ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/
3η ΟΣΣ/02.02.2019/
Ν.Δημητρίου

Σημείωση: Η παρουσίαση αυτή βασίζεται στην παρουσίαση που έχει αναρτηθεί το study.eap.gr και περιέχει στις αντίστοιχες ενότητες το πρόσθετο υλικό (τυπολόγια, λυμένες ασκήσεις, παραδείγματα Octave) που παρουσιάστηκε στην ΟΣΣ3/ΑΘΗ.3 .

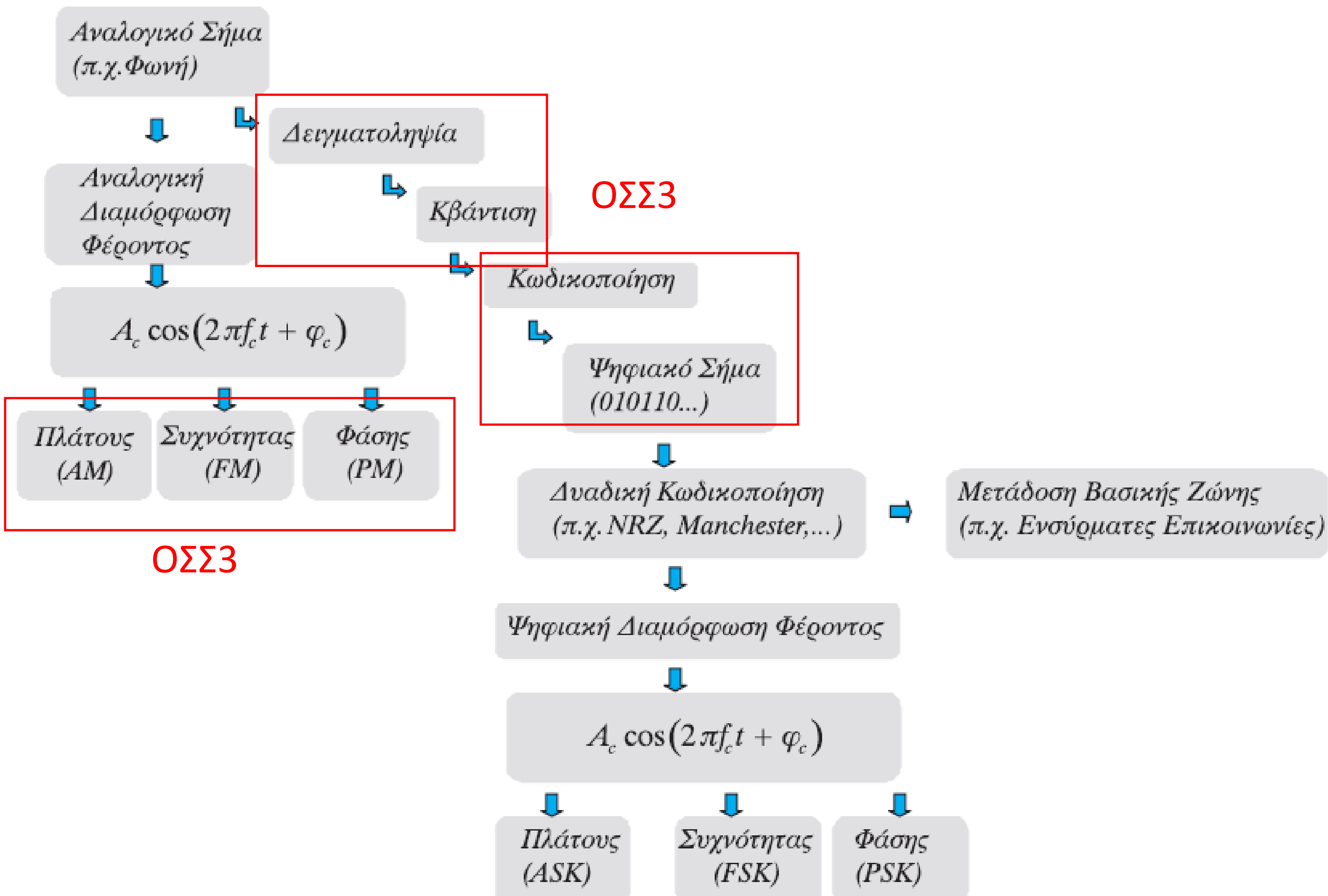
Οι πρόσθετες διαφάνειες έχουν τη σήμανση

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Στόχοι Μελέτης

- Αναλογικές Διαμορφώσεις
  - Διαμορφώσεις Πλάτους (DSB, AM, SSB)
  - Διαμορφώσεις Γωνίας (PM, FM)
- Πολυπλεξία Σημάτων
- Μετατροπή Αναλογικών Σημάτων σε Ψηφιακά
  - Δειγματοληψία Αναλογικών Σημάτων
  - Κριτήριο Nyquist
- Ψηφιακές Διαμορφώσεις
  - Διαμόρφωση PCM
- Ισχύς και Ενέργεια Σημάτων
- Μέσα Μετάδοσης – Κανάλι - Θόρυβος

Διαμορφώσεις



Σχήμα 3.1

Αναλογικές Διαμορφώσεις

Διαμόρφωση

- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Modulation)= Η μεταβολή, σύμφωνα με το σήμα πληροφορίας, των παραμέτρων ενός φέροντος κύματος (carrier wave) που είναι κατάλληλο για την μετάδοση μέσα από το δεδομένο κανάλι
- ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Demodulation) είναι η αντίστροφη διαδικασία
- Το είδος της διαμόρφωσης καθορίζει:
  - Την αντοχή στο θόρυβο και στην παραμόρφωση του καναλιού
  - Την πιστότητα αναπαραγωγής του αρχικού σήματος πληροφορίας
  - Το εύρος του απαιτούμενου για την μετάδοση φάσματος
  - Την πολυπλοκότητα των συστημάτων εκπομπής και λήψης

Τι επιτυγχάνουμε με τη Διαμόρφωση

- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή συχνοτήτων όπου το μέσο διάδοσης (γραμμή μεταφοράς, ατμόσφαιρα, οπτική ίνα) έχει βελτιωμένα χαρακτηριστικά.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε κατάλληλη περιοχή συχνοτήτων, όπως αυτή έχει αποδοθεί από τους διεθνείς οργανισμούς προτυποποίησης για συγκεκριμένες υπηρεσίες.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή υψηλότερων συχνοτήτων όπου το μήκος κύματος είναι μικρότερο. Επειδή το μέγεθος των κεραιών εξαρτάται από το μήκος κύματος, με τη μετατόπιση σε υψηλότερες συχνότητες μπορούμε να κατασκευάσουμε κεραίες άρα και πομποδέκτες μικρότερου μεγέθους.

Τι επιτυγχάνουμε με τη Διαμόρφωση

- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχές συχνοτήτων όπου τα κυκλώματα λειτουργούν με καλύτερα χαρακτηριστικά. Ένα παράδειγμα είναι η μετατόπιση του σήματος σε *ενδιάμεση συχνότητα* (*intermediate frequency - IF*). Το πλεονέκτημα αυτής της μετατόπισης είναι η δυνατότητα χρήσης του ίδιου κυκλώματος IF από πολλά σήματα, τα οποία μπορεί να καταλαμβάνουν διαφορετικές ζώνες ραδιοσυχνοτήτων (*radio frequencies - RF*).
- Μέχρι κάποιο όριο “ανοσία” του σήματος από θόρυβο και παρεμβολές. Η ανοσία αυτή επιτυγχάνεται με τη διεύρυνση του εύρους ζώνης που καταλαμβάνει το διαμορφωμένο σήμα σε σχέση με το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας. Αυτό το πλεονέκτημα προσφέρεται μόνο από μερικούς τύπους διαμορφώσεων.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σημαίνει και επίτευξη μεγαλύτερων αποστάσεων σε σχέση με αυτό που μπορεί να επιτευχθεί αν το σήμα παραμείνει βασικής ζώνης

Τι επιτυγχάνουμε με τη Διαμόρφωση

- Δυνατότητα ταυτόχρονης μετάδοσης πολλών σημάτων μέσα από τον ίδιο δίαυλο επικοινωνίας, διατηρώντας βέβαια τη δυνατότητα διαχωρισμού των διαφορετικών σημάτων πληροφορίας από τις διαφορετικές πηγές. Δηλαδή επιτυγχάνουμε *πολυπλεξία* (*multiplexing*) σημάτων από διαφορετικές πηγές, η οποία καλείται *πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας* (*frequency division multiplexing - FDM*).

Σύγκριση Αναλογικών και Ψηφιακών Συστημάτων Επικοινωνίας

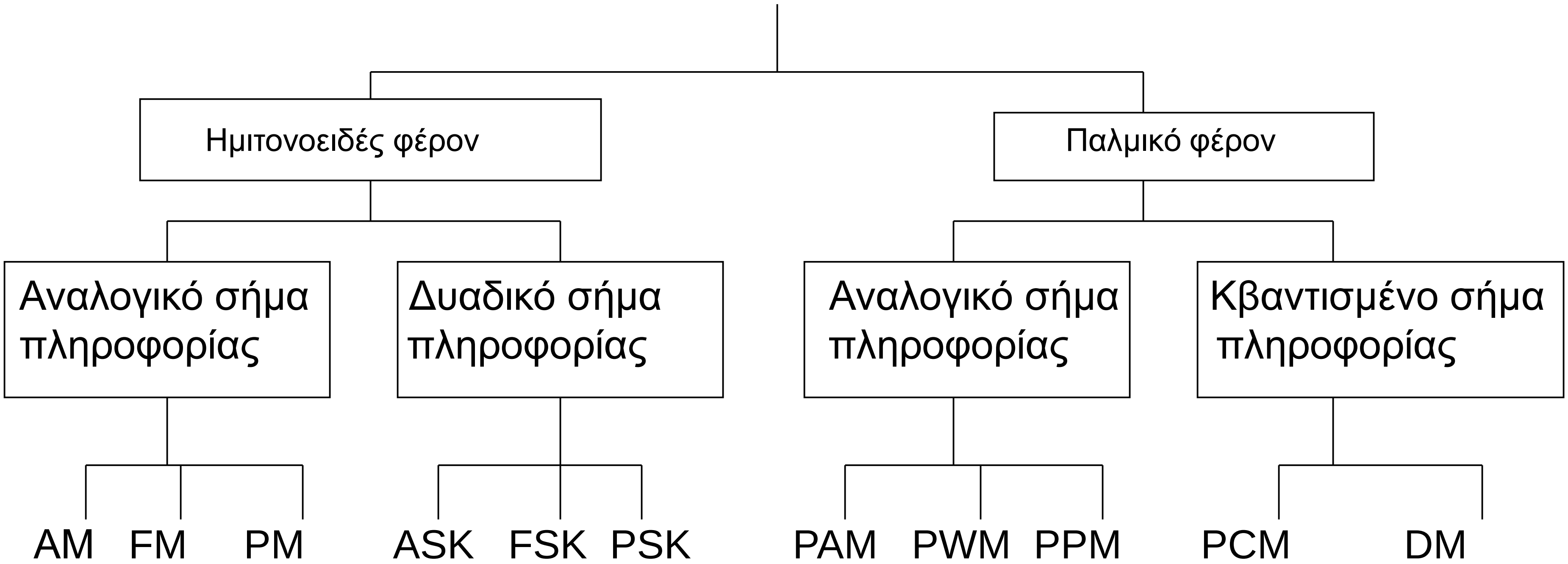
Αναλογικά Συστήματα

- Απλούστερη δομή
- Δυσκολότερη σχεδίαση
- Ελάχιστες δυνατότητες υλοποίησης βέλτιστων διατάξεων
- Δυσκολότερη υλοποίηση και συντήρηση
  - Ανάγκη συνεχών ρυθμίσεων
  - Απαιτήσεις γραμμικότητας εξαρτημάτων
  - Εξάρτηση από τις θερμοκρασιακές μεταβολές των εξαρτημάτων
  - Εξάρτηση από την γήρανση του υλικού

Ψηφιακά Συστήματα

- Πολυπλοκότερη δομή
- Ευκολότερη σχεδίαση
- Δυνατότητα υλοποίησης βέλτιστων διατάξεων
- Ευκολότερη υλοποίηση και συντήρηση
- Καλύτερη προσαρμογή προς το κανάλι
- Ευελιξία κατασκευής
  - DSPs, μPs
  - FPGAs, ASICs
- Μικρότερο κόστος

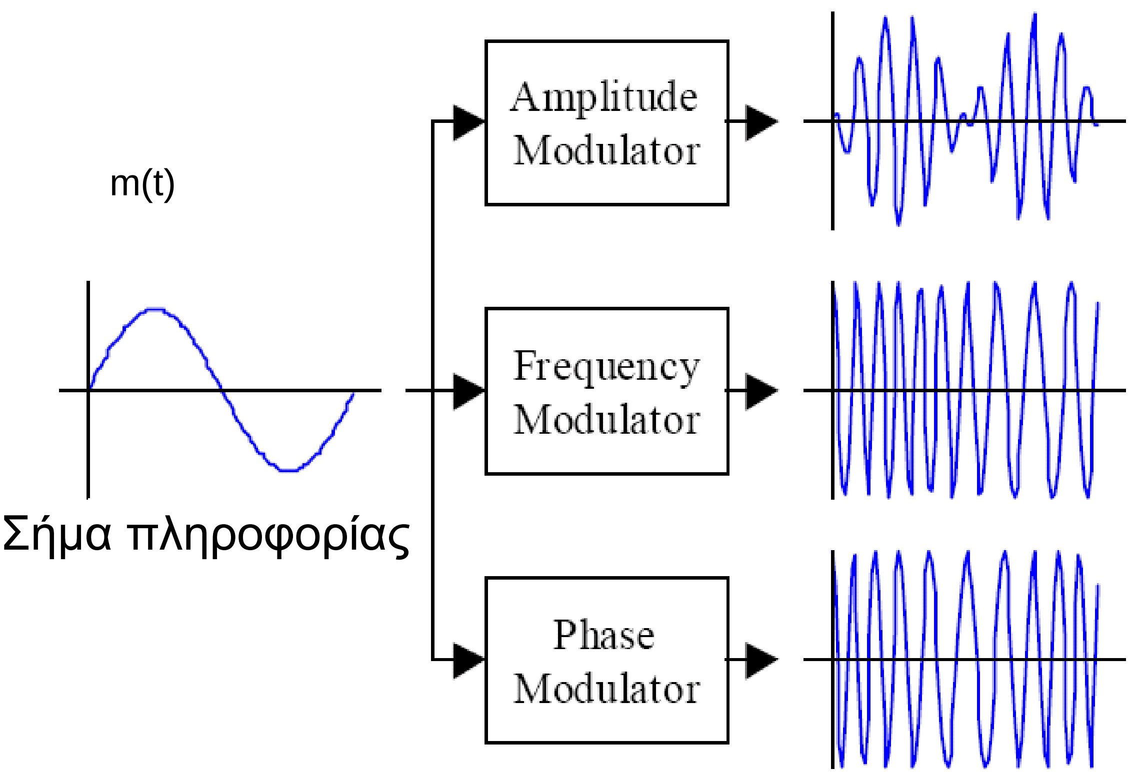
Είδη Διαμόρφωσης



A=Amplitude, F=Frequency, P=Phase, M= Modulation
K=Keying, W=Width, P=Pulse, Position, D=Delta

Βασικοί Τύποι Αναλογικής Διαμόρφωσης

Διαμορφωμένο σήμα



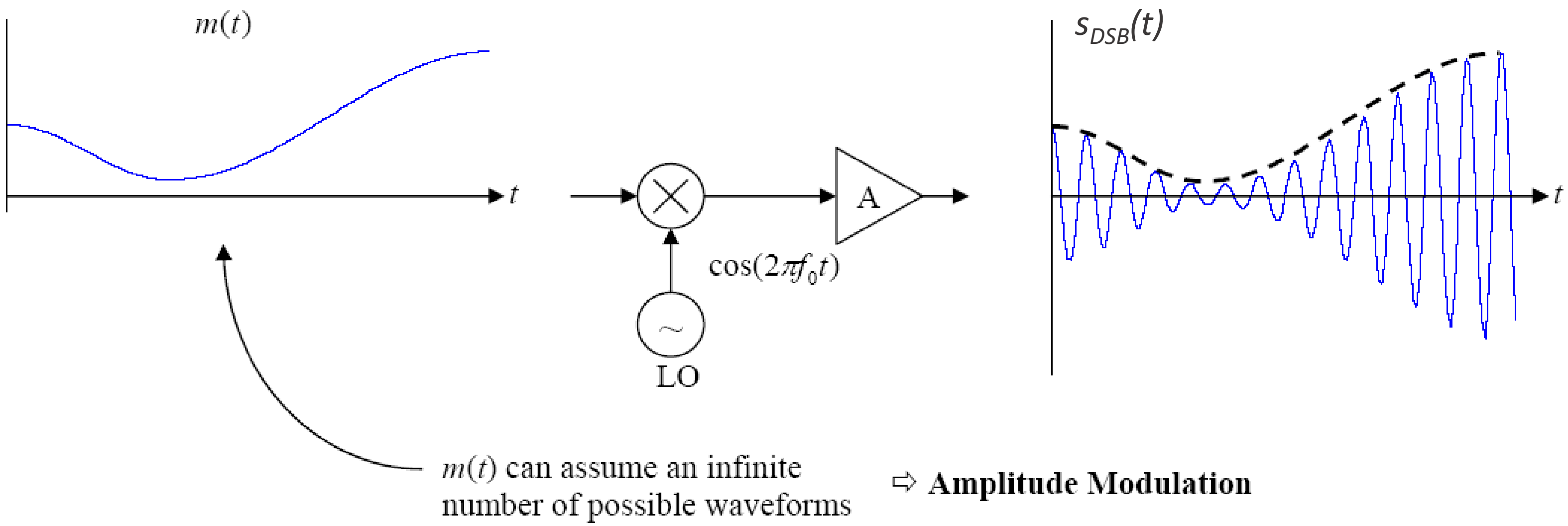
$$x_c(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

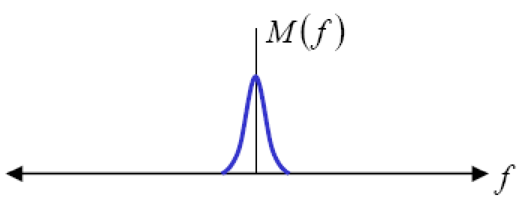
$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int m(\tau)d\tau\right)$$

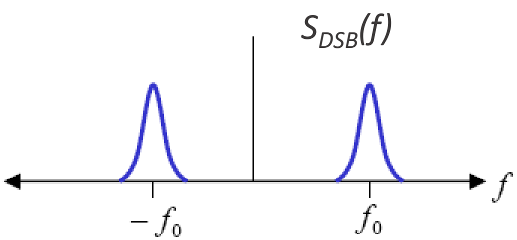
$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p m(t)\right)$$

Γραμμική Διαμόρφωση Πλάτους : Γενική Αρχή

Mathematical Representation: $s_{DSB}(t)=Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$







Διαμόρφωση Διπλο-πλευρικής Ζώνης (DSB-SC)

- Το σήμα μηνύματος x(t) πολλαπλασιάζεται με το φέρον σήμα $\cos 2\pi f_c t$

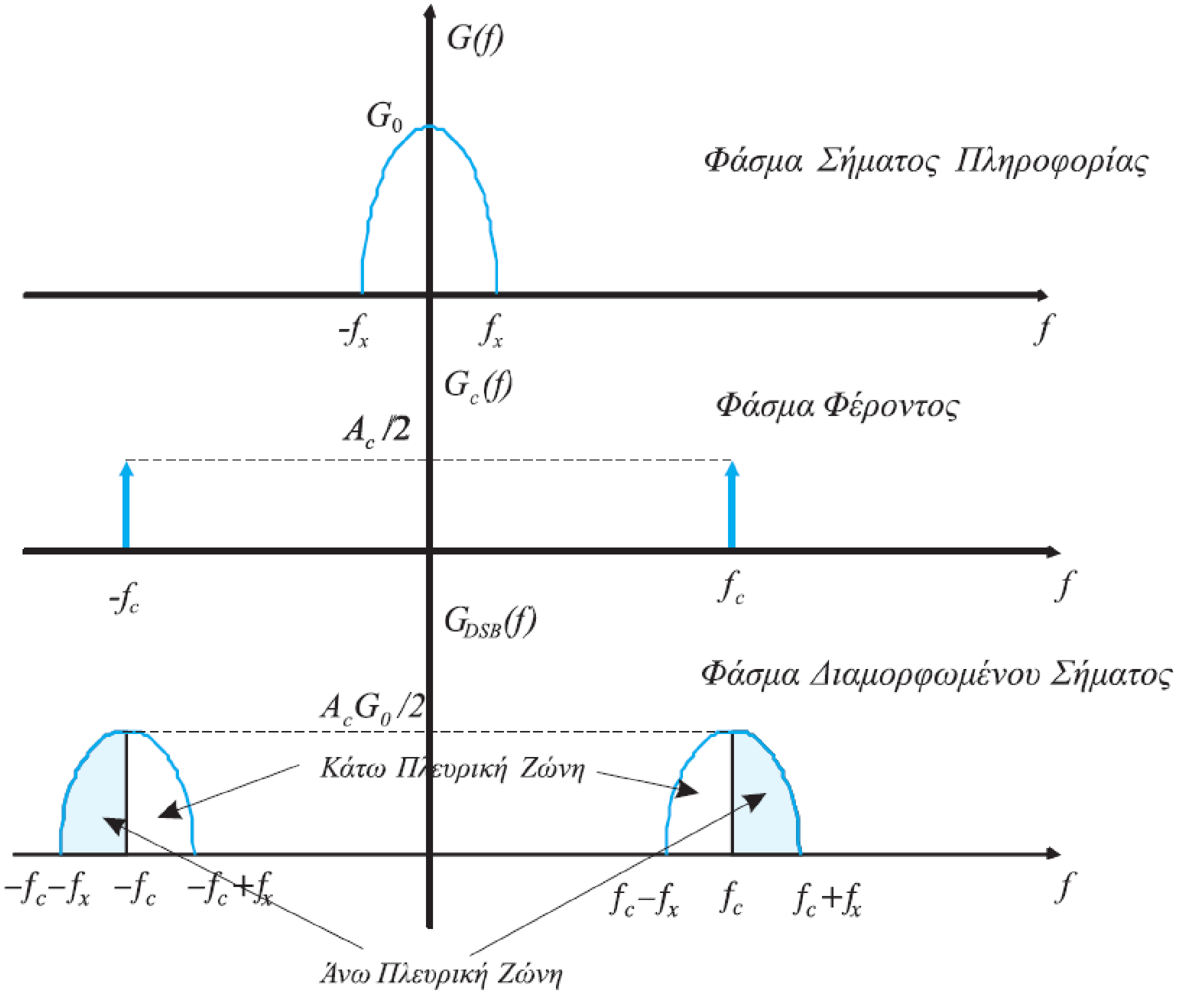
$$y_{DSB}(t) = x(t) \cdot cos(2\pi f_c t)$$

- Στο πεδίο της συχνότητας αυτό ανάγεται σε

$$Y(f) = \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c)$$

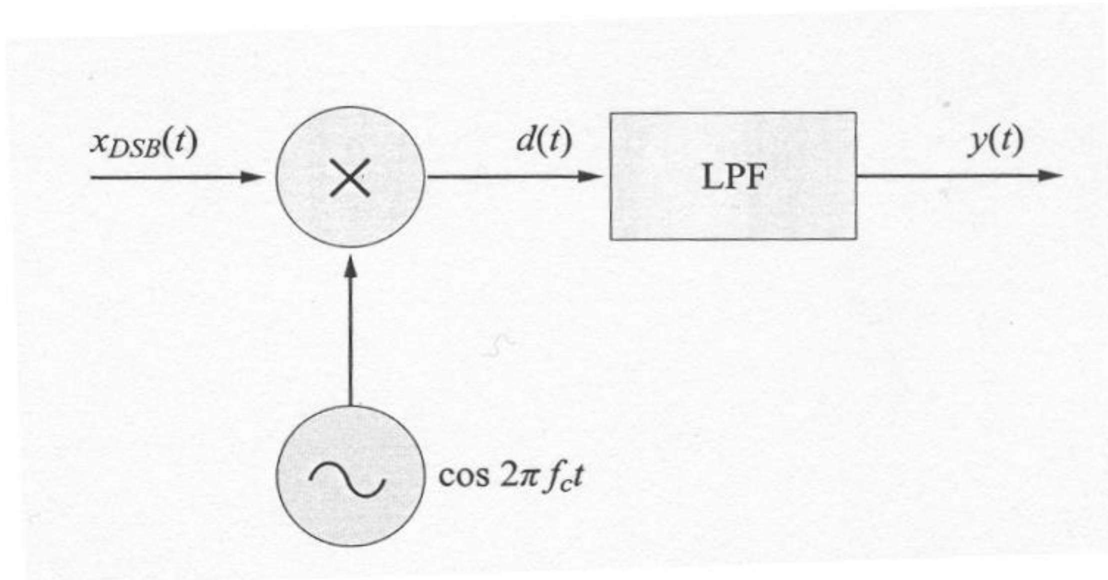
- Δύο φάσματα Συχνοτήτων
  - Πάνω Πλευρική Ζώνη $|f|>fc$
  - Κάτω Πλευρική Ζώνη $|f|<fc$

Διαμόρφωση DSB-SC : Πεδίο συχνότητας



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Αποδιαμόρφωση DSB-SC



Πεδίο χρόνου

$$d(t) = x_{DSB}(t)\cos 2\pi f_c t \Leftrightarrow d(t) = x(t)\cos^2 2\pi f_c t \Leftrightarrow$$

$$d(t) = \frac{1}{2}x(t)\left(1+\cos 4\pi f_c t\right) \Leftrightarrow d(t) = \frac{x(t)}{2} + \cancelto{0}{\frac{x(t)}{2}\cos 4\pi f_c t}$$

Πεδίο συχνότητας

$$d(t) = \frac{1}{2}x(t)\left(1+\cos 4\pi f_c t\right) \xleftrightarrow{\text{Fourier Transform}} D(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{2}X(f)\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-2f_c)+\delta\left(f+2f_c\right)\right]\right\} \Leftrightarrow$$

$$D(f) = \frac{1}{2}X(f) + \cancelto{0}{\frac{1}{4}\left[X\left(f-2f_c\right)+X\left(f+2f_c\right)\right]}$$

Διαμόρφωση AM (1)

- Το σήμα AM δημιουργείται με την προσθήκη ενός ισχυρού φέροντος σε ένα σήμα DSB

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + x(t)]\cos 2\pi f_c t = A(t)\cos 2\pi f_c t$$

  - x(t) σήμα μηνύματος
  - Ac, fc πλάτος και συχνότητα φέροντος σήματος
  - A(t) περιβάλλουσα του διαμορφωμένου σήματος

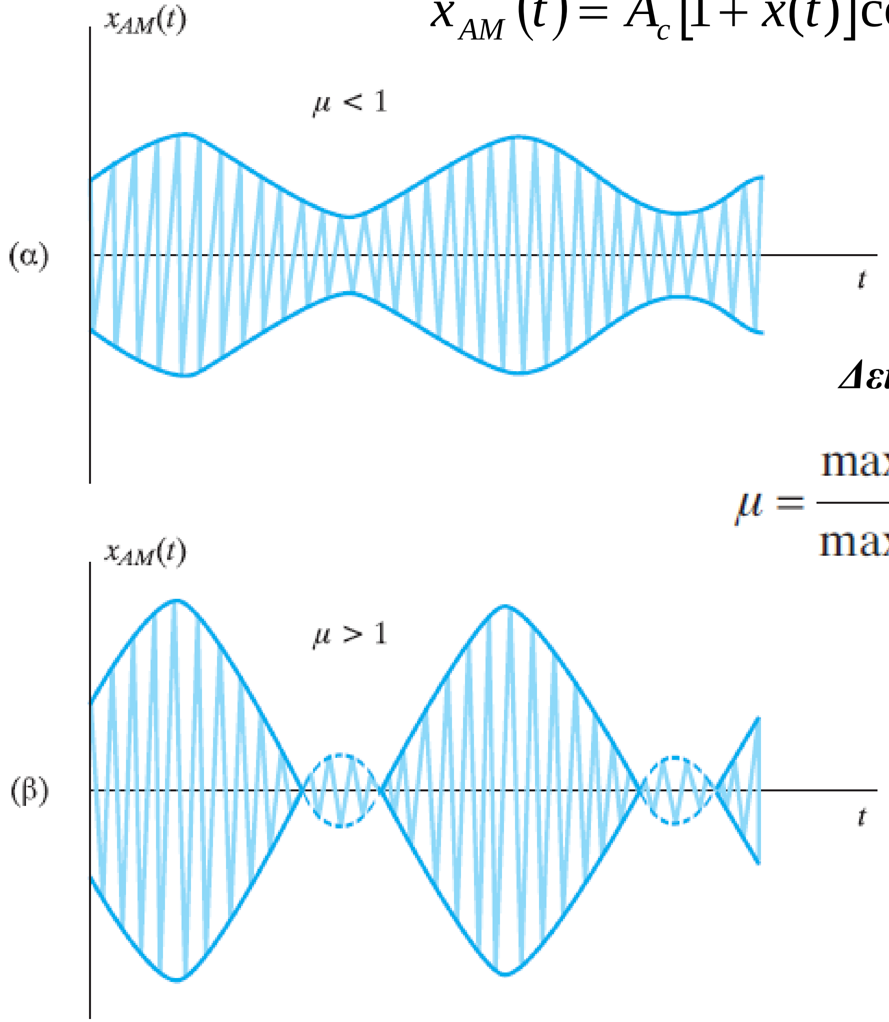
- Στο πεδίο της συχνότητας το προηγούμενο ανάγεται σε

$$X_{AM}(f) = \frac{1}{2}A_c[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{1}{2}A_c[X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

Δεδομένου ότι $A_c \cos 2\pi f_c t \xleftrightarrow{\text{Fourier transform}} \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$

Διαμόρφωση ΑΜ (2)

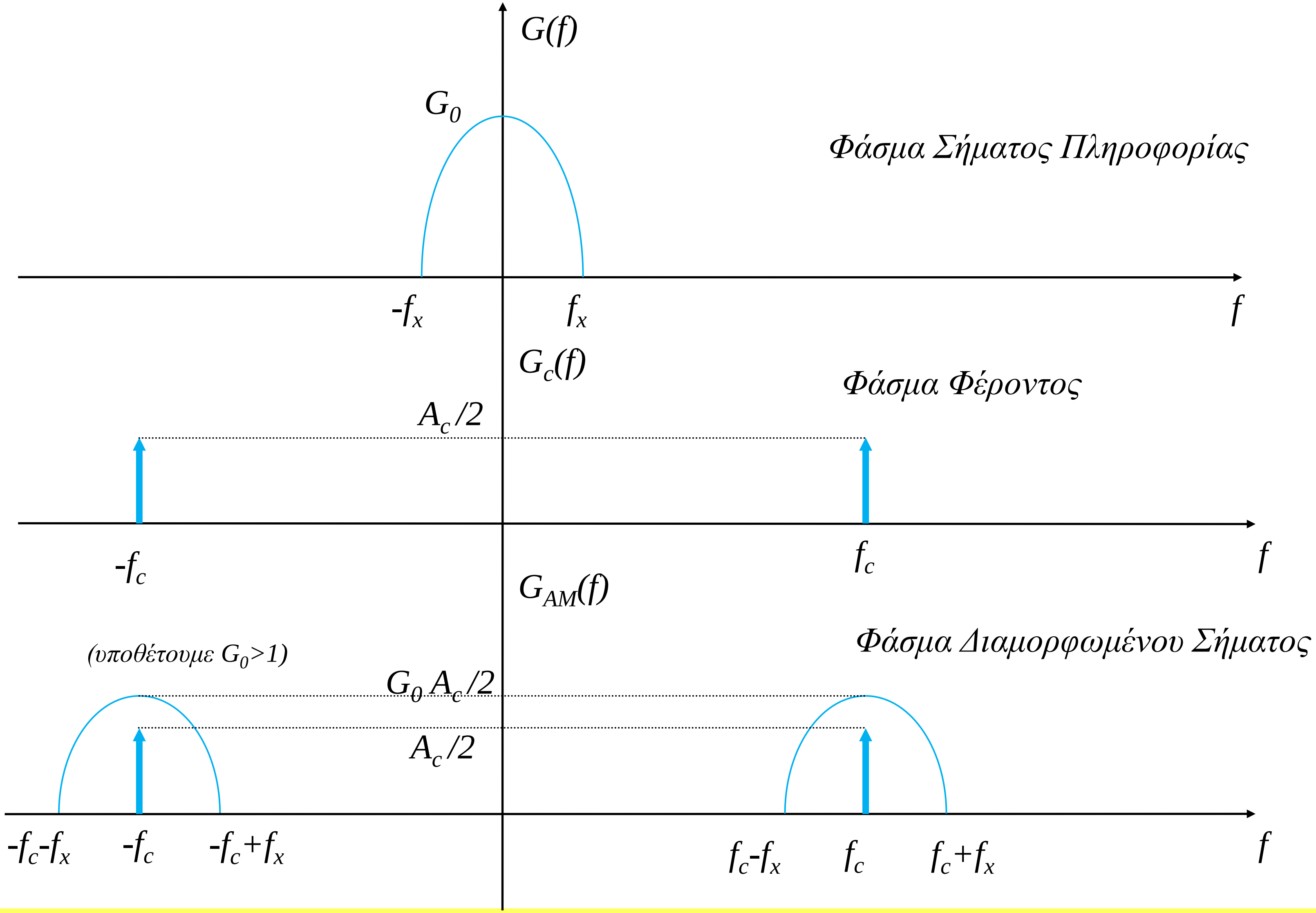
$$x_{AM}(t) = A_c[1 + x(t)]\cos 2\pi f_c t = A(t)\cos 2\pi f_c t$$



Δείκτης Διαμόρφωσης

$$\mu = \frac{\max\{A(t)\} - \min\{A(t)\}}{\max\{A(t)\} + \min\{A(t)\}}$$

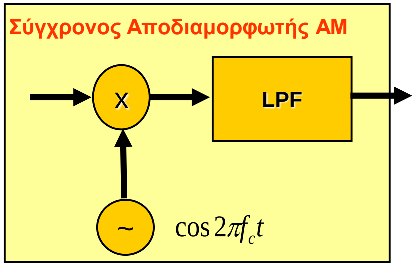
Διαμόρφωση AM: Πεδίο της Συχνότητας



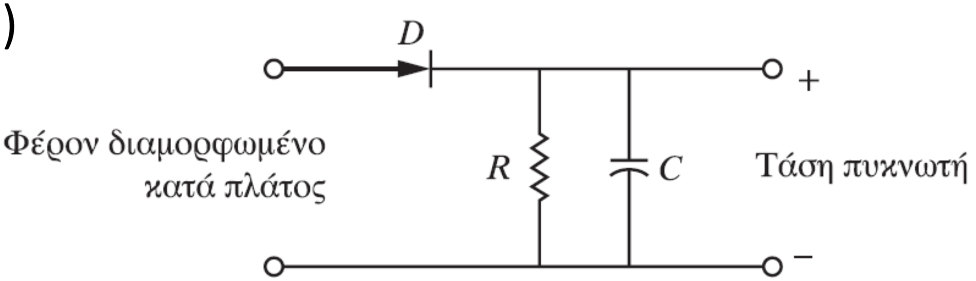
Το φάσμα του σήματος AM είναι πανομοιότυπο με το φάσμα του σήματος DSB-SC, διαφέροντας μόνο στην προσθήκη της φασματικής συνιστώσας του φέροντος

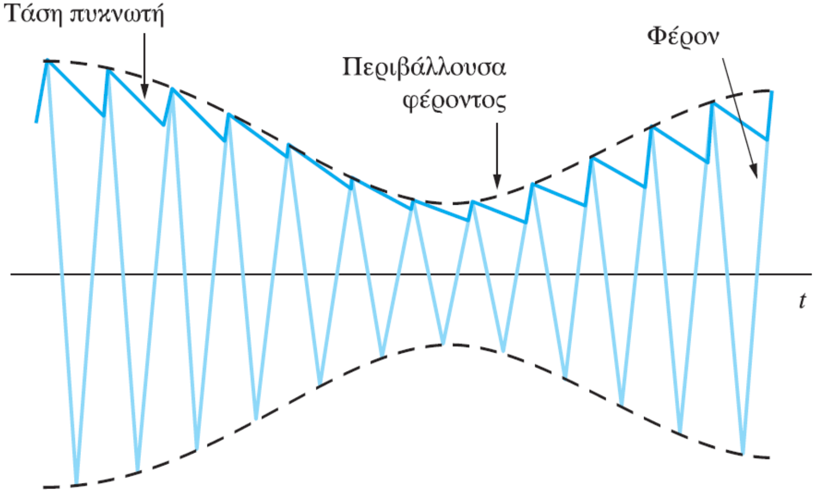
Αποδιαμόρφωση ΑΜ

- Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση
  - Όπως στα σήματα DSB



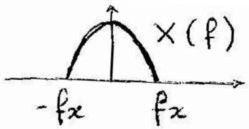
- Με φωρατή περιβάλλουσας (όταν μ<1)





Τυπολόγιο-Ασκήσεις

Μήνυμα $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$



Διαμορφώσεις Πλάτους

Φέρον $x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\left\{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right\}$$

DSB

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cdot x_c(t) = x(t)A_c\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} \frac{A_c}{2}\left[X(f-f_c)+X(f+f_c)\right] = X_{DSB}(f)$$

AM.

$$x_{AM}(t) = \left[1+x(t)\right]\cdot x_c(t) = x_c(t) + x(t)x_c(t) = x_c(t) + x_{DSB}(t) \xleftrightarrow{F} X_c(f) + X_{DSB}(f) = X_{AM}(f)$$

SSB

$$X_{SSB}(f) = \begin{cases} \text{LSB} \quad X_{DSB}(f)\cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \\ \text{USB} \quad X_{DSB}(f)\cdot\left[1-\operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)\right] \end{cases}$$

οι ζώνες LSB, USB αποκόπτονται και με ζωνοπερατό φίλτρο

Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση (DSB)

$\left(x_{DSB}(t)\cdot A_c\cos(2\pi f_c t)\right)$ + Βαθυπερατό φίλτρο

$$\left\{\frac{1}{2}\left[X(f-f_c)+X(f+f_c)\right] * \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]\right\}\cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_o}\right) \qquad f_x < f_o < 2f_c$$

$$\left\{\frac{A_c}{4}\left[X(f-2f_c)+X(f)+X(f)+X(f+2f_c)\right]\right\}\cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_o}\right) = \frac{A_c}{2}\,X(f)$$

ΕΞ2018Β

Ερωτήματα α-γ (DSB)

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Δίνεται το σήμα $x(t) = 400sinc^2(400t)$

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του x(t).

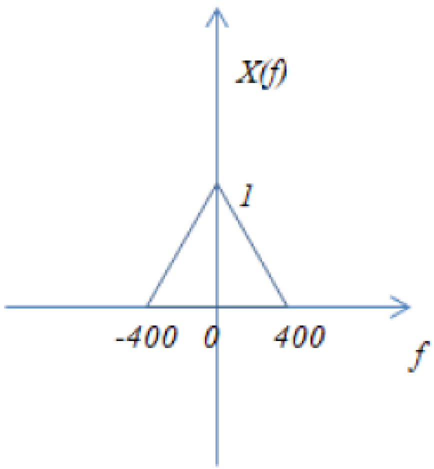
(β) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

(γ) Για τη λήψη της άνω πλευρικής του διαμορφωμένου σήματος χρησιμοποιείται υψιπερατό φίλτρο, ενώ για τη λήψη της κάτω πλευρικής χρησιμοποιείται βαθυπερατό φίλτρο. Να υπολογιστούν οι κρουστικές αποκρίσεις των 2 φίλτρων.

(δ) Το x(t) διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100KHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 8\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του.

Λύση:

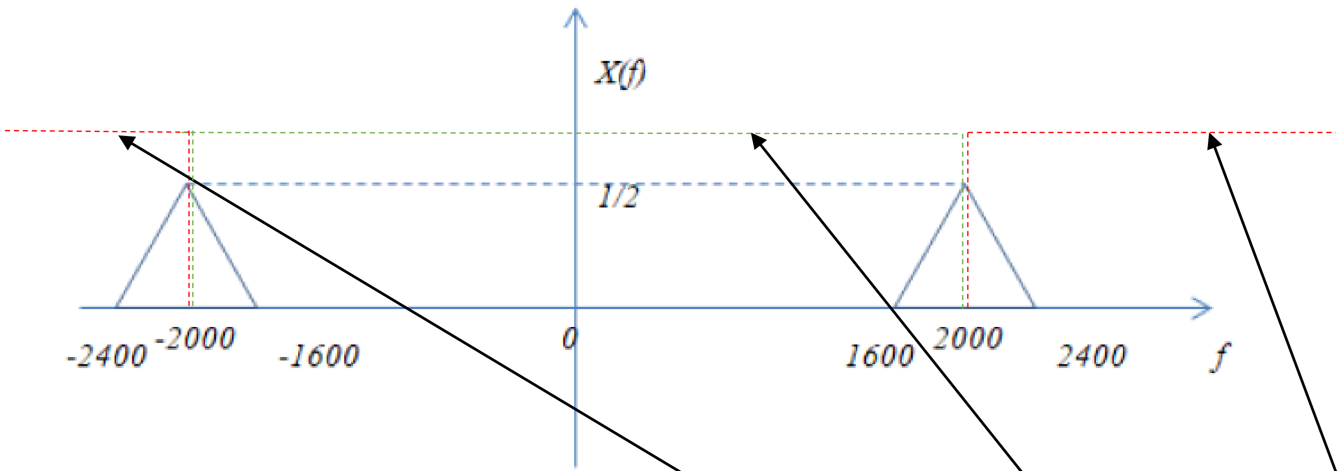
(α) $x(t) = 400\sin c^2(400t) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{400}\right) = X(f)$



(β) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz.

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cdot\cos(2\pi 2000t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(f-2000) + X(f+2000)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{tri\left(\frac{f-2000}{400}\right) + tri\left(\frac{f+2000}{400}\right)\right\}$$



(γ)

Για τη λήψη της κάτω πλευρικής ζώνης:

Βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f)=rect\left(\frac{f}{4000}\right)$ και κρουστική απόκριση

$$h(t)=4000\sin c(4000t)$$

Για τη λήψη της άνω πλευρικής ζώνης:

Υψιπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f)=1-rect\left(\frac{f}{4000}\right)$ και κρουστική απόκριση

$$h(t)=\delta(t)-4000\sin c(4000t)$$

ΕΞ 2015Β /Θ1

ΘΕΜΑ 1

Η έξοδος ενός διαμορφωτή AM είναι το σήμα: $x_{AM} = 5\cos^2(2000\pi t)\cos(6000\pi t)$

α) Αναγνωρίστε το σήμα πληροφορίας $x(t)$ και το φέρον στην παραπάνω έκφραση. ***(5 μονάδες)***

β) Να υπολογίσετε και να απεικονίσετε τα φάσματα πλάτους του φέροντος, του σήματος πληροφορίας και του διαμορφωμένου κατά AM σήματος. ***(8 μονάδες)***

γ) Να υπολογίσετε το δείκτη διαμόρφωσης μ. ***(7 μονάδες)***

(Σύνολο μονάδων 20)

Σκεπτικό: Θέλουμε να φέρουμε την έκφραση του σήματος στη μορφή σήματος AM, δηλαδή, Acos(2πfct)[1+x(t)]

α) Το διαμορφωμένο σήμα γράφεται με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos^2 A = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2A)\right]$

ως εξής

$$x_{AM} = 5\cos^2(2000\pi t)\cos(6000\pi t) = \frac{5}{2}\left[1+\cos(4000\pi t)\right]\cos(6000\pi t)$$

Άρα το σήμα πληροφορίας είναι το

$x = \cos(4000\pi t) = \cos(2\pi 2000 t)$ και το φέρον είναι το

$$x_c = \frac{5}{2}\cos(6000\pi t) = \frac{5}{2}\cos(2\pi 3000 t)$$

β) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος πληροφορίας είναι

$$G(f) = \Im\left[x(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(f-2000) + \delta(f+2000)\right]$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του φέροντος είναι

$$G_c(f) = \Im\left[x_c(t)\right] = \frac{5}{4}\left[\delta(f-3000) + \delta(f+3000)\right]$$

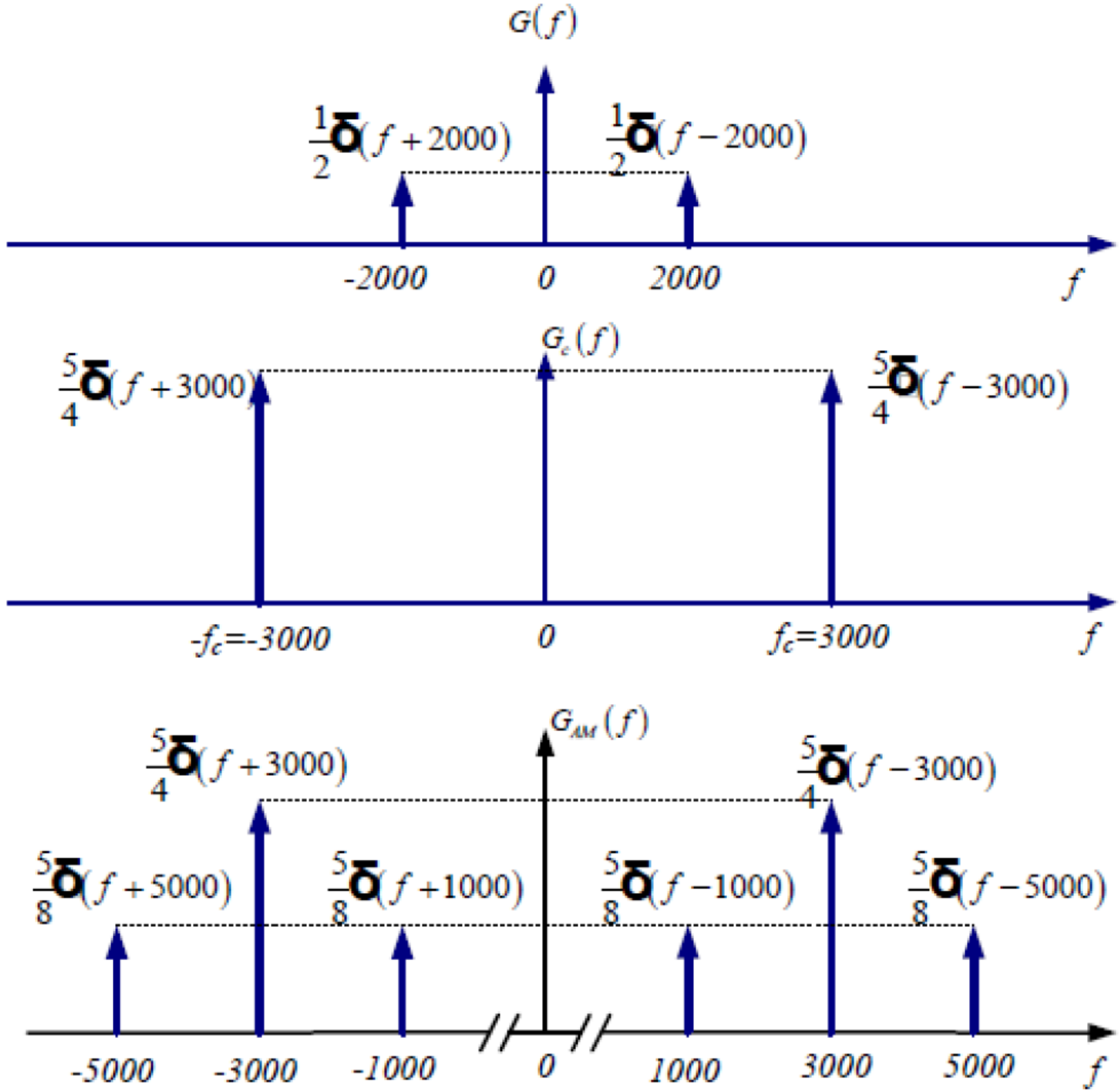
Ο μετασχηματισμός Fourier του διαμορφωμένου σήματος είναι

$$G_{AM}(f) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right] + \frac{A_c}{2}\left[G(f-f_c) + G(f+f_c)\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[\delta(f-3000) + \delta(f+3000)\right] + \frac{5}{8}\left\{\begin{bmatrix}\delta(f-2000-3000) + \delta(f+2000-3000) + \\ \delta(f-2000+3000) + \delta(f+2000+3000)\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{5}{4}\left[\delta(f-3000) + \delta(f+3000)\right] + \frac{5}{8}\left\{\begin{bmatrix}\delta(f-5000) + \delta(f-1000) + \\ \delta(f+1000) + \delta(f+5000)\end{bmatrix}\right\}$$

Η απεικόνιση του φάσματος των σημάτων ακολουθεί


$G(f)$
$\frac{1}{2}\delta(f+2000)$
$\frac{1}{2}\delta(f-2000)$
-2000
0
2000
f
$G_c(f)$
$\frac{5}{4}\delta(f+3000)$
$\frac{5}{4}\delta(f-3000)$
$-f_c$=-3000
0
f_c=3000
f
$G_{AM}(f)$
$\frac{5}{4}\delta(f+3000)$
$\frac{5}{4}\delta(f-3000)$
$\frac{5}{8}\delta(f+5000)$
$\frac{5}{8}\delta(f+1000)$
$\frac{5}{8}\delta(f-1000)$
$\frac{5}{8}\delta(f-5000)$
-5000
-3000
-1000
0
1000
3000
5000
f

Δείτε και τη διαφάνειες 17,19

γ) Για να ανακτηθεί ένα σήμα πληροφορίας το οποίο έχει διαμορφωθεί κατά τα ΑΜ Παρατηρούμε ότι για το σήμα πληροφορίας ισχύει ότι $|x(t)| \leq 1$, και μπορούμε να γράψουμε το διαμορφωμένο σήμα στη μορφή

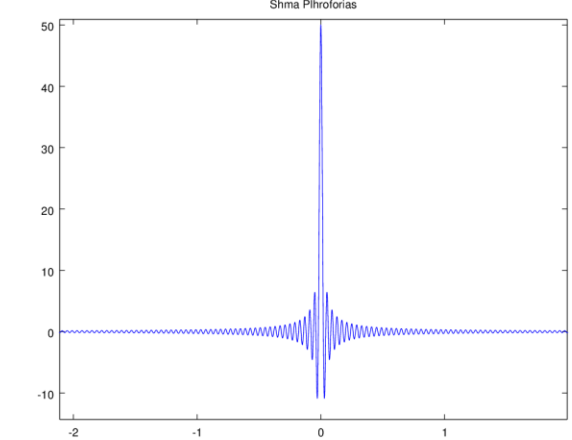
$$x_{AM}(t) = \frac{5}{4}\left(1+\cos(4000\pi t)\right)\cos(6000\pi t) = A(t)\cos(6000\pi t)$$

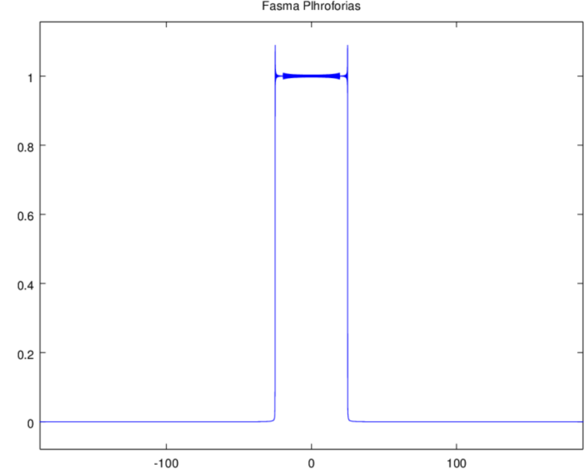
ο δείκτης διαμόρφωσης είναι

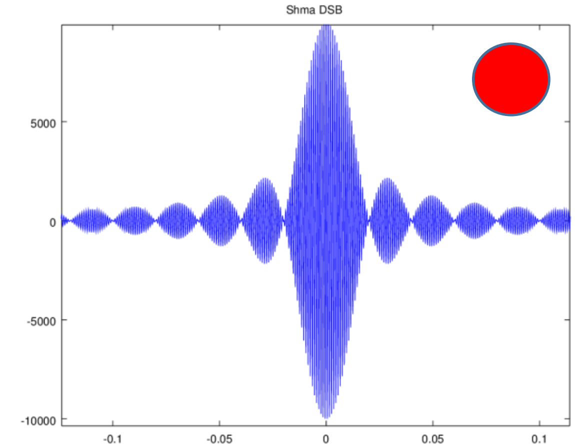
$$\mu = \frac{\max[A(t)] - \min[A(t)]}{\max[A(t)] + \min[A(t)]} = \frac{\frac{5}{2} - 0}{\frac{5}{2} + 0} = 1$$

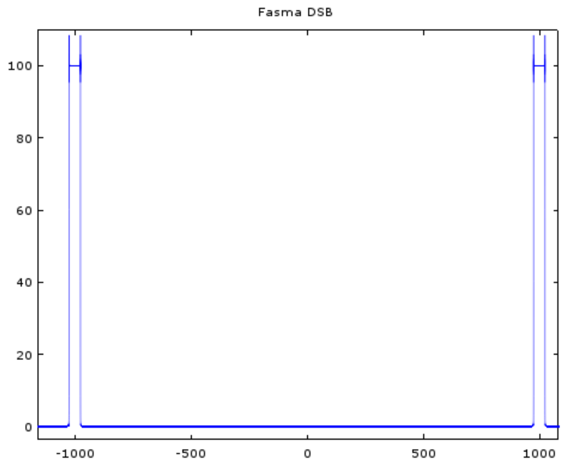
Παράδειγμα Octave

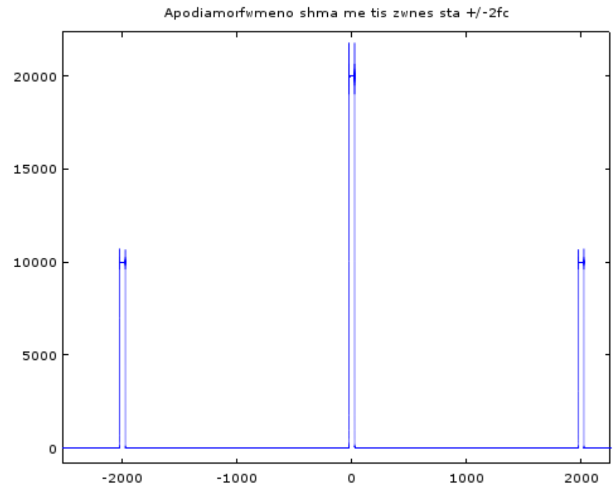
```
clear
fc=1000  %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platous shmatos plhroforias
xdsb=xm.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos dsb
[f,ff]=fourier_transform(xdsb,Ts); % ypologismos fasmatos shmatos dsb
figure
plot(t,xdsb);title('Shma DSB ');%apeikonish shmatos dsb sto xrono
figure
plot(f,ff);title('Fasma DSB ');%apeikonish fasmatos dsb
xx=xdsb.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t);%sygxronh apodiamorfwsh dsb
[f,ff]=fourier_transform(xx,Ts);% ypologismos fasmatos apodiamorfwmenou shmatos
%% Prosoxh: Den exoun apokopei oi oroi sta +/- 2fc
 title('Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc');
figure
plot(f,ff);% apeikonish apodiamorfwmenou shmatos me tis 2 zwnes sta /-2fc
hlp=(2./Ac.^2).*rectpulse(f,0,200); %synarthsh metaforas bathyperatou filtro sta +/-100Hz
figure;
plot(f,hlp,'r');%apeikonish synarthshs metaforas bathyperatou filtroy
title('Synarthsh metaforas filtrou');
gg=ff.*hlp; %ypologismos exodou tou filtrou
figure
plot(f,gg,'k'); %apeikonish lhfthentos apodiamorfwmenou shmatos
title('Fasma apodiamorfwmenou shmatos');
```

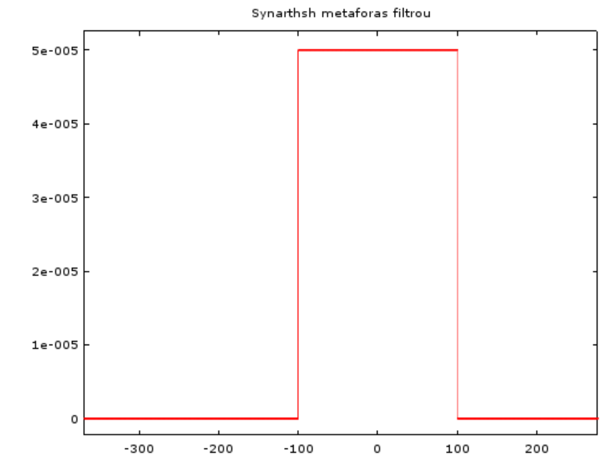


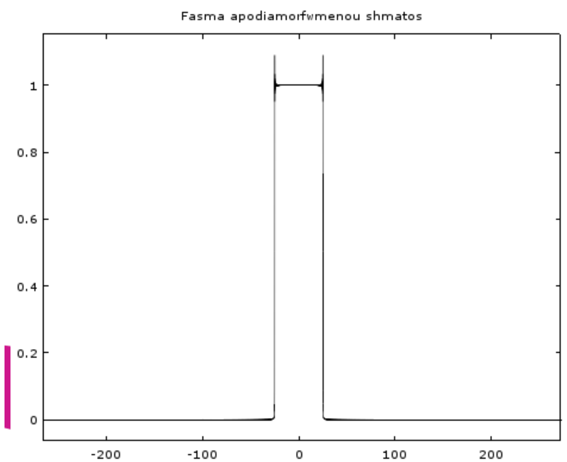








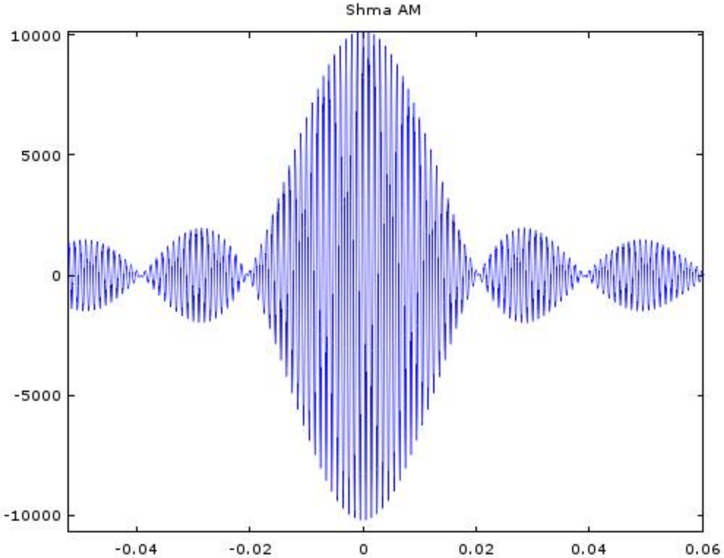


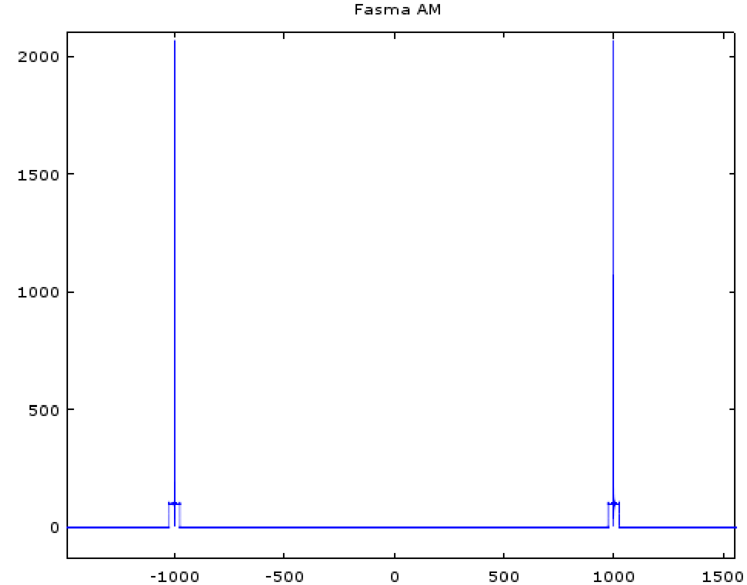


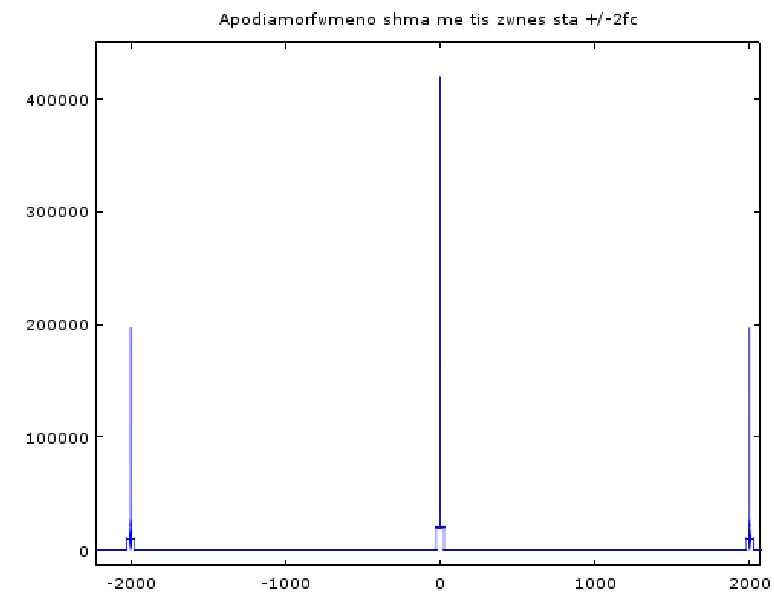
ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/3η
ΟΣΣ/02.02.2019/Ν.Δημητρίου

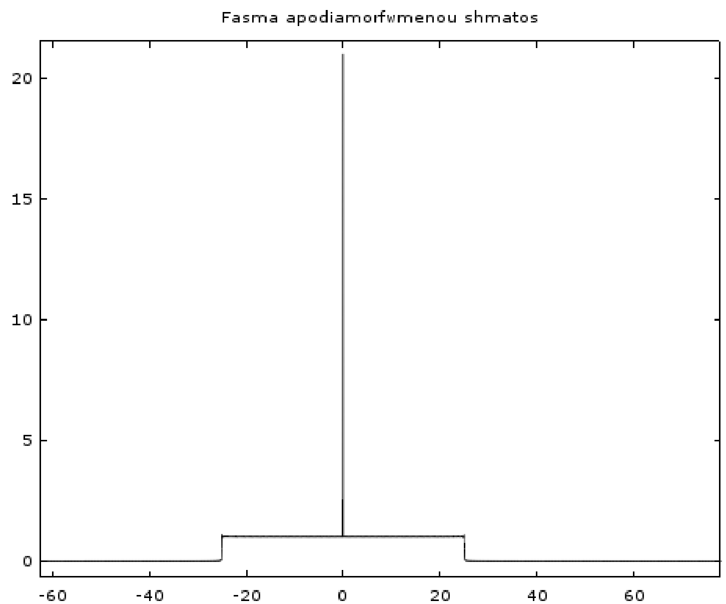
```
clear
fc=1000  %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platous shmatos plhroforias

xAM=(1+xm).*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos am
[f,ff]=fourier_transform(xAM,Ts); % ypologismos fasmatos shmatos am
figure
plot(t,xAM);title('Shma AM ');%apeikonish shmatos am sto xrono
figure
plot(f,ff);title('Fasma AM ');%apeikonish fasmatos am
xx=xAM.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t);%sygxronh apodiamorfwsh am
[f,ff]=fourier_transform(xx,Ts);% ypologismos fasmatos apodiamorfwmenou shmatos
%% Prosoxh: Den exoun apokopei oi oroi sta +/- 2fc
figure
plot(f,ff);% apeikonish apodiamorfwmenou shmatos me tis 2 zwnes sta /-2fc
title('Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc');
hlp=(2./Ac.^2).*rectpulse(f,0,200); %synarthsh metaforas bathyperatou filtro sta +/-100Hz
figure;
plot(f,hlp,'r');%apeikonish synarthshs metaforas bathyperatou filtroy
title('Synarthsh metaforas filtrou');
gg=ff.*hlp; %ypologismos exodou tou filtrou
figure
plot(f,gg,'k'); %apeikonish lhfthentos apodiamorfwmenou shmatos
title('Fasma apodiamorfwmenou shmatos');
```

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/3η
ΟΣΣ/02.02.2019/Ν.Δημητρίου


Shma AM
10000
5000
0
-5000
-10000
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06


Fasma AM
2000
1500
1000
500
0
-1000
-500
0
500
1000
1500


Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc
400000
300000
200000
100000
0
-2000
-1000
0
1000
2000


Fasma apodiamorfwmenou shmatos
20
15
10
5
0
-60
-40
-20
0
20
40
60

Γωνιακή Διαμόρφωση – Βασικοί Ορισμοί

Μορφή Διαμορφωμένου Σήματος

$$\boxed{x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]}$$

Πλάτος Φέροντος

Φέρον

$$A_c \cos 2\pi f_c t$$

Συχνότητα Φέροντος

$$x(t)$$

Σήμα Μηνύματος

$$\phi(t)$$

Φασματική Γωνία

Η Φασματική Γωνία είναι συνάρτηση του Σήματος Μηνύματος

$$\omega_i(t) = \frac{d\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]}{dt} = \omega_c + \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία Συχνότητα, f_i ή
Στιγμιαία Κυκλική Συχνότητα ω_i

$$\phi(t), \quad \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία Απόκλιση Φάσης

Στιγμιαία Απόκλιση Συχνότητας

Γωνιακή Διαμόρφωση

- Στη γωνιακή διαμόρφωση, το διαμορφωμένο σήμα έχει τη μορφή

$$x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

- Η φασματική γωνία φ(t) είναι συνάρτηση του σήματος μηνύματος x(t)
- Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι γωνιακής διαμόρφωσης, οι οποίοι διαφέρουν στη σχέση μεταξύ των φ(t) και x(t)
  - Διαμόρφωση φάσης (phase modulation – PM)
  - Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency modulation – FM)

3.3 Διαμόρφωση Γωνίας

Έστω σήμα μηνύματος/πληροφορίας $x(t)$ με φάσμα περιορισμένου εύρους ζώνης $G(f)=\Im\left[x(t)\right]$ διαμορφώνει κατά γωνία το φέρον σήμα

$$x_c(t)=A_c\cos\left(2\pi f_c t+\phi(t)\right)$$

Η στιγμιαία γωνία του φέροντος ισούται με:

$$\theta(t)=2\pi f_c t+\phi(t)$$

όπου $\phi(t)$ είναι η στιγμιαία απόκλιση φάσης του.

Η στιγμιαία κυκλική συχνότητα του φέροντος σήματος ισούται με:

$$\omega(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{d\left(2\pi f_c t+\phi(t)\right)}{dt}=2\pi f_c+\frac{d\phi(t)}{dt}$$

και η στιγμιαία συχνότητα του θα είναι

$$f(t)=\frac{\omega(t)}{2\pi}=f_c+\frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

όπου

$\Delta\omega(t)=\dfrac{d\phi(t)}{dt}$ είναι η στιγμιαία απόκλιση συχνότητάς του.

3.3.2 Λόγος απόκλισης γωνιακά διαμορφωμένου σήματος:

Για τη διαμόρφωση ενός τυχαίου σήματος πληροφορίας απλού τόνου, ορίζεται ο λόγος απόκλισης ως το πηλίκο της μέγιστης απόκλισης συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος προς το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας, δηλαδή:

$$D = \frac{\max\left(|\Delta\omega|\right)}{2\pi f_x} = \frac{\max\left(|\Delta f|\right)}{f_x} = \frac{\max\left(\left|\frac{d\phi(t)}{dt}\right|\right)}{2\pi f_x}$$

3.3.3 Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος

Γενικά ισχύει ο κανόνας του Carson, σύμφωνα με τον οποίο το 98% της ισχύος του σήματος βρίσκεται σε ζώνη του φάσματος με εύρος ίσο με

$$W \approx 2(D+1) f_x = 2\left(\max\left(|\Delta f|\right) + f_x\right)$$

Διαμόρφωση φάσης PM – Διαμόρφωση συχνότητας FM

$$x_{PM}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + k_p x(t)\right]$$

k_p : Σταθερά απόκλισης φάσης

Το σήμα πληροφορίας συμμετέχει στη στιγμιαία απόκλιση φάσης

$$\phi(t) = k_p x(t)$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda\right]$$

k_f : Σταθερά απόκλισης συχνότητας

Το σήμα πληροφορίας συμμετέχει στη στιγμιαία απόκλιση συχνότητας

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = k_f x(t) \Leftrightarrow$$

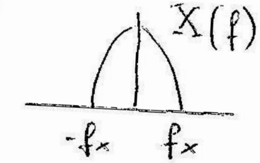
$$\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda$$

Τυπολόγιο-Ασκήσεις

Διαμορφώσεις Γωνίας

$$x_a(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \varphi(t)\right]$$

η περιλαμβάνει το σήμα μηνύματος $x(t)$



Στιγμιαία γωνία $\theta(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$ [rad]

Στιγμιαία κυκλική συχνότητα $\omega(t) = \frac{d\,\theta(t)}{dt} = 2\pi f_c + \frac{d\varphi(t)}{dt}$ $\left(\frac{rad}{sec}\right)$

Στιγμιαία συχνότητα $f(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$ (Hz)

Στιγμιαία απόκλιση συχνότητας $\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt}$

Λόγος Απόκλισης $D = \frac{\max|\Delta f(t)|}{f_x} = \frac{1}{2\pi f_x}\max\left|\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|$

Εύρος Ζώνης Διαμορφωμένου σήματος: $W \cong 2(D+1)\cdot f_x$ (Κανόνας Carson)

Διαμόρφωση φάσης (PM) $\varphi(t) = K_p\, x(t)$ K_p σταθερά απόκλισης φάσης $\left(\frac{rad}{Volt}\right)$

Διαμόρφωση συχνότητας (FM): $\varphi(t) = K_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$ K_f: σταθερά απόκλισης συχνότητας $\left(\frac{rad/sec}{Volt}\right)$

ΕΞ2018Β

Ερώτημα δ (FM)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σήμα $x(t) = 400sinc^2(400t)$

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του x(t).

(β) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

(γ) Για τη λήψη της άνω πλευρικής του διαμορφωμένου σήματος χρησιμοποιείται υψιπερατό φίλτρο, ενώ για τη λήψη της κάτω πλευρικής χρησιμοποιείται βαθυπερατό φίλτρο. Να υπολογιστούν οι κρουστικές αποκρίσεις των 2 φίλτρων.

(δ) Το x(t) διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100KHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 8\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του.

Εφαρμογή κανόνα Carson

(δ) $x_{FM}(t) = \cos\left(2\pi 100000t + 8\pi \int_{-\infty}^{t} 400 \sin c^2(400\lambda)\, d\lambda\right)$

Λόγος απόκλισης:

Μέγιστη απόλυτη τιμή στο πεδίο του χρόνου

$$D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_x} = \frac{\frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|x(t)\right|\right)}{f_x} = \frac{\frac{8\pi}{2\pi}400}{400} = 4$$

Εύρος ζώνης στο πεδίο της συχνότητας

$$W = 2(D+1)f_x = 2(4+1)400Hz = 4KHz$$

ΕΞ2017Α

ΘΕΜΑ 2

Υποθέστε ένα σήμα πληροφορίας είναι της μορφής $m(t)=10sinc(600t)$ και διαμορφώνει κατά FM το φέρον $c(t)=100\cos(2\pi f_c t)$. Αν ο λόγος απόκλισης είναι $D=8$,

<u>Ερώτηση 1η:</u> Δώστε τη μορφή του διαμορφωμένου σήματος.
<u>Ερώτηση 2η:</u> Υπολογίστε τη μέγιστη απόκλιση συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος.
<u>Ερώτηση 3η:</u> Υπολογίστε το εύρος ζώνης μετάδοσης και την ισχύ του διαμορφωμένου σήματος

<u>Ερώτηση 4η:</u> Ποιο θα ήταν το εύρος ζώνης μετάδοσης αν το σήμα πληροφορίας διαμόρφωνε το φέρον κατά AM

A) Εχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|m(t)\right|\right),\ \text{ή}\ k_f = \frac{2\pi\Delta f_{\max}}{\max\left(\left|m(t)\right|\right)}$$

Το διαμορφωμένο FM σήμα γράφεται:

$$y_{FM}(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\,d\lambda\right) = 100\cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} 10sinc(600\lambda)\,d\lambda\right)$$

B) Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι

$\Delta f_{\max} = f_m D$, όπου f_m το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας.

Όμως $F\left[10sinc(600t)\right] = \frac{10}{600}\Pi\left(\frac{f}{600}\right)$, άρα το εύρος ζώνης είναι $f_m = 300$ και η μέγιστη απόκλιση συχνότητας

$$\Delta f_{\max} = f_m D = 300 \cdot 8 = 2400\,\text{Hz}$$

C) Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W = 2(D+1) f_m$$

Συνεπώς το εύρος ζώνης του FM σήματος είναι:

$$W = 2 \cdot 9 \cdot 300 = 5400 \text{ Hz}$$

Η ισχύς του διαμορφωμένου είναι η ισχύς ουσιαστικά ενός συνημιτονοειδούς σήματος με πλάτος 100, άρα

$$P = \frac{100^2}{2} = 5000$$

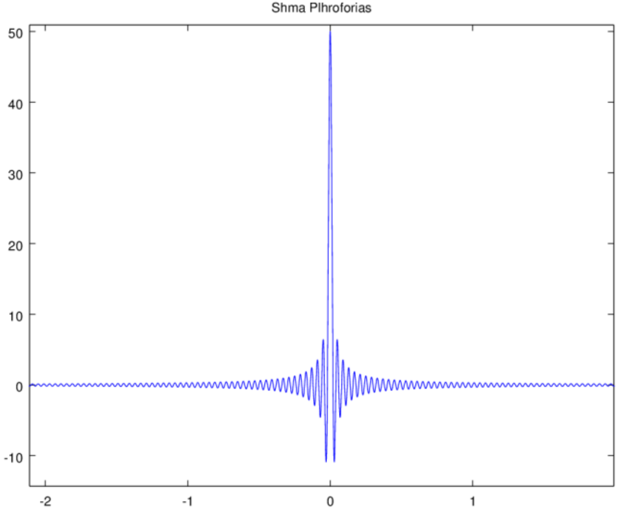
Ισχύς συνημιτονοειδούς σήματος Acos(2πfct+φ): $P=0.5*A^2$ (Watt)

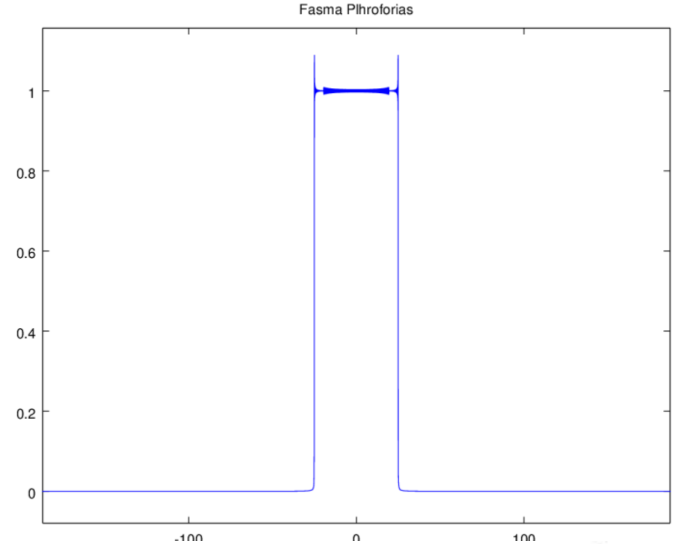
Δ) Το εύρος ζώνης στην περίπτωση διαμόρφωσης AM θα ήταν

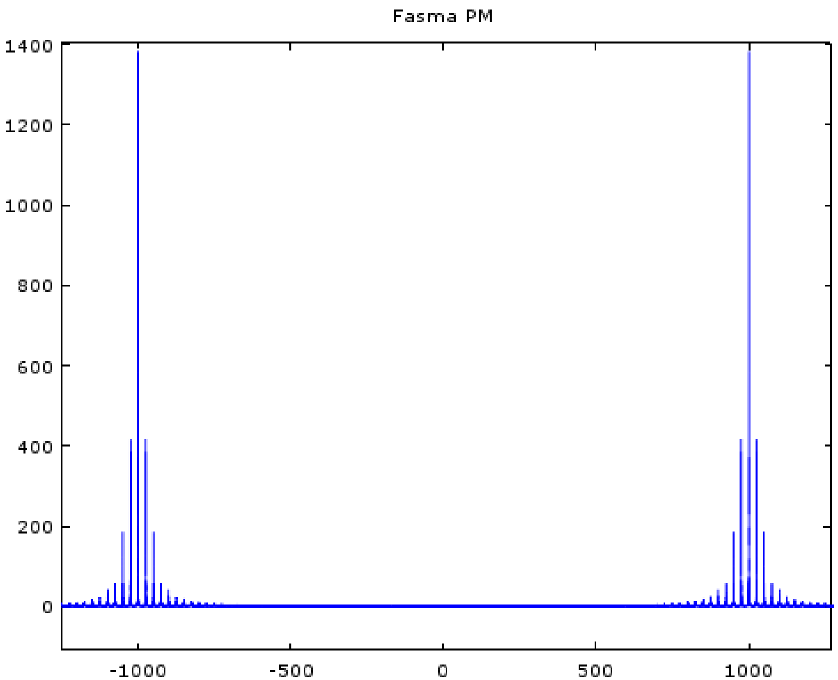
$$W = 2 f_m = 600 \text{ Hz}$$

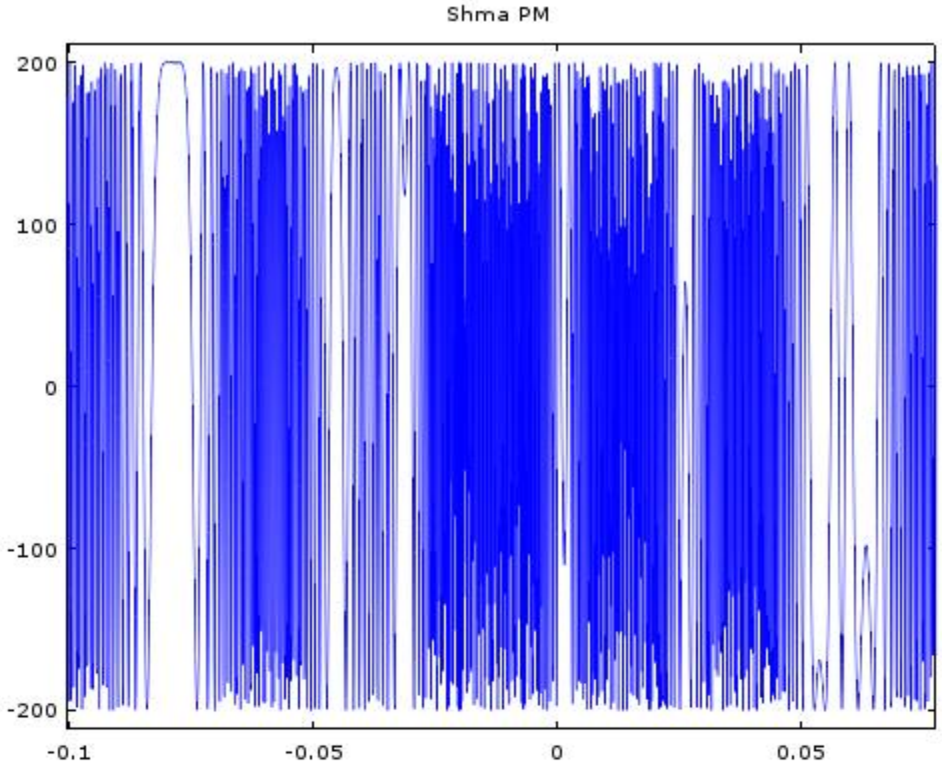
Παράδειγμα Octave

```
clear
fc=1000  %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platous shmatos plhroforias
xpm=Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t+10.*xm); % Shma PM me kp=10
[f,ff]=fourier_transform(xpm,Ts); %ypologismos fasmatos PM
figure
plot(f,ff);title('Fasma PM '); %apeikonish fasmatos PM
figure
plot(t,xpm);title('Shma PM '); %Apeikonish shmatos PM sto xrono
```


Shma Plhroforias
50
40
30
20
10
0
-10
-2
-1
0
1


Fasma Plhroforias
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-100
0
100

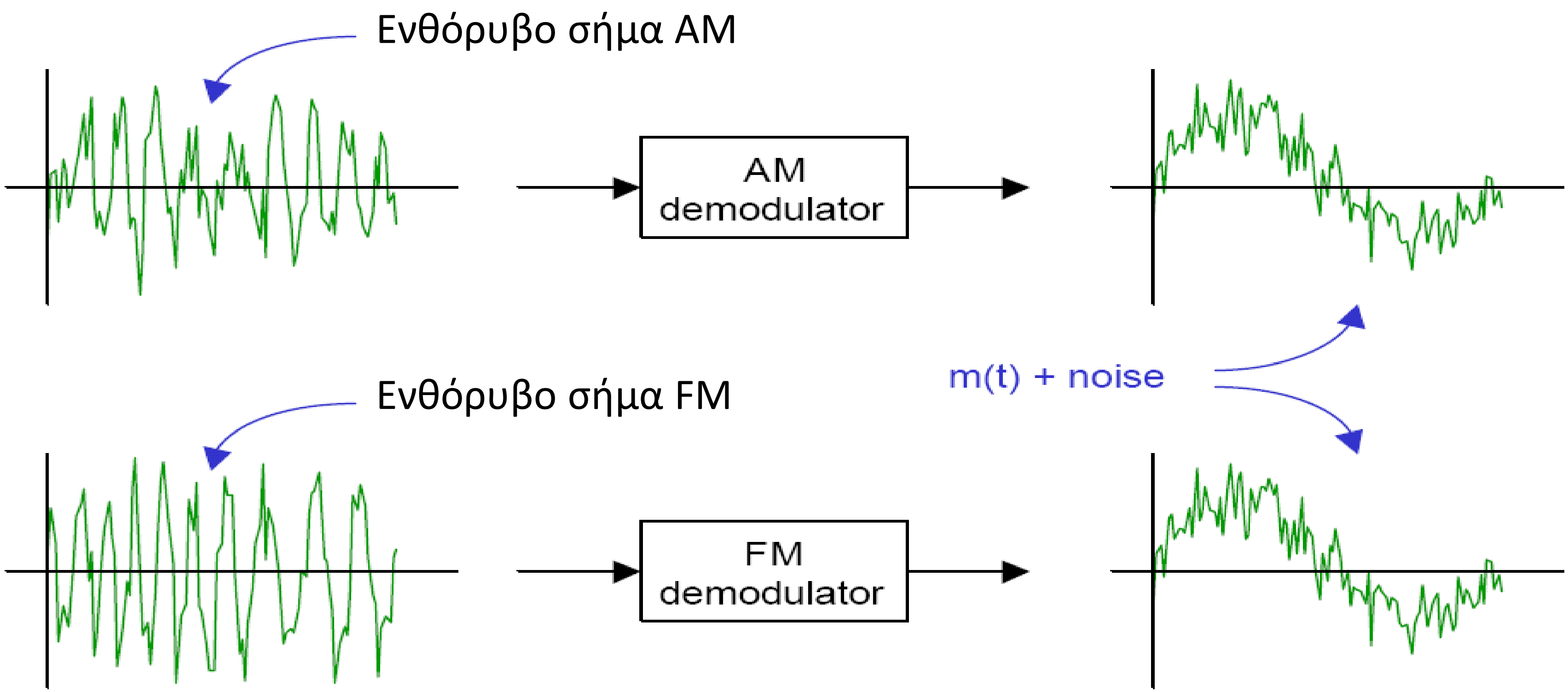

Fasma PM
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
-1000
-500
0
500
1000


Shma PM
200
100
0
-100
-200
-0.1
-0.05
0
0.05

Αναλογική Έναντι Ψηφιακών Διαμορφώσεων (1)

Αναλογική διαμόρφωση

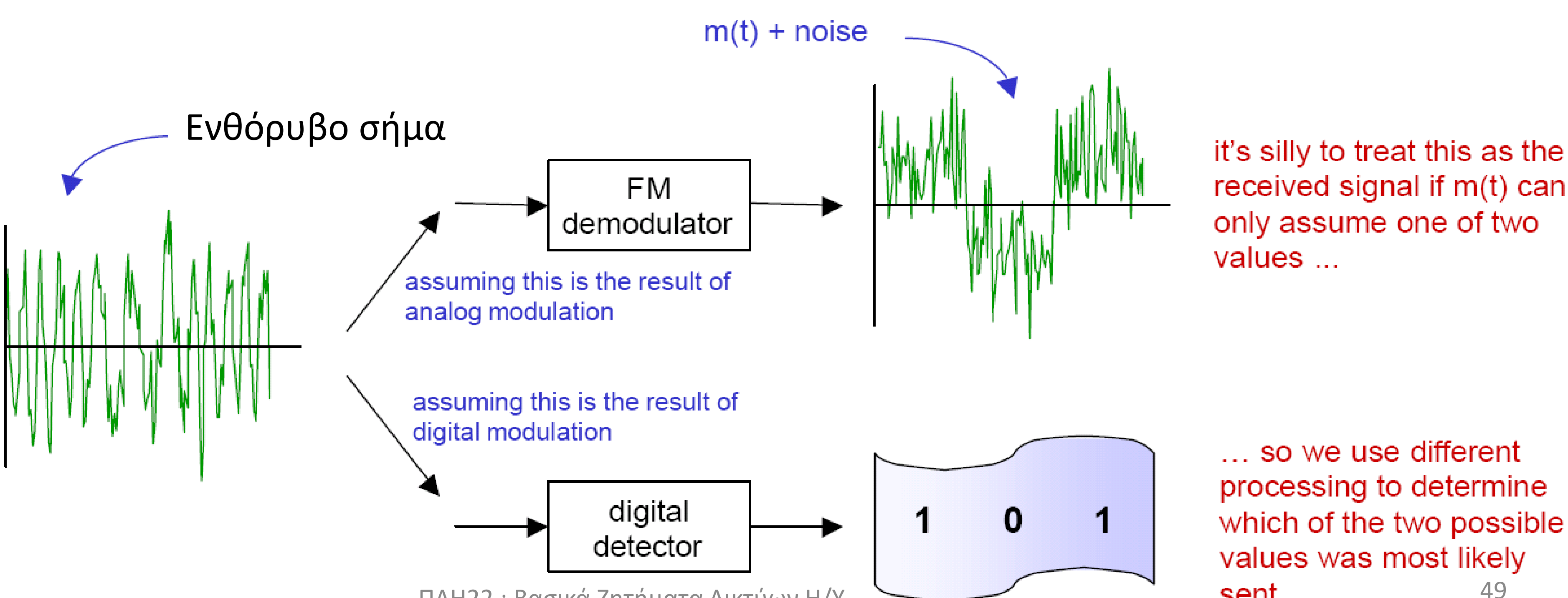
1. Το σήμα m(t) είναι αναλογικό
2. Ο αποδιαμορφωτής πρέπει να αναπαραγάγει το m(t)



Αναλογική Έναντι Ψηφιακών Διαμορφώσεων (2)

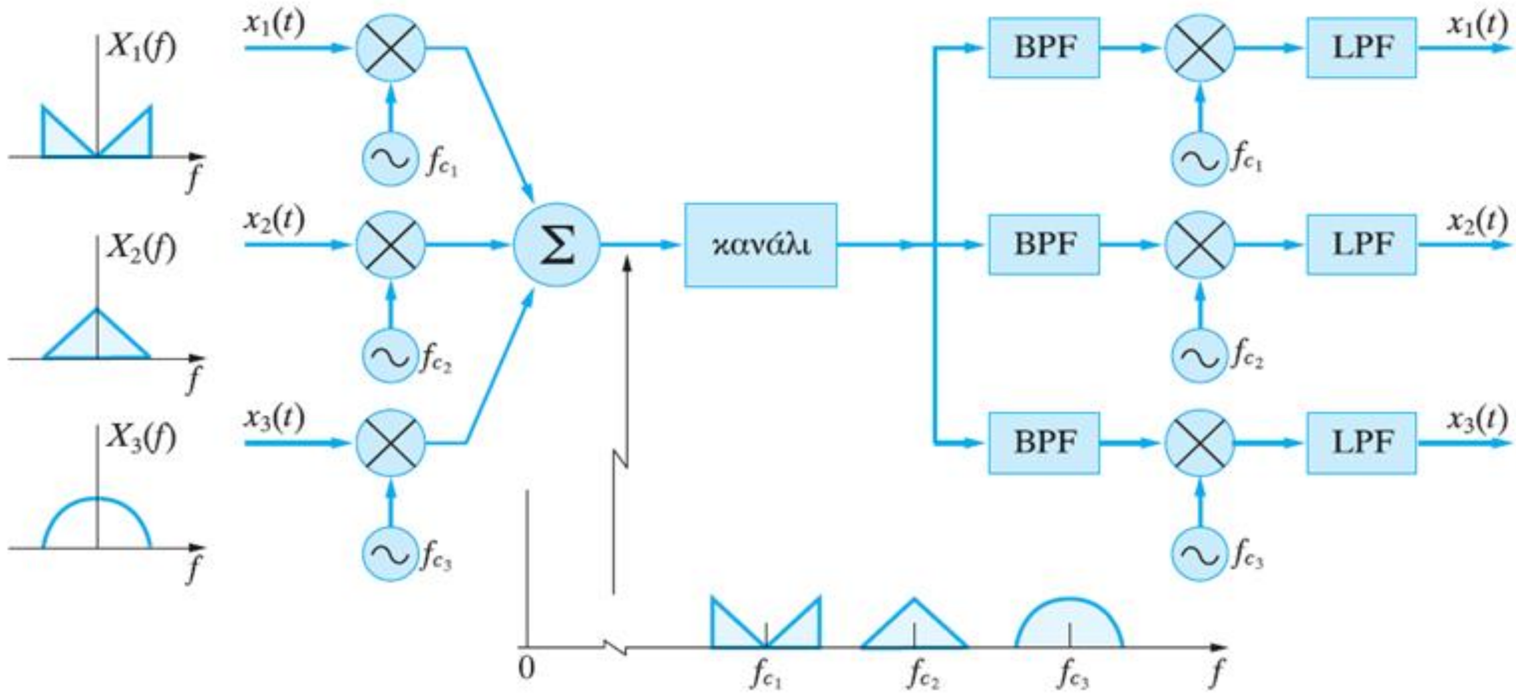
Ψηφιακή διαμόρφωση

1. Το m(t) παίρνει μια τιμή από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών
2. Ο αποδιαμορφωτής πρέπει να αποφασίσει ποια από τις πιθανές τιμές έχει μεταδοθεί – δεν υπάρχει ανάγκη πιστής αναπαραγωγής του m(t)



Πολυπλεξία Σημάτων στα πεδία Συχνοτήτων /Χρόνου

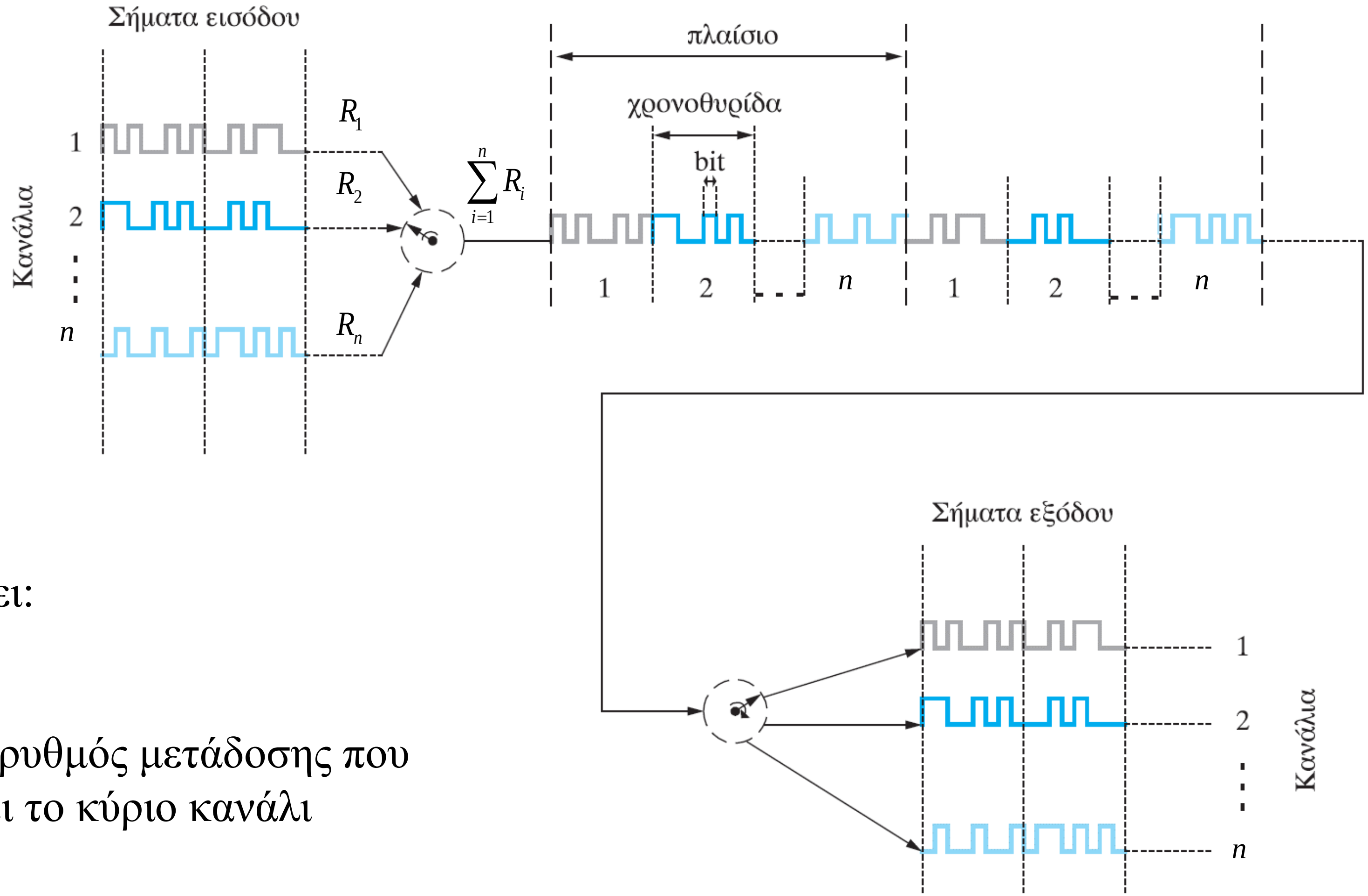
Πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (Frequency Division Multiplexing – FDM)



Έστω τρία σήματα μηνύματος πεπερασμένου εύρους ζώνης ($x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$), τα οποία θέλουμε να μεταδώσουμε ταυτόχρονα πάνω από το ίδιο κανάλι βασικής ζώνης. Για να το επιτύχουμε αυτό, μετατοπίζουμε το φάσμα του κάθε σήματος μηνύματος γύρω από τις τρεις διαφορετικές συχνότητες $f_{c_1}, f_{c_2}, f_{c_3}$, αντίστοιχα. Οι τιμές των $f_{c_1}, f_{c_2}, f_{c_3}$ έχουν επιλεγεί κατάλληλα, έτσι ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη των φασμάτων των σημάτων μηνύματος.

Πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (Time Division Multiplexing - TDM)

- Τα *n* σήματα διαχωρίζονται μεταξύ τους στο πεδίο του χρόνου
- Ο χρόνος υποδιαιρείται σε *n* χρονοθυρίδες με σταθερή διάρκεια



- Θα πρέπει να ισχύει:

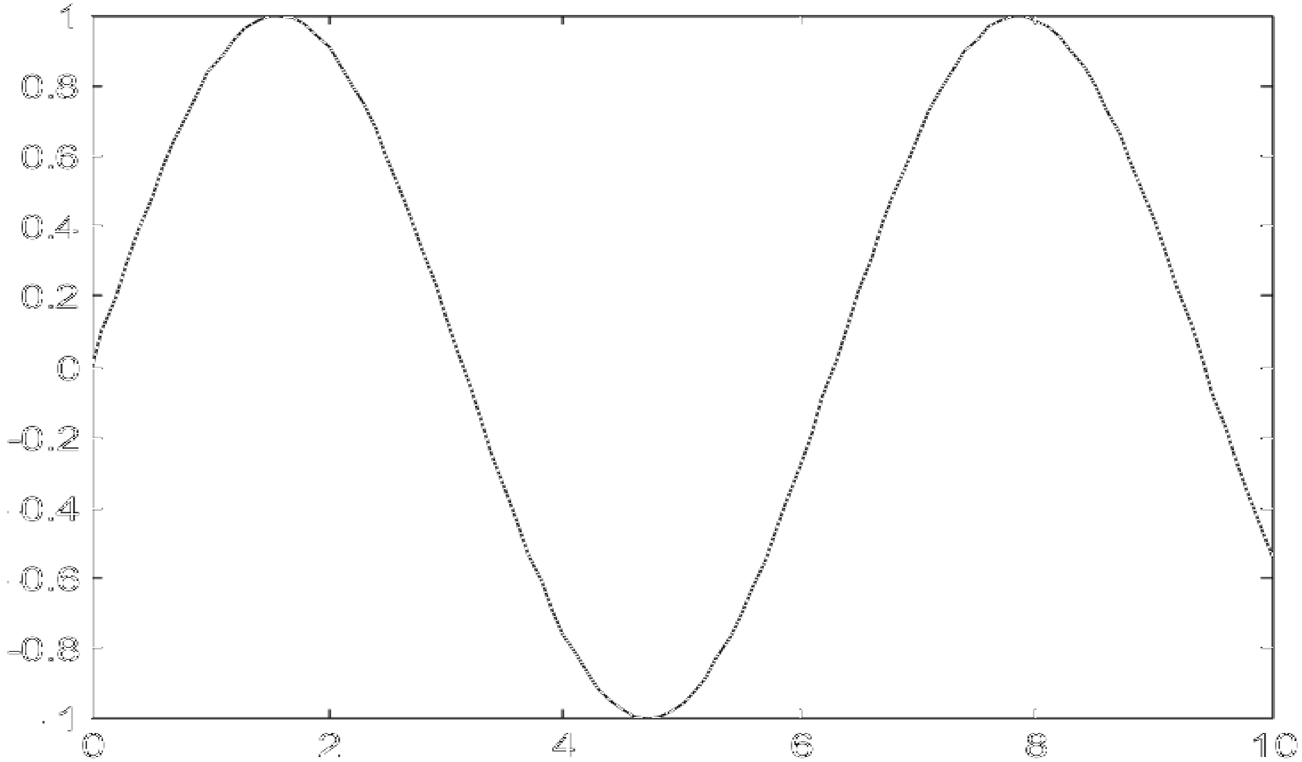
$$\sum_{i=1}^{n} R_i \leq R_{\max}$$

όπου R_{max} ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να υποστηρίξει το κύριο κανάλι επικοινωνίας

Βασικές Αρχές Δειγματοληψίας

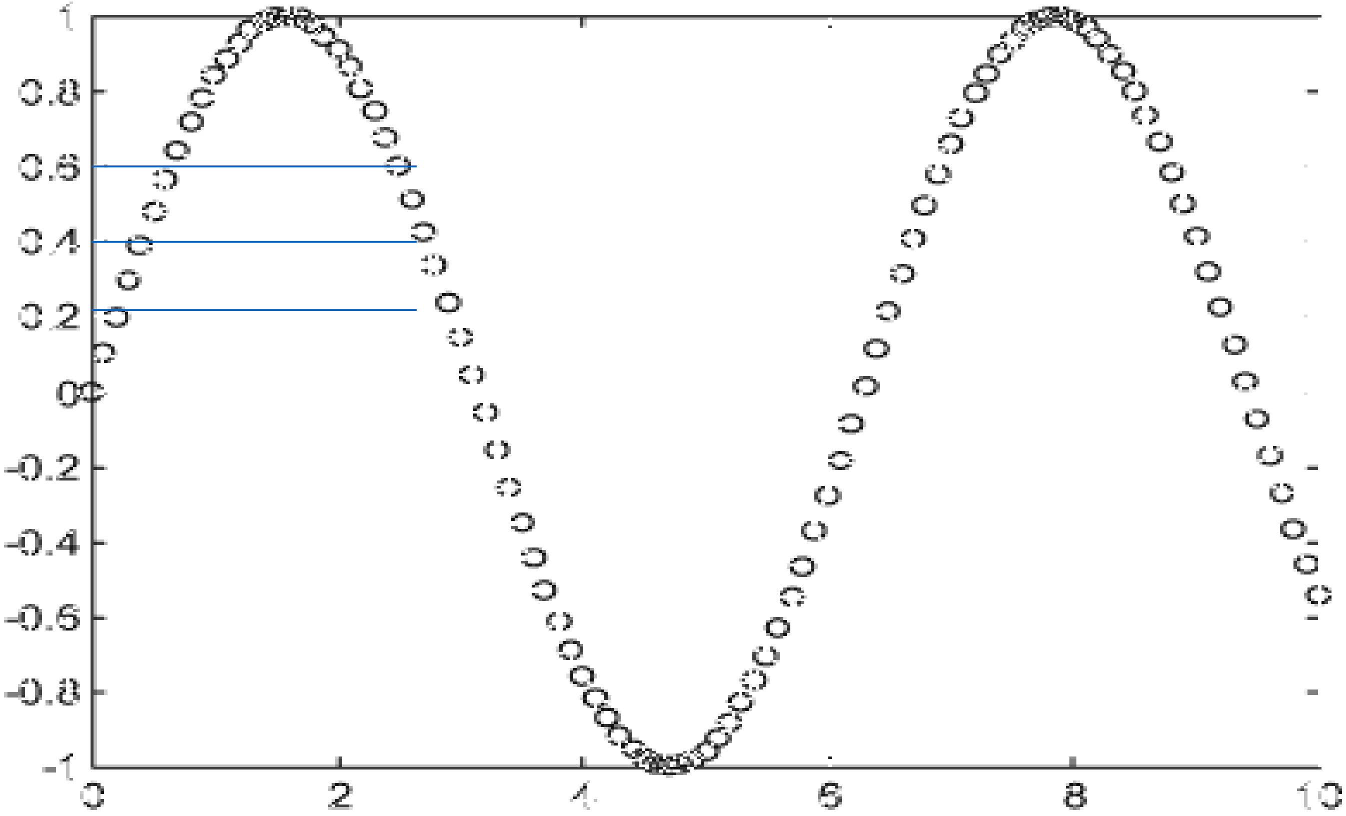
Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (1)

- Τα αναλογικά σήματα (π.χ. η φωνή, το video) είναι σήματα συνεχή στον χρόνο και στο πλάτος (amplitude)



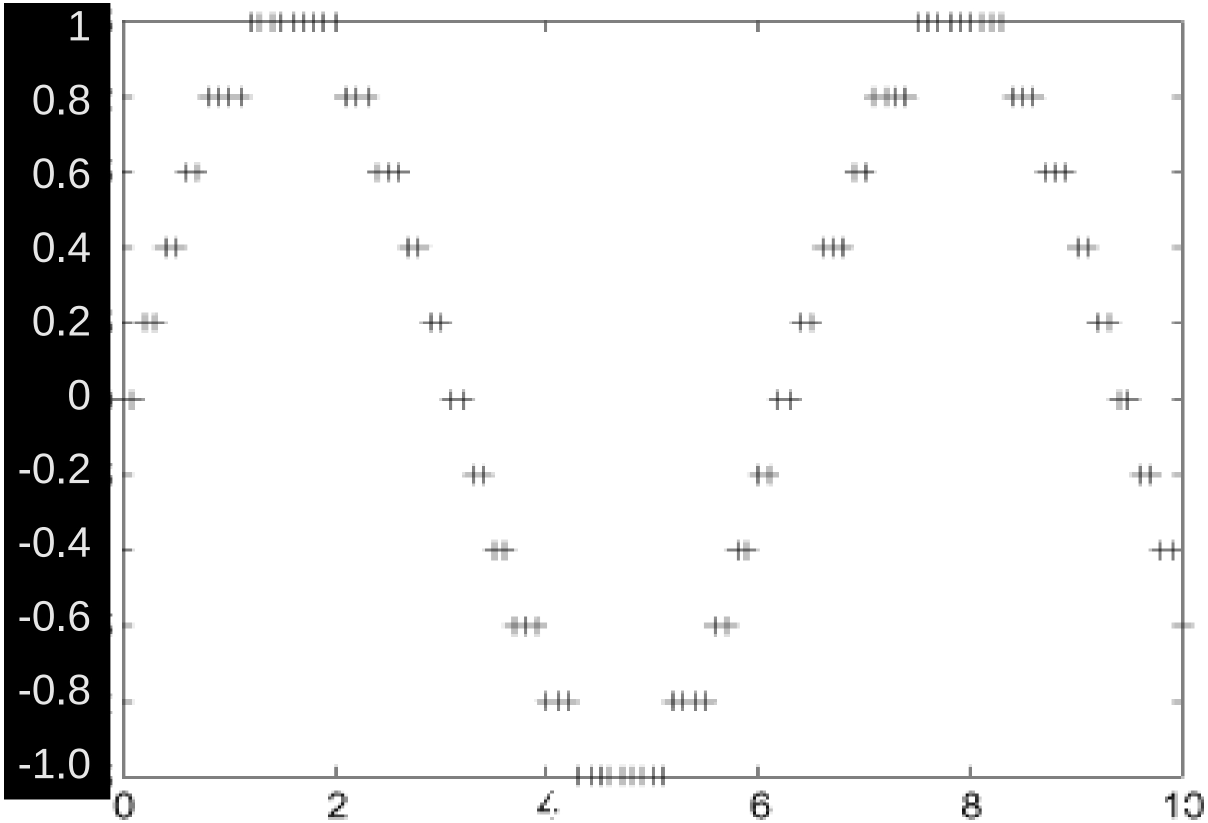
Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (2)

- Με την <u>**δειγματοληψία**</u> τα αναλογικά σήματα μετατρέπονται σε σήματα **διακριτού χρόνου**



Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (3)

- Με την **<u>κβάντιση (Quantization)</u>** τα δείγματα ενός σήματος γίνονται διακριτά ως προς την τιμή τους

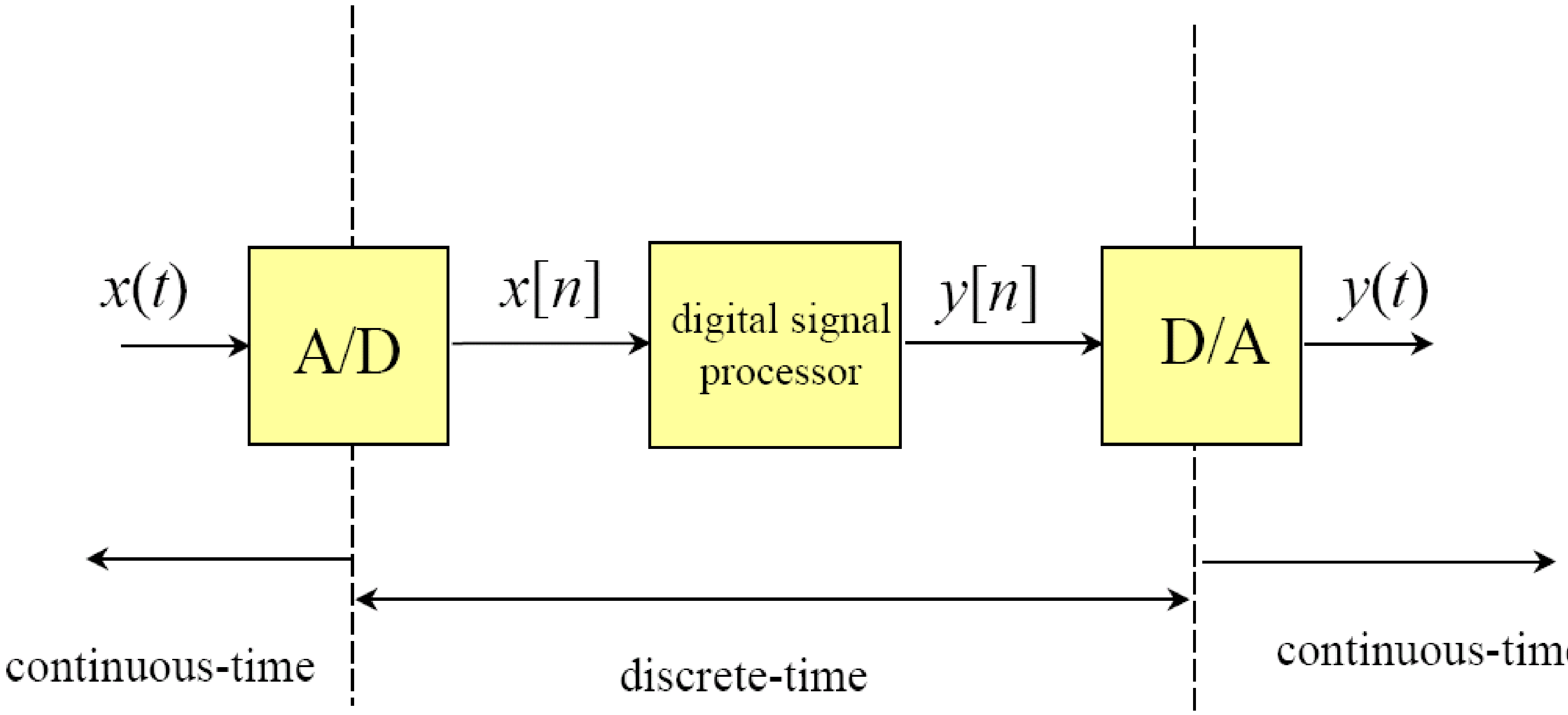


Επίπεδα κβάντισης = 11

Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (4)

- Εάν γίνει όπως πρέπει η δειγματοληψία (δηλαδή με την σωστή συχνότητα), δεν εισάγει παραμόρφωση στο σήμα.
- Η κβάντιση όμως εισάγει πάντοτε κάποια παραμόρφωση.
  - Η παραμόρφωση μειώνεται αν αυξηθεί ο αριθμός των επιπέδων κβάντισης (= ο αριθμός των απαιτούμενων bits για την κωδικοποίηση)
  - Μπορεί να γίνει ανταλλαγή μεταξύ της παραμόρφωσης και του ρυθμού παραγωγής bits/sec (= των απαιτήσεων σε φάσμα για την μετάδοση του κβαντισμένου σήματος)
- Θα ασχοληθούμε αρχικά με την δειγματοληψία και κατόπιν με την κβάντιση

Μετατροπείς A/D και D/A (1)

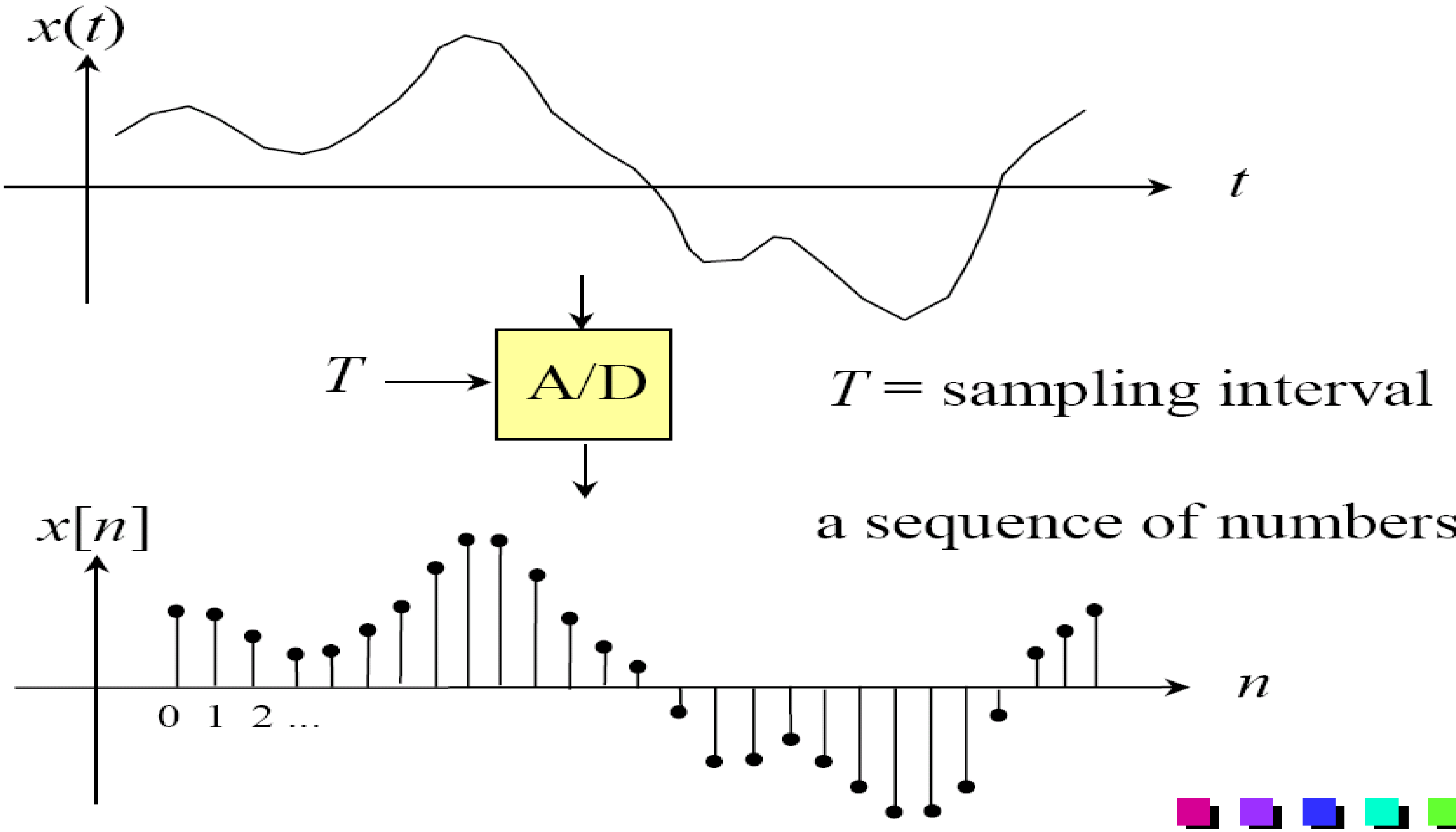


Μετατροπείς A/D και D/A (2)

- **Ο μετατροπέας Αναλογικού-σε-Ψηφιακό** (Analog to Digital - A/D) κωδικοποιεί την τιμή του δείγματος ενός σήματος σε δυαδικό αριθμό ανάλογο της τιμής αυτής.

- **Ο μετατροπέας Ψηφιακού-σε-Αναλογικό** (Digital to Analog (D/A) μετατρέπει έναν δυαδικό αριθμό σε τάση (ή ένταση) ανάλογη της τιμής του αριθμού αυτού.

Διαδικασία A/D



Δειγματοληψία

- Η διαδικασία κατά την οποία ένα σήμα συνεχούς χρόνου μετατρέπεται σε σήμα διακριτού χρόνου.
- Ερωτήματα που τίθενται
  - ρυθμός δειγματοληψίας (φάσμα)
  - τρόπος ανακατασκευής του αρχικού σήματος από τα δείγματα (συνάρτηση παρεμβολής)
- Και στα δύο ερωτήματα απαντά το *θεώρημα της δειγματοληψίας* που διατυπώθηκε από τον Claude Shannon το 1949, ο οποίος στηρίχθηκε στην εργασία του H. Nyquist, που έδωσε το ρυθμό δειγματοληψίας.

Ρυθμός Δειγματοληψίας Nyquist

- Ο ρυθμός του Nyquist είναι ο ελάχιστος επιτρεπτός ρυθμός δειγματοληψίας ενός αναλογικού σήματος που εξασφαλίζει την ορθή επανάκτηση του αρχικού σήματος από τα δείγματά του.
- Αν συμβολίσουμε με f_s το ρυθμό δειγματοληψίας ενός σήματος με περιορισμένο εύρος ζώνης, όπου η μέγιστη συχνότητα στο φάσμα του είναι B, τότε για να μπορούμε να ανακτήσουμε πλήρως και χωρίς σφάλματα το αρχικό σήμα, θα πρέπει

$$f_s \geq 2B$$

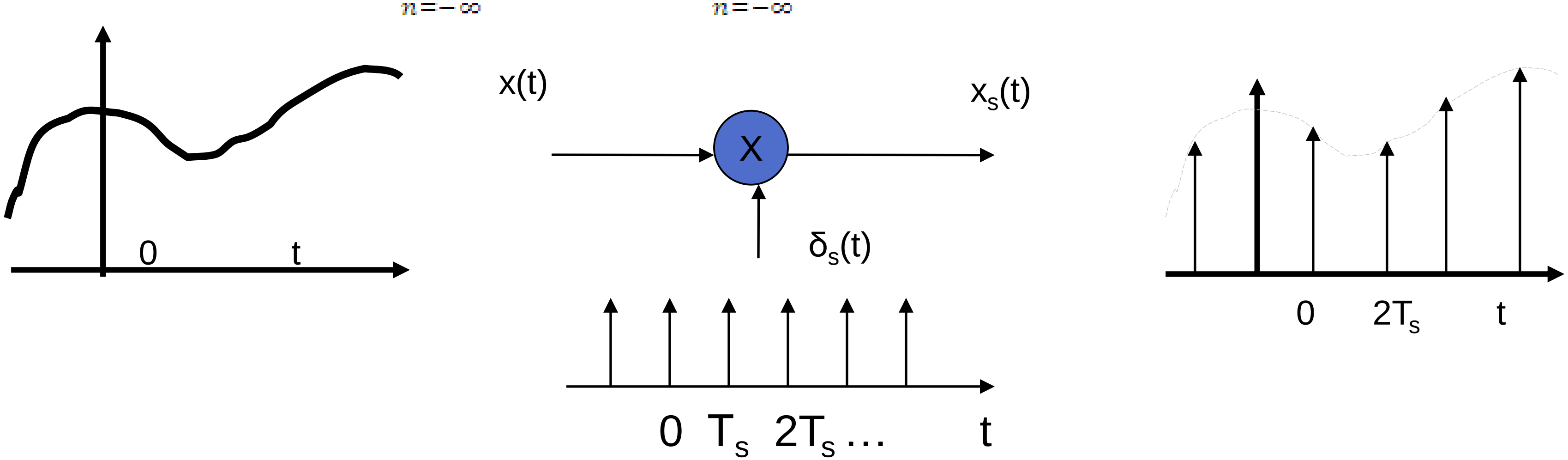
Ιδανικη Δειγματοληψία (1)

- Ιδανική δειγματοληψία (Impulse Samling) είναι η διαδικασία πολλαπλασιασμού ενός σήματος x(t) με μια ακολουθία συναρτήσεων delta $\delta_s(t)$

$$\delta_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$$

- Το σήμα $x_s(t)$ που προκύπτει από την ιδανική δειγματοληψία είναι:

$$x_S(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S) \cdot \delta(t - nT_S)$$



Ιδανική Δειγματοληψία (2)

- Θεωρούμε το σήμα $x_s(t)$ που προέκυψε από ιδανική δειγματοληψία ενός σήματος x(t)

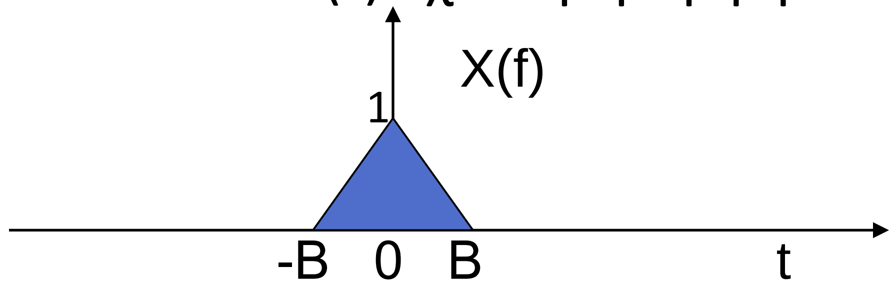
$$x_S(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S) \cdot \delta(t - nT_S)$$

- Η ακολουθία των συναρτήσεων delta επιλέγει τις τιμές του x(t) σε τακτά διαστήματα που απέχουν T_s seconds.
  - Η **περίοδος δειγματοληψίας** είναι T_s και
  - η **συχνότητα δειγματοληψίας** $f_s = 1/T_s$
- Φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος

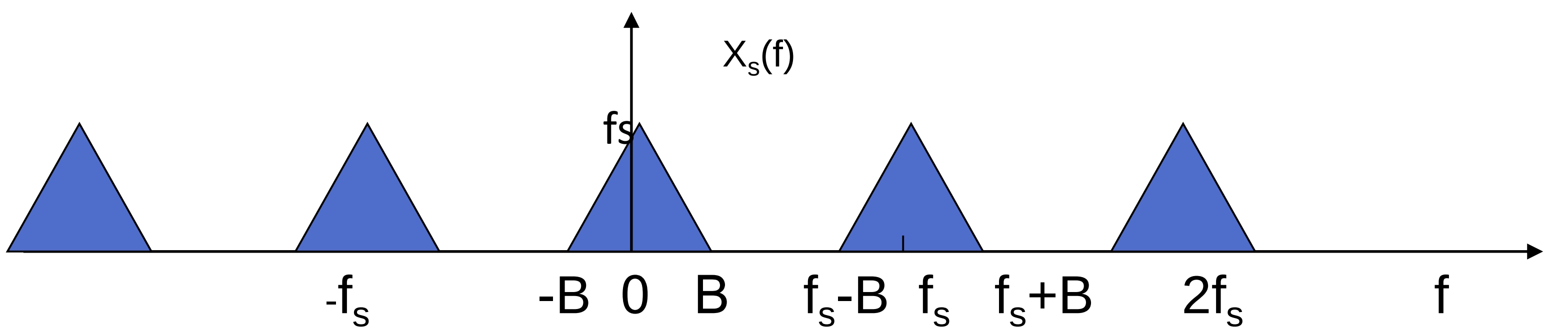
$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Ο Μ/Σ Fourier του Δειγματοληπτημένου Σήματος

- Αν ο Μ/Σ Fourier του x(t) έχει την μορφή



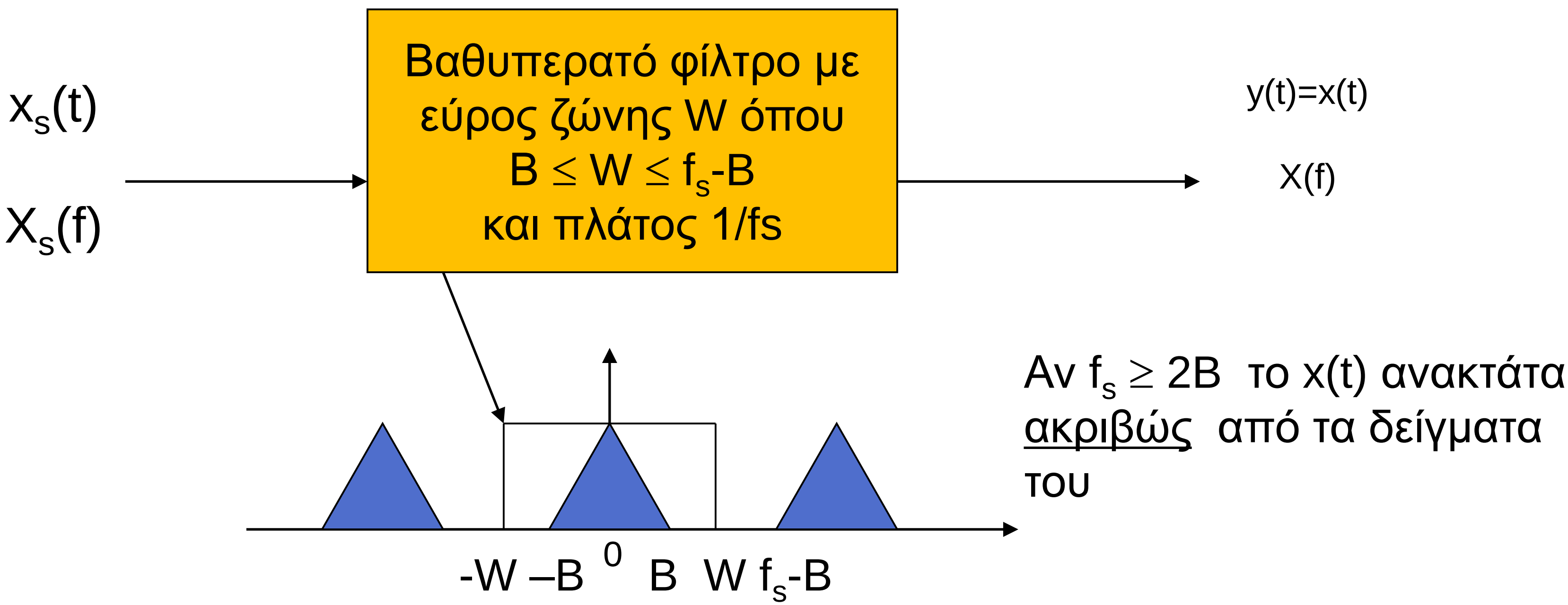
- Τότε ο Μ/Σ Fourier του $x_s(t)$ θα εχει την μορφή



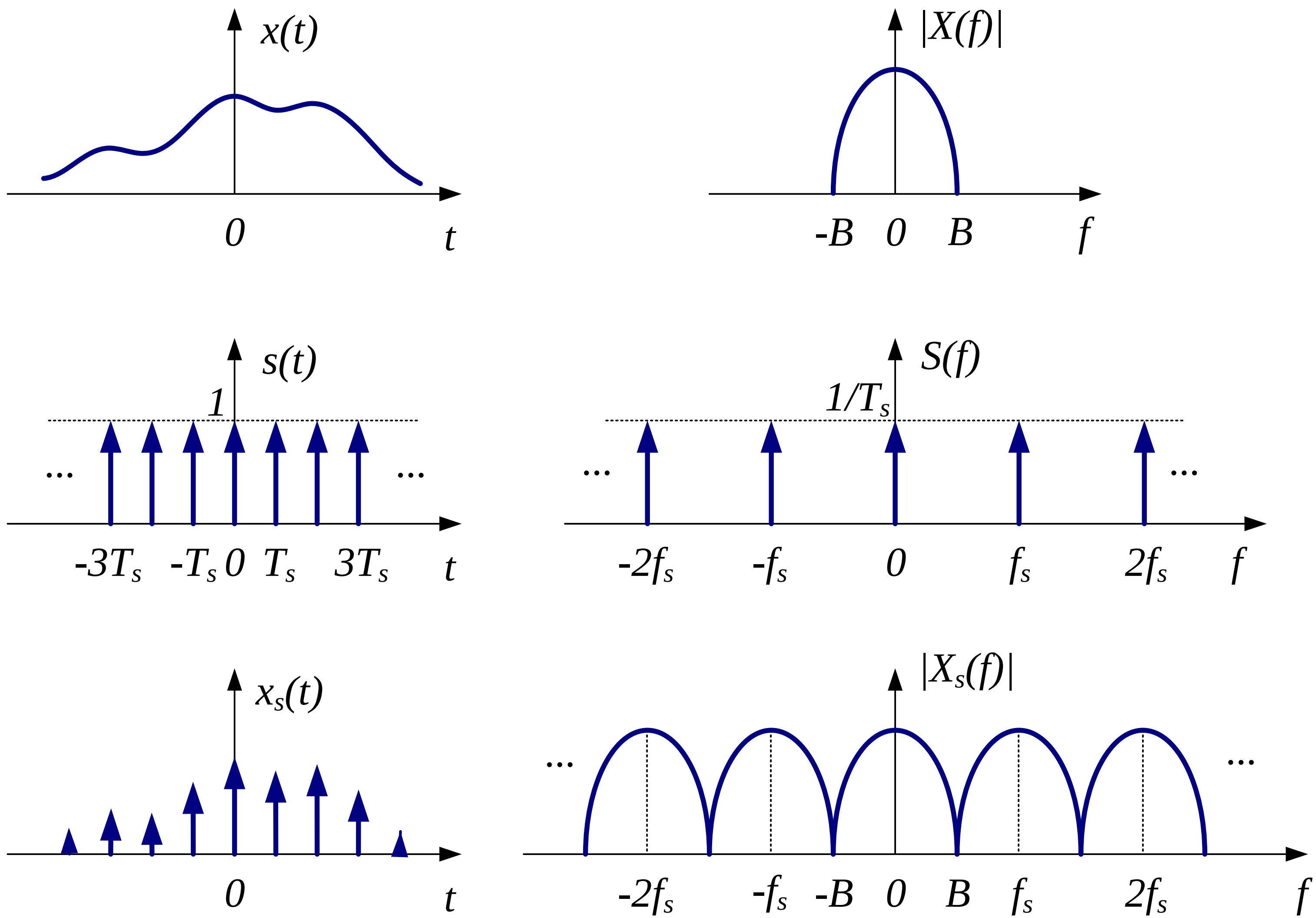
- Υπόθεση: $f_s \geq 2B$

Ανάκτηση του αρχικού σήματος από τα δείγματά του

- Το σήμα διέρχεται μέσα από ένα βαθυπερατό φίλτρο το οποίο επιτρέπει την διέλευση μόνο του φάσματος γύρω από το f=0.

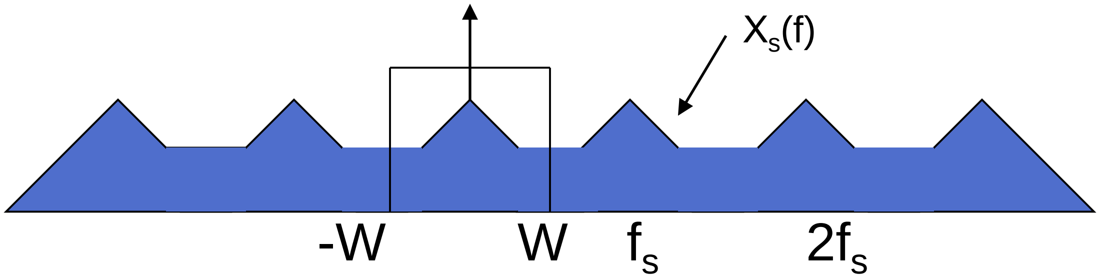


Ιδανική Δειγματοληψία

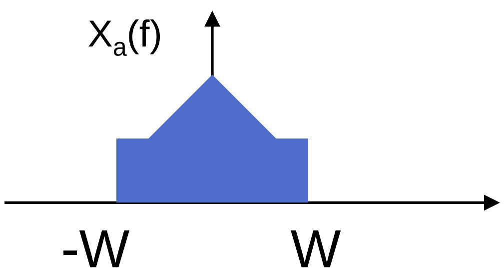


Υπο-δειγματοληψία και aliasing

- Αν το σήμα υποστεί δειγματοληψία με συχνότητα $f_s < 2B$ τότε θα έχουμε υπερκάλυψη των περιοδικά επαναλαμβανόμενων φασμάτων $X(f-nf_s)$ στο φάσμα του $X_s(f)$, όπως φαίνεται στο σχήμα:

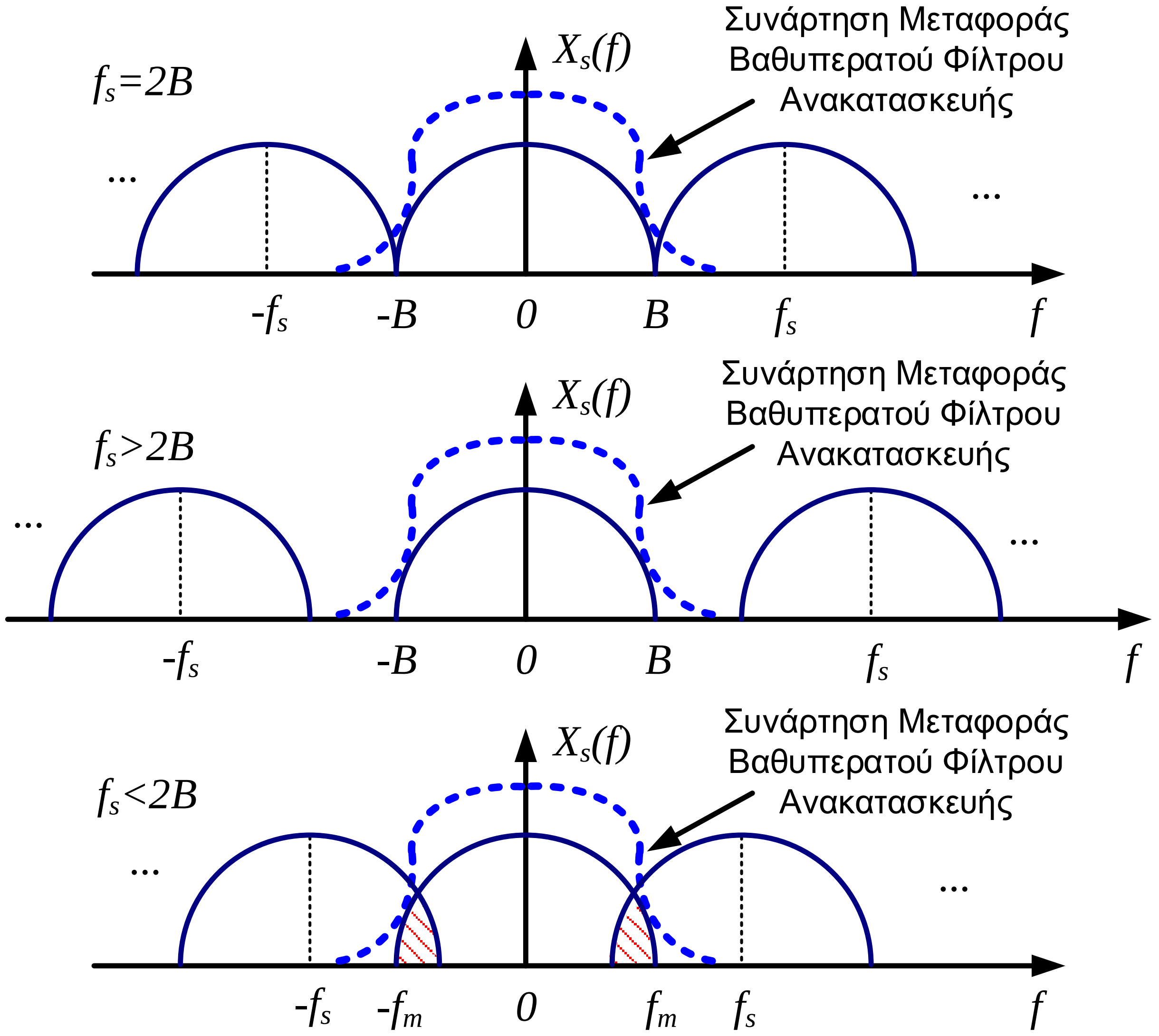


- Το σήμα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου θα διαφέρει από το αρχικό σήμα (aliasing)



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Δειγματοληψία



Το Θεώρημα της Δειγματοληψίας

- Έστω σήμα x(t) με περιορισμένο εύρος φάσματος και Μ/Σ Fourier: X(f) = 0, για |f| > B
  - Εάν το σήμα δεν είναι αυστηρά περιορισμένου φάσματος, τότε πρέπει να περάσει μέσα από ένα βαθυπερατό φίλτρο πριν την δειγματοληψία
- Το x(t) μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματά του που λαμβάνονται με συχνότητα δειγματοληψίας fs, εάν fs ≥ 2B.
  - Η συχνότητα 2B ονομάζεται **συχνότητα Nyquist.**
  - Αν $f_s < 2B$ εμφανίζεται το φαινόμενο του **aliasing.**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left[2B\left(t - \frac{n}{2B}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

Άλλες μορφές Δειγματοληψίας

- Στην πράξη η δειγματοληψία γίνεται
  - Με δείγματα πεπερασμένης διάρκειας (αντί για ακολουθία συναρτήσεων delta χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διάρκειας)
  - Με δείγματα με επίπεδη κορυφή όπου και πάλι χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διάρκειας με ύψος όσο η τιμή του σήματος κατά την αρχή του παλμού
  - Συγκλίνουν στην ιδανική δειγματοληψία όταν η διάρκεια μικραίνει.

Τυπικές συχνότητες δειγματοληψίας

- Σήματα φωνής:
  - Τηλεφωνικής ποιότητας φωνή έχει εύρος φάσματος 300 Hz εως 4000 Hz
  - Τα περισσότερα συστήματα ψηφιακής τηλεφωνίας κάνουν δειγματοληψία με 8000 samples/ sec.
- Ακουστικά σήματα:
  - Η υψηλότερη συχνότητα που αντιλαμβάνεται το ανθρώπινο αυτί είναι περίπου 15 kHz.
  - Στα CDs η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44000 samples/sec.
- Σήματα Video:
  - Το μάτι χρειάζεται δείγματα με ρυθμό τουλάχιστον 20 πλαίσια/sec για να δημιουργηθεί η εντύπωση ομαλής κίνησης

Τυπολόγιο-Ασκήσεις

Δειγματοληψία

Αναλογικό σήμα $x(t)$ $\xrightarrow[T_s]{\text{περίοδος δειγματοληψίας}}$ $x(t) = x_s(n)$

$t \to nT_s$ n ακέραιος

Συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = \frac{1}{T_s}$

$$x_s(n) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) * \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$

$$= f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)$$

Κριτήριο Nyquist

- Για σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης $\left(|X(f)| \neq 0,\ |f| \leq f_x\right)$

  $f_s \geq f_{s,min} = 2f_x$ για ανακατασκευή αναλογικού σήματος χωρίς παραμόρφωση

ΕΞ2018Β

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Δίνεται το σήμα $x(t) = cos(2\pi 200t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα και τη δειγματοληψία (με βάση το κριτήριο Nyquist) για τα ακόλουθα σήματα:

(α) $a(t) = \left[x(t\sqrt{2})\right]^2$

(β) $b(t) = x(t) + sinc(400t)$

(γ) $c(t) = [x(4t) + sinc^2(100t)] * [\delta(t) - 300sinc(300t)]$ (όπου το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη).

(δ) $e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot sinc(400t)$

(α) $a(t)=x^2\left(t\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+\cos(2\pi 400\sqrt{2}\cdot t)}{2}$ με τη βοήθεια της ιδιότητας $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1+\cos(\theta)}{2}$)

Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T}=\dfrac{1}{400\sqrt{2}}\sec=\dfrac{\sqrt{2}}{800}\sec$

Συχνότητα $f=400\sqrt{2}Hz$

Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_{s,\min}=800\sqrt{2}Hz$

(β)

$$b(t)=x(t)+\sin c(400t)=\cos(2\pi 200t)+\sin c(400t)\xleftrightarrow{F}c(t)=\frac{1}{2}\left\{\delta\left(f-200\right)+\delta\left(f+200\right)\right\}+\frac{1}{400}rect\left(\frac{f}{400}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα μη περιοδικό

Μέγιστη συχνότητα 200Hz, άρα ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min}=400Hz$

(γ)

$$c(t) = \left[x(4t) + \sin c^2(100t)\right] * \left[\delta(t) - 300\sin c(300t)\right] =$$

$$= \left[\cos(2\pi 800t) + \sin c^2(100t)\right] * \left[\delta(t) - 300\sin c(300t)\right] \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F} \left\{\frac{1}{2}\left\{\delta(f-800) + \delta(f+800)\right\} + \frac{1}{100} tri\left(\frac{f}{100}\right)\right\} \cdot \left\{1 - rect\left(\frac{f}{300}\right)\right\}$$

Εδώ έχουμε υψιπερατό φίλτρο που αφήνει να περάσουν οι παλμοί δ στα +/- 800Hz

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \frac{1}{800}\sec$

Συχνότητα $f = 800Hz$

Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_{s,\min} = 1600Hz$

(δ)

$e(t) = 1 + x(t)\cdot t\cdot \sin c(400t) = 1 + \cos(2\pi 200t)\cdot t\cdot \dfrac{\sin(400\pi t)}{400\pi t} = 1 + \dfrac{1}{800\pi}\sin\left(2\pi 400t\right)$ (με βάση την ιδιότητα sin(2θ)=2sin(θ)cos(θ))

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \dfrac{1}{400}\sec$

Συχνότητα $f = 400Hz$

Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_{s,\min} = 800Hz$

ΕΞ2018Α

<u>ΘΕΜΑ 2</u>

Δίνονται τα παρακάτω σήματα:

$x(t) = \cos(2\pi 100t)$

$y(t) = \cos(50t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα και τη δειγματοληψία (με το κριτήριο Nyquist) υπολογίζοντας αντίστοιχα την περίοδο και τη συχνότητα δειγματοληψίας (αν υπάρχουν) για τα ακόλουθα σήματα:

(α) $a(t) = 1 - x(t) - y(t)$

(β) $b(t) = \delta(t) + x\left(\dfrac{t}{\pi}\right) + y(t)$

(γ) $c(t) = 1 + x(t) \cdot y(\pi t)$

(δ) $e(t) = c(t) * \sin c(200t)$

(α) $a(t) = 1 - x(t) - y(t)$

$$a(t) = 1 - x(t) - y(t) = 1 - \cos(2\pi 100 t) - \cos(2\pi \frac{50}{2\pi} t)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{2\pi}{50}} = \frac{1}{4\pi}, \text{άρρητος άρα μη περιοδικό}$$

$$f_{\max} = 100 Hz, \text{άρα } f_{s,\min} = 200 Hz$$

(β) $b(t) = \delta(t) + x\left(\frac{t}{\pi}\right) + y(t)$

$$b(t) = \delta(t) + x\left(\frac{t}{\pi}\right) + y(t) = \delta(t) + \cos\left(2\pi \frac{100}{\pi} t\right) + \cos\left(2\pi \frac{50}{2\pi} t\right) \xleftrightarrow{F} 1 + \frac{1}{2}\left\{\delta\left(f - \frac{100}{\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{100}{\pi}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\delta\left(f - \frac{50}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{50}{2\pi}\right)\right\}$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές (λόγω του $1^{ου}$ όρου σταθ = 1) άρα το σήμα είναι μη περιοδικό.
Το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης (πάλι λόγω του $1^{ου}$ όρου) άρα δεν δειγματίζεται κατά Nyquist.

(γ) $c(t) = 1 + x(t)\cdot y(\pi t)$

$$c(t) = 1 + x(t)\cdot y(\pi t) = 1 + \cos(2\pi 100t)\cdot\cos(2\pi 25t) = 1 + \frac{1}{2}\{\cos(2\pi 125t) + \cos(2\pi 75t)\}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{1}{75}} = \frac{3}{5}, \text{ρητός άρα περιοδικό με περίοδο } \mathrm{T} = 5T_1 = 3T_2 = \frac{1}{25}\sec$$

$$f_{\max} = 125Hz, \text{άρα } f_{s,\min} = 250Hz$$

(δ) $e(t) = c(t) * \sin c(200t)$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2}\{\cos(2\pi 125t) + \cos(2\pi 75t)\} \xleftrightarrow{F} C(f) = \delta(f) + \frac{1}{4}\{\delta(f-125) + \delta(f+125)\} + \frac{1}{4}\{\delta(f-75) + \delta(f+75)\}$$

$$e(t) = c(t) * \sin c(200t) \xleftrightarrow{F} C(f)\cdot\frac{1}{200}rect\left(\frac{f}{200}\right)$$

Δηλ. έχουμε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 100Hz που αποκόπτει τους παλμούς δ στα +/-125Hz και συνεπώς το φάσμα εξόδου θα είναι: $E(f) = \frac{1}{200}\left\{\delta(f) + \frac{1}{4}\{\delta(f-75) + \delta(f+75)\}\right\}$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 1/75 sec και έχει συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 150Hz

ΕΞ2017Β

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα σήματα $x(t)=\cos(2\pi 30t)$ και $y(t)=\cos(10t)$

Για τα παρακάτω σήματα να διερευνηθεί (α) η περιοδικότητα και η δειγματοληψία (με το κριτήριο Nyquist) και (β) να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) οι αντίστοιχες περίοδοι και οι ελάχιστες συχνότητες δειγματοληψίας τους:

<u>Ερώτηση 1:</u> $a(t)=1+x(t)+y(t)$

<u>Ερώτηση 2:</u> $b(t)=x(t)+y(t)\cdot rect\left(\frac{t}{10}\right)$

<u>Ερώτηση 3:</u> $c(t)=\left[x(t)+y(t)\right]*20\text{sinc}^2(20t)$

<u>Ερώτηση 4:</u> $d(t)=\text{sinc}(60t)\cdot t\cdot x(t)$

(α)

$$a(t)=1+x(t)+y(t)=1+\cos(2\pi 30t)+\cos(10t)=$$

$$=1+\cos(2\pi 30t)+\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)$$

$$\cos(2\pi 30t)$$

Περίοδος $T_1=\dfrac{1}{30}\sec$

$$\cos\left(2\pi \frac{10}{2\pi} t\right)$$

$$\text{Περίοδος } T_2 = \frac{2\pi}{10} \sec$$

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{2\pi}{10}} = \frac{1}{6\pi}$$

Άρρητος άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 30 Hz άρα το σήμα έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας 60Hz.

(β)

$$b(t)=\cos(2\pi 30t)+\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)\cdot rect\left(\frac{t}{10}\right)$$

$$\mathrm{B}(f)=\frac{1}{2}\left[\delta(f-30)+\delta(f+30)\right]+\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]*10\mathrm{sinc}(10f)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(f-30)+\delta(f+30)\right]+\frac{1}{2}\left[10\mathrm{sinc}\left(10\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\right)+10\mathrm{sinc}\left(10\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right)\right]$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης άρα δεν ορίζεται συχνότητα Nyquist.

(γ)

$$c(t)=\left[x(t)+y(t)\right]*20\operatorname{sinc}^2(20t)=\left[\cos(2\pi 30t)+\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)\right]*20\operatorname{sinc}^2(20t)$$

$$C(f)=\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-30)+\delta(f+30)\right]+\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]\right\}\cdot tri\left(\frac{f}{20}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\left(tri\left(\frac{\left(\frac{10}{2\pi}\right)}{20}\right)\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\left(tri\left(\frac{\left(-\frac{10}{2\pi}\right)}{20}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\left(-\frac{1}{20}\left(\frac{10}{2\pi}\right)+1\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{20}\left(-\frac{10}{2\pi}\right)+1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{10}{40\pi}\right)+1\right)\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]$$

Το σήμα είναι ένας τόνος συχνότητας 10/2π Hz (άρα η περίοδοςτου είναι 2π/10 Hz) και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 20/2π Hz.

Σημείωση: Το ερώτημα δεν απαιτούσε τον ακριβή υπολογισμό του πλάτους των παλμών δ (με βάση την τιμή του τριγωνικού παλμού στα σημεία 10/2π Hz, -10/2π Hz).

(δ)

$$d(t) = \mathrm{sinc}(60t) \cdot t \cdot x(t) =$$

$$= \frac{\sin(60\pi t)}{60\pi t} t \cdot \cos(2\pi 30t) = \frac{1}{60\pi} \sin(2\pi 30\pi t) \cos(2\pi 30t) = \frac{1}{60\pi} \frac{1}{2} \sin(2\pi 60\pi t)$$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο ίση με 1/60 sec.
Το σήμα είναι ένας τόνος συχνότητας 60 Hz και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 120 Hz.

ΕΞ2017Α

ΘΕΜΑ 1

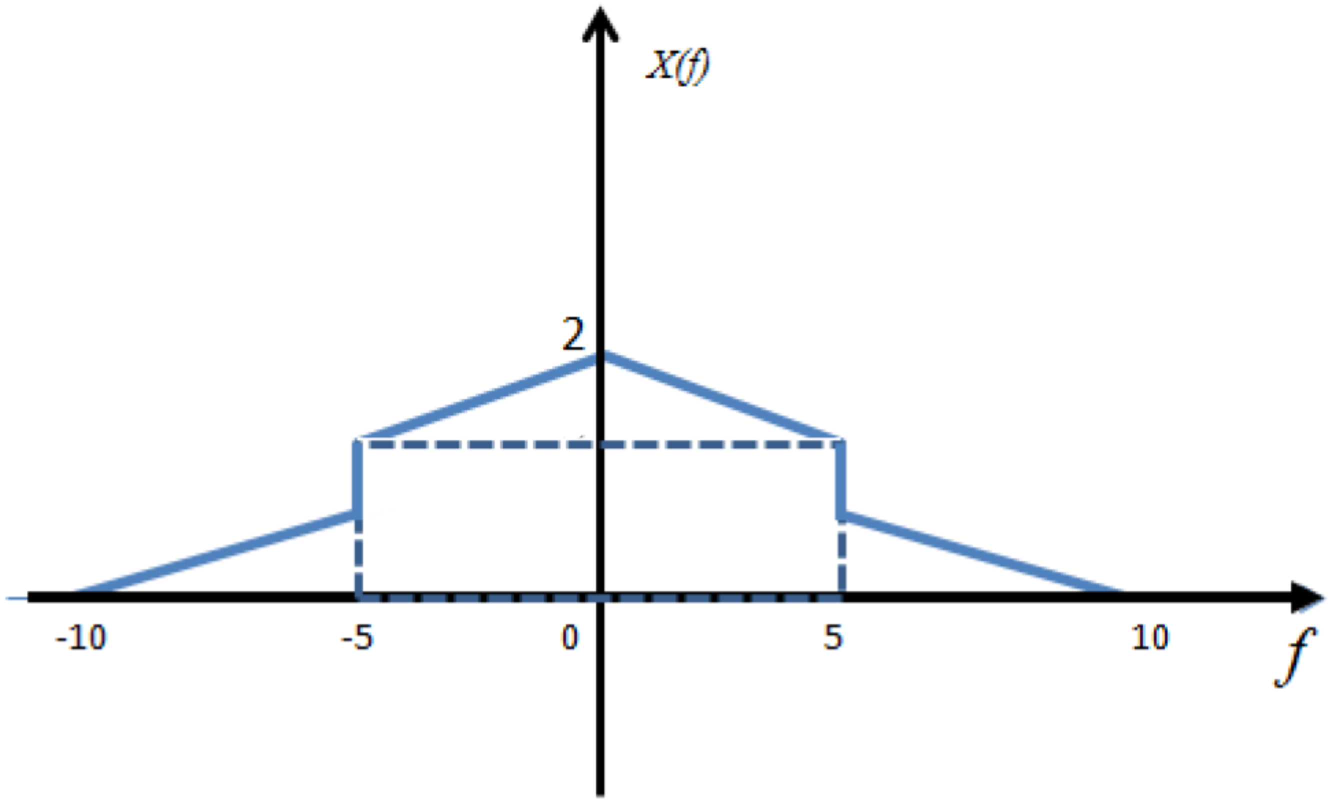
Δίνεται το σήμα $x(t)=10\operatorname{sinc}(10t)\cdot\left[1+\operatorname{sinc}(10t)\right]$

<u>Ερώτηση 1η:</u> Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του $x(t)$

<u>Ερώτηση 2η:</u> Να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min}$ κατά Nyqist του $x(t)$ και να δοθούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος $x_s(t)$ με την υπολογισθείσα συχνότητα δειγματοληψίας στα πεδία χρόνου και συχνοτήτων.

<u>Ερώτηση 3η:</u> Το σήμα $x(t)$ δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας $f_\delta = 50\cdot f_{s,\min}$ και διέρχεται από κατάλληλο ζωνοπερατό φίλτρο - με τη μικρότερη δυνατή ζώνη διέλευσης - του οποίου η έξοδος είναι ένα σήμα που μπορεί να προκύψει και με DSB διαμόρφωση συνημιτονοειδούς φέροντος συχνότητας 1000Hz και πλάτους 100 Volt από το σήμα $x(t)$. Η μια συχνότητα αποκοπής του φίλτρου ισούται με $f_{low}=10Hz$ Να υπολογίσετε την άλλη συχνότητα αποκοπής του ζωνοπερατού φίλτρου (f_{high}) και το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς του . Επίσης, να δώσετε την έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου.

$$x(t)=10\operatorname{sinc}(10t)\cdot\left[1+\operatorname{sinc}(10t)\right]=10\operatorname{sinc}(10t)+10\operatorname{sinc}^2(10t)\xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{10}\right)+tri\left(\frac{f}{10}\right)$$



(β)
Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος του x(t) είναι 10Hz. Συνεπώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist είναι 20Hz.

Το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου γράφεται:

$$x_s(n) = 10\operatorname{sinc}\left(10\frac{n}{20}\right) + 10\operatorname{sinc}^2\left(10\frac{n}{20}\right),\ n \text{ ακέραιος}$$

Και στο πεδίο των συχνοτήτων το φάσμα του γράφεται:

$$X_s(f) = f_{s,\min}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - mf_{s,\min}\right) = 20\sum_{m=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{f-m20}{10}\right) + tri\left(\frac{f-m20}{10}\right)$$

(γ)

Το σήμα $x(t)$ δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας $f_\delta = 50 \cdot f_{s,\min} = 50 \cdot 20 = 1000Hz$

και διέρχεται από κατάλληλο ζωνοπερατό φίλτρο του οποίου η έξοδος είναι ένα σήμα που μπορεί να προκύψει και με DSB διαμόρφωση συνημιτονοειδούς φέροντος συχνότητας 1000Hz και πλάτους 100 Volt από το σήμα $x(t)$.

Το σήμα αυτό αντιστοιχεί στο

$$y(t) = x(t)100\cos(2\pi 1000t) \xleftrightarrow{F} 50\left[X(f-1000) + X(f+1000)\right]$$

Προκειμένου να προκύψει το ίδιο σήμα από δειγματοληψία του $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $f_\delta = 50 \cdot f_{s,\min} = 50 \cdot 20 = 1000Hz$

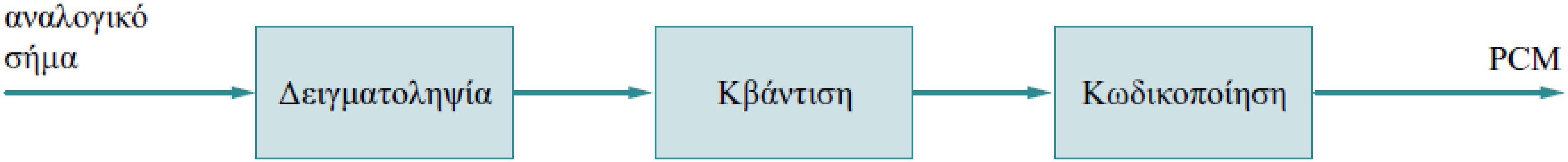
Θα πρέπει το ζωνοπερατό φίλτρο να έχει συχνότητες αποκοπής τις (f_{low}, f_{high})=(10Hz,1010Hz)

Επίσης, προκειμένου να προκύψει το πλάτος 50 θα πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρπου να έχει πλάτος ίσο με 1/20

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου ισούται με

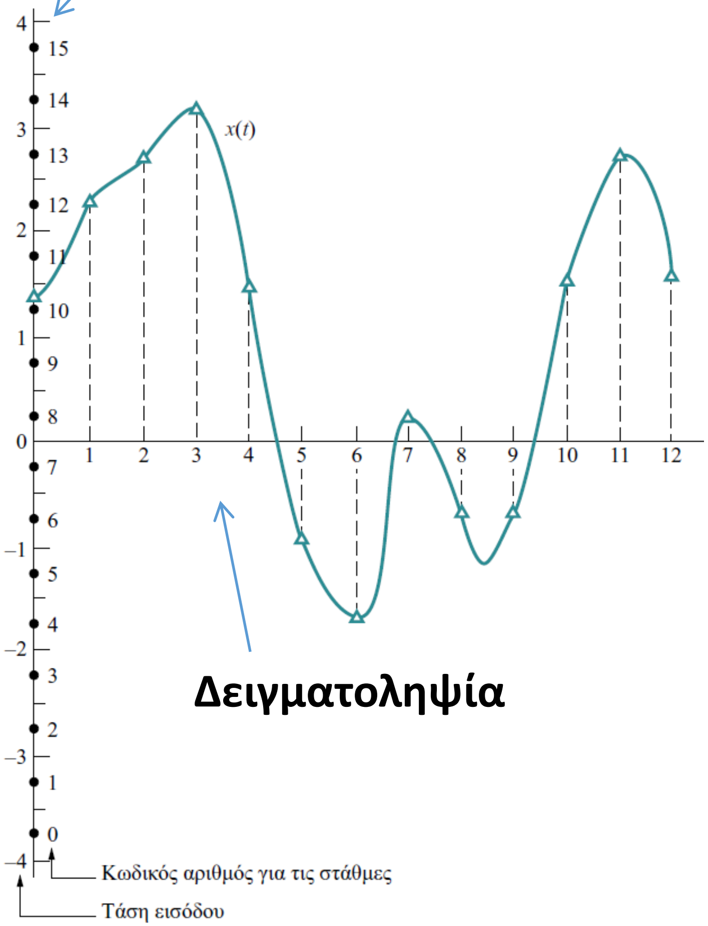
$$H_{BP}(f) = \frac{1}{20}\left[rect\left(\frac{f-510}{1000}\right) + rect\left(\frac{f+510}{1000}\right)\right]$$

Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)



Παράδειγμα

Κβάντιση



Κωδικοποίηση

Αριθμός δείγματος	$x_s(t)$	$x_q(t)$	Αριθμός στάθμης	Δυαδική τιμή αριθμού στάθμης
0	1,3	1,25	10	1010
1	2,3	2,25	12	1100
2	2,7	2,75	13	1101
3	3,2	3,25	14	1110
4	1,45	1,25	10	1010
5	– 0,9	– 0,75	6	0110
6	– 1,7	– 1,75	4	0100
7	0,3	0,25	8	1000
8	0,7	0,75	9	1001
9	0,7	0,75	9	1001
10	1,6	1,75	11	1011
11	2,8	2,75	13	1101
12	1,7	1,75	11	1011

Διαδικασία Κβάντισης

Q στάθμες κβάντισης $m_1, m_2, \ldots, m_Q$

Μέγιστο Σφάλμα ομοιόμορφης κβάντισης: $\dfrac{\Delta}{2}$

Αριθμός σταθμών κβάντισης:

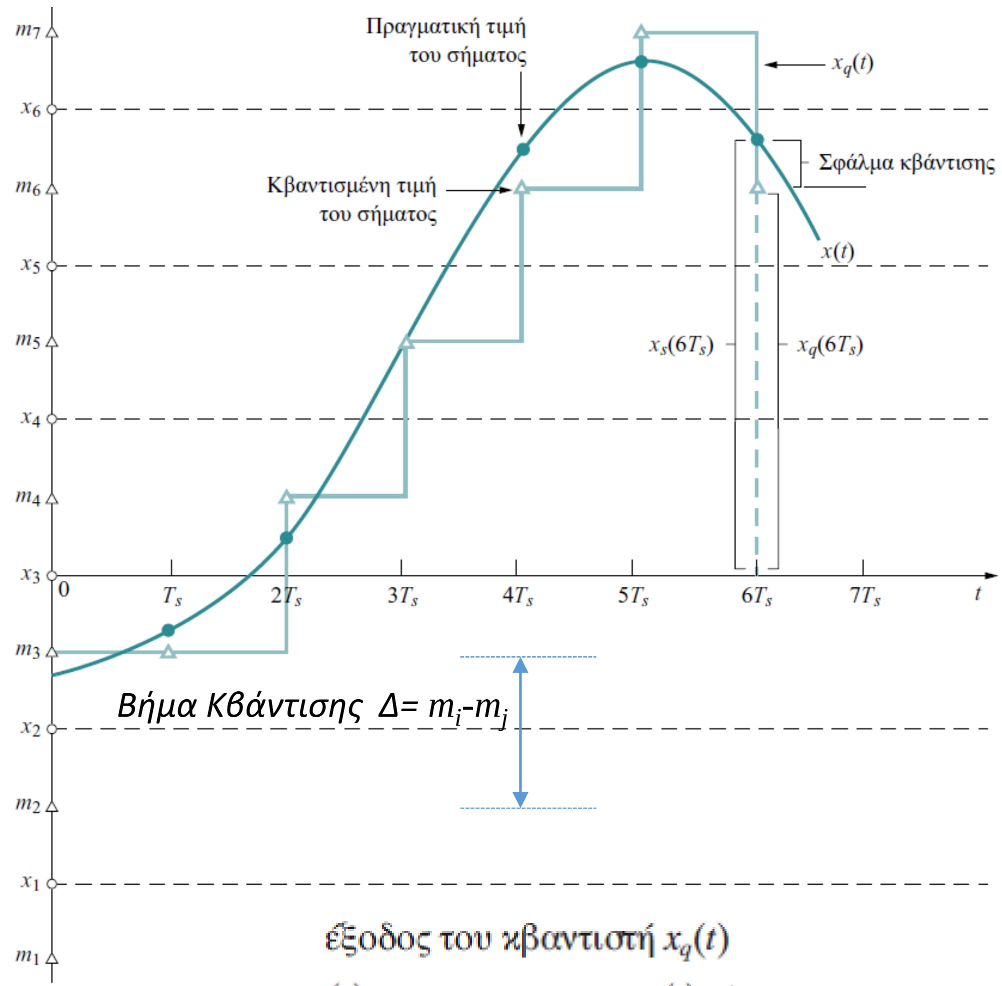
$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{\Delta} = \frac{V_{p-p}}{\Delta}$$

Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης:

$$SNR_q = 10\log_{10}\left(Q^2\right)$$

Αριθμός απαιτούμενων δυαδικών bits ανά στάθμη κβάντισης:

$$n = \left\lceil \log_2(Q) \right\rceil$$



έξοδος του κβαντιστή $x_q(t)$

$$x_q(t) = m_i \quad \text{αν} \quad x_{i-1} < x(t) \leq x_i$$

Εύρος Ζώνης PCM

εάν f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας,

τότε ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας θα είναι ίσος με $\boxed{f_s \log_2 L \text{ bits/sec.}}$

Όμως

στα δυαδικά συστήματα τα κανάλια βασικής ζώνης μπορούν να μεταφέρουν μέχρι

$$\boxed{2 \text{ bits/sec/Hz,}}$$

Άρα

το απαιτούμενο εύρος ζώνης, B_{PCM}, του σήματος PCM εκφράζεται

από τον τύπο

$$\boxed{B_{\mathrm{PCM}} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L}$$

Τυχαία Σήματα και Μέσες Τιμές

Αν το αναλογικό σήμα είναι τυχαίο με πεδίο τιμών [a,b] και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) που δίνεται από την $f(x)$, τότε η μέση τιμή του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}[\mathrm{x}] = \int_a^b x f(x) dx$$

Αντίστοιχα η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}[x^2] = \int_a^b x^2 f(x) dx$$

Παράδειγμα Υπολογισμού Μέσης Τιμής

Δίνεται το σήμα x(t) που σε κάθε χρονική στιγμή είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα [-V, V]. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος.
<u>Υπόδειξη</u>: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η f(x)=1/2V ώστε όταν ολοκληρωθεί στο διάστημα [-V, V] να δώσει την ολική πιθανότητα, δηλαδή 1.

$$\mathrm{E[x]} = \int_{-V}^{\mathrm{V}} x f(x) dx = \int_{-V}^{\mathrm{V}} x \frac{1}{2V} dx = \frac{1}{2V} \int_{-V}^{\mathrm{V}} x dx$$
$$= \frac{1}{2V} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-V}^{V} = \frac{1}{2V} \left[\frac{V^2}{2} - \frac{(-V)^2}{2} \right] = 0$$

Η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος υπολογίζεται ως εξής

$$\mathrm{E}[x^2] = \int_{-V}^{\mathrm{V}} x^2 f(x) dx = \int_{-V}^{\mathrm{V}} x^2 \frac{1}{2V} dx = \frac{1}{2V} \int_{-V}^{\mathrm{V}} x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2V} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-V}^{V} = \frac{1}{2V} \left[\frac{V^3}{3} - \frac{(-V)^3}{3} \right] = \frac{1}{2V} \frac{2V^3}{3} = \frac{V^2}{3}$$

Εφαρμογή στον Κβαντισμό

Για τον υπολογισμό του λόγου της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου κβαντισμού (SNR) χρειαζόμαστε στον αριθμητή την ισχύ του σήματος (μέση τετραγωνική τιμή του σήματος) και στον παρονομαστή το μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού,

που ισούται με: $\mathrm{E}\left[\left(x - x_q\right)^2\right] = \frac{\Delta^2}{12}$

όπου Δ είναι το εύρος της ζώνης κβαντισμού.

Στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 4.7 του Τόμου Β’, Μέρος Α’, αποδεικνύεται ότι αν ένα τυχαίο σήμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο πεδίο τιμών, ο λόγος SNR (συμβολίζεται και ως SQNR σε κάποια βιβλία) δίνεται από τη σχέση

$$SNR\ (dB) = 10log_{10}L^2 = 20log_{10}L$$

Τυπολόγιο-Ασκήσεις

Διαμόρφωση PCM

Δειγματοληψία → διακριτοποίηση πεδίου χρόνου (ορισμού) χρονικά δείγματα

Κβάντιση → διακριτοποίηση πεδίου τιμών (στάθμες κβάντισης)

Κωδικοποίηση → Αποτύπωση σταθμών κβάντισης με δυαδικά bits

Υπόθεση: Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_s \ \frac{\text{samples}}{\text{sec}}$

Πλήθος σταθμών κβάντισης: L

$\Rightarrow$ bits / στάθμη κβάντισης: $\eta = \lceil \log_2 L \rceil \ \frac{\text{bits}}{\text{sample}}$

$\Rightarrow$ Ρυθμός Μετάδοσης Δειγματισμένου σήματος (PCM) $f_s \ \frac{\cancel{\text{samples}}}{\text{sec}} \cdot \lceil \log_2 L \rceil \ \frac{\text{bits}}{\cancel{\text{sample}}}$

Δυαδικά Συστήματα: μεταφορά $2 \ \frac{\text{bits/sec}}{\text{Hz}}$ στο κανάλι βασικής ζώνης

$\Rightarrow$ Εύρος ζώνης PCM σήματος: $B_{PCM} = \frac{1}{2} f_s \cdot \log_2 L \ \text{Hz}$

Σηματοθορυβικός λόγος Κβάντισης (ομοιόμορφη κβάντιση) $SQNR = 10\log_{10} L^2 = 20\log_{10} L$

ΕΞ2018Α

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το σήμα $x(t) = 200\sin c(200t) + 100\sin c^2(100t)$.

1) Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του x(t) και να δοθούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

2) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον πλάτους 2V και συχνότητας 1000Hz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

3) Το x(t) δειγματίζεται με κατάλληλη συχνότητα f_δ και διέρχεται από κατάλληλο ζωνοπερατό φίλτρο με την ελάχιστη δυνατή ζώνη διέλευσης και με χαμηλή συχνότητα αποκοπής ίση με f_{low}=100Hz, ώστε να προκύψει φάσμα πανομοιότυπο με αυτό της απάντησης του ερωτήματος (β). Να υπολογιστούν η συχνότητα δειγματοληψίας f_δ, καθώς και η κρουστική απόκριση και η συνάρτηση μεταφοράς (απόκριση συχνότητας) του φίλτρου.

4) Το x(t) θα μεταδοθεί με διαμόρφωση PCM, με συχνότητα δειγματοληψίας 10πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και με ομοιόμορφη κβάντιση χρησιμοποιώντας 15 ψηφία ανά δείγμα. Να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος καθώς και ο σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης.

(α)

$$x(t)=200\sin c(200t)+100\sin c^{2}\left(100t\right)\xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{200}\right)+tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Μέγιστη συχνότητα: 100Hz

Ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min}=200Hz$

και περίοδος δειγματοληψίας Ts = 1/200

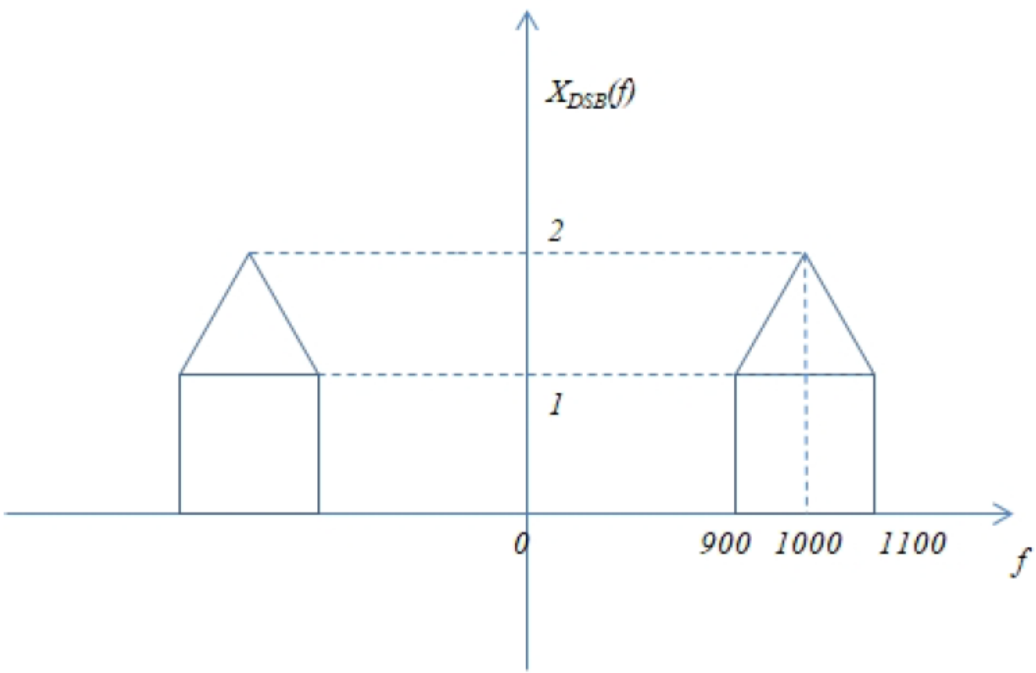
$$x_s\left(n\right)=\underset{t=nT_s}{x(t)}=200\sin c(200n\frac{1}{200})+100\sin c^{2}\left(100n\frac{1}{200}\right), n \text{ ακέραιος}$$

$$X_s\left(f\right)=200\sum_{m=-\infty}^{\infty}X\left(f-mf_s\right)=200\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{rect\left(\frac{f-m200}{200}\right)+tri\left(\frac{f-m200}{100}\right)\right\}$$

(β)

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cdot 2\cos(2\pi 1000t) \xleftrightarrow{F} X(f-1000) + X(f+1000) =$$

$$= rect\left(\frac{f-1000}{200}\right) + tri\left(\frac{f-1000}{100}\right) + rect\left(\frac{f+1000}{200}\right) + tri\left(\frac{f+1000}{100}\right)$$



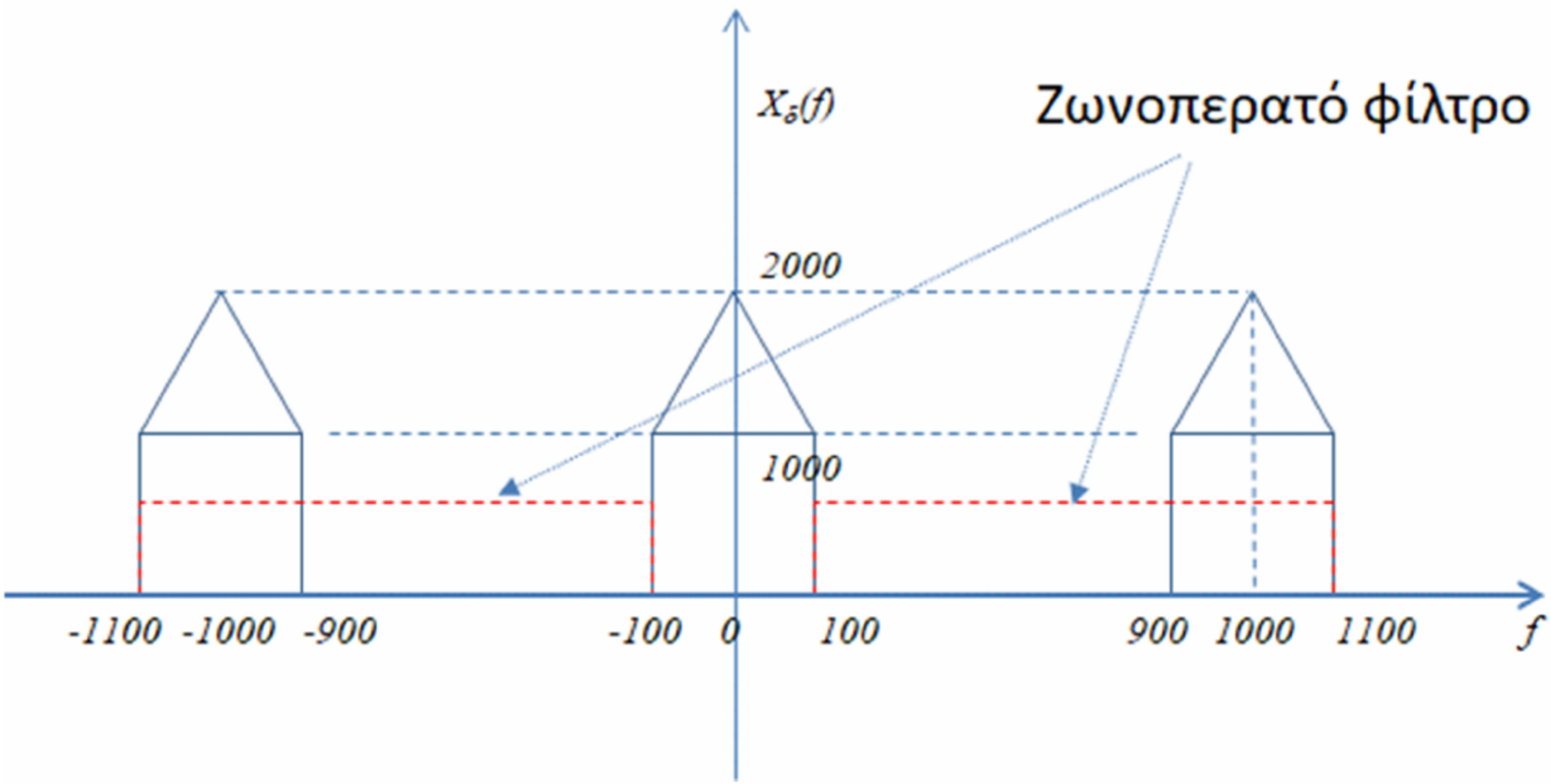
(γ)

Η συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι ίση με 1000 Hz

Το φάσμα του δειγματισμένου σήματος θα ισούται με:

$$X_\delta(f) = 1000 \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m1000) = 1000 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ rect\left(\frac{f - m1000}{200}\right) + tri\left(\frac{f - m1000}{100}\right) \right\}$$

Για να προκύψει το ζητούμενο φάσμα θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ζωνοπερατό φίλτρο με συχνότητες αποκοπής 100Hz, 1100Hz και πλάτος 1/1000.



Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(f)=\frac{1}{1000}\left\{rect\left(\frac{f-600}{1000}\right)+rect\left(\frac{f+600}{1000}\right)\right\}$$

και η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t)=\frac{1}{1000}\left\{e^{j2\pi 600t}1000\sin c(1000t)+e^{-j2\pi 600t}1000\sin c(1000t)\right\}=\frac{1}{1000}1000\sin c(1000t)2\cos(2\pi 600t)=2\sin c(1000t)\cos(2\pi 600t)$$

(δ)

Εύρος ζώνης PCM: $W=\frac{1}{2}10\cdot 200\frac{samples}{\sec}\cdot 15\frac{bits}{sample}=15KHz$

Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης: $SNR_q=20\log_{10}(L)=20\log_{10}(2^{15})=90.39dB$

ΘΕΜΑ 2

ΕΞ 2014 /Θ2

Δίνεται το σήμα $X(f) = rect\left(\frac{f}{4a}\right)$.

α) Να προσδιοριστούν για το σήμα $y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right)$, οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου $y_\delta(n)$. *(5 μονάδες)*

β) Να εξηγήσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και να υπολογιστούν οι περίοδοι (αν υπάρχουν)

i) *y(t)* και *(3 μονάδες)*

ii) $z(t) = \dfrac{\Im^{-1}\left\{X(f) * \left[\delta(f-20) + \delta(f+20)\right]\right\}}{2a\pi \sin c(4at)}$, *(7 μονάδες)*

(όπου με $\Im^{-1}\{\ \}$ εννοείται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier και με '*' εννοείται η πράξη της συνέλιξης).

γ) Προκειμένου να μεταδοθούν τα σήματα *y(t)* και z*(t)* κάθε ένα θα υποστεί δειγματοληψία σε ρυθμό Nyquist, θα κωδικοποιηθεί κατά PCM με 8 bits και κατόπιν θα μεταδοθούν και τα δύο με πολυπλεξία FDMA. Να υπολογιστεί το συνολικό απαιτούμενο εύρος ζώνης αν *α=10*. *(5 μονάδες)*

α)

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{4a}\right) \leftrightarrow 4a\sin c(4at) = x(t)$$

$$y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right) = 4a\sin c(4at) + \frac{1}{2}4a\sin c(4a\frac{t}{2}) = 4a\sin c(4at) + 2a\sin c(2at)$$

$$y(t) = 4a\sin c(4at) + 2a\sin c(2at) \leftrightarrow rect\left(\frac{f}{4a}\right) + rect\left(\frac{f}{2a}\right) = Y(f)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα δύο σημάτων βασικής ζώνης με εύρος 4a ($f_{max}=2a$) και 2a ($f_{max}=a$) αντίστοιχα. Άρα $f_{max}=2a$ και επομένως η συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist είναι $f_{s,min}=4a$.

Άρα το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου $y_\delta(n)$ είναι:

$$y_\delta(n) = \underset{t=nT_s}{y(t)} = 4a\sin c(4an\frac{1}{f_{s,\min}}) + 2a\sin c(2an\frac{1}{f_{s,\min}}) =$$

$$= 4a\sin c(4an\frac{1}{4a}) + 2a\sin c(2an\frac{1}{4a}) =$$

$$= 4a\sin c(n) + 2a\sin c(\frac{n}{2})$$

β)

(i) Το σήμα *y(t)* δεν είναι περιοδικό γιατί το φάσμα του είναι συνεχές

(ii)

$$z(t)=\frac{\Im^{-1}\left\{X(f)*\left[\delta(f-20)+\delta(f+20)\right]\right\}}{2a\pi\sin c(4at)}=\frac{x(t)2\cos(2\pi 20\tau)}{2a\pi\sin c(4at)}= \qquad \text{(A)}$$

$$=\frac{4a\sin c(4at)2\cos(2\pi 20t)}{2a\pi\sin c(4at)}\Leftrightarrow z(t)=\frac{4}{\pi}\cos(2\pi 20t)$$

Άρα το σήμα αυτό είναι περιοδικό με περίοδο 1/20 sec.

γ)

Σύφωνα με την ανάλυση στο ερώτημα 1), η συχνότητα δειγματοληψίας για το *y(t)* είναι $f_{s,min}=4a$ *samples/sec*.

Το αντίστοιχο εύρος ζώνης θα είναι

$$\frac{1}{2} f_{s,\min} N = \frac{1}{2} 4a \cdot 8 = 16a \,\mathrm{Hz}$$

Από την (Α) βλέπουμε ότι

$Z(f) = \frac{2}{\pi}\left(\delta(f-20)+\delta(f+20)\right)$, άρα η συχνότητα δειγματοληψίας για το z*(t)* είναι $f'_{s,min}=40Hz$. Το αντίστοιχο εύρος ζώνης θα είναι

$$\frac{1}{2} f'_{s,\min} N = \frac{1}{2} 40 \cdot 8 = 160 \,\mathrm{Hz}$$

Επομένως συνολικά απαιτείται εύρος ζώνης 16α+160=320 Hz.

Συνδυαστική άσκηση

ΕΞ 2015Α /Θ1

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογίσετε τις τιμές του α>0 για τις οποίες ισχύει η κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Το σήμα $\cos(2\pi at)+\sin(2\pi f_2 t)$ είναι περιοδικό. ***(3 μονάδες)***

β) Το σήμα $\cos(2\pi f_1 t) * a\sin c(at)$ είναι περιοδικό. ***(3 μονάδες)***

γ) Ισχύει ότι $a\sin c(at) * g(t) = g(t)$ όπου $g(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} G(f)$ και $\begin{matrix} G(f)>0, |f|<60 \\ G(f)=0, |f|>60 \end{matrix}$ ***(4 μονάδες)***

δ) Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist του $x(t)=a\sin c(at)\cdot 100a\sin c^2(100at)$ είναι 804Hz. ***(6 μονάδες)***

ε) Το εύρος ζώνης του σήματος που προκύπτει από διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από σήμα πληροφορίας $x(t)=a\sin c^3(100t)$ με k_f=50π είναι 600Hz. ***(6 μονάδες)***

[<u>Υπόδειξη :</u> ο τελεστής $*$ αντιστοιχεί σε συνέλιξη]

(Σύνολο μονάδων 22)

(α) Για το $\cos(2\pi a t)+\sin(2\pi f_2 t)$ έχουμε

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{f_2}}=\frac{f_2}{a}$$

Το σήμα θα είναι περιοδικό αν ο λόγος των περιόδων είναι ρητός δηλ.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{f_2}}=\frac{f_2}{a}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow a=\frac{n}{m}f_2$$

(β) Έχουμε:

$\cos(2\pi f_1 t) * a\sin c(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\right]\cdot rect\left(\frac{f}{a}\right)$ δηλ. διέλευση ενός τόνου από βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής α/2.

Για να είναι περιοδικό το $\cos(2\pi f_1 t)\cdot a\sin c(at)$ θα πρέπει η συχνότητα f_1 να είναι μικρότερη από το εύρος ζώνης του φίλτρου δηλ $f_1 \le \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \ge 2f_1$

(γ) $a\sin c(at) * g(t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{a}\right)G(f)$ δηλ. διέλευση του φάσματος G(f) από βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής α/2.

$rect\left(\frac{f}{a}\right)G(f) = G(f)$ δηλ. το G(f) διέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο εφόσον $\frac{a}{2} \geq 60 \Leftrightarrow a \geq 120$

(δ) Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist του $x(t)=a\sin c(at)\cdot 100a\sin c^2(100at)$ είναι 804Hz

Είναι

$$x(t)=a\sin c(at)\cdot 100a\sin c^2(100at)\xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{a}\right)*tri\left(\frac{f}{100a}\right)=X(f)$$

Η μέγιστη συχνότητα της συνέλιξης των 2 φασμάτων αντιστοιχεί στο άθροισμα των επιμέρους μέγιστων συχνοτήτων , δηλ. $f_{\max}=\frac{a}{2}+100a=\frac{201a}{2}$

Συνεπώς, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,\min}=2\frac{201a}{2}=201a=804\Leftrightarrow a=4$

(ε) $x(t)=a\sin c^3(100t)=a\cdot \mathrm{sinc}(100t)\mathrm{sinc}^2(100t)\xleftrightarrow{F} a\frac{1}{100}rect\left(\frac{f}{100}\right)*\frac{1}{100}tri\left(\frac{f}{100}\right)$

Μέγιστο πλάτος : α

Εύρος ζώνης: 50+100=150Hz

Μέγιστη απόκλιση συχνότητας $\Delta f_{\max}=\frac{k_f}{2\pi}\max\left(|x(t)|\right)=\frac{50\pi}{2\pi}\alpha=25\alpha Hz$

και ο λόγος απόκλισης είναι

$$D=\frac{25a}{150}=\frac{a}{6}$$

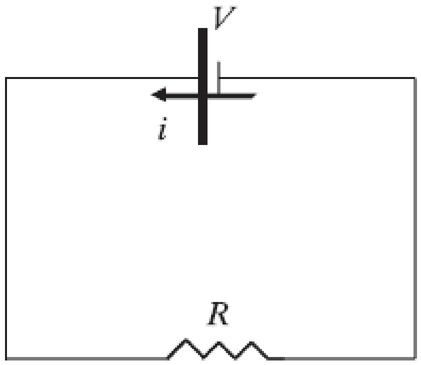
Άρα με βάση τον κανόνα Carson έχουμε:

$$W=2\left(\frac{a}{6}+1\right)\cdot 150\ Hz=600\ Hz\Leftrightarrow \frac{a}{6}+1=2\Leftrightarrow a=6$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (1)

2.4.1 Στιγμιαία ισχύς/ενέργεια

Θεωρούμε καταρχήν το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος:



Σχήμα 2.27

Ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος

Υποθέτουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση V είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το χρόνο. Η ισχύς που παράγεται στο κύκλωμα και καταναλώνεται στην αντίσταση ισούται με:

$$P = V \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (2)

Και η αντίστοιχη ενέργεια που έχει παραχθεί στο κύκλωμα και έχει καταναλωθεί στην αντίσταση σε χρόνο t ισούται με το γινόμενο της ισχύος επί τον αντίστοιχο χρόνο, δηλαδή:

$$E(t) = P \cdot t = V \cdot i \cdot t = i^2 \cdot R \cdot t = \frac{V^2}{R} \cdot t$$

Οι μονάδες ισχύος είναι τα Watt (1W = 1Joule/sec) και ενέργειας είναι τα Joule ή οι Wh ($1\text{Wh} = 1\text{Watt} \times 1\text{hour} = 1\frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \times 3.600\,\text{sec} = 3.600\text{Joule}$)

Εάν στο παραπάνω σχήμα υποθέσουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε οι ανωτέρω σχέσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R = \frac{V^2(t)}{R}$$

$$E(t) = \int_0^t P(t) \cdot dt = \int_0^t V(t) \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^t i^2(t) \cdot R \cdot dt = \int_0^t \frac{V^2(t)}{R} \cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (3)

Για τηλεπικοινωνιακά συστήματα θεωρούμε ότι $R = 1\Omega$, οπότε το τηλεπικοινωνιακό σήμα $x(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί εξίσου με την εφαρμοζόμενη τάση ή το ρεύμα στις ανωτέρω σχέσεις, οι οποίες μετασχηματίζονται ως εξής:

Στιγμιαία ισχύς πραγματικού σήματος $P(t) = x^2(t)$

Ενέργεια πραγματικού σήματος $E(t) = \int_0^t x^2(t) \cdot dt$

Προκειμένου οι ανωτέρω ορισμοί να ισχύουν και για μιγαδικά σήματα $x(t)$ (των οποίων η ισχύς εξαρτάται μόνο από το μέτρο τους), οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

Στιγμιαία ισχύς σήματος $P(t) = |x(t)|^2$

Ενέργεια σήματος $E(t) = \int_0^t |x(t)|^2 \cdot dt$

Σημείωση: Για πραγματικά σήματα $x(t)$ ισχύει ότι $|x(t)|^2 = x^2(t)$.

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (4)

2.4.2 Μέση ισχύς

Γενικά, για ένα μέγεθος $m(t)$ που μεταβάλλεται με το χρόνο, η χρονική μέση τιμή του μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ($t_1 < t_2$) ορίζεται ως:

$$\overline{m(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} m(t) \cdot dt$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να εκφράσουμε τη μέση ισχύ ενός σήματος $x(t)$ λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή του καθ' όλη τη διάρκειά του (ή ισοδύναμα από $-\infty$ έως $+\infty$) ως εξής:

$$\overline{P(t)} = P_x = \lim_{(t_2 - t_1) \to \infty} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt \right\} \overset{\substack{t_1 \to -T \\ t_2 \to T}}{=} \lim_{T \to \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt \right\}$$

Αντίστοιχα, η ενέργεια αυτού του σήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$E_x = \lim_{(t_2 - t_1) \to \infty} \left\{ (t_2 - t_1) \cdot P_x \right\} = \lim_{(t_2 - t_1) \to \infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 \cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (5)

2.4.3 Σήματα ενέργειας – ισχύος

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$0 < E_x < +\infty$$

ονομάζονται ενεργειακά. Παραδείγματα σημάτων ενέργειας είναι διάφοροι παλμοί (τετραγωνικός, τριγωνικός), δηλαδή σήματα πεπερασμένης διάρκειας. Τα σήματα αυτά έχουν μηδενική ισχύ.

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ

$$0 < P_x < +\infty$$

ονομάζονται σήματα ισχύος. Παραδείγματα σημάτων ισχύος είναι τα περιοδικά και τα σήματα άπειρης διάρκειας (π.χ. το σήμα $x(t) = c,\ 0 < t < +\infty$). Τα σήματα αυτά έχουν άπειρη ενέργεια.

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (6)

2.4.4 Ταυτότητα Parseval – Μέση ισχύς περιοδικών σημάτων

Για τα περιοδικά σήματα η σχέση υπολογισμού της μέσης ισχύος μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

Έστω σήμα $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 τέτοια ώστε να ισχύει $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$x(t+nT_0) = x(t),\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Στον υπολογισμό της μέσης ισχύος μπορούμε να περιορίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στη διάρκεια μιας περιόδου:

$$P_x = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\cdot dt\right\} \overset{t_2\to t_1+nT_0}{=} \lim_{nT_0\to\infty}\left\{\frac{1}{nT_0}\int_{t_1}^{t_1+nT_0}|x(t)|^2\cdot dt\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{nT_0}\left[n\int_{t_1}^{t_1+T_0}|x(t)|^2\cdot dt\right]\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}|x(t)|^2\cdot dt\right\} = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}|x(t)|^2\cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (7)

Για τα περιοδικά σήματα που γράφονται με τη μορφή μιγαδικής σειράς Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft} \text{ , όπου } V_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi nft}dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)e^{-j2\pi nft}dt$$

και έχουν ΜΣ Fourier:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cdot \delta(f - nf_0)\, ,\ f_0 = \frac{1}{T_0}$$

η μέση ισχύς μπορεί να γραφεί ως:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \left|x(t)\right|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)\cdot x^*(t)\cdot dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{V_n^* \cdot V_n\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|V_n\right|^2$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται ταυτότητα Parseval για περιοδικά σήματα.

Δηλαδή, βρίσκοντας την έκφραση του περιοδικού σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέση ισχύ του υπολογίζοντας το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών των όρων που περιλαμβάνει το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων.

Παράδειγμα (1)

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

Α΄ τρόπος: Υπολογισμοί με ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Το $x(t)$ έχει περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Η μέση ισχύς, σύμφωνα με την παραπάνω ενότητα, θα ισούται με:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |A_0 \cos(2\pi f_0 t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} [A_0 \cos(2\pi f_0 t)]^2 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t) \cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(2\pi f_0 t) \cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2} \cdot dt =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0} \left[\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1}{2} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2} \cdot dt \right] = \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{1}{2} [t]_{t_1}^{t_1+T_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} (\sin(4\pi f_0 t))' \cdot dt \right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{1}{2} [t_1 + T_0 - t_1] + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 t)]_{t_1}^{t_1+T_0} \right] =$$

$$\frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 (t_1 + T_0)) - \sin(4\pi f_0 (t_1))] \right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \left[\sin\left(4\pi f_0 t_1 + 4\pi f_0 \frac{1}{f_0}\right) - \sin(4\pi f_0 t_1) \right] \right] = \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} + 0 \right] = \frac{A_0^2}{2}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Παράδειγμα (2)

Β΄ τρόπος: Υπολογισμοί από τη σειρά Fourier – με την ταυτότητα Parseval

Το $x(t)$ μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς Fourier με τη χρήση της σχέσης Euler:

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{A_0}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Επίσης, ο ΜΣ Fourier του $x(t)$ ισούται με: $X(f) = \frac{A_0}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2}\delta(f + f_0)$

οπότε η μέση ισχύς υπολογίζεται (με χρήση της ταυτότητας Parseval) ως εξής:

$$P_x = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{A_0^2}{4} + \frac{A_0^2}{4} = \frac{A_0^2}{2}.$$

Μέσα μετάδοσης – Κανάλι - Θόρυβος

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (1)

- Κάθε πληροφορία, προκειμένου να μεταδοθεί από την πηγή στον προορισμό της, πρέπει να χρησιμοποιήσει ένα ελαστικό μέσο, το μέσο μετάδοσης.
- Κάθε πηγή εκπέμπει σε ορισμένες συχνότητες, οι οποίες καθορίζουν τη ζώνη εκπομπής ή φάσμα (spectrum): η μέγιστη και ελάχιστη συχνότητα που μπορεί να εκπέμψει).
    - Spectrum σήματος: Το εύρος των συχνοτήτων που περιέχει το σήμα
- Εύρος ζώνης (bandwidth): Το «μέγεθος» του spectrum
    - Εύρος ζώνης= Μέγιστη Συχνότητα – Ελάχιστη Συχνότητα
- Εύρος ζώνης και μέσο μετάδοσης
    - Κάθε μέσο μετάδοσης είναι κατάλληλο για συγκεκριμένα εύρη (ώστε το σήμα να μεταδίδεται ικανοποιητικά – χωρίς σημαντικά σφάλματα)

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (2)

- Κατά τη μετάδοση φωνής (και δεδομένων) στο τηλεφωνικό δίκτυο, τα τηλεφωνικά καλώδια χαλκού υποστηρίζουν συχνότητες από 300 ως 3.300 Hz, Εύρος ζώνης = 3 KHz.
- Εύρος ζώνης και Ρυθμός Μετάδοσης
  - Το Εύρος Ζώνης σχετίζεται άμεσα με την «ποσότητα» πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διατρέχει το μέσο.

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (3)

- Το φυσικό μέσο μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών σημάτων / η ζεύξη μεταξύ πομπού και δέκτη
- Τύποι καναλιών
  - Ενσύρματα : Καλώδια Χαλκού
  - Ενσύρματα : Οπτικές Ίνες
  - Ασύρματα : Αέρας, Κενό
- Προβλήματα
  - περιορισμένο εύρος ζώνης
  - παραμόρφωση πλάτους ή και φάσης
  - χρονική μεταβολή
  - θόρυβος
  - πολυδιαδρομική (multi-path) μετάδοση και διαλείψεις

Κανάλι Μετάδοσης (1)

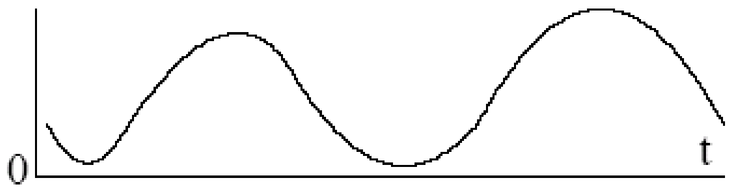
- Χαρακτηριστικά καναλιού
  - Διαθέσιμο Εύρος ζώνης συχνοτήτων
  - Απόκριση πλάτους και φάσης
  - Ευαισθησία σε θόρυβο
- Επηρεάζουν
  - Μέγιστο ρυθμό μετάδοσης
  - Εξασθένιση σήματος - μέγιστη απόσταση
  - Παραμόρφωση πλάτους, φάσης
  - Πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος

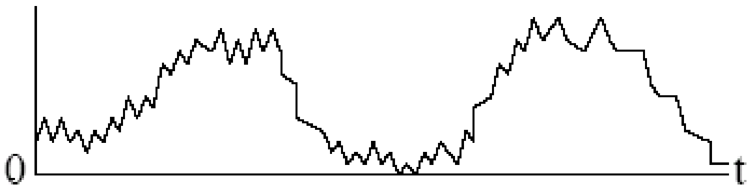
Κανάλι Μετάδοσης (2)

- Κάθε κανάλι αλλοιώνει τα μεταδιδόμενα σήματα
  - Εξασθένιση: Είναι η απώλεια της ισχύος καθώς το σήμα διαδίδεται και μετράται σε dB. Ο λογαριθμικός λόγος της ισχύς του σήματος εισόδου προς την έξοδο 10log(Pout/Pin)
    - Στα ενσύρματα μέσα το σήμα εξασθενεί λογαριθμικά με την απόσταση
    - Η απώλεια εκφράζεται σε decibel ανά χιλιόμετρο
    - Η ποσότητα της απωλεσθείσας ισχύος εξαρτάται από τη συχνότητα
    - Εάν η εξασθένιση είναι πολύ μεγάλη ο δέκτης πιθανόν να μη μπορεί να ανιχνεύσει το σήμα
  - Παραμόρφωση καθυστέρησης: Προκαλείται από το γεγονός οτι διαφορετικές συνιστώσες οδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες

Κανάλι Μετάδοσης (3)

- Εισαγωγή θορύβου
  - Εσωτερικός θόρυβος (π.χ, θερμικός θόρυβος ηλεκτρονικών κυκλωμάτων)
  - Εξωτερικός θόρυβος (π.χ, παρεμβολές, κοσμική ακτινοβολία)
  - Επίδραση του θορύβου στην ισχύ του σήματος-Signal-to-Noise Ratio: SNR=(Average Signal Power/Noise Power)=10log(P/N)





Κανάλι Μετάδοσης (4)

- Τα τηλεπικοινωνιακά σήματα μεταδίδονται δια μέσου του αέρα με τη χρήση κεραίας κατάλληλου μεγέθους
- Στο κενό όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα ανεξάρτητα από τη συχνότητα τους
  - Ισχύει η σχέση λ=c/f
  - c: ταχύτητα του φωτός 300000 Km/sec, λ: μήκος κύματος
- Η ποσότητα πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα σχετίζεται με το εύρος ζώνης του
- Για να αποτραπεί το πλήρες χάος, υπάρχουν διεθνείς συμφωνίες που αφορούν το ποιος χρησιμοποιεί ποιες συχνότητες
  - Οργανισμός ITU-R

Θόρυβος

- Ανεπιθύμητη ενέργεια που προέρχεται από πηγές εκτός πομπού
- Αφορά όλα τα συστήματα επικοινωνίας (Ασύρματα-Ενσύρματα)
- Εσωτερικός Θόρυβος
  - Θερμικός θόρυβος (thermal noise, white noise)
    - Κίνηση ηλεκτρονίων
  - Θόρυβος Ενδοδιαμόρφωσης (inter-modulation noise)
    - Συνύπαρξη σημάτων διαφορετικών συχνοτήτων στο ίδιο μέσο
  - Συνακρόαση (crosstalk)
    - Παρεμβολές μεταξύ μεταδόσεων κοντινών μεταξύ τους
  - Παλμικός θόρυβος (impulse)
    - Αστάθειες ηλεκτρικού ρεύματος
  - Εξωτερικοί Θόρυβοι
    - Βιομηχανικά και Ατμοσφαιρικά παράσιτα

Χωρητικότητα κατά Shannon

- Με δεδομένο έναν δίαυλο εύρους ζώνης B Hz και ένα σηματοθορυβικό λόγο (SNR) S/N, όπου S η ισχύς του σήματος και N η ισχύς του θορύβου, η χωρητικότητα (μέγιστος ρυθμός μετάδοσης) του διαύλου είναι

$$\boxed{C = B\log_2\left(1+SNR\right) \quad \left(bps\right)}$$

- Άρα για δίαυλο 4 kHz και S/N = 1000 (= 30 dB), ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί είναι $C = 4000 * \log_2(1+1000) \approx 40$ kbps

Ερωτήσεις