ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/2018-19

Σχόλια για τις λύσεις της 2ης εργασίας

Νίκος Δημητρίου

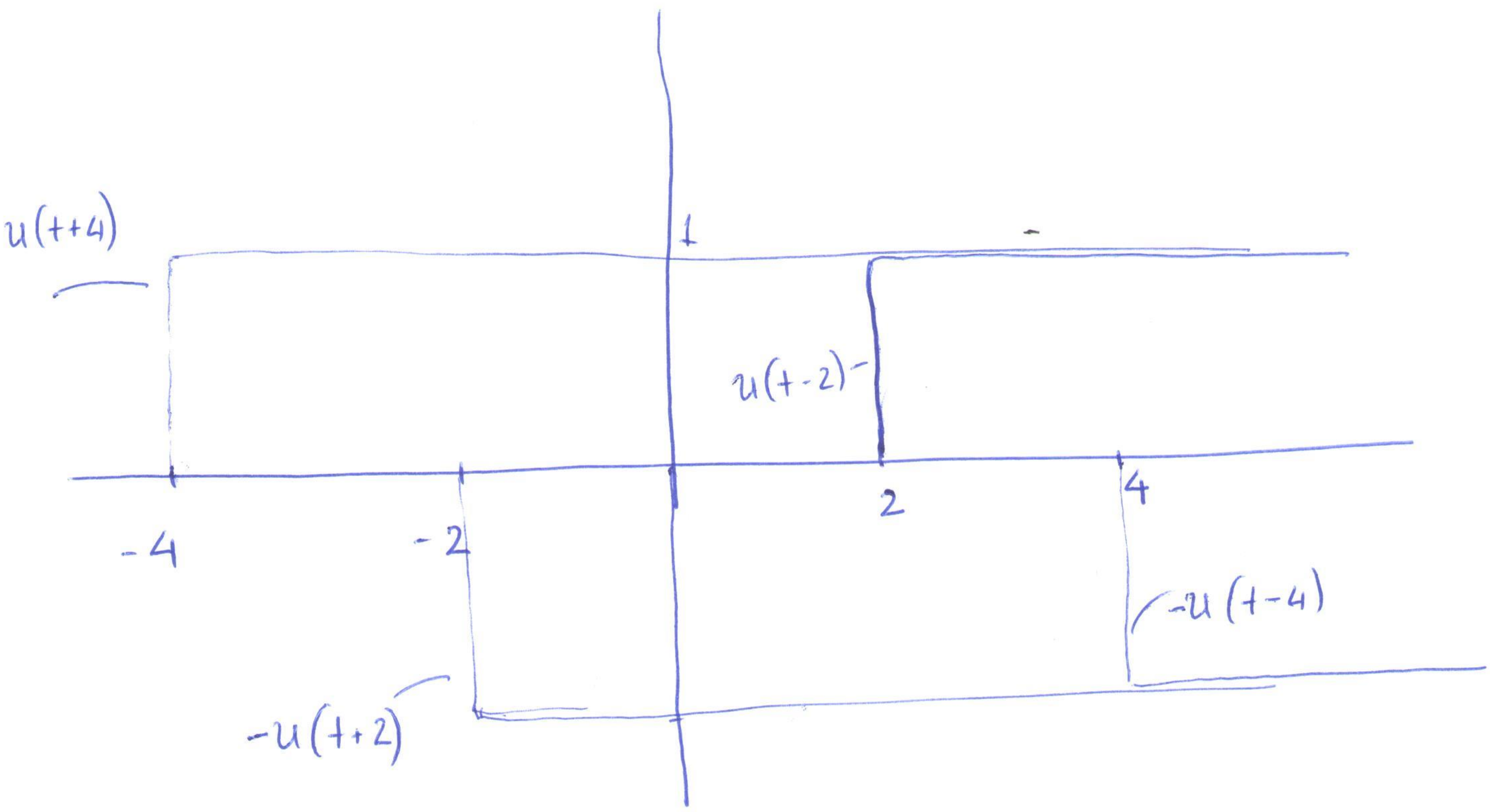
Σημείωση: Αυτές οι λύσεις είναι συμπληρωματικές των ενδεικτικών λύσεων που έχουν αναρτηθεί στο study.eap.gr και δεν έχουν σκοπό να τις υποκαταστήσουν.

Για κάθε θέμα παρατίθενται επεξηγηματικά σχόλια/εναλλακτικές λύσεις και -σε ορισμένα σημεία-περαιτέρω ανάλυση

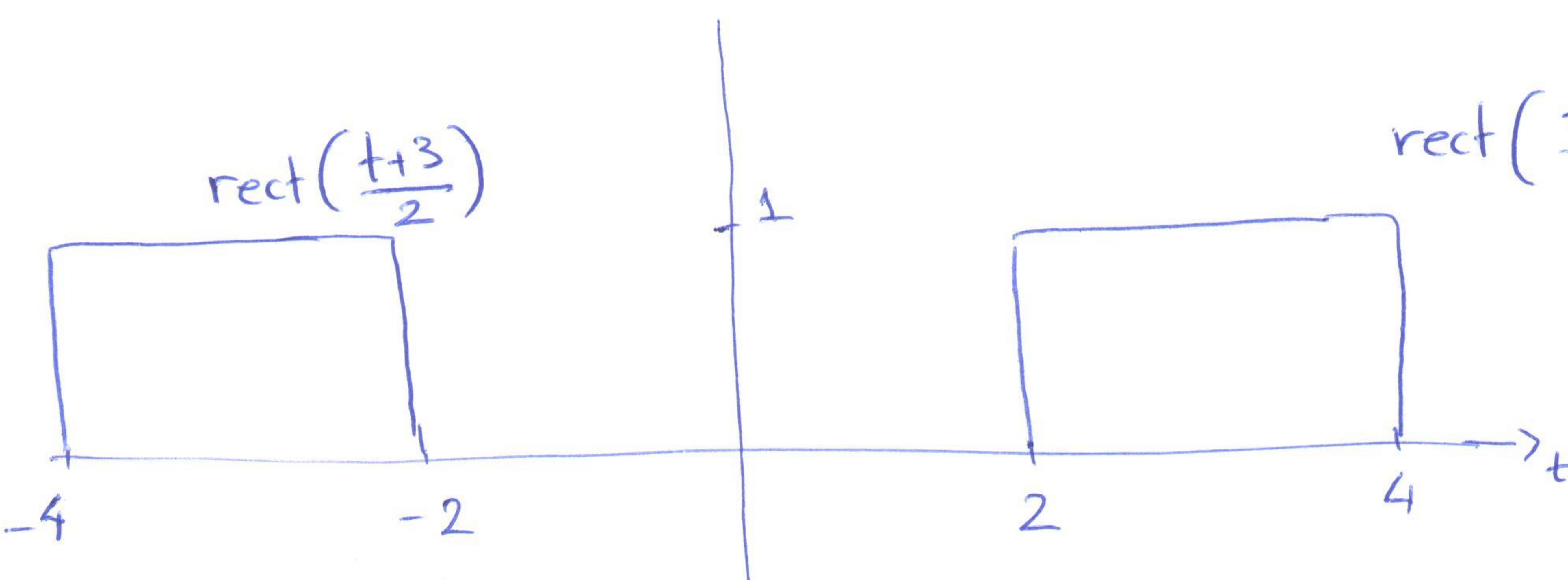
Θέμα 1

(α) $x(t) = u(t+4) - u(t+2) + u(t-2) - u(t-4)$

Αναπαριστούμε το $x(t)$ σε σχήμα



οπότε προκύπτει το παρακάτω σχήμα



Άρα $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$

Φάσμα πλάτους του $x(t)$.

Ισχύει ότι

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} sinc(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2sinc(2f) \Leftrightarrow$$ ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$\Leftrightarrow rect\left(\frac{t+3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi 3f} 2sinc(2f)$$ ιδιότητα χρονικής μετατόπισης

Αντίστοιχα $rect\left(\frac{t-3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi 3f} 2sinc\, 2f$.

Άρα $X(f) = e^{j2\pi 3f} 2sinc(2f) + e^{-j2\pi 3f} 2sinc(2f) =$

$$= 2\left(e^{j2\pi 3f} + e^{-j2\pi 3f}\right) sinc(2f)$$

Από σχέσεις Euler $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2\cos(\alpha)$$

Άρα,

$$X(f) = 2 \cdot 2\cos(2\pi 3f) \cdot sinc(2f) =$$

$$= 4\cos(6\pi f)\, sinc(2f)$$

(β) Δίνεται $y(t) = \underbrace{8\,\mathrm{sinc}\,8t}_{1\text{ος όρος}} - \underbrace{4\,\mathrm{sinc}(2t)\cos(6\pi t)}_{2\text{ος όρος}}$

Υπολογισμός $Y(f)$:

Για τον 1ο όρο: $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}(f) \Leftrightarrow 8\,\mathrm{sinc}(8t) \leftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{8}\right)$

Για το 2ο όρο:

1ος τρόπος

Από το (α) ερώτημα έχουμε

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} \underbrace{4\cos(6\pi f)\,\mathrm{sinc}(2f)}_{\text{ίδιος τύπος 2ου όρου με τον τύπο του } y(t)}$$

$4\,\mathrm{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$

Ιδιότητα Δυϊσμού:

Αν $x(t) \leftrightarrow G(f)$

Τότε $G(t) \leftrightarrow x(-f)$

Εφόσον $\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 4\cos(6\pi \underline{\underline{f}})\,\mathrm{sinc}(2\underline{\underline{f}})$

Θα έχουμε $4\cos(6\pi \underline{\underline{t}})\,\mathrm{sinc}(2\underline{\underline{t}}) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{-f+3}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{-f-3}{2}\right)$

λόγω της άρτιας συνάρτησης rect [$\mathrm{rect}(-x) = \mathrm{rect}(x)$]

Θα έχουμε τελικά

$$4\cos(6\pi t)\,\mathrm{sinc}(2t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{f-3}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

2ος τρόπος

4.

$$4\cos(6\pi t)\,\mathrm{sinc}(2t) =$$

$$= 4\cos(2\pi \cdot 3t)\cdot \mathrm{sinc}(2t)$$

Ισχύει (με βάση και όσα είδαμε στην ΟΣΣ3)

η σχέση

$$x(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\{X(f-f_0)+X(f+f_0)\}$$

(ιδιότητα μετατόπισης φάσματος - DSB διαμόρφωση)

$$4\cos(2\pi 3t)\cdot \mathrm{sinc}(2t)$$

$$= 2\cos(2\pi 3t)\cdot 2\,\mathrm{sinc}(2t)$$

Εφόσον $\mathrm{sinc}(t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f) \Rightarrow 2\,\mathrm{sinc}(2t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$

Τελικά θα έχουμε

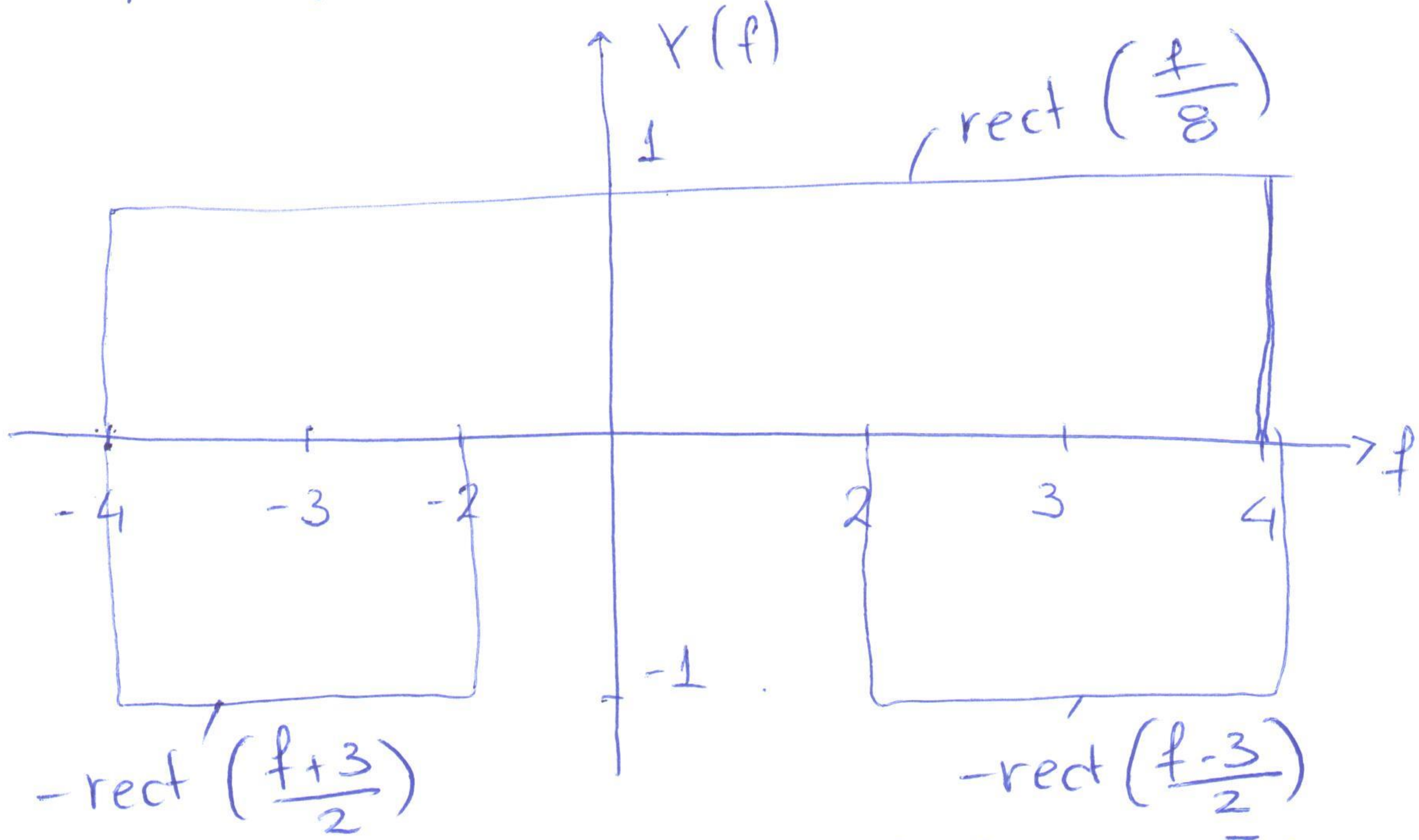
$$4\cos(2\pi 3t)\,\mathrm{sinc}(2t) \xleftrightarrow{F} \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{f+3}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f-3}{2}\right)\right\}$$

5.

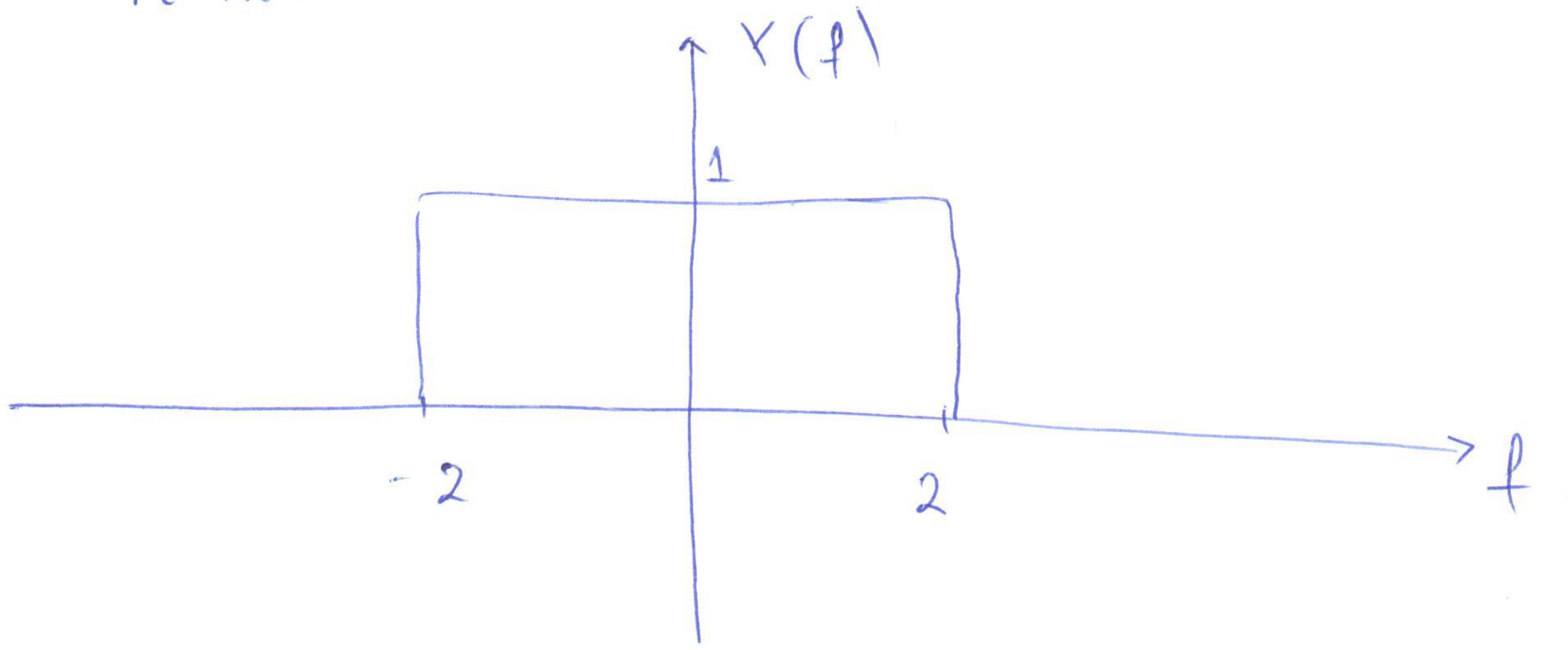
Συνολικά έχουμε

$$Y(f) = rect\left(\frac{f}{8}\right) - rect\left(\frac{f+3}{2}\right) - rect\left(\frac{f-3}{2}\right)$$

Απεικονίζουμε το σχήμα του φάσματος:



Τελικά απομένει ο παλμός μεταξύ -2,2 Hz



Άρα $Y(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right)$

(γ) $$z(t) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right]$$ 6.

Εφαρμογή ιδιότητας δυισμού

Γνωρίζουμε ότι
$$\cos(2\pi \underset{\#}{A} t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta(\underset{=}{f}-A)+\delta(\underset{=}{f}+A)\right]$$

Άρα θα ισχύει ότι
$$\frac{1}{2}\left[\delta(\underset{=}{t}-A)+\delta(\underset{=}{t}+A)\right] \overset{F}{\longleftrightarrow} \cos(2\pi A(-\underset{\#}{f})) =$$
$$= \cos(2\pi A f)$$

συνάρτηση cos() άρτια.

Συνεπώς (θέτοντας $A=\frac{1}{8}$)
$$Z(f) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{8} f\right)$$

φάσμα πλάτους συνεχές ⟹ σήμα όχι περιοδικό

Προσοχή! Δεν έχει σημασία που το φάσμα είναι συνημιτονοειδές, εφόσον είναι συνεχές δεν αντιστοιχεί σε περιοδικό σήμα.

Περιοδικά σήματα: Ιδιότητες
- Άπειρη Διάρκεια στο πεδίο του χρόνου
- Επανάληψη κυματομορφής στο πεδίο του χρόνου ανά T
  $x(t)=x(t+kT)$, k ακέραιος
- Διακριτό φάσμα πλάτους σε συχνότητες $f_i \cdot m_i$

(δ) i) $W(f) = Y(f) \cdot Z(f) =$

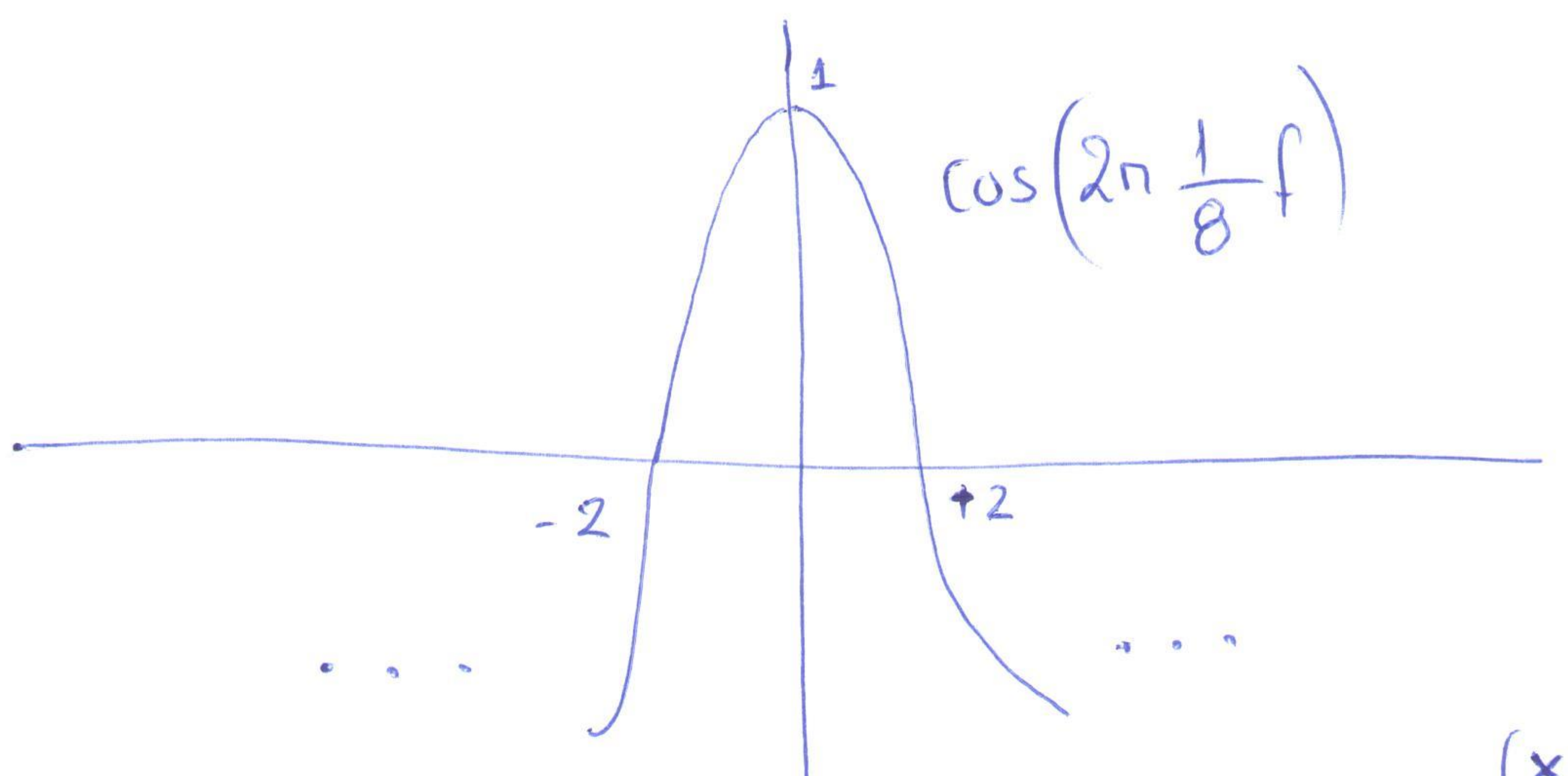
$$= \operatorname{rect}\left(\frac{f}{4}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$$

$\operatorname{rect}\left(\frac{f}{4}\right)$: μηδενίζεται στα $f = \pm 2\,Hz$

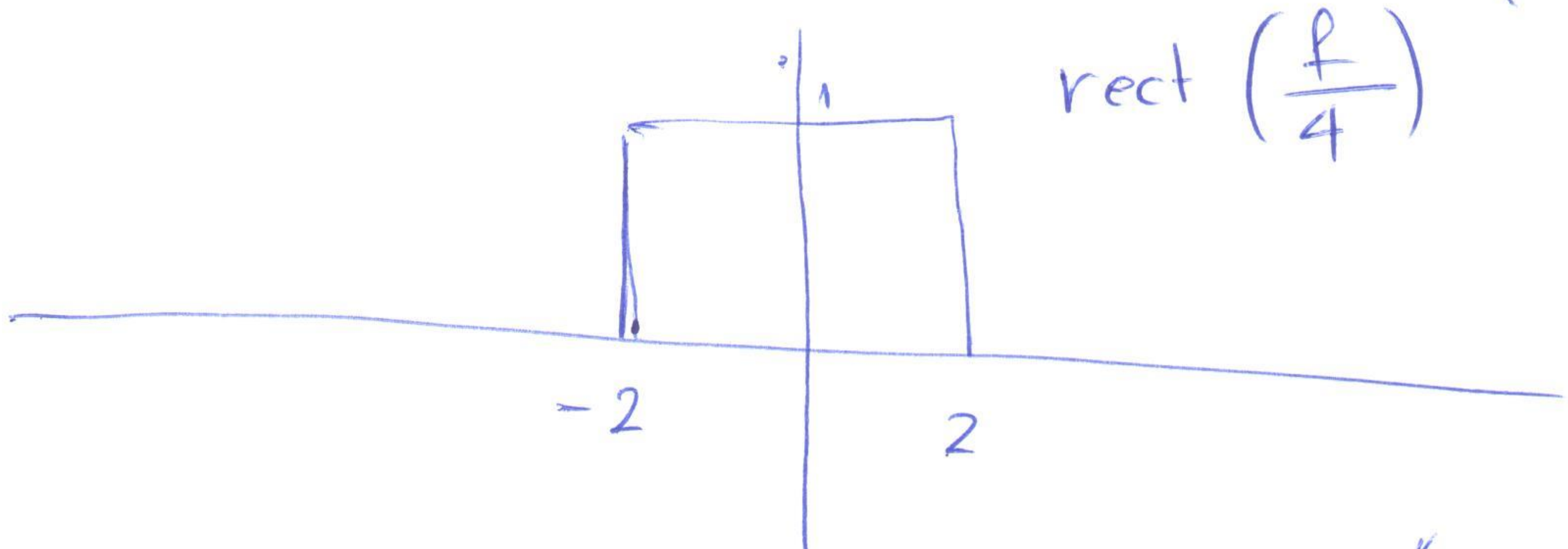
$\cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$: τιμή 1 για $f = 0$

τιμή 0 (1ος μηδενισμός) για $2\pi \frac{1}{8} f = \pm \pi/2 \Rightarrow$

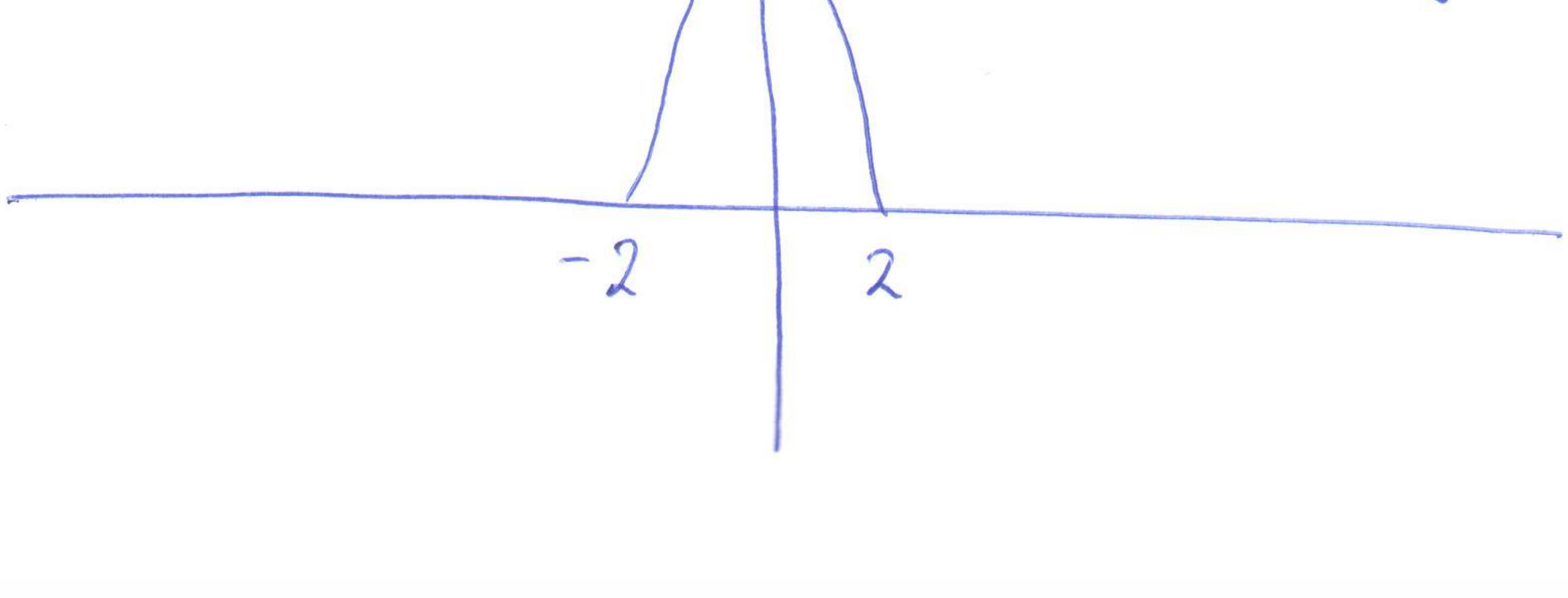
$$\Rightarrow f = \begin{cases} +2\ Hz \\ -2\ Hz \end{cases}$$



(×) γινόμενο



αποτέλεσμα γινομένου



8

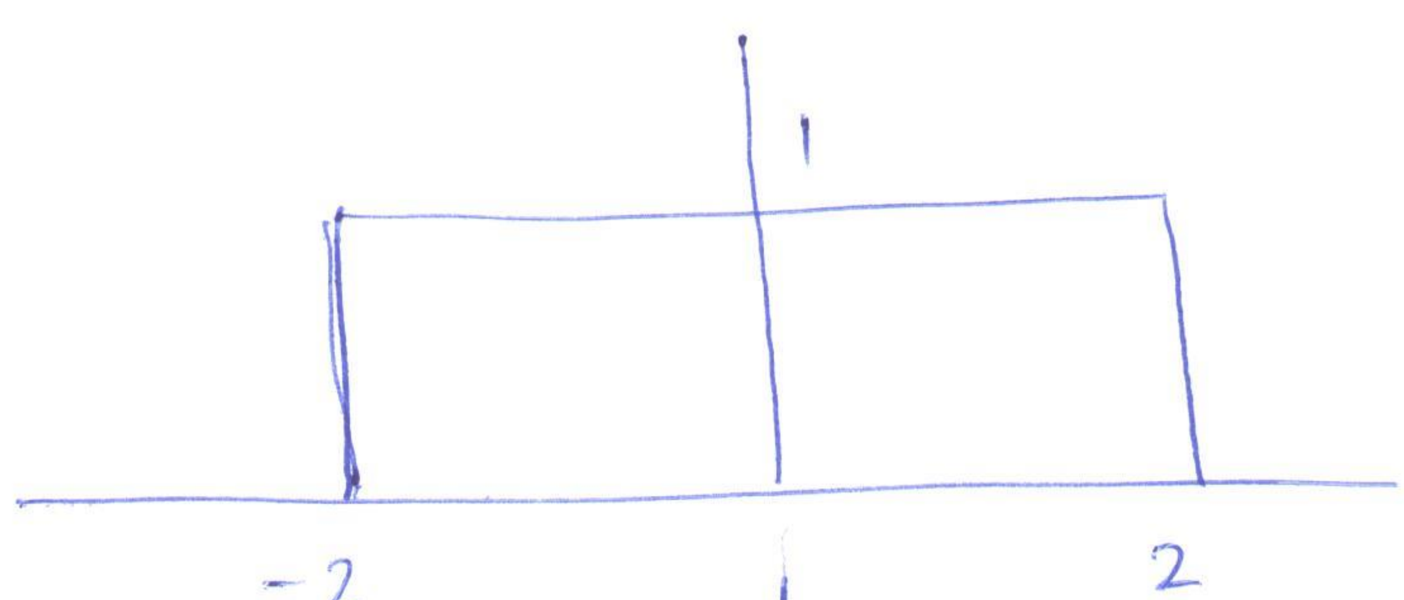
δ) ii) $V(f) = Y(f) * Y(f)$

$= \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) * \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right)$

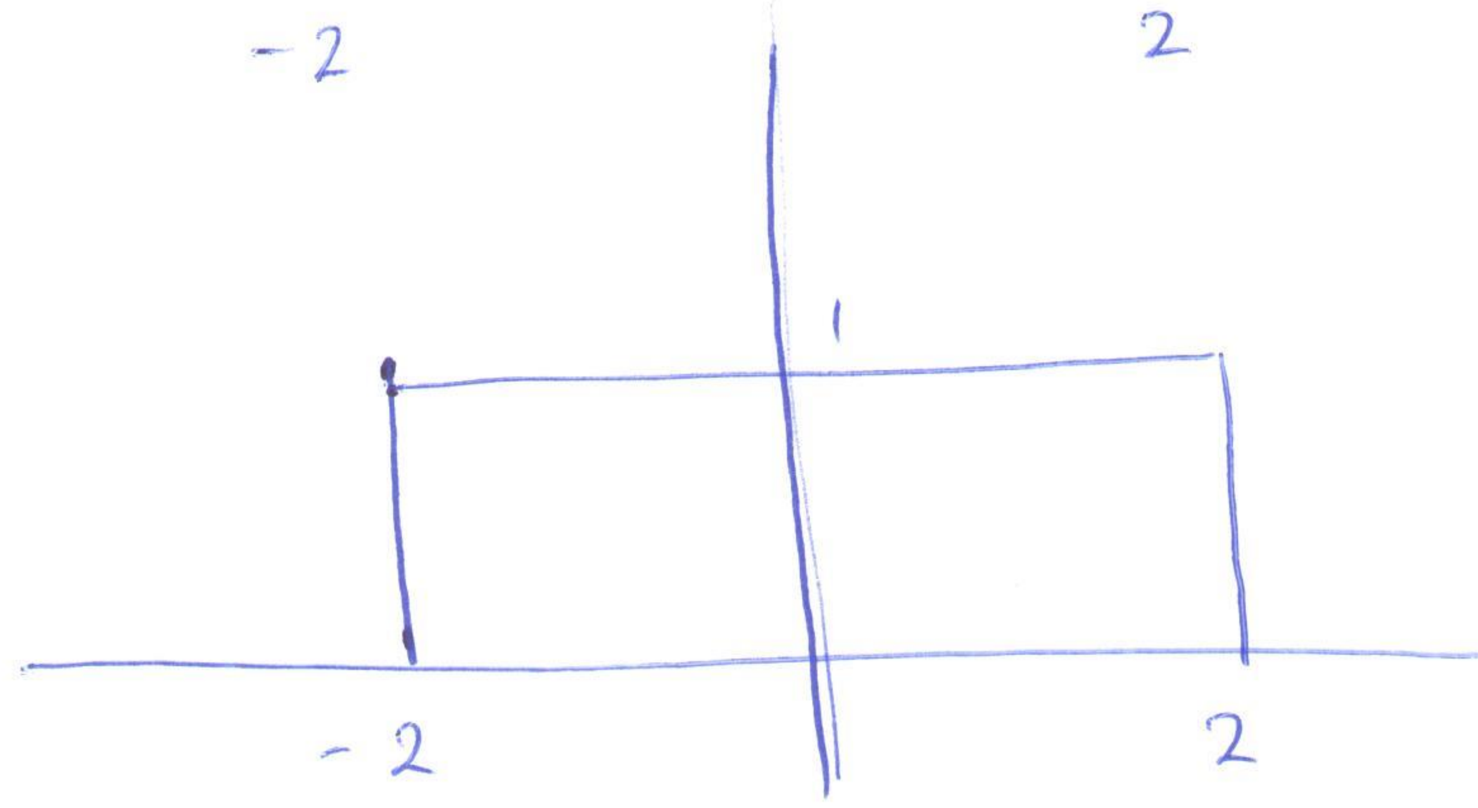
Μεταφορά στο πεδίο του χρόνου.

$\underbrace{\text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) * \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right)}_{\text{συνέλιξη}} \xleftrightarrow{F^{-1}} \underbrace{4\,\text{sinc}(4t) \cdot 4\,\text{sinc}(4t)}_{\text{γινόμενο}} =$

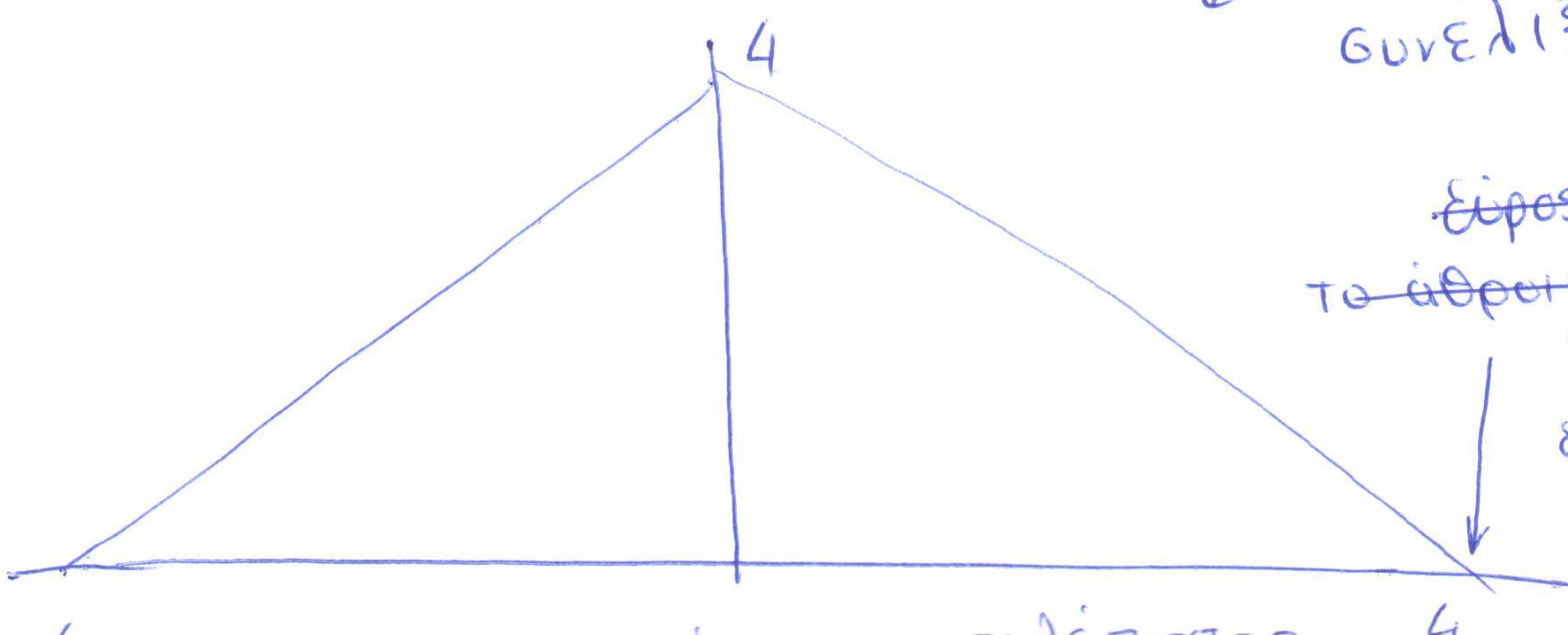
$= 16\,\text{sinc}^2(4t) = 4 \cdot 4\,\text{sinc}^2(4t) \xleftrightarrow{F} 4\,\text{tri}\left(\frac{f}{4}\right)$



(*) συνέλιξη



αποτέλεσμα συνέλιξης



~~εύρος ίσο με το άθροισμα του εύρους των επιμέρους παλμών~~

~~εύρος αποτελέσματος = εύρος παλμού~~

9.

Χρήσιμες παρατηρήσεις

- Η συνέλιξη τετραγωνικών παλμών με το ίδιο εύρος οδηγεί σε τριγωνικό παλμό διπλάσιου εύρους
- Γενικά η συνέλιξη παλμού με εύρος α και παλμού με εύρος β (οποιασδήποτε μορφής) οδηγεί σε παλμό εύρους α+β.

Θέμα 2.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-4n}{2}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(t-2n)$$

↑ με παρόμοια, $T = 2sec$ συνεπτικό

↗ τετραγωνικός παλμός εύρους 2 sec που επαναλαμβάνεται κάθε 4sec $T_1 = 4$ sec.

ανάλυση φάσματος για το άθροισμα παλμών

συνέλιξη

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-4n}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{2}\right) * \delta(t-4n) =$$

παλμός που επαναλαμβάνεται

περίοδος

$$= \Pi\left(\frac{t}{2}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-4n)$$

↖ ρυθμός επανάληψης

η ανάλυση αυτή δεν χρειαζόταν για τη λύση

Από πίνακες ΜΣ Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-4n) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - m\cdot\frac{1}{4}\right)$$

Επίσης $\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\,\mathrm{sinc}(2f)$

Άρα $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\,\mathrm{sinc}(2f) \cdot \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - m\cdot\frac{1}{4}\right) =$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(2m\cdot\frac{1}{4}\right) \cdot \delta\left(f - m\cdot\frac{1}{4}\right)$$

↑ διακριτό φάσμα. στις συχνότητες $\frac{2k+1}{4}$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ρητός}$$

Περίοδος $x(t)$: $T_{ολ} = 2T_2 = T_1 = 4\,sec$

(β) $Y_1(f) = \delta(f - 2f_c) + Y(f) * Y(2f)$

Λύση με βάση ανάλυση στο πεδίο συχνοτήτων

$$Y_1(f) = \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)\right] *$$

$$* \frac{1}{2j}\left[\delta(2f - f_c) - \delta(2f + f_c)\right]$$

πρώτα πρέπει να αναλυθούν οι όροι $\delta(2f \pm f_c)$

Βασική σχέση: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

Άρα $\delta(2f - f_c) = \delta\left(2\left(f - \frac{f_c}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{f_c}{2}\right)$

και $\delta(2f + f_c) = \delta\left(2\left(f + \frac{f_c}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{f_c}{2}\right)$

Συνεπώς

$$Y_1(f) = \delta(f - 2f_c) + \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)\right] * \frac{1}{4j} \cdot \left[\delta\left(f - \frac{f_c}{2}\right) - \delta\left(f + \frac{f_c}{2}\right)\right]$$

Βασική σχέση:

$$\delta(f+\alpha) * \delta(f+\beta) = \delta\big(f+(\alpha+\beta)\big)$$

Άρα.

$$Y_1(f) = \delta(f-2f_c) + \frac{1}{8j^2}\Big[\delta\big(f-f_c-f_c/2\big) + \delta\Big(f-f_c+\frac{f_c}{2}\Big) -$$

$$- \delta\Big(f+f_c-\frac{f_c}{2}\Big) + \delta\Big(f+f_c+\frac{f_c}{2}\Big)\Big] =$$

$\boxed{j^2=-1}$

$$= \delta(f-2f_c) - \frac{1}{8}\Big[\delta\Big(f-\frac{3f_c}{2}\Big) + \delta\Big(f+\frac{3f_c}{2}\Big) -$$

$$- \delta\Big(f-\frac{f_c}{2}\Big) - \delta\Big(f+\frac{f_c}{2}\Big)\Big] =$$

$$= \delta(f-2f_c) - \frac{1}{8}\Big[\delta\Big(f-\frac{3f_c}{2}\Big) + \delta\Big(f+\frac{3f_c}{2}\Big)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{8}\Big[\delta\Big(f-\frac{f_c}{2}\Big) + \delta\Big(f+\frac{f_c}{2}\Big)\Big]$$

Διερεύνηση περιοδικότητας

→ $\delta(f-2f_c)$: περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{2f_c}$

Σημείωση: $\delta(f-2f_c) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{-j2\pi 2f_c t} = \underbrace{\cos(2\pi 2f_c t)+j\sin(2\pi 2f_c t)}_{\text{μιγαδικό περιοδικό σήμα}}$

μοναδιαίου μέτρου

επειδή

$$\left|e^{-j2\pi 2f_c t}\right| = \sqrt{\cos^2(2\pi 2f_c t)+\sin^2(2\pi 2f_c t)} = \sqrt{1} = 1.$$

→ $-\frac{1}{8}\left[\delta\left(f-\frac{3f_c}{2}\right)+\delta\left(f+\frac{3f_c}{2}\right)\right]$ περιοδικό με περίοδο $\frac{2}{3f_c}$

→ $\frac{1}{8}\left[\delta\left(f-\frac{f_c}{2}\right)+\delta\left(f+\frac{f_c}{2}\right)\right]$ περιοδικό με περίοδο $\frac{2}{f_c}$

Αναζητούμε m_1, m_2, m_3 φυσικούς αριθμούς ώστε

$$m_1 \cdot \frac{1}{\cancel{2f_c}} = m_2 \cdot \frac{2}{\cancel{3f_c}} = m_3 \cdot \frac{2}{\cancel{f_c}} \iff$$

διαιρούμε με 2

$$\iff \frac{m_1}{4} = \frac{m_2}{3} = m_3 \iff \begin{cases} m_1 = 4 \\ m_2 = 3 \\ m_3 = 1 \end{cases}$$

Άρα το σήμα περιοδικό με περίοδο

$$T_0 = 4 \cdot \frac{1}{2f_c} = 3 \cdot \frac{2}{3f_c} = 1 \cdot \frac{2}{f_c} = \frac{2}{f_c}$$

14.

σήμα $y(t) = \sin(2\pi f_c t)$

$\downarrow$

Σύστημα — κρουστική απόκριση $h(t) = \frac{1}{\pi t}$

$\downarrow$

$z(t) = ?$

παρόμοιος τύπος

Δίνεται ότι $sgn(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\pi f}$.

Εφαρμογή Δυϊσμού

$$\frac{1}{j\pi t} \xleftrightarrow{F} sgn(-f) = \begin{cases} -1, & f>0 \\ 0, & f=0 \\ 1, & f<0 \end{cases} = -sgn(f)$$

Άρα (πολ/με με j και τα 2 μέλη)

$$j\overset{h(t)}{\frac{1}{j\pi t}} \xleftrightarrow{F} -j\,sgn(f) = H(f)$$

$$Z(f) = H(f)\cdot Y(f) = -j\,sgn(f)\cdot\frac{1}{2j}\{\delta(f-f_c) - \delta(f+f_c)\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\overbrace{sgn(f)\cdot\delta(f-f_c)}^{f\ \text{θετικό}} + \overbrace{sgn(f)\cdot\delta(f+f_c)}^{f\ \text{αρνητικό}}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-(+1)\cdot\delta(f-f_c) + (-1)\cdot\delta(f+f_c)\Big]$$

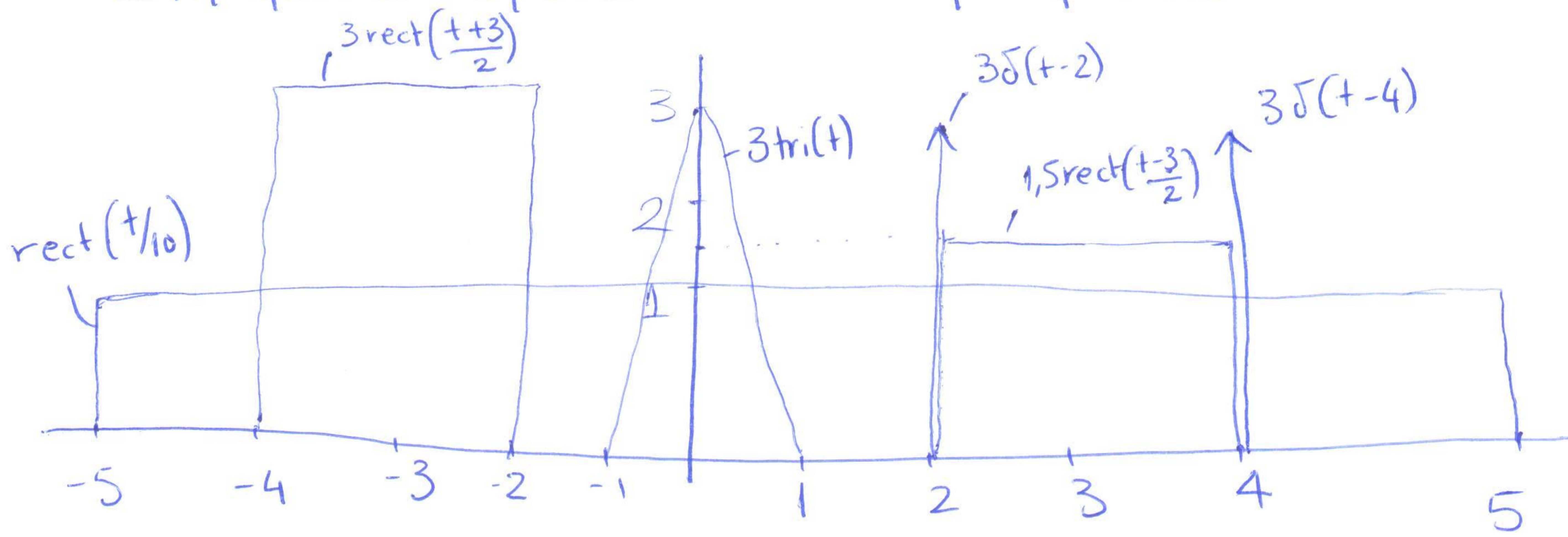
$$= \frac{1}{2}\Big[-\delta(f-f_c) - \delta(f+f_c)\Big] \xleftrightarrow{F^{-1}} -\cos(2\pi f_c t)$$

$\boxed{\text{Θέμα 3}}$

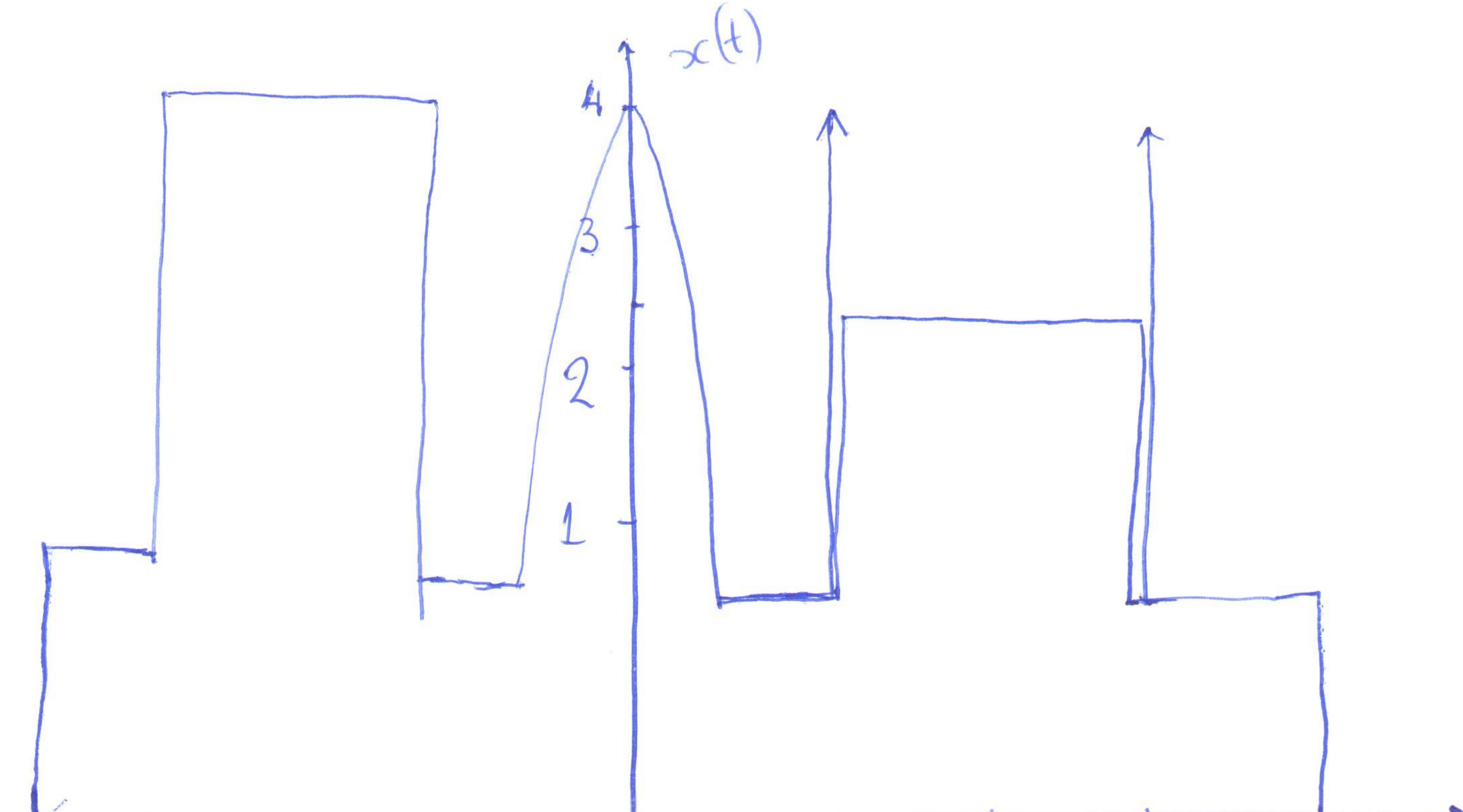
α) $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{10}\right) + 3\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) + 3\,\mathrm{tri}(t) +$

$+3\,\delta(t-2) + 1{,}5\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) + 3\,\delta(t-4)$

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σχήμα όλους τους επιμέρους όρους του αθροίσματος



Παρακάτω κάνουμε την υπέρθεση των ανωτέρω παλμών



16

Σχόλια:

Στο διάστημα [2, 3] έχουμε την

υπέρθεση 4 σημάτων:

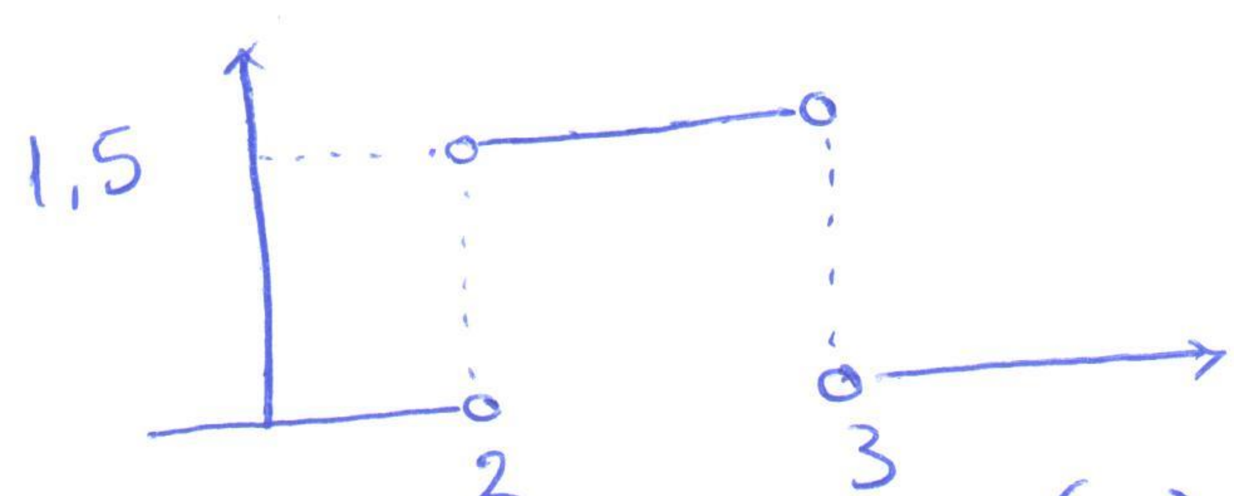
$rect\left(\frac{t}{10}\right)$: άρα πλάτος 1 στο [2,3]

$1{,}5\ rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$: άρα πλάτος 1,5 στο (2,3) ← προσοχή στα όρια του διαστήματος

$3\delta(t-2)$: άρα πλάτος 3 στο 2

$3\delta(t-4)$: άρα πλάτος 3 στο 4

$$1{,}5\ rect\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 1{,}5 & , 2<t<3 \\ 0 & , t<2 \text{ ή } t>3 \end{cases}$$



ο ορισμός της rect( ) υποθέτει στα σημεία ασυνέχειας χωρίς τιμή

Σε ορισμένα βιβλία δίνεται τιμή και στα σημεία ασυνέχειας π.χ $1.5\ rect\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 1.5 & 2\le t\le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

όμως τότε αλλάζει και ο ΜΣ Fourier του παλμού rect( )

* Όσες λύσεις υπέθεσαν τον ορισμό αυτό στο σχήμα του θέματος 3 θεωρήθηκαν εξίσου σωστές.

β) Για κάθε όρο του $x(t)$ υπολογίζουμε το ΜΣ Fourier

- $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{10}\right)$:

  έχουμε $\mathrm{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f) \Rightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{t}{10}\right) \xleftrightarrow{F} 10\,\mathrm{sinc}(10f)$

- $3\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right)$

  έχουμε $\underbrace{\mathrm{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{sinc}(f) \Rightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\,\mathrm{sinc}(2f)}^{\text{1ο βήμα: αλλαγή κλίμακας}} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \underbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} e^{+j2\pi f3}\,2\,\mathrm{sinc}(2f)}_{\text{2ο βήμα: χρονική μετατόπιση}} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \underbrace{3\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 3e^{j2\pi f3}\,2\,\mathrm{sinc}(2f)}_{\text{3ο βήμα: πολ/σμός με 3 (γραμμικότητα)}}$

- $\underbrace{1{,}5\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 1{,}5\,e^{-j2\pi f3}}_{\text{με όμοιο τρόπο όπως στο προηγούμενο}}\,2\,\mathrm{sinc}(2f)$

- $3\,\mathrm{tri}(t) \xleftrightarrow{F} 3\,\mathrm{sinc}^2(f)$

- $3\,\delta(t-2) \xleftrightarrow{F} 3\,e^{-j2\pi 2f}$

- $3\,\delta(t-4) \xleftrightarrow{F} 3\,e^{-j2\pi 4f}$

Άρα έχουμε

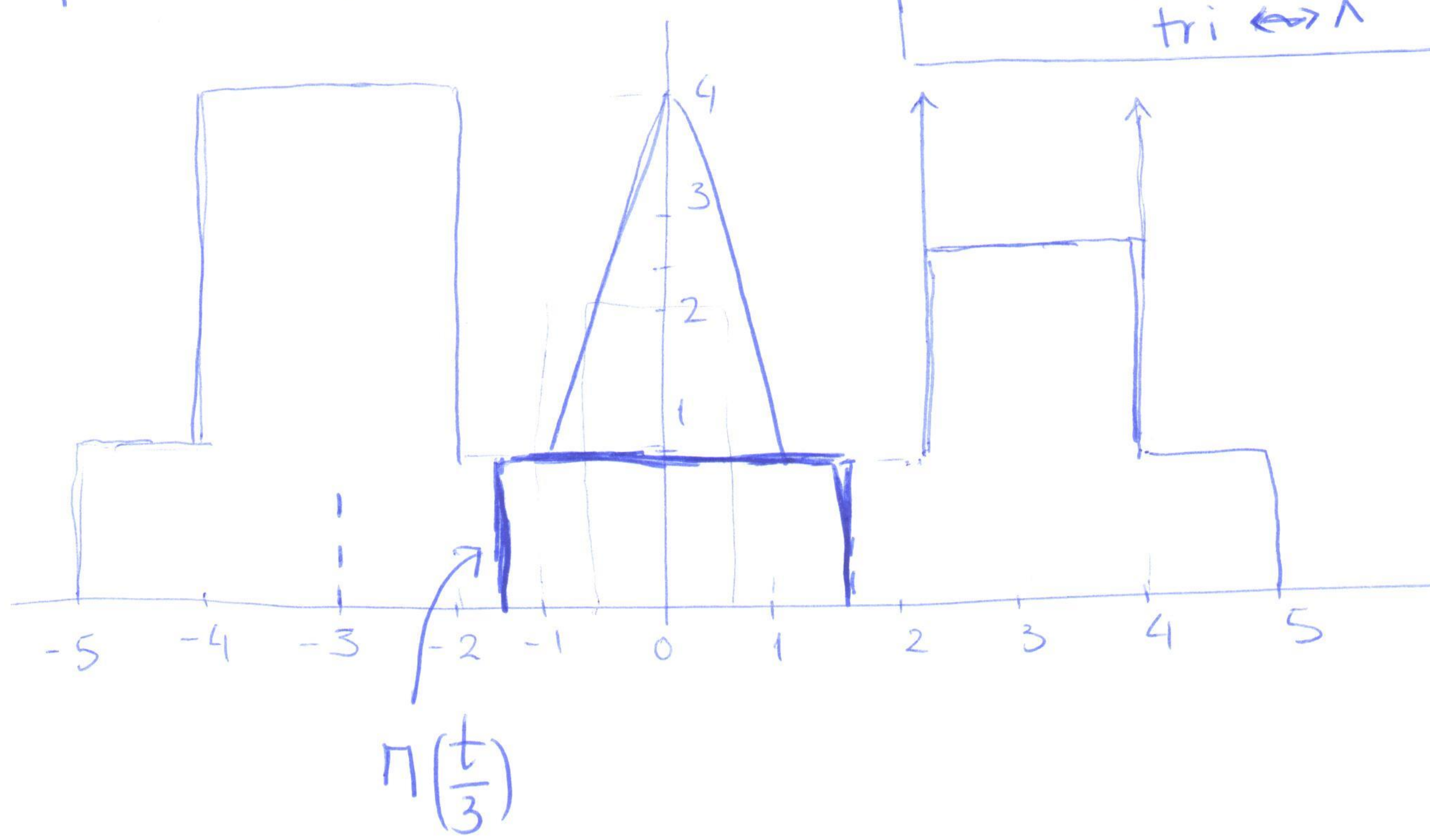
$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 10\mathrm{sinc}(10f) + 3e^{j2\pi f3}\, 2\mathrm{sinc}(2f) + 1{,}5e^{-j2\pi f3}\, 2\mathrm{sinc}(2f) +$$

$$+\, 3\mathrm{sinc}^2(f) + 3e^{-j2\pi 2f} + e^{-j2\pi 4f} = X(f)$$

γ) Δίνεται ότι $y(t) = \Pi\left(\frac{t}{3}\right) x(t) - \Pi\left(\frac{t}{3}\right) + 2\Pi(t)$

Σημείωση: Στις λύσεις εξίσου χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
rect $\Leftrightarrow$ Π
tri $\Leftrightarrow$ Λ

Πάλι χρησιμοποιούμε σχήμα:



Ο παλμός $\Pi\left(\frac{t}{3}\right)$ πολλαπλασιάζεται με το $x(t)$ και απομονώνει το τμήμα $\Pi\left(\frac{t}{3}\right) + 3\Lambda(t)$

$$\text{δηλ. } \Pi\left(\frac{t}{3}\right)\cdot x(t) = \Pi\left(\frac{t}{3}\right) + 3\Lambda(t)$$

Συνεπώς έχουμε

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{3}\right) + 3\Lambda(t) - \Pi\left(\frac{t}{3}\right) + 2\Pi(t) = 3\Lambda(t) + 2\Pi(t)$$

και ο ΜΣ Fourier είναι $Y(f) = 3\mathrm{sinc}^2(f) + 2\mathrm{sinc}(f)$

Επίσης $z(t) = e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}$

Από εκφράσεις Euler έχουμε $e^{ja} + e^{-ja} = 2\cos(a)$

Άρα $z(t) = 2\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]$

Συνεπώς η ζητούμενη συνέλιξη θα ισούται με:

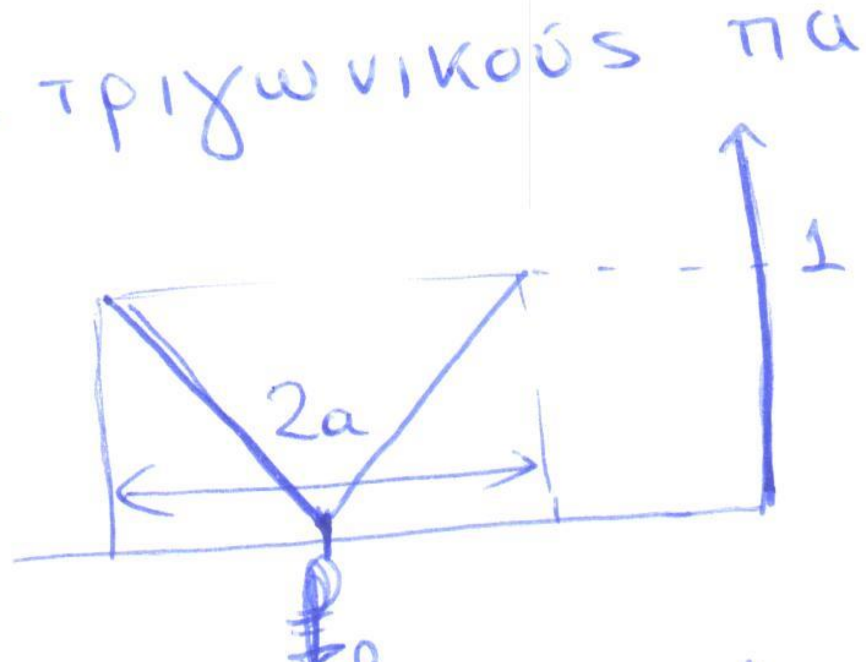
$$Q(f) = Y(f) * Z(f) =$$

$$= \left[3\mathrm{sinc}^2(f) + 2\mathrm{sinc}(f)\right] * \left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right] =$$

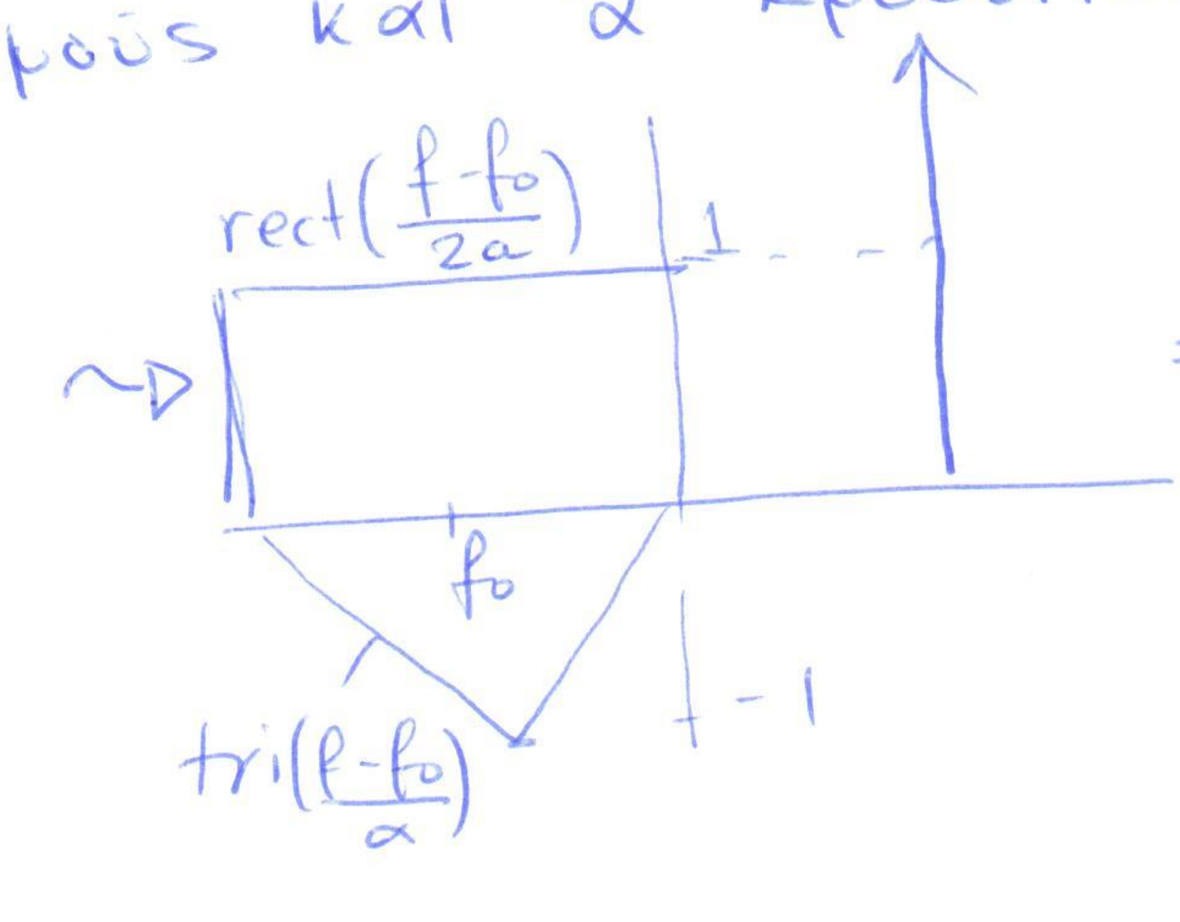
$$= 3\mathrm{sinc}^2(f-f_c) + 2\mathrm{sinc}(f-f_c) + 3\mathrm{sinc}^2(f+f_c) + 2\mathrm{sinc}(f-f_c)$$

$\boxed{\text{Θέμα 4}}$

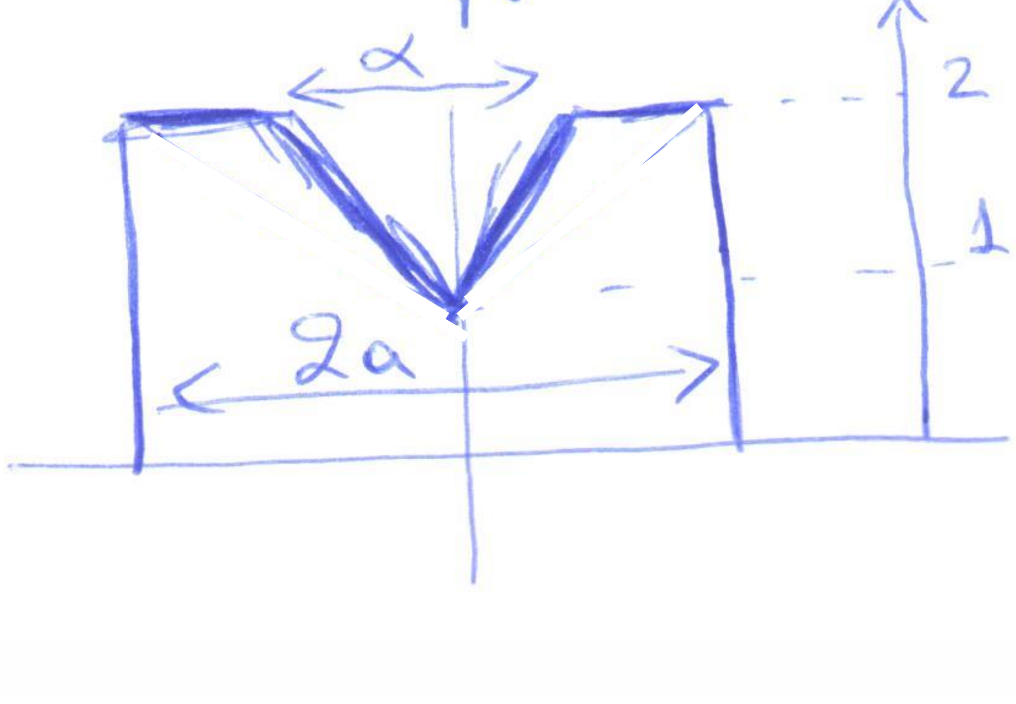
α) Από το σχήμα βλέπουμε υπεθέσεις τετραγωνικών με τριγωνικούς παλμούς και 2 κρουστικές.



$\rightsquigarrow$



$= \mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{2a}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f-f_0}{\alpha}\right)$



$\rightsquigarrow 2\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{2a}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f-f_0}{\alpha}\right)$

Συνεπώς έχουμε

$$X(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f+5}{2}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f+5}{1}\right) + 3\delta(f+3) +$$

$$+ 2\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f}{1}\right) + 3\delta(f-3) + \mathrm{rect}\left(\frac{f-5}{2}\right) - \mathrm{tri}(f-5)$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ΜΣ Fourier για κάθε όρο

- $\mathrm{rect}\left(\frac{f+5}{2}\right)$

  Ισχύει ότι $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}(f) \Leftrightarrow$

  $$\Leftrightarrow \underbrace{2\mathrm{sinc}(2t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)}_{\text{αλλαγή κλίμακας}} \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-j2\pi t5}\, 2\mathrm{sinc}(2t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{f+5}{2}\right)}_{\text{ολίσθηση συχνότητας}}$$

- όμοια $\mathrm{rect}\left(\frac{f-5}{2}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{j2\pi t5}\, 2\mathrm{sinc}(2t)$

- $\mathrm{tri}(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} \mathrm{sinc}^2(t)$

- $\mathrm{tri}(f+5) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{-j2\pi t5}\,\mathrm{sinc}^2(t)$

- $\mathrm{tri}(f-5) \xleftrightarrow{F^{-1}} e^{j2\pi t5}\,\mathrm{sinc}^2(t)$

- $3\left[\delta(f+3) + \delta(f-3)\right] \xleftrightarrow{F^{-1}} 3 \cdot 2\cos(2\pi 3t)$

- $2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) \longleftrightarrow 8\,\mathrm{sinc}(4t)$

Άρα $x(t) = e^{j2\pi t5}\, 2\,\text{sinc}(2t) + e^{-j2\pi t5}\, 2\,\text{sinc}(2t) +$

$+ \text{sinc}^2(t) + e^{-j2\pi t5}\,\text{sinc}^2(t) + e^{j2\pi t5}\,\text{sinc}^2(t) + 6\cos(2\pi 3t) =$

$= 2\,\text{sinc}(2t)\left[e^{j2\pi t5} + e^{-j2\pi t5}\right] + \text{sinc}^2(t)\left[1 + e^{-j2\pi t5} + e^{j2\pi t5}\right] +$

$+ 6\cos(2\pi 3t) + 8\,\text{sinc}(4t)$

Από σχέσ. Euler $e^{j2\pi t5} + e^{-j2\pi t5} = 2\cos(2\pi t5)$

Άρα

$x(t) = 2\,\text{sinc}(2t)\, 2\cos(2\pi t5) + \text{sinc}^2(t)\left[1 + 2\cos(2\pi t5)\right] +$

$+ 6\cos(2\pi 3t) + 8\,\text{sinc}(4t)$

β) Με διέλευση του $x(t)$ από το βαθυπερατό φίλτρο με συν. μεταφοράς $H_{LP}(f) = 2\,\text{rect}\left(\frac{f}{5}\right)$ απομονώνονται οι όροι μεταξύ των συχνοτήτων $[-2{,}5,\ 2{,}5]$ Hz και διπλασιάζονται τα πλάτη τους

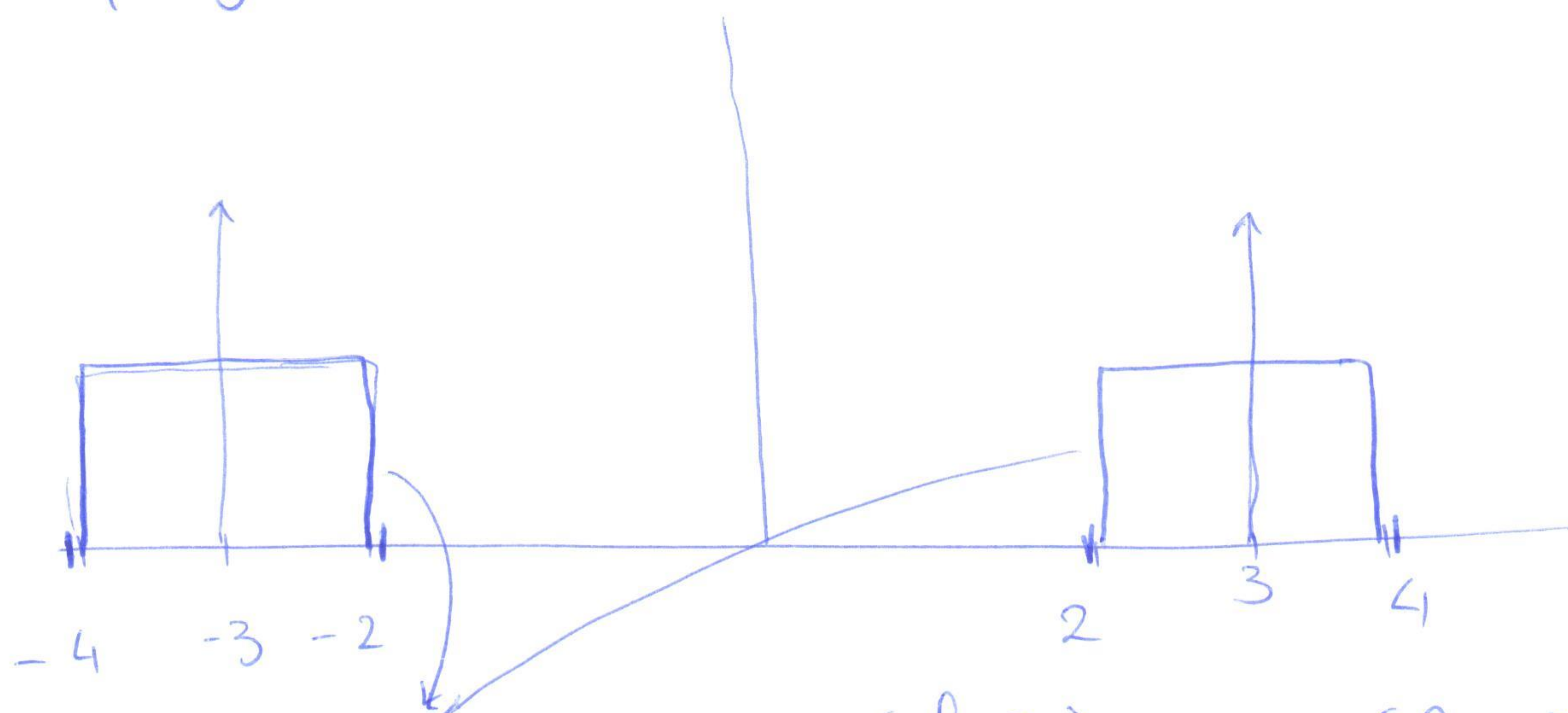
Συνεπώς $X_1(f) = 2\cdot\left[2\,\text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) - \text{tri}(f)\right]$

γ) Με τη διέλευση του $x(t)$ από το βαθυπερατό φίλτρο με $H'_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{5}\right)$ απομονώνονται πάλι οι όροι μεταξύ $[-2.5,\ 2.5]$ Hz αλλά διατηρούν το πλάτος τους.

$Y_2(f) = 2\,\text{rect}(f/4) - \text{tri}(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} \cancel{2}4\,\text{sinc}(4t) - \text{sinc}^2(t)$

δ) Οι 2 κρουστικές $\delta(f\pm 3)$ αντιστοιχούν στο συνημιτονικό όρο 22.

Λαμβάνονται με ζωνοπερατό φίλτρο με ζώνη διέλευσης στο διάστημα (2, 4) Hz



$$H_{BP}(f) = rect\left(\frac{f+3}{a}\right) + rect\left(\frac{f-3}{a}\right)$$

όπου $\alpha < 2$

$\boxed{\text{Θέμα 5}}$ (α)

θέτοντας $w_0 = 2\pi f_0$ $\quad x(t) = t e^{-at}\cos^2(2\pi f_0 t)\, u(t) \quad \alpha > 0$

Από πίνακες ΜΣ Fourier βρίσκουμε παρεμφερές σήμα:

$$t e^{-at} u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(a+j2\pi f)^2} = G(f)$$

επίσης, έχουμε

$$\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{1+\cos(2\pi\cdot 2f_0 t)}{2} \overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\delta(f+2f_0)+\delta(f-2f_0)\right] = H(f)$$

Συνεπώς $X(f) = G(f) * H(f) =$

$$= G(f) * \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_0) + \delta(f-2f_0) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} G(f) + \frac{1}{4} G(f+2f_0) + \frac{1}{4} G(f-2f_0) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(a+j2\pi f)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(a+j\,2\pi(f+2f_0))^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(a+j\,2\pi(f-2f_0))^2}$$

(β) $x(t) = 4e^{j4\pi t}\,\text{sinc}(4t) - 8\,\text{sinc}(8t) + 4e^{-j4\pi t}\,\text{sinc}(4t) -$

$- \cos(8t)$

Για να διερευνηθεί η περιοδικότητα θα προσδιορίσουμε

το φάσμα πλάτους

- $4e^{j4\pi t}\,\text{sinc}(4t) + 4e^{-j4\pi t}\,\text{sinc}(4t) =$

$= 4\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right)\text{sinc}(4t) =$ {εκφρ. Euler}

$$= 4 \cdot 2\cos(4\pi t) \cdot \text{sinc}(4t) = \underbrace{2\cos(2\pi 2t)}_{\updownarrow F \; \delta(f-2)+\delta(f+2)} \cdot \underbrace{4\,\text{sinc}\,4t}_{\updownarrow F \; \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right)} \overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\longleftrightarrow} \left\{\delta(f+2) + \delta(f-2)\right\} * \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) = \text{rect}\left(\frac{f+2}{4}\right) + \text{rect}\left(\frac{f-2}{4}\right)$$

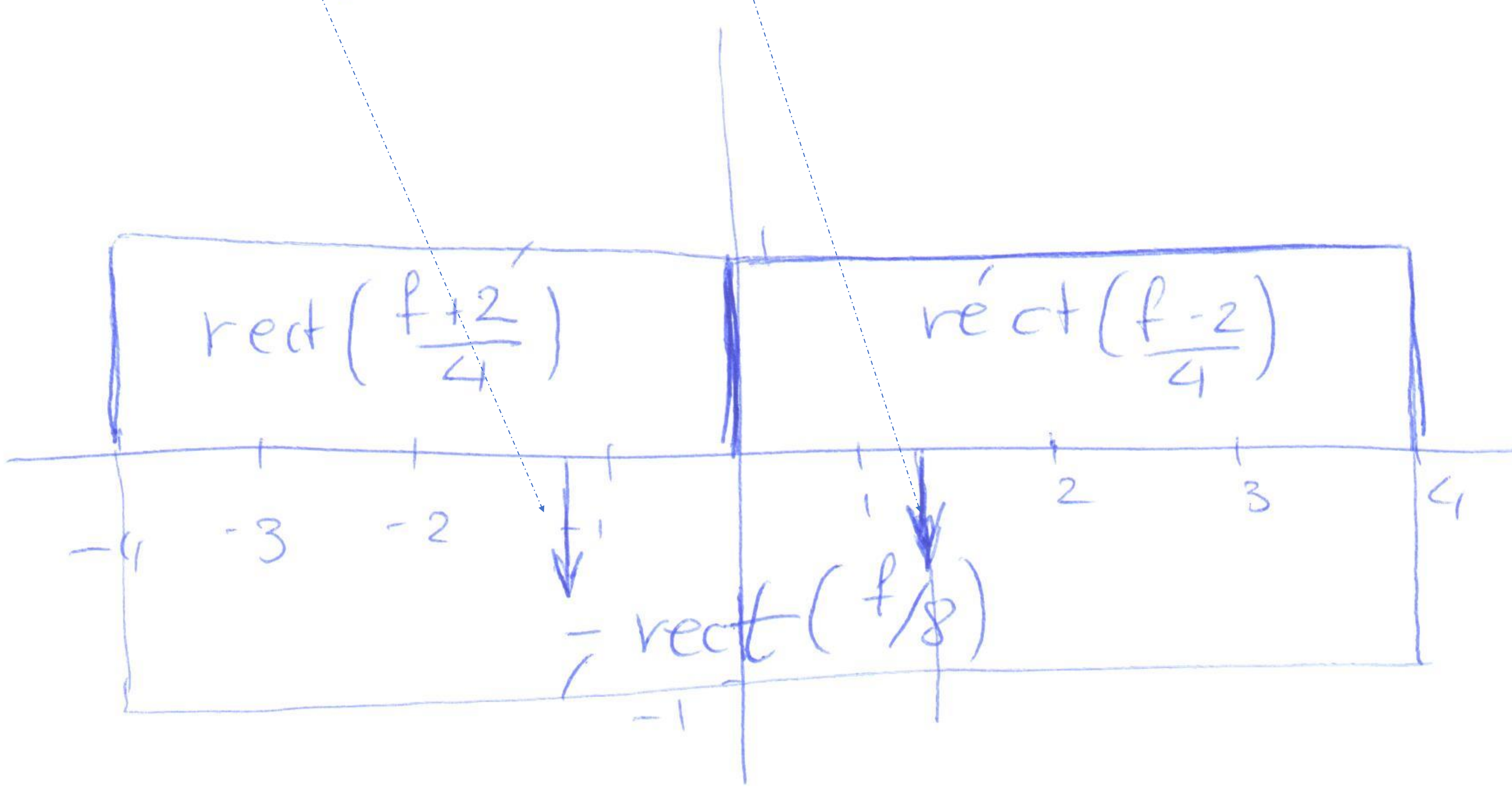
- $-8\,\text{sinc}(8t) \overset{F}{\longleftrightarrow} -\text{rect}\,\frac{f}{8}$

• $-\cos(8t) \Rightarrow -\cos\left(2\pi \frac{4}{\pi} t\right) \xleftrightarrow{F} -\frac{1}{2}\left[\delta\left(f+\frac{4}{\pi}\right)+\delta\left(f-\frac{4}{\pi}\right)\right]$

Άρα $X(f) = \text{rect}\left(\frac{f+2}{4}\right) + \text{rect}\left(\frac{f-2}{4}\right) - \text{rect}\left(\frac{f}{8}\right) -$

$-\frac{1}{2}\left[\delta\left(f+\frac{4}{\pi}\right)+\delta\left(f-\frac{4}{\pi}\right)\right]$

Κάνουμε το σχήμα:



οι τετραγωνικοί παλμοί αλληλοαναιρούνται και απομένουν οι δύο κρουστικές

Άρα το σήμα περιοδικό με συχνότητα $\frac{4}{\pi}$ Hz και περίοδο $\pi/4$ sec.

ii) $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} tri(t-3n) + \delta(t+2) + \delta(t-2)$ 25.

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} tri(t-3n)$ περιοδικό με περίοδο $T = 3\,sec$
και διακριτό φάσμα

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} tri(t) * \delta(t-3n) = tri(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n) \overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\longleftrightarrow} sinc^2(f) \cdot \frac{1}{3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} sinc^2\left(\frac{m}{3}\right) \delta\left(f - \frac{m}{3}\right)$$

Αυτή η ανάλυση δεν ήταν αναγκαία παρατίθεται για πληρότητα

↑ Διακριτό φάσμα στις συχνότητες $\frac{3k+1}{3}$, $\frac{3k+2}{3}$

Βασική περίοδος 3 sec

$\delta(t+2) + \delta(t-2) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\cos(2\pi 2f)$ (Δυϊσμός)

Η υπέρθεση των 2 φασμάτων οδηγεί σε συνεχές φάσμα, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό

iii) $z(t) = \left[\cos(100t) + \sin(1000t)\right] * \left[\delta(t) - 20\,\mathrm{sinc}\,20t + \right.$

$\left. + \mathrm{sinc}^2(10t)\right]$

Αναλύουμε τους όρους της συνέλιξης ξεχωριστά

$\cos(100t) + \sin(1000t) = \cos\left(2\pi\frac{100}{2\pi}t\right) + \sin\left(2\pi\frac{1000}{2\pi}t\right) \overset{F}{\leftrightarrow}$

$\overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right)\right] +$

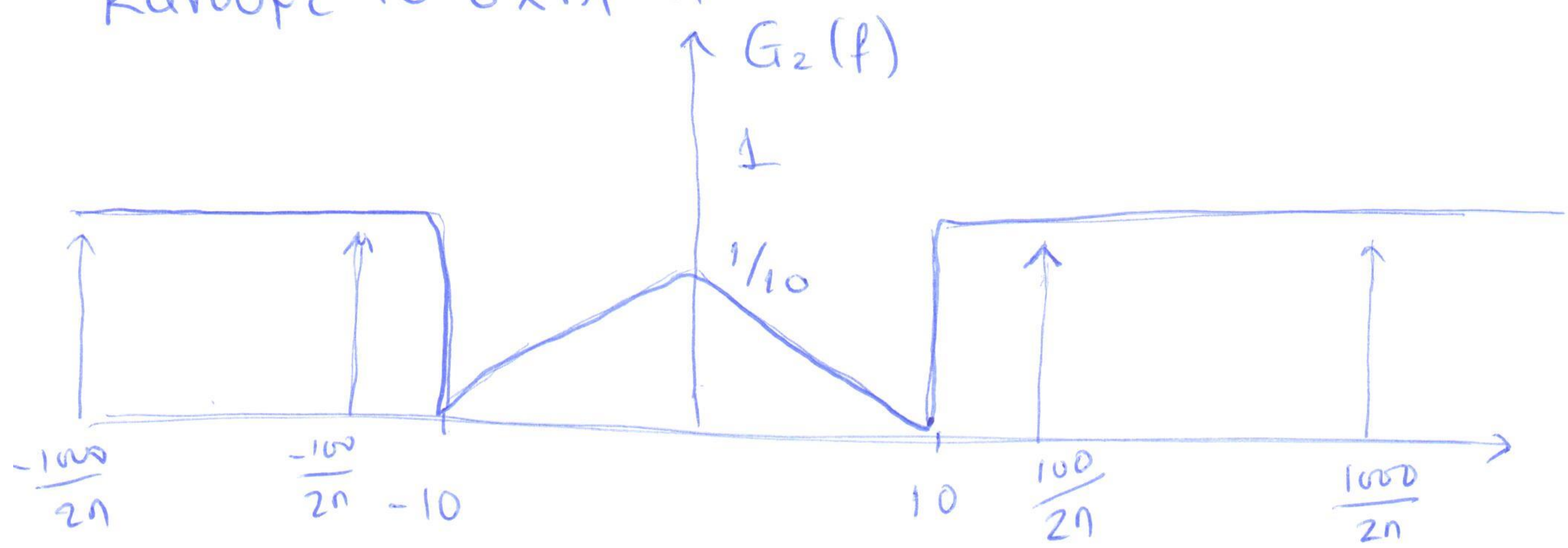
$+ \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{1000}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{1000}{2\pi}\right)\right] = G_1(f)$

$\delta(t) - 20\,\mathrm{sinc}(20t) + \mathrm{sinc}^2(10t) \overset{F}{\leftrightarrow}$

$\overset{F}{\leftrightarrow} 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{20}\right) + \frac{1}{10}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{10}\right) = G_2(f)$

Ισχύει $Z(f) = G_1(f) \cdot G_2(f)$

Κάνουμε το σχήμα



Από το σχήμα φαίνεται ότι το σήμα αποτελείται από τις κρουστικές στα $\frac{100}{2\pi}$, $\frac{1000}{2\pi}$ Hz

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{100}}}{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{1000}}} = 10$$ ρητός / άρα περιοδικό σήμα

με περίοδο $= T_1 = 10T_2 = \frac{2\pi}{100}$ sec

$\boxed{\text{Θέμα 6}}$

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \qquad y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$$

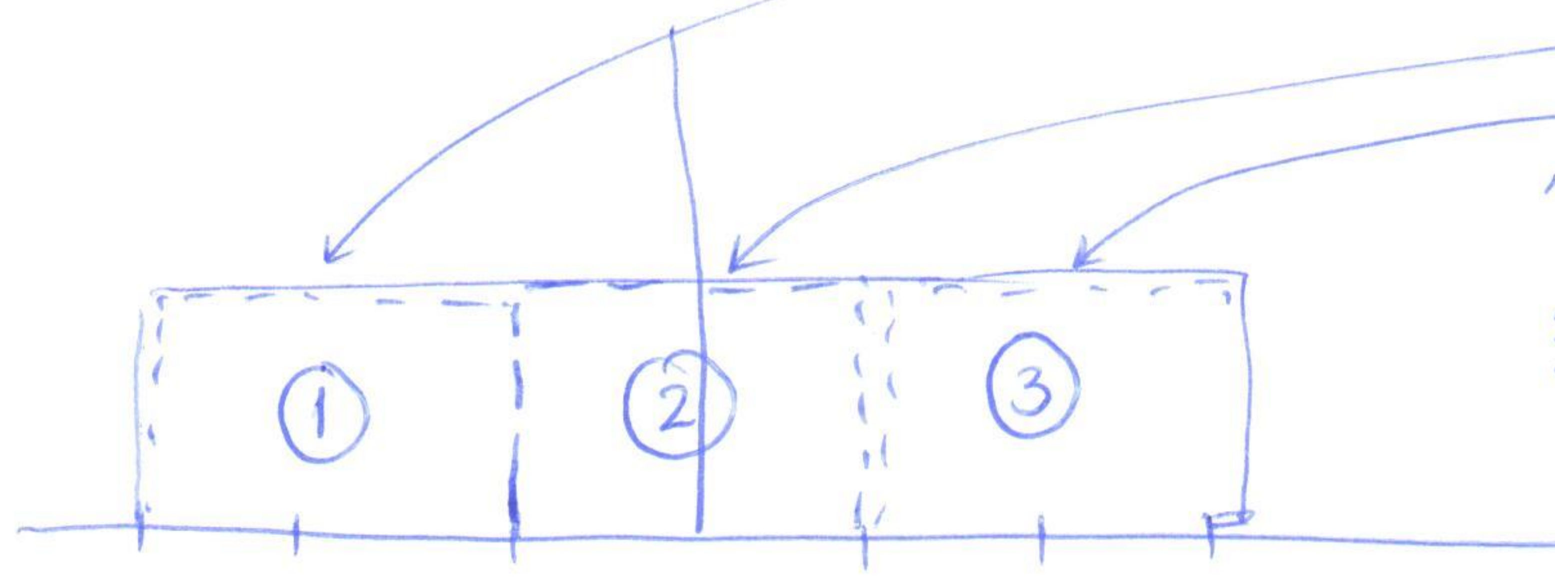
$$z(t) = x(t) * y(t) = ?$$

Θα κάνουμε ΜΣ Fourier στη χρονική συνέλιξη για να δουλέψουμε με γινόμενα στο πεδίο συχνοτήτων

Πρώτα υπολογίζουμε τους ΜΣ Fourier των $x(t)$, $y(t)$

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\,\mathrm{sinc}(2f) = X(f)$$

$$y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{6}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+2}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right)$$



"Σπάμε τον παλμό εύρους 6 σε 3 εύρους 2 ώστε να έχουμε ίδιο βασικό ΜΣ Fourier (συνάρτηση του sinc(2f))

$$y(t) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f\cdot 2}\, 2\,\mathrm{sinc}(2f) + 2\,\mathrm{sinc}(2f) + e^{-j2\pi f 2}\, 2\,\mathrm{sinc}(2f) = Y(f)$$

Συνεπώς

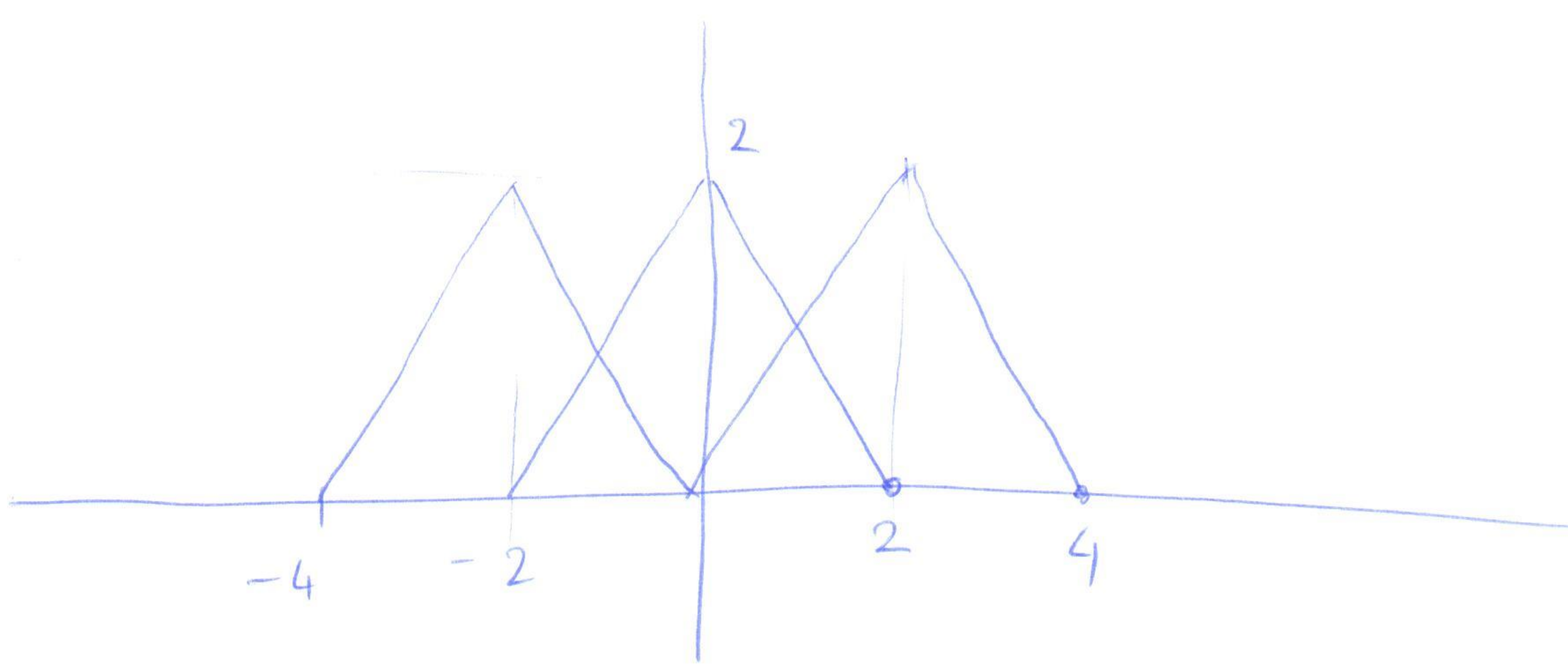
$$Z(f) = X(f)\cdot Y(f) = 2\operatorname{sinc}(2f)\cdot\left[e^{j2\pi f2}\,2\operatorname{sinc}2f + 2\operatorname{sinc}2f + e^{-j2\pi f2}\,2\operatorname{sinc}(2f)\right]$$

$$= \cancel{2}\cdot 2\operatorname{sinc}^2(2f)\left[e^{j2\pi 2f} + 1 + e^{-j2\pi 2f}\right] = \left\{\begin{matrix}\text{Εκφ.}\\ \text{Euler}\end{matrix}\right\}$$

$$= 2\cdot \underbrace{2\operatorname{sinc}^2(2f)}_{\updownarrow\ \operatorname{tri}(t/2)}\left[\underbrace{1}_{\updownarrow\ \delta(t)} + \underbrace{2\cos(2\pi 2f)}_{\delta(t-2)+\delta(t+2)}\right] \xleftrightarrow{F}$$

$$\longleftrightarrow 2\cdot \operatorname{tri}\left(\frac{t}{2}\right) * \left[\delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t+2)\right] =$$

$$= 2\operatorname{tri}\left(\frac{t}{2}\right) + 2\operatorname{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) + 2\operatorname{tri}\left(\frac{t+2}{2}\right)$$



$\Downarrow$