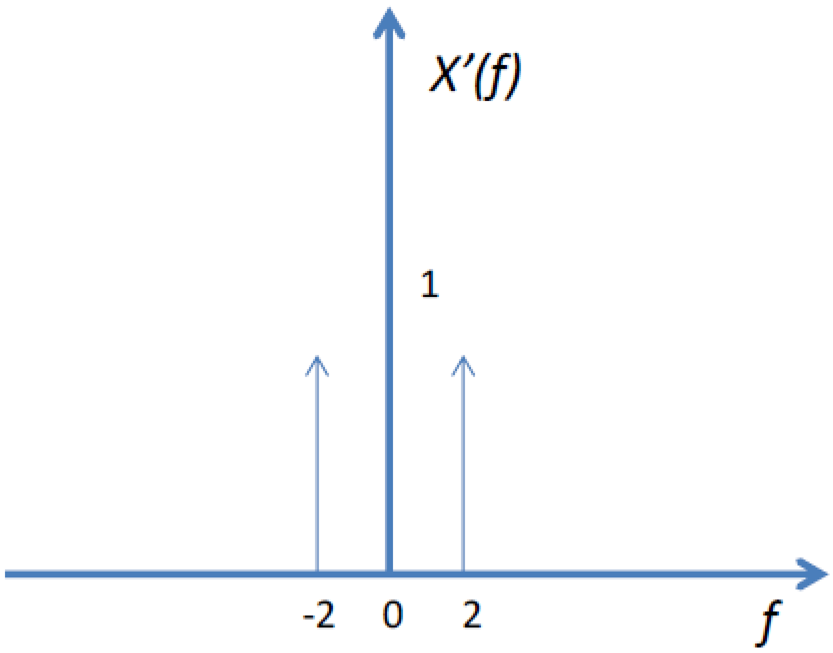
β)
Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος είναι 30Hz, ενώ του σήματος βασικής ζώνης είναι 15Hz

γ)

$$F\{\chi(t) * 8sinc(8t)\} = X(f)rect\left(\frac{f}{8}\right)$$

άρα





Άρα από το φάσμα μπορούμε να δούμε ότι

$$X(f)rect\left(\frac{f}{8}\right) = \delta(f-2) + \delta(f+2)$$

Επομένως το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα 2Hz και περίοδο T=0.5sec

ΘΕΜΑ 6 ΕΞ2016Α

Δίνεται το σήμα $x(t) = sin(100t)$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και η ικανότητα δειγματοληψίας (με το κριτήριο Nyquist) των παρακάτω σημάτων. Επίσης για κάθε σήμα να υπολογίσετε –αν υπάρχουν- την περίοδο και την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

(α) $y(t) = [x(t)]^2$

(β) $z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]$

(γ) $w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]^2$

(δ) $r(t) = x(5.5 \cdot t) \cdot x(2.5 \cdot t)$

(α)

$y(t) = [x(t)]^2 = sin^2(100t) = \frac{1-cos(200t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{cos\left(2\pi\frac{200}{2\pi}t\right)}{2}$

Το σήμα έχει έναν συνημιτονικό όρο άρα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_y = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi}Hz$, με περίοδο $T_y = \frac{\pi}{100}sec$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,y} = \frac{200}{\pi}Hz$

(β)

$$z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right] = sin(100t) * \frac{sin(100\pi t)}{100\pi t} = sin(100t) * sinc(100t) =$$

$$= sin\left(2\pi\frac{100}{2\pi}t\right) * sinc(100t)$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$Z(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right)\right] \cdot \frac{1}{100} rect\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το τελικό σήμα περιλαμβάνει τους 2 παλμούς δ στις συχνότητες $\pm\frac{100}{2\pi}Hz = \pm\frac{50}{\pi}Hz$ (εφόσον στην ανωτέρω πράξη ο τετραγωνικός παλμός δρα ως βαθυπερατό φίλτρο με μεγαλύτερη συχνότητα αποκοπής, ίση με 50 Hz.

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_z = \frac{50}{\pi}Hz$,

με περίοδο $T_z = \frac{\pi}{50}sec$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,z} = \frac{100}{\pi}Hz$

$$(\gamma)\ w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]^2 = sin(100t) + \left[\frac{sin(100\pi t)}{100\pi t}\right]^2 = sin(100t) + sinc^2(100t) =$$

$$= sin\left(2\pi\frac{100}{2\pi}t\right) + sinc^2(100t)$$

Το σήμα έχει φάσμα πλάτους :

$$W(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right)\right] + \frac{1}{100}tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100Hz, άρα η ελάχιστη συχνότητα Nyquist είναι $f_{s,w} = 200Hz$.

(δ) $r(t) = x(5.5t) \cdot x(2.5t) = sin(550t) \cdot sin(250t) = \frac{1}{2}[cos(550t - 250t) - cos(550t + 250t)] =$
$= \frac{1}{2}[cos(300t) - cos(800t)]$

Οι περίοδοι των 2 συνημιτονικών όρων είναι οι εξής:

$T_1 = \frac{2\pi}{300} sec$

$T_2 = \frac{2\pi}{800} sec$

και ο λόγος τους είναι

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{300}}{\frac{2\pi}{800}} = \frac{8}{3}$, ρητός , οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_r = 3T_1 = 8T_2 = \frac{\pi}{50} sec$

, έχει συχνότητα $f_r = \frac{50}{\pi} Hz$,

και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,r} = 2\frac{400}{\pi} Hz = \frac{800}{\pi} Hz$

ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0=\dfrac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t)=x(t)*\left[2a\cdot\mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha>f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \text{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \text{sinc}(2at)\right] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \Im\left[2a \cdot \text{sinc}(2at)\right]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

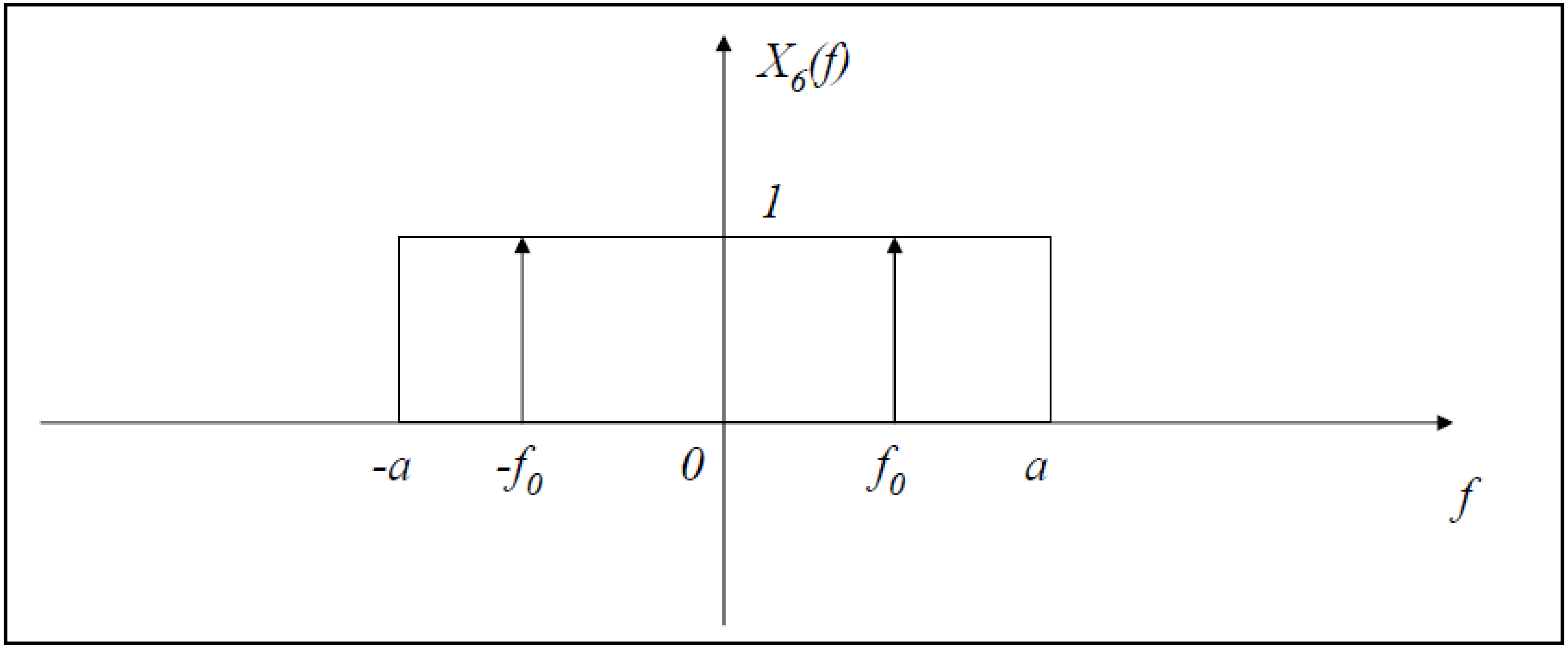
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] = X(f)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

και $\Leftrightarrow \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2a} rect\left(\dfrac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

Παράδειγμα με φίλτρα.

Ποιά η σχέση των a, b ώστε $(\alpha, b > 0)$

να ισχύει $\alpha\,\mathrm{sinc}(\alpha t) * b\,\mathrm{sinc}^2(bt) = b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$?

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = x(t)$$

$x(t) = b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$

$h(t) = \alpha\,\mathrm{sinc}(\alpha t) \qquad \alpha, b > 0$

Υπολογισμός $X(f)$

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}^2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \text{tri}(f)$

αλλ. κλίμακας $\text{sinc}^2(bt) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{b}\text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

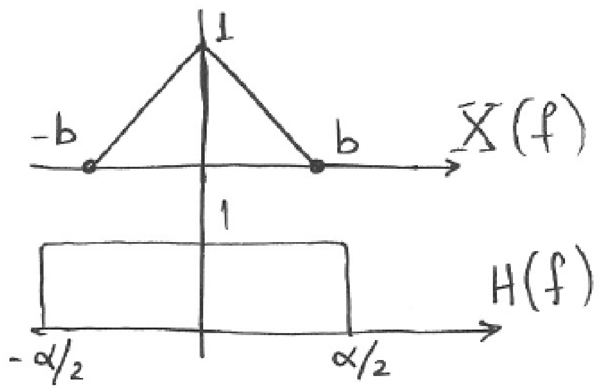
$\Rightarrow b\,\text{sinc}^2(bt) \overset{F}{\longleftrightarrow} \text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

Υπολογισμός $H(f)$.

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \text{rect}(f)$

αλλ. κλίμακας $\text{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}\text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow \alpha\,\text{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

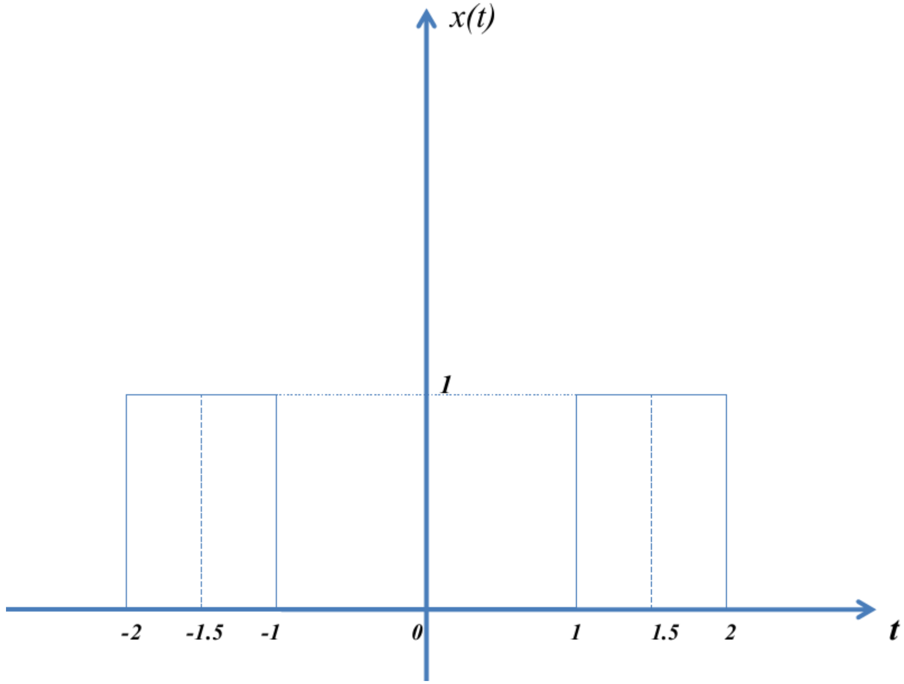


Εμείς θέλουμε $X(f)\cdot H(f) = X(f)$

οπότε $b \leq \frac{a}{2}$

ΘΕΜΑ 4 /ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής συνέλιξη: $y(t)=\left\{\delta(t)+\frac{1}{2}\left[\delta(t-3)+\delta(t+3)\right]\right\}*rect(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f)=\cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5) \ .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f) \ .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} * rect(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$Y(f) = \Im\left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} \cdot \Im\left[rect(t)\right] =$$

$$= \left[1 + \cos(6\pi f)\right] \cdot \mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \mathrm{sinc}(f)$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right]\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

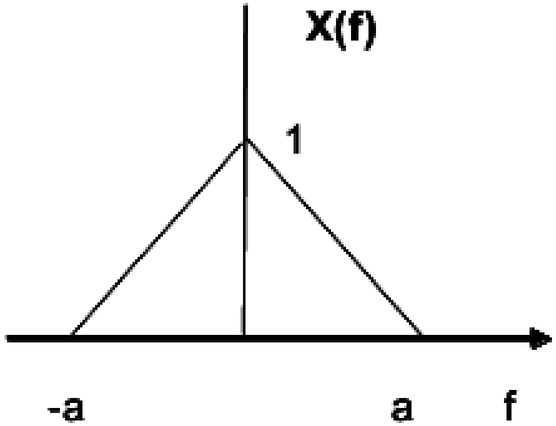
$$1+\cos(6\pi f)=2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

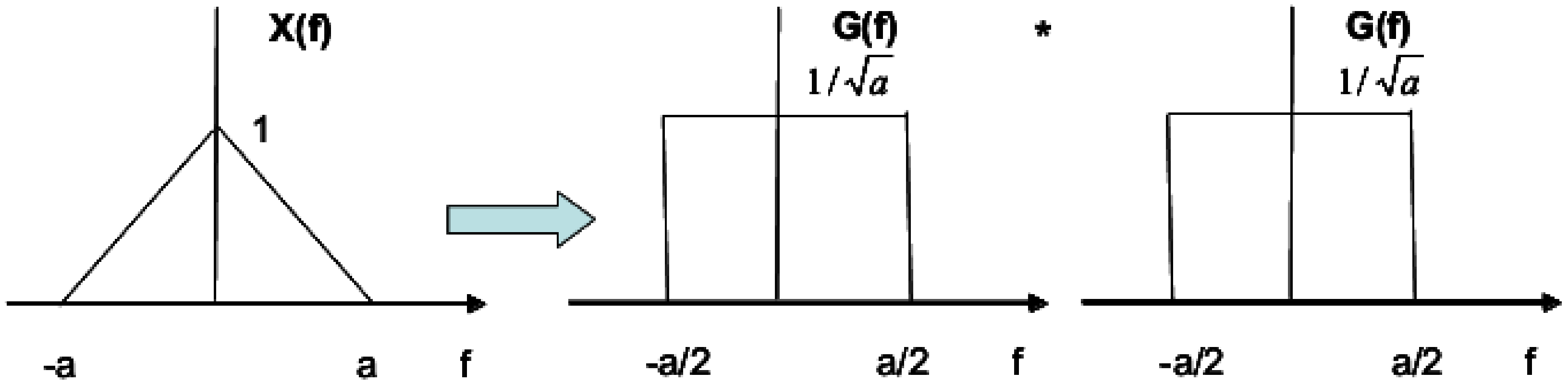
$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{2\cos^2(3\pi f)\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)}=\cos(3\pi f)$$

Θέμα 5 ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα x(t) στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) [X(f)] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα x(t) προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier X(f) προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος G(f) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση g(t) με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a}\sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \sin c^2(at)$$

Άσκηση 4 (επαναληπτική, ΓΕ5/1112/Θ6)

Δίνεται το σήμα $x_1(t) = a \cdot \mathrm{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \mathrm{sinc}(2a \cdot t)$, $a > 0$. Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους *2V* και συχνότητας $f_c = a\ Hz$ και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα $x_2(t)$.

1. Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του αρχικού σήματος $X_1(f)$ και του διαμορφωμένου DSB σήματος $X_2(f)$.

1. Δίνεται ότι $x_1(t) = a \cdot \mathrm{sinc}^2(a \cdot t) + 2a \cdot \mathrm{sinc}(2a \cdot t),\ a > 0$

Έχουμε:

$$\mathrm{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} tri(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} tri\left(\frac{f}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\mathrm{sinc}^2(at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} rect\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a\mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = a\mathrm{sinc}^2(at) + 2a\mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{a}\right) + rect\left(\frac{f}{2a}\right) = X_1(f)$$

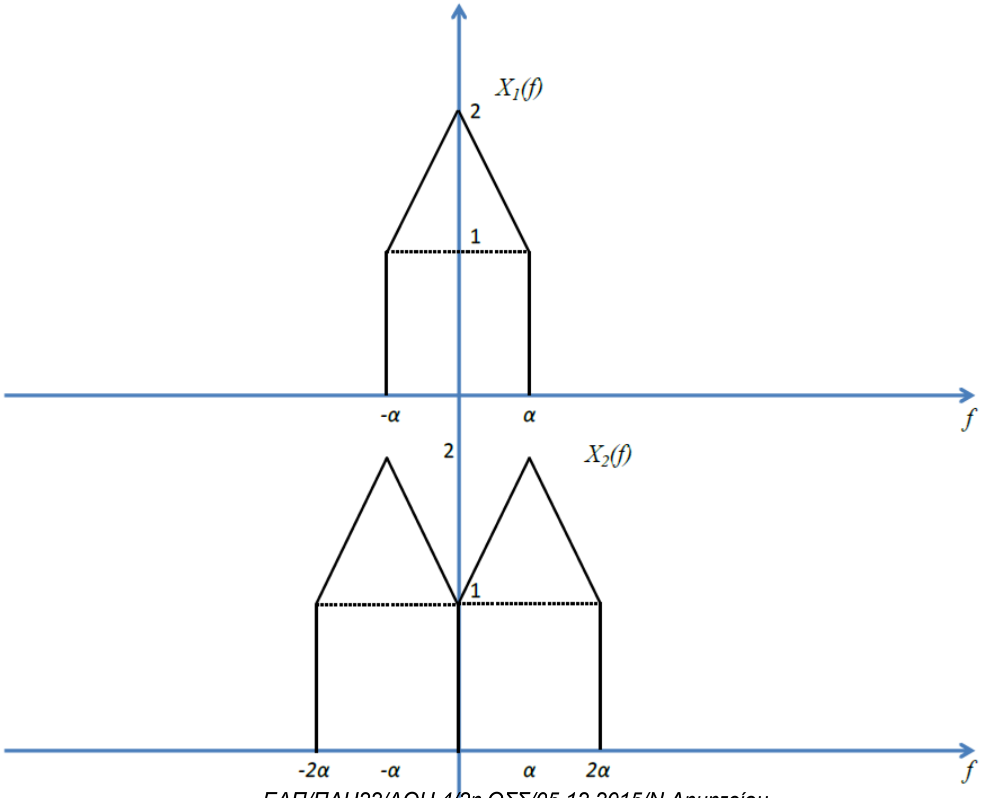
Το σήμα διαμορφώνει κατά πλάτος (DSB) συνημιτονικό φέρον σήμα πλάτους $A_c = 2V$ και συχνότητας $f_c = a\ Hz$ και προκύπτει το διαμορφωμένο DSB σήμα $x_2(t)$.

Το φάσμα πλάτους του είναι το εξής:

$$X_2(f) = \frac{1}{2} A_c \left\{ X_1(f - f_c) + X_1(f + f_c) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \left\{ X_1(f - a) + X_1(f + a) \right\} = tri\left(\frac{f-a}{a}\right) + rect\left(\frac{f-a}{2a}\right) + tri\left(\frac{f+a}{a}\right) + rect\left(\frac{f+a}{2a}\right)$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα φάσματα πλάτους $X_1(f)$ και $X_2(f)$.



ΘΕΜΑ 4	ΓΕ1/1314

Στόχος της άσκησης *Η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας σημάτωντόσο στο πεδίο του χρόνου όσο στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως επίσης και η εφαρμοφή του κριτηρίου Nyquist για την εύρεση της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.*

Σχετικές ασκήσεις: *Άσκηση 1 (σελ.1), Άσκηση 5 (σελ.8) - Επεξεργασία Σημάτων και Φάσμα και Άσκηση 4 (σελ.27)-Διαμόρφωση από το plh22_oss1-final.pdf*

Δίνονται τα σήματα $x_1(t)=\cos(10\pi t)$, $x_2(t)=\sin(t)$.

Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περίοδοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(α) $y_1(t)=x_1(t)-x_2(t)$

(β) $y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(\pi t)$

Δίνονται τα σήματα $x_3(t)=\delta(t-100)+\delta(t+100)$, $x_4(t)=\frac{1}{200}\sin c\left(\frac{t}{200}\right)$

Να βρεθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(γ) $y_3(t)=x_3(t)+x_4(t)$

(δ) $y_4(t)=x_3(t)*x_4(t)$

(α)

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \cos(10\pi t) - \sin(t)$$

$\cos(10\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{1}{5}\sec$

$\sin(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = 2\pi \sec$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{1}{5}}{2\pi} = \frac{1}{10\pi}$ άρρητος, άρα το $y_1(t)$ απεριοδικό

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

(β)

$$y_2(t) = x_1(t)\cdot x_2(\pi t) = \cos(10\pi t)\cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi t + 10\pi t) + \sin(\pi t - 10\pi t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(11\pi t) - \sin(9\pi t)\right]$$

$\sin(11\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{2}{11}\sec$

$\sin(9\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = \frac{2}{9}\sec$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$ ρητος, άρα το $y_2(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_2 = 11T_A = 9T_B = 2\sec$

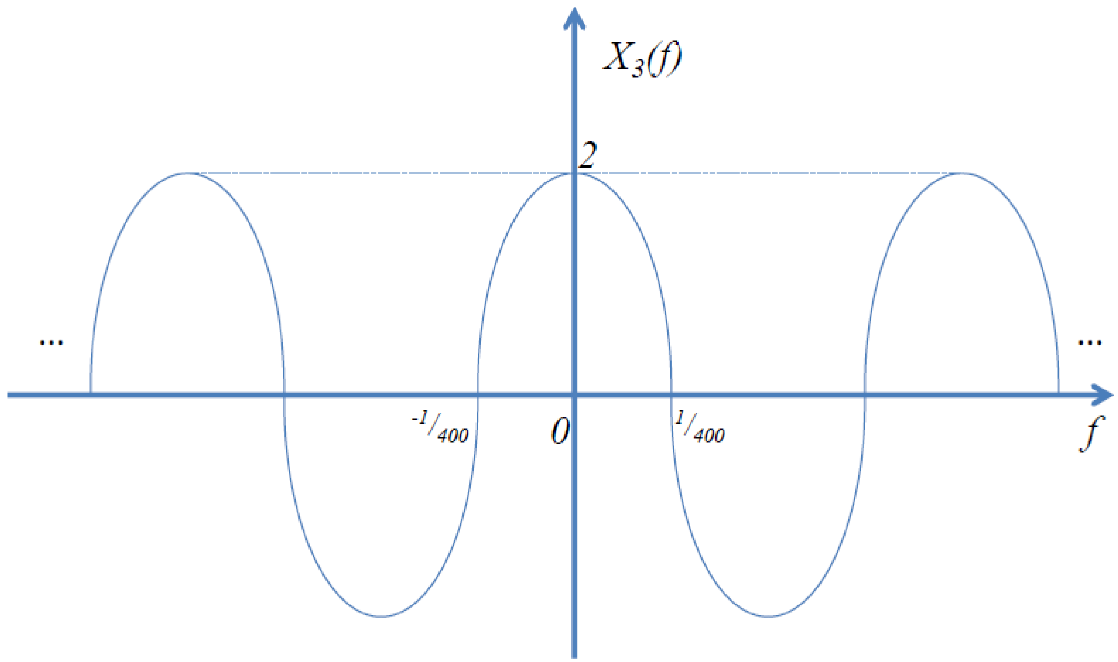
(γ)

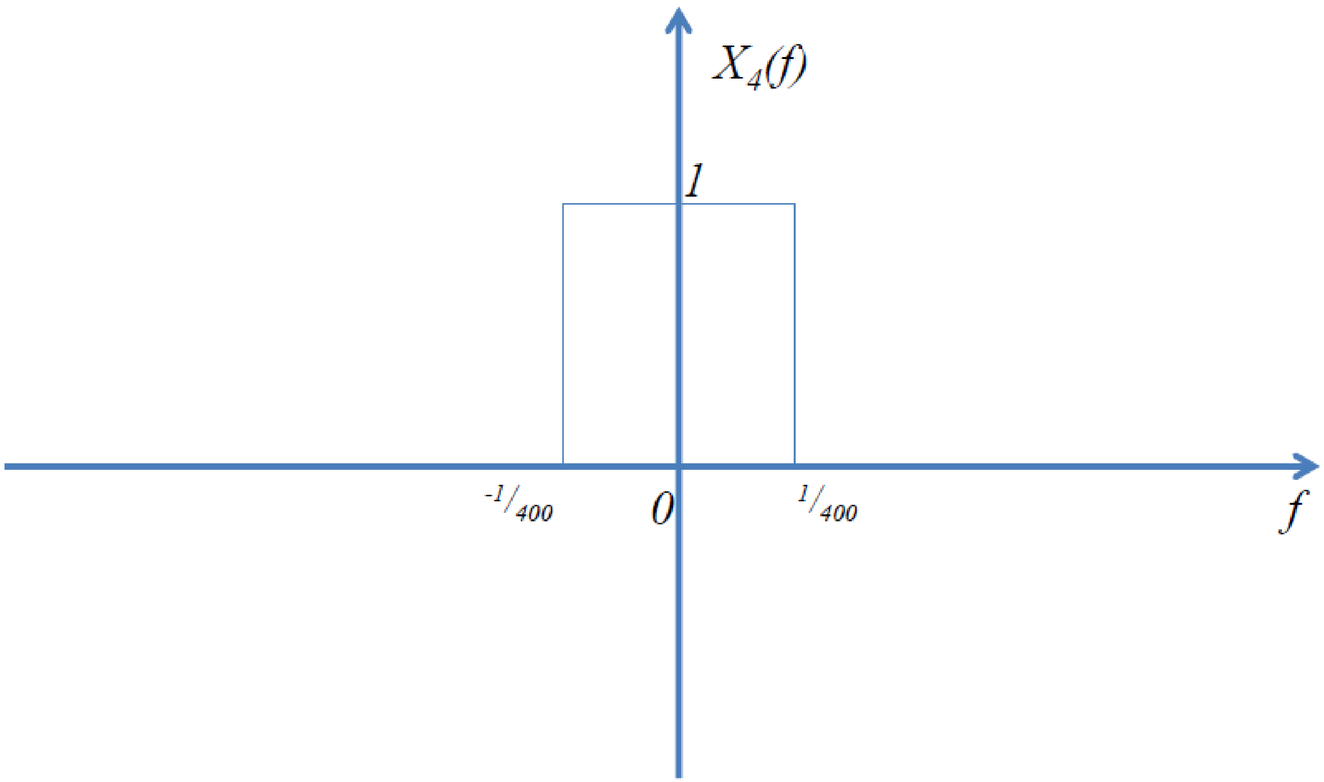
$$y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{F} 2\cos(2\pi f 100) = X_3(f)$$

$$x_4(t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{1/200}\right) = X_4(f)$$

Τα φάσματα πλάτους των ανωτέρω σημάτων απεικονίζονται παρακάτω

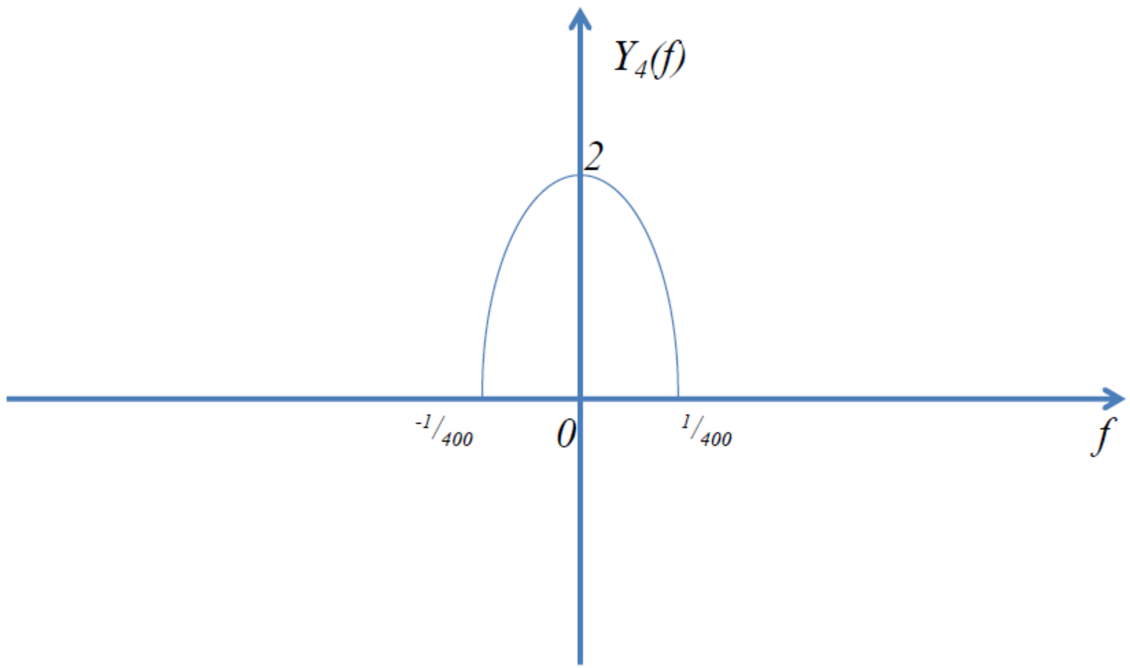




Το φάσμα $Y_3(f) = X_3(f) + X_4(f)$ είναι συνεχές συνεπώς το σήμα $y_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(δ) $y_4(t) = x_3(t) * x_4(t) \xleftrightarrow{F} X_3(f) \cdot X_4(f) = 2\cos(2\pi f 100) \cdot rect\left(\frac{f}{1/200}\right)$

Το φάσμα $Y_4(f)$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Το φάσμα είναι συνεχές, συνεπώς το σήμα $y_4(t)$ δεν είναι περιοδικό.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = 4\cos(800\pi t)$ και $X_2(f) = tri\left(\frac{f}{100}\right)$.

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

(α). Να υπολογιστεί η έκφραση $x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t)\right]$

(β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος *$x_3(t)$*.

1/

(α), (β)

$$x_1\left(\frac{t}{2}\right)=4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{t}{2}\right)=4\cos\left(2\pi 200t\right)\leftrightarrow 2\left[\delta\left(f-200\right)+\delta\left(f+200\right)\right] \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{2}x_1\left(\frac{3t}{2}\right)=\frac{1}{2}4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{3t}{2}\right)=2\cos\left(2\pi 600t\right)\leftrightarrow \delta\left(f-600\right)+\delta\left(f+600\right) \qquad \text{(B)}$$

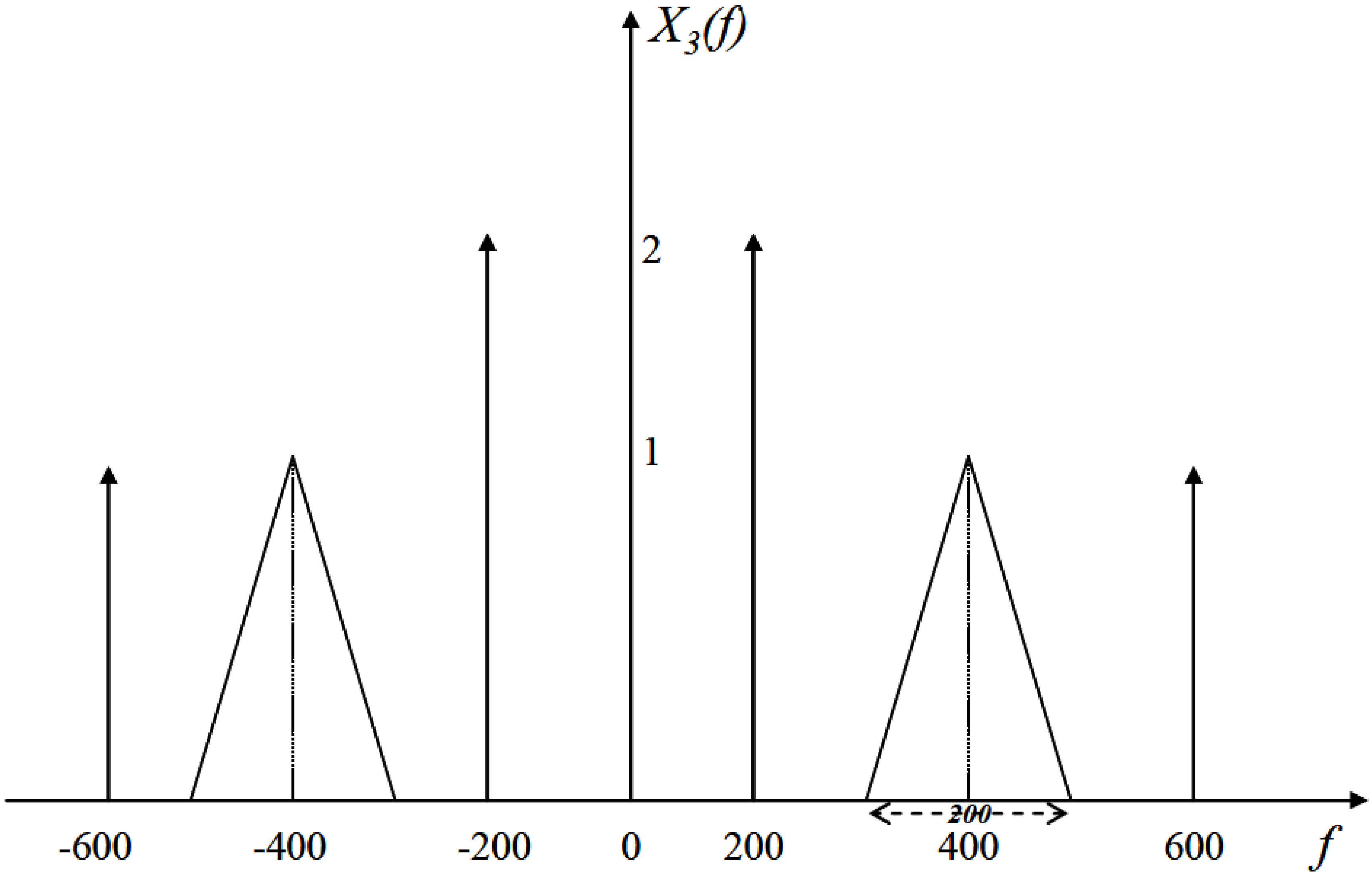
$$\frac{1}{2}x_1(t)x_2(t)=2\cos\left(2\pi 400t\right)100\sin c^2(100t)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\{\delta\left(f-400\right)+\delta\left(f+400\right)\right\}*tri\left(\frac{f}{100}\right)=tri\left(\frac{f-400}{100}\right)+tri\left(\frac{f+400}{100}\right) \qquad \text{(Γ)}$$

Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t) \right] = 4\cos(2\pi 200t) + 2\cos(2\pi 600t) + 200\cos(2\pi 400t)\sin c^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2\left[\delta(f-200) + \delta(f+200)\right] + \left[\delta(f-600) + \delta(f+600)\right] + \left[tri\left(\frac{f-400}{100}\right) + tri\left(\frac{f+400}{100}\right)\right]$$


$X_3(f)$
2
1
-600
-400
-200
0
200
400
600
200
f

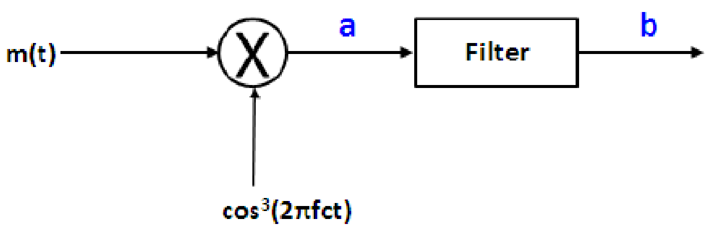
ΘΕΜΑ 4

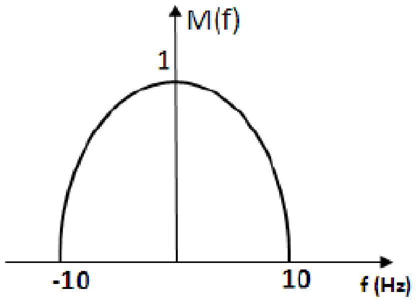
Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με την έννοια της διαμόρφωσης και του φάσματος αλλά και τη χρήση φίλτρων.*
Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ1/2005-2006/Θ4, ΓΕ1/0910/Θ5, ΓΕ5/0708/Θ4, ΓΕ2/2011-12/Θ1*

Να σχεδιαστεί σύστημα διαμόρφωσης DSB όπου το εξαγόμενο σήμα στο σημείο **b** να είναι της μορφής

$$k \cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

όπου m(t) είναι ένα σήμα βασικής ζώνης B=10 Hz με φάσμα πλάτους M(f) (βλ. σχήμα) και k είναι μία σταθερά. Το προς σχεδίαση σύστημα διαμόρφωσης απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα





(α) Να βρεθεί στο σημείο **a** η έκφραση του σήματος στο πεδίο του χρόνου.
(β) Να σχεδιαστεί το φάσμα της κυματομορφής στο σημείο **a.**
(γ) Τι φίλτρο χρησιμοποιείται και ποια είναι η ελάχιστη επιτρεπτή συχνότητα f_c του φέροντος;
(δ) Αν το φέρον διαμόρφωσης είναι το $\cos^2(2\pi f_c t)$, να εξεταστεί αν το παραπάνω σύστημα διαμόρφωσης με την επιλογή του φίλτρου στο (γ) εξακολουθεί να παράγει το σήμα της μορφής:

$$k \cdot m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Υπόδειξη : Όπως παρατηρείτε και στο σχήμα, το φέρον σήμα είναι της μορφής $\cos^3(2\pi f_c t)$

$$y = cos^3(2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) \cdot cos^2(2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) \cdot \frac{1+\cos(2\pi 2 f_c t)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) \cdot cos(2\pi 2 f_c t) =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}[cos(2\pi(2f_c + f_c)t) + cos(2\pi(2f_c - f_c)t)] =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi \cdot 3 f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi f_c t) =$$

$$\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi \cdot 3 f_c t)$$

(α). Με βάση το σχήμα, στο σημείο **(a)** θα έχω

$$z = m(t) \cdot y(t) = m(t) \cdot \left(\frac{3}{4}\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4}\cos(2\pi \cdot 3 f_c t)\right) =$$

$$= \frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 3 f_c t)$$

- Το σήμα $\frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$ αποτελεί το επιθυμητό σήμα ενώ
- το σήμα $\frac{1}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 3 f_c t)$ αποτελεί το ανεπιθύμητο σήμα εξαιτίας του όρου $3f_c$, το οποίο και θα πρέπει να απορριφθεί από το φίλτρο

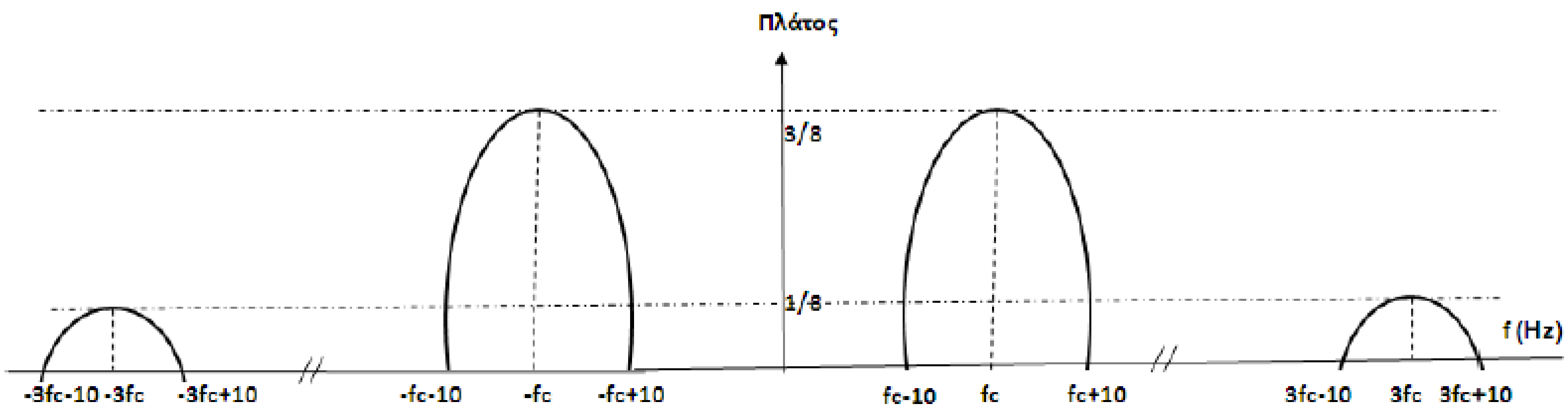
Ώστε, το σήμα που είναι και το τελικό μετά και από το φίλτρο

$$\frac{3}{4} m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

και επομένως είναι της μορφής που ζητά η άσκηση αφού k=3/4.

(β). Με βάση το θεώρημα της διαμόρφωσης και το φάσμα M(f), το φάσμα στο σημείο **a** θα είναι το άθροισμα δύο φασμάτων, το καθένα από τα οποία προκύπτει ως διαμόρφωση DSB-SC του φέροντος (ένα συχνότητας f_c και ένα $3f_c$) από το σήμα πληροφορίας ως εξής:

$$\begin{aligned}
\Im\left[z(t)\right] &= \Im\left[m(t)\frac{3}{4}\cos\left(2\pi f_c t\right)+m(t)\frac{1}{4}\cos\left(2\pi 3 f_c t\right)\right] \\
&= \Im\left[m(t)\frac{3}{4}\cos\left(2\pi f_c t\right)\right]+\Im\left[m(t)\frac{1}{4}\cos\left(2\pi 3 f_c t\right)\right] \\
&= \frac{3}{8}\left[M\left(f-f_c\right)+M\left(f+f_c\right)\right]+\frac{1}{8}\left[M\left(f-3f_c\right)+M\left(f+3f_c\right)\right]
\end{aligned}$$

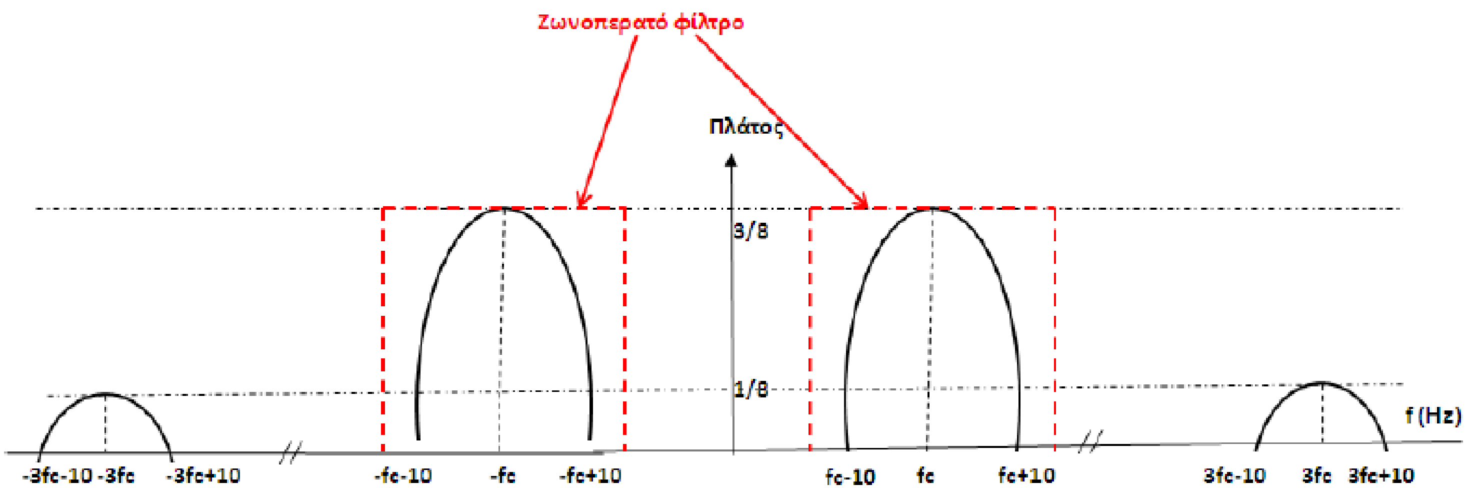


(γ). Το φίλτρο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί είναι ζωνοπερατό με κέντρο το $\mathbf{f_c}$ και το $\mathbf{-f_c}$ ώστε να αποκόψει τις πολύ υψηλές συχνότητες των $\mathbf{3f_c}$ διατηρώντας τις συχνότητες $\mathbf{f_c}$ και $\mathbf{-f_c}$,δηλαδή

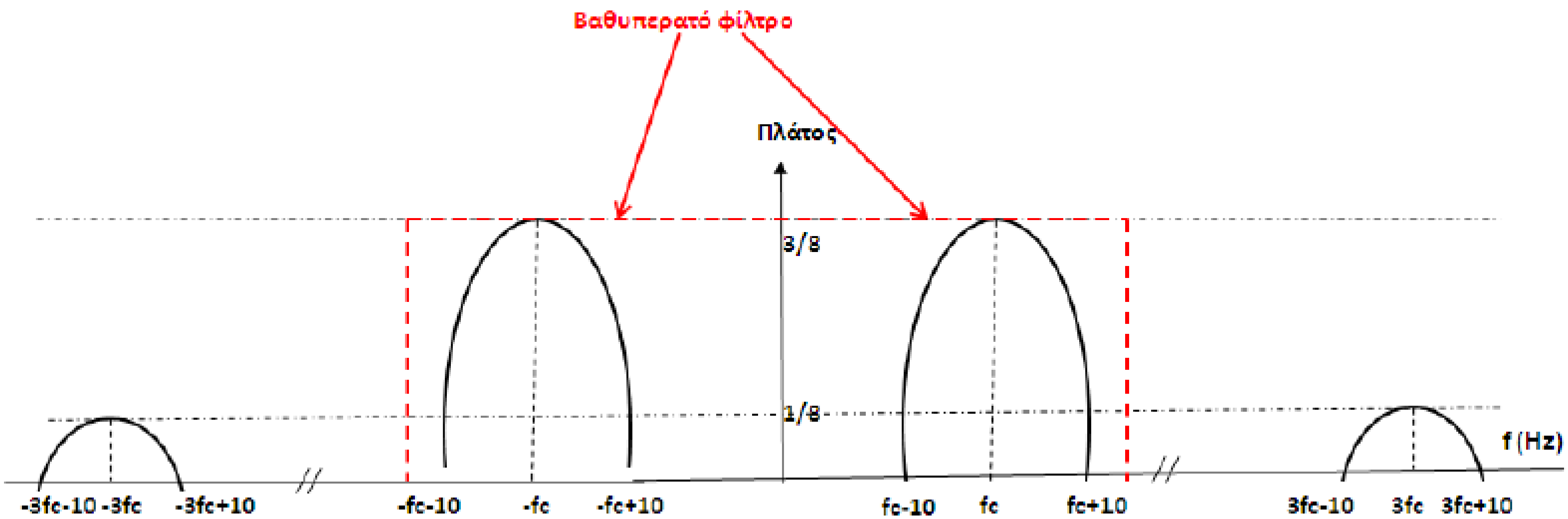
η κεντρική συχνότητα του φίλτρου θα είναι $f_c - 10 \leq f_{φίλτρου} \leq f_c + 10\text{Hz}$ με εύρος φίλτρου τις ακόλουθες συχνότητες:

- $3f_c - 10 > f_{cutoff} > f_c + 10$
- $0 < f_{cutoff} < f_c - 10$

καθώς και η συμμετρική του ως προς τον άξονα.



ή βαθυπερατό με συχνότητα αποκοπής μεγαλύτερη από $f_c + 10\ Hz$



Η ελάχιστη επιτρεπτή συχνότητα φέροντος είναι οποιαδήποτε συχνότητα για την οποία ισχύει $f_c - 10 \gg 0$. Οπότε $f_c \gg 10$. Η $f_{c,min}$ θα μπορούσε να είναι 10 Hz αλλά ο πρακτικός κανόνας είναι η fc να είναι δύο φορές τουλάχιστον μεγαλύτερη από την μέγιστη συχνότητα του σήματος.

(δ). Αν το φέρον διαμόρφωσης είναι το $\cos^2(2\pi f_c t)$ τότε θα έχουμε

$$y = cos^2(2\pi f_c t) = \frac{1 + \cos(2\pi 2 f_c t)}{2}$$

Οπότε

$$z = m(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\pi \cdot 2f_c t)) = \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_c t)$$

Επομένως στο σημείο **a** θα έχω δύο σήματα

- Το σήμα $\frac{1}{2} m(t)$ δεν είναι της ζητούμενης μορφής όπως δίνεται στην άσκηση.
- το σήμα $\frac{1}{2} m(t) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_c t)$ επίσης δεν είναι της ζητούμενης μορφής εξαιτίας του όρου $2f_c$

Συνεπώς το σύστημα διαμόρφωσης με ζωνοπερατό ή το βαθυπερατό φίλτρο δεν μπορεί να παράγει στην έξοδο το ζητούμενο σήμα αν το φέρον διαμόρφωσης είναι της μορφής $\cos^2(2\pi f_c t)$