ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/
3η ΟΣΣ/25.01.2020/

Νίκος Δημητρίου

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχόλια για τη ΓΕ2

Θέμα 1.

(ε). $x(\pi t) + \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} tri(t-4n) = \cos\left(2\pi \frac{3\pi}{2\pi} t\right) + \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} tri(t-$

Περιοδικό

$T_1 = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ sec

Περιοδική επανάληψη

τριγωνικών παλμών άρα $T_2 = 4sec$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2/3}{4} = \frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$$

Άρα περιοδικό το $x_\varepsilon(t)$ με

περίοδο $T = 6T_1 = T_2 = 4sec$

$$\sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} tri(t-4n) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ tri(t) * \delta(t-4n) \right\} \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F} \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(f) \cdot e^{-j2\pi 4nf} =$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{sinc}^2(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi 4nf} = \underbrace{\sqrt{2} \operatorname{sinc}^2(f) \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{4}\right)}_{\text{διακριτό φάσμα}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n \frac{f}{F_0}} = F_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m F_0)$$

$$\sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{tri(t) * \delta(t-4n)\} =$$

$$= \sqrt{2}\; tri(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4n) \xleftrightarrow{F} \sqrt{2}\; sinc^2(f)\frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{m}{4}\right)$$

Θέμα 2 (ii)

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(f)\,\delta(f)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\cdot\delta(f)$$

Θέμα 5

γ) Ιδιότητα διαμόρφωσης: $\cos 2\pi f_0 t \cdot x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$

$$X_1(f) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+500}{100}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+500}{100}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f+500}{50}\right) +$$

$$+ 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-500}{100}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-500}{100}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f-500}{50}\right) =$$

$$= \left[\delta(f-500) + \delta(f+500)\right] * \left[2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{f}{50}\right)\right]$$

$$\overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} \quad 2\cos(2\pi\, 500 t) \cdot \left[2 \cdot 100\,\mathrm{sinc}(100t) + 2 \cdot 100\,\mathrm{sinc}^2(100t) - 50\,\mathrm{sinc}^2(50t)\right]$$

$$X_2(f) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+1000}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+1000}{100}\right) + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-1000}{200}\right) +$$

$$+ 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-1000}{100}\right) = \left[\delta(f+1000) + \delta(f-1000)\right] *$$

$$* \left[2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)\right] \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} \quad 2\cos(2\pi\, 1000 t) \cdot \left[2 \cdot 200\,\mathrm{sinc}(200t) + 2 \cdot 100 \cdot \mathrm{sinc}^2(100t)\right]$$

δ)

$$y_2(t) = x_2(t)\cdot \cos(2\pi 1000 t) \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X_2(f-1000) + X_2(f+1000)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-1000+1000}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-1000+1000}{100}\right) + \right.$$

$$+ 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-1000-1000}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-1000-1000}{100}\right) +$$

$$+ 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+1000+1000}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+1000+1000}{100}\right) +$$

$$\left. + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+1000-1000}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+1000-1000}{100}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right) + \right.$$

$$+ 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-2000}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f-2000}{100}\right) +$$

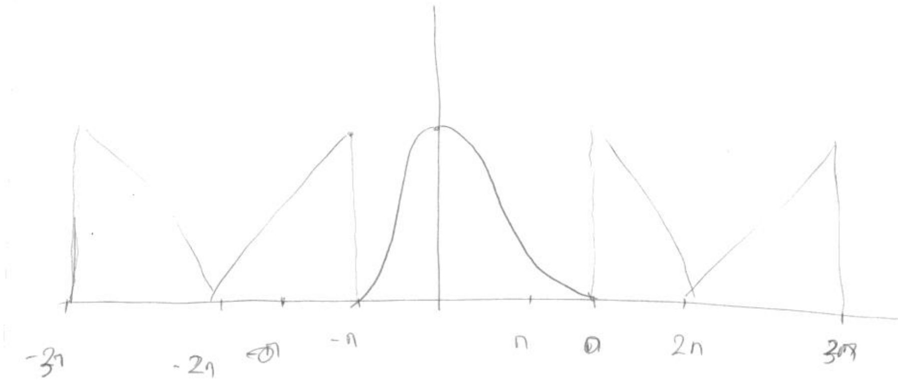
$$+ 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+2000}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f+2000}{100}\right) +$$

$$\left. + 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{200}\right) + 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)\right]$$

Θέμα 6

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+2\pi}{2\pi}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{t+2\pi}{\pi}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cdot\left[\frac{1+\cos(t)}{2}\right] +$$

$$+ \mathrm{rect}\left(\frac{t-2\pi}{2\pi}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{t-2\pi}{\pi}\right)$$



$$x(t) = \delta(t+2\pi) * \left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right] +$$

$$+ \delta(t-2\pi) * \left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right) +$$

$$+ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\pi}\right)\cdot\left[\frac{1+\cos(t)}{2}\right] \Longrightarrow$$

$$= \left[\delta(t+2\pi) + \delta(t-2\pi)\right] * \left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \mathrm{tri}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right] +$$

$$+ \mathrm{rect}\left(t/2\pi\right)\cdot\left[\frac{1+\cos(t)}{2}\right] \xleftrightarrow{F} \quad \left(2\pi\frac{1}{2\pi}t\right)$$

$$\xrightarrow{F} 2\cos(2\pi \cdot 2\pi f) \cdot \left[2\pi \sin(2\pi f) - \pi \operatorname{sinc}^2(\pi f)\right] +$$

$$+ 2\pi \operatorname{sinc}(2\pi f) * \left[\frac{\delta(f) + \frac{1}{2}\delta\left(f - \frac{1}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)}{2}\right]$$

$$= 2\cos(2\pi \cdot 2\pi f) \cdot \left[2\pi \sin(2\pi f) - \pi \operatorname{sinc}^2(\pi f)\right] +$$

$$+ \frac{\pi}{\cancel{2}} \operatorname{sinc}(2\pi f) + \frac{\pi}{\cancel{2}} \left\{ \operatorname{sinc}\left(2\pi\left(f - \frac{1}{2\pi}\right)\right) + \operatorname{sinc}\left[2\pi\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)\right] \right\}$$

γ)

$$Y(f) = 4\pi \operatorname{sinc}(2\pi f) \cos(4\pi^2 f)$$

$$= 2\left[2\pi \operatorname{sinc}(2\pi f)\right] \cdot \cos(2\pi \cdot 2\pi f)$$

$$\xleftrightarrow{F^{-1}} 2 \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right) * \frac{1}{2}\left[\delta(t-2\pi) + \delta(t+2\pi)\right]$$

$$Z(f) = X(f) * Y(f) * \delta(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} \left[x(t) \cdot y(t)\right] \cdot 1$$

$$X(f) * Y(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t) \cdot y(t) =$$

$=$

$$y(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-2\pi}{2\pi}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{t+2\pi}{2\pi}\right)$$

$$z(t) = \left[\delta(t-2\pi) + \delta(t+2\pi)\right] * \left[\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \operatorname{tri}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right] \xleftrightarrow{F}$$

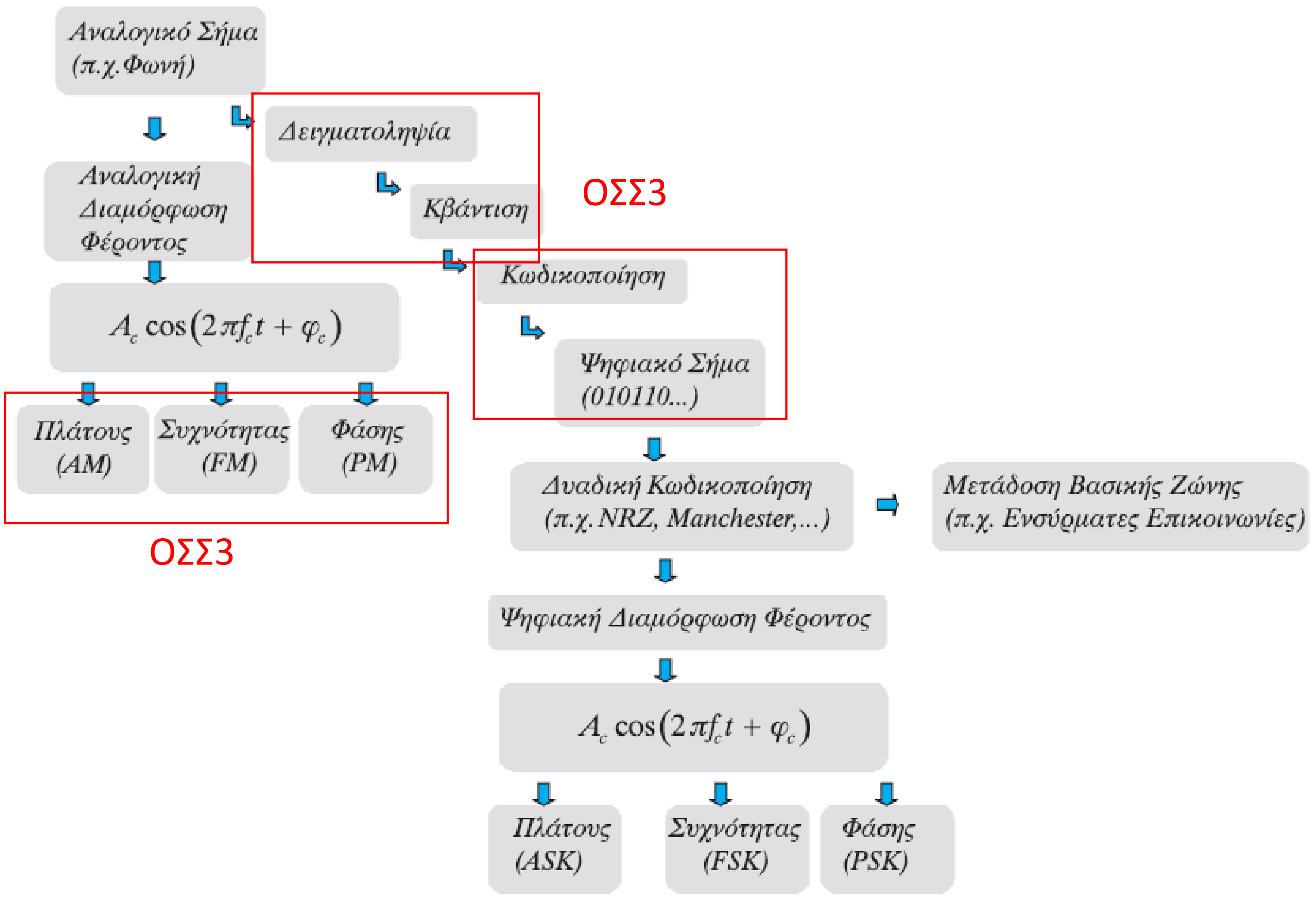
$$\xleftrightarrow{F} 2\cos(2\pi\, 2\pi f) \cdot \left[2\pi \operatorname{sinc}(2\pi f) - \pi \operatorname{sinc}^2(\pi f)\right]$$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.3/
3η ΟΣΣ/02.02.2020/Ν.Δημητρίου

Στόχοι Μελέτης

- Αναλογικές Διαμορφώσεις
    - Διαμορφώσεις Πλάτους (DSB, AM, SSB)
    - Διαμορφώσεις Γωνίας (PM, FM)
- Πολυπλεξία Σημάτων
- Μετατροπή Αναλογικών Σημάτων σε Ψηφιακά
    - Δειγματοληψία Αναλογικών Σημάτων
    - Κριτήριο Nyquist
- Ψηφιακές Διαμορφώσεις
    - Διαμόρφωση PCM

Διαμορφώσεις



Σχήμα 3.1

Αναλογικές Διαμορφώσεις

Διαμόρφωση

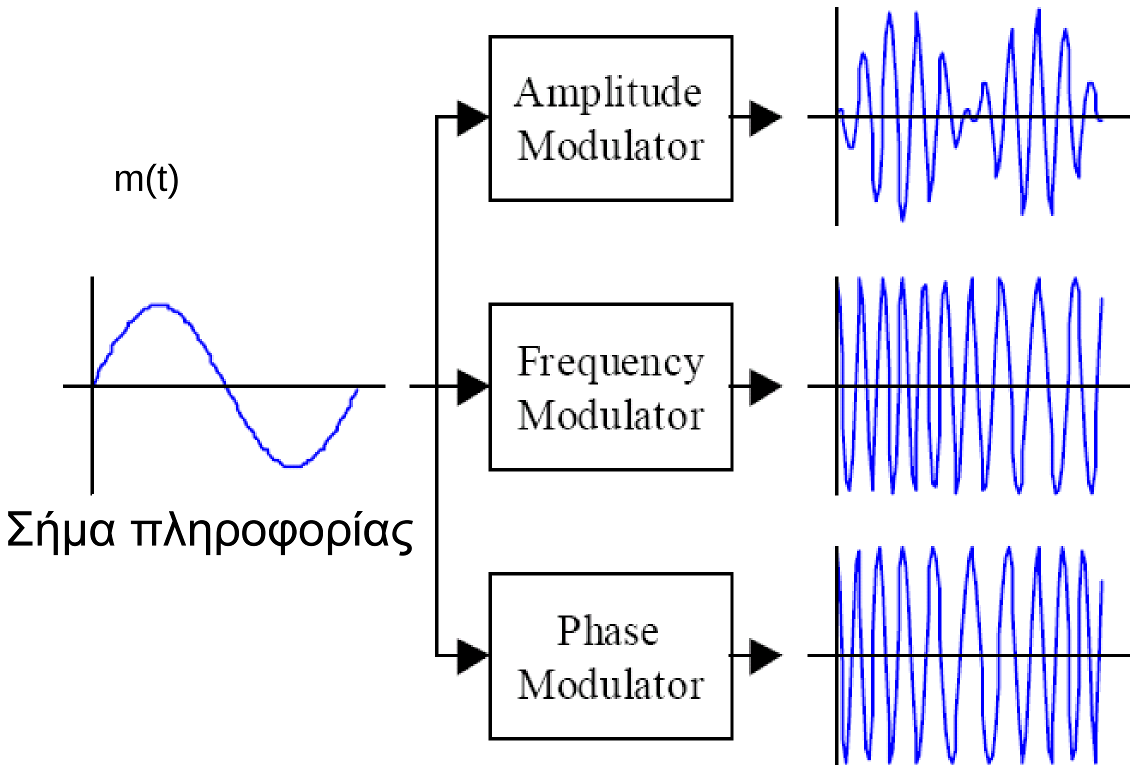
- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Modulation)= Η μεταβολή, σύμφωνα με το σήμα πληροφορίας, των παραμέτρων ενός φέροντος κύματος (carrier wave) που είναι κατάλληλο για την μετάδοση μέσα από το δεδομένο κανάλι
- ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Demodulation) είναι η αντίστροφη διαδικασία
- Το είδος της διαμόρφωσης καθορίζει:
  - Την αντοχή στο θόρυβο και στην παραμόρφωση του καναλιού
  - Την πιστότητα αναπαραγωγής του αρχικού σήματος πληροφορίας
  - Το εύρος του απαιτούμενου για την μετάδοση φάσματος
  - Την πολυπλοκότητα των συστημάτων εκπομπής και λήψης

Τι επιτυγχάνουμε με τη Διαμόρφωση

- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή συχνοτήτων όπου το μέσο διάδοσης (γραμμή μεταφοράς, ατμόσφαιρα, οπτική ίνα) έχει βελτιωμένα χαρακτηριστικά.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε κατάλληλη περιοχή συχνοτήτων, όπως αυτή έχει αποδοθεί από τους διεθνείς οργανισμούς προτυποποίησης για συγκεκριμένες υπηρεσίες.
- *Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή υψηλότερων συχνοτήτων (f) όπου το μήκος κύματος (λ) είναι μικρότερο (ισχύει η σχέση c=λf, όπου c η ταχύτητα του φωτός)*.
- Επειδή το μέγεθος των κεραιών εξαρτάται από το μήκος κύματος, με τη μετατόπιση σε υψηλότερες συχνότητες μπορούμε να κατασκευάσουμε κεραίες άρα και πομποδέκτες μικρότερου μεγέθους.

Βασικοί Τύποι Αναλογικής Διαμόρφωσης

Διαμορφωμένο σήμα

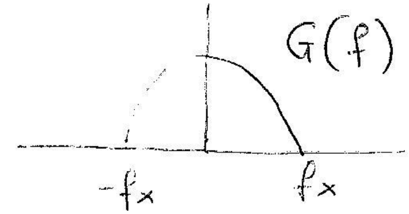


$$x_c(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$$

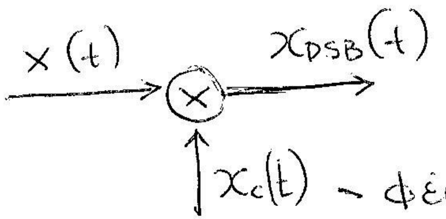
$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_d \int m(\tau)d\tau\right)$$

$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p m(t)\right)$$

Σήμα Μηνύματος $x(t) \longleftrightarrow G(f)$



Διαμόρφωση πλάτους DSB/SC → double side band / suppressed carrier

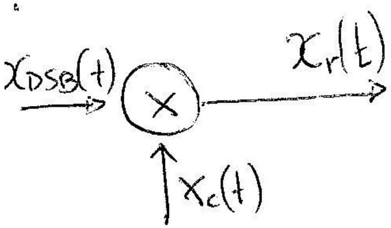


$x_c(t)$ – φέρον. (συνημιτονικό σήμα)

$$\underbrace{x(t)\cdot x_c(t)}_{x_{DSB}(t)} = x(t)\cdot A_c\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} G(f) * \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{A_c}{2}\left[G(f-f_c)+G(f+f_c)\right]}_{G_{DSB}(f)}$$

Αποδιαμόρφωση (Σύγχρονη)



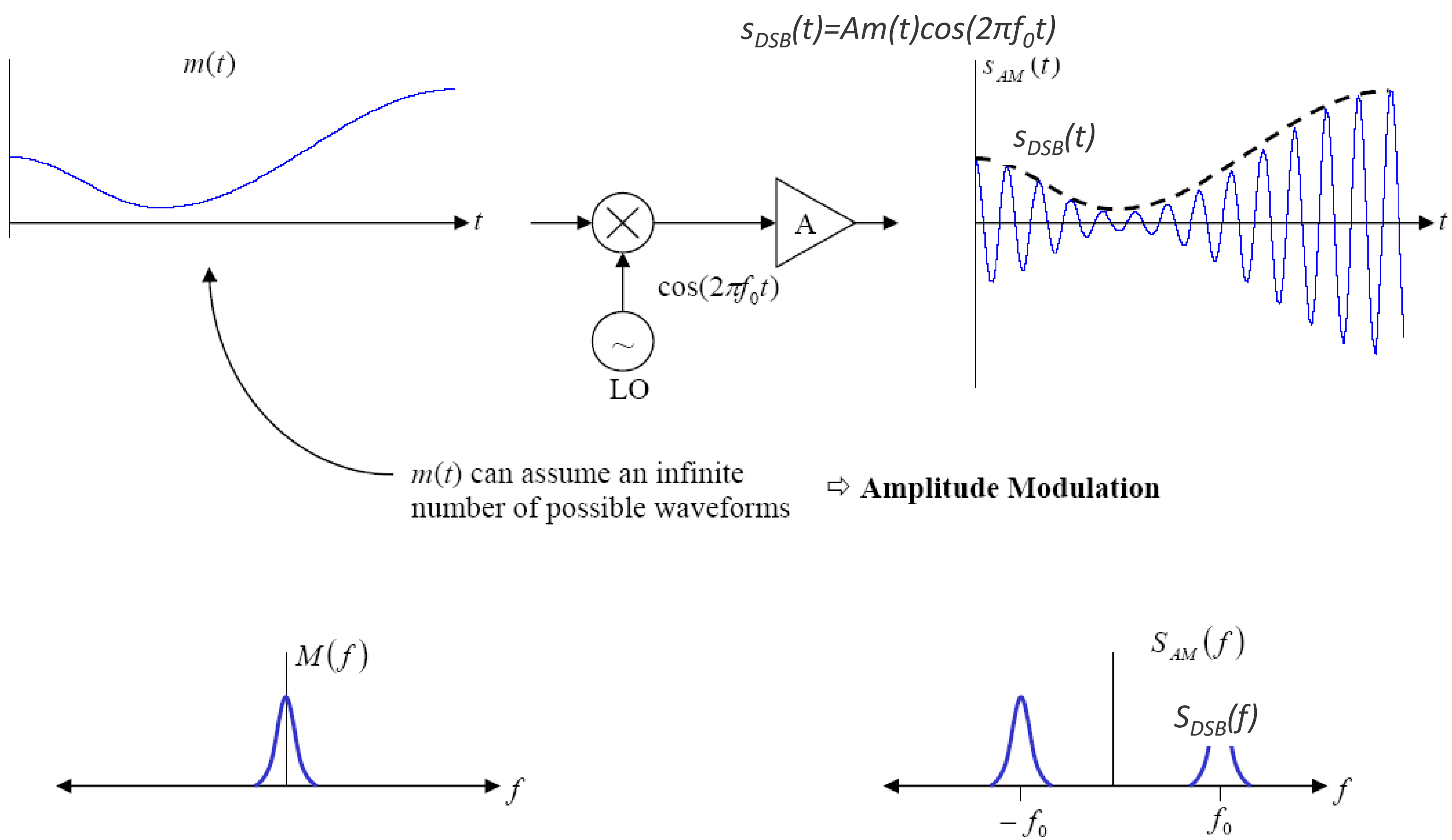
$$x_r(t) = x_{DSB}(t)\cdot x_c(t) = \left(x(t)A_c\cos 2\pi f_c t\right)\cdot A_c\cos(2\pi f_c t) =$$

$$= x(t)\cdot A_c^2\cos^2(2\pi f_c t) = x(t)\cdot A_c^2\left[\frac{1+\cos(2\pi 2 f_c t)}{2}\right] \xleftrightarrow{F}$$

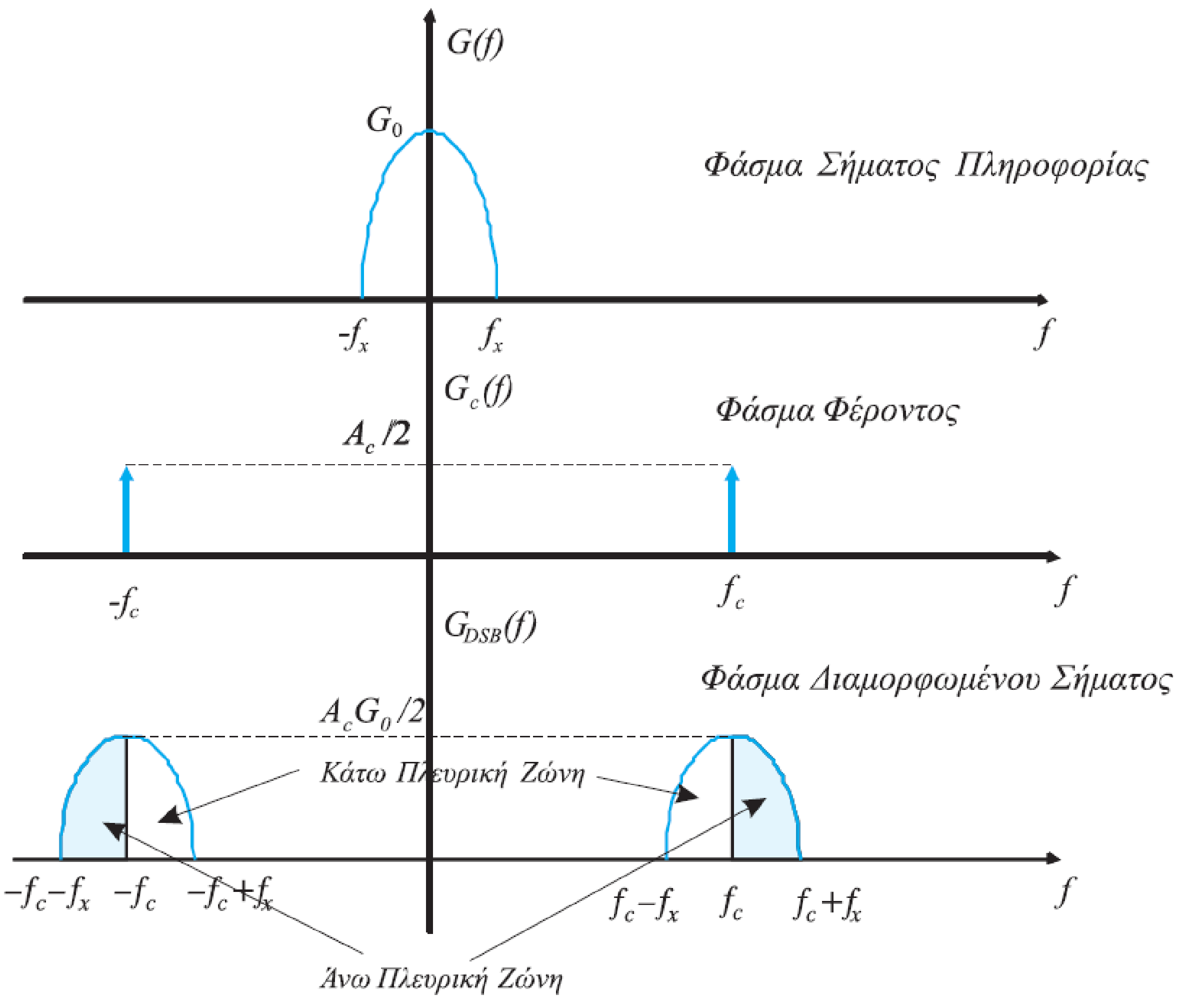
$$\xleftrightarrow{F} \frac{A_c^2}{2}G(f) + \frac{A_c^2}{4}\left[G(f-2f_c)+G(f+2f_c)\right]$$ → αφαίρεση με βαθυπερατό φίλτρο

Γραμμική Διαμόρφωση Πλάτους :

Mathematical Representation: $s_{\text{AM}}(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$

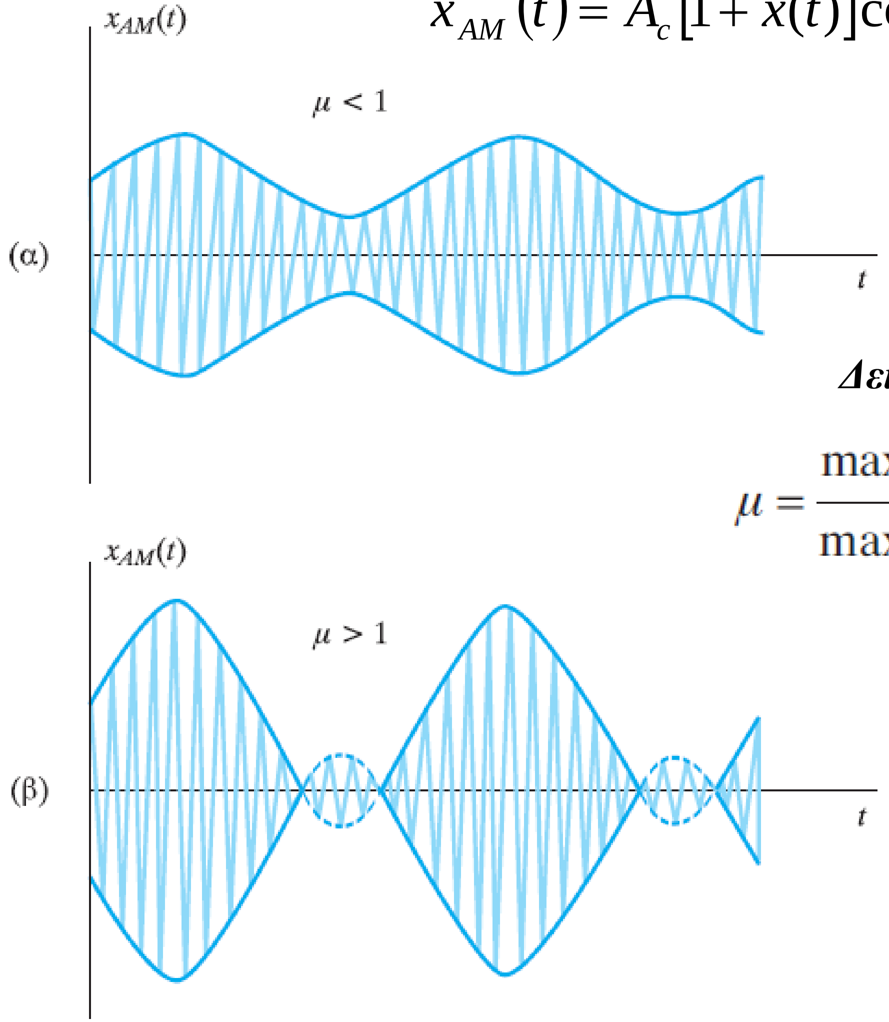


Διαμόρφωση DSB-SC : Πεδίο συχνότητας



Διαμόρφωση AM (2)

$$x_{AM}(t) = A_c\left[1 + x(t)\right]\cos 2\pi f_c t = A(t)\cos 2\pi f_c t$$

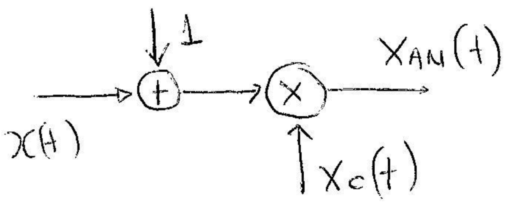


Δείκτης Διαμόρφωσης

$$\mu = \frac{\max\{A(t)\} - \min\{A(t)\}}{\max\{A(t)\} + \min\{A(t)\}}$$

II

Διαμόρφωση πλάτους AM.



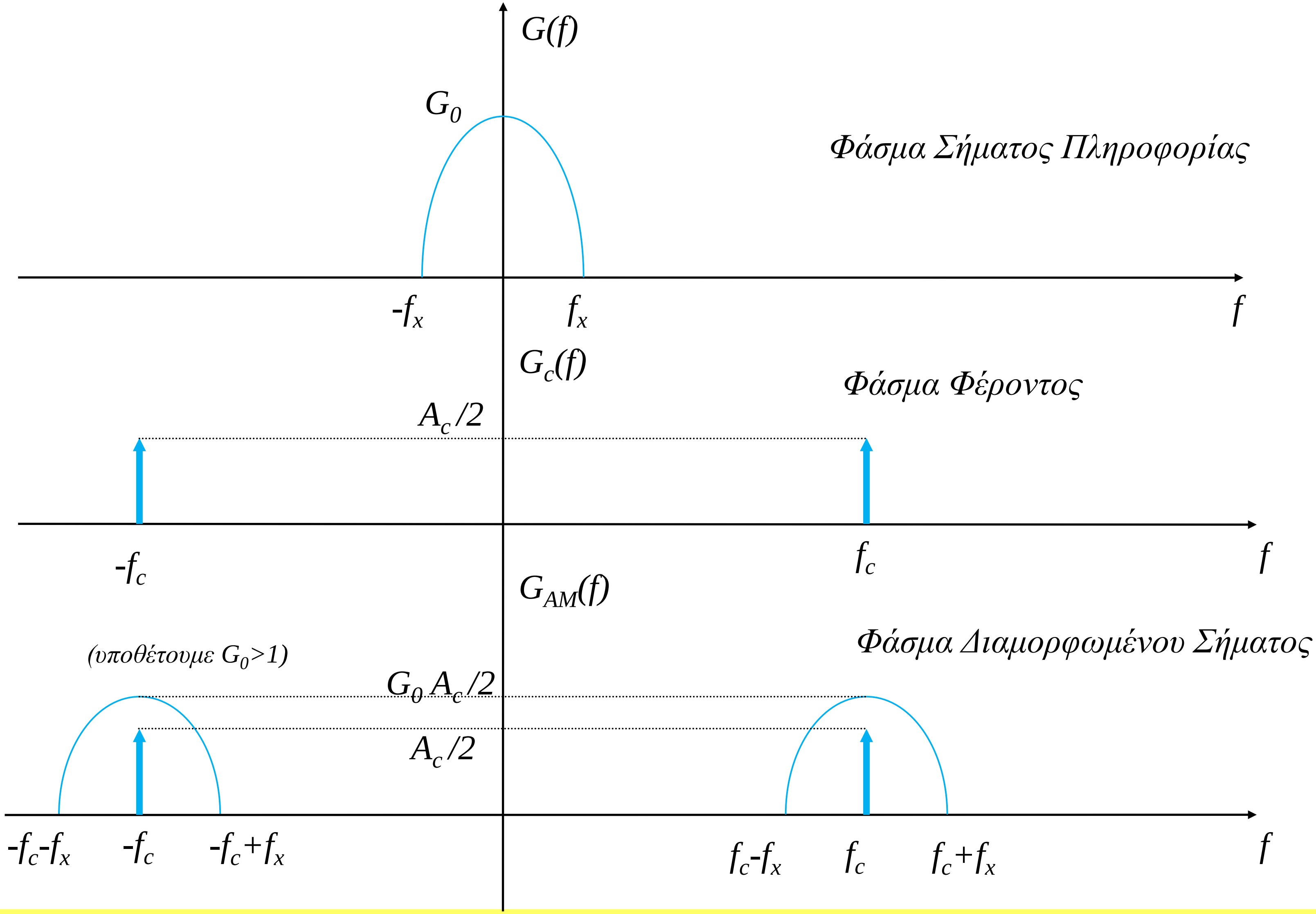
$$\overbrace{\left(x(t)+1\right)\cdot x_c(t)}^{x_{AM}(t)} = x(t)\,x_c(t) + \overset{\text{φέρον}}{x_c(t)} =$$

$$= x_{DSB}(t) + x_c(t) \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F} \frac{A_c}{2}\left[G(f-f_c)+G(f+f_c)\right] + \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right] = G_{AM}(f)$$

Αποδιαμόρφωση:
- Σύγχρονη
- με φωρατή περιβάλλουσας

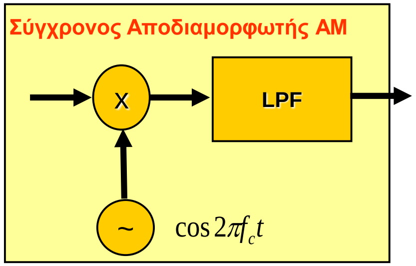
Διαμόρφωση AM: Πεδίο της Συχνότητας



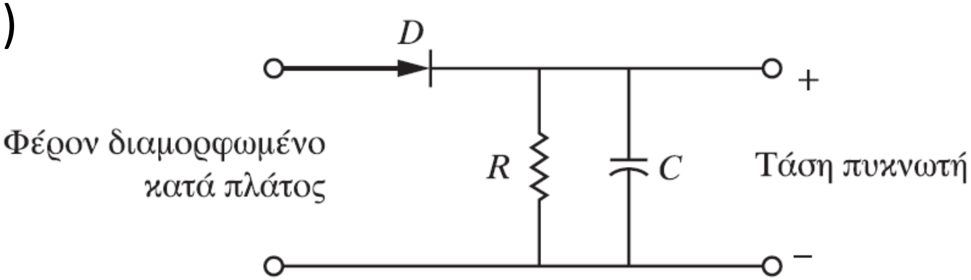
Το φάσμα του σήματος AM είναι πανομοιότυπο με το φάσμα του σήματος DSB-SC, διαφέροντας μόνο στην προσθήκη της φασματικής συνιστώσας του φέροντος

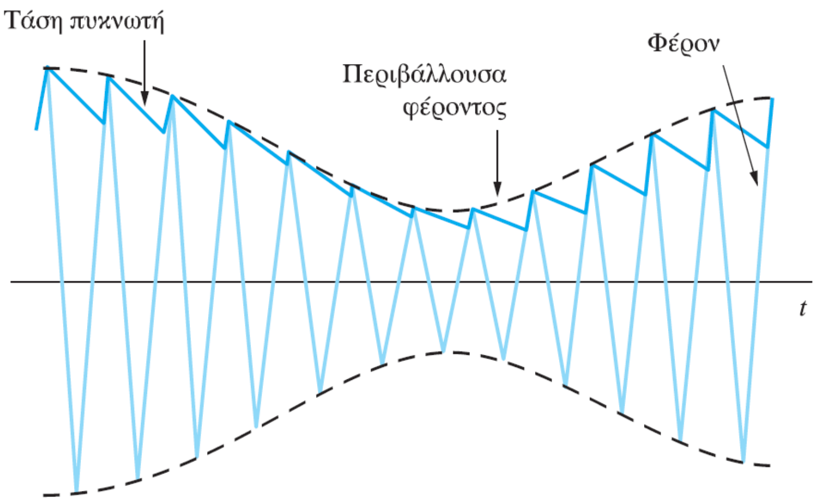
Αποδιαμόρφωση AM

- Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση
  - Όπως στα σήματα DSB

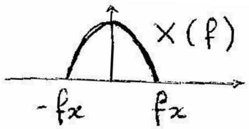


- Με φωρατή περιβάλλουσας (όταν μ<1)





Μήνυμα $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$



Διαμορφώσεις Πλάτους

Φέρον $x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\left\{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right\}$$

DSB

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cdot x_c(t) = x(t)A_c\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} \frac{A_c}{2}\left[X(f-f_c)+X(f+f_c)\right] = X_{DSB}(f)$$

AM.

$$x_{AM}(t) = \left[1+x(t)\right]\cdot x_c(t) = x_c(t)+x(t)x_c(t) = x_c(t)+x_{DSB}(t) \xleftrightarrow{F} X_c(f)+X_{DSB}(f) = X_{AM}(f)$$

SSB

$$X_{SSB}(f) = \begin{cases} \text{LSB} \quad X_{DSB}(f)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \\ \\ \text{USB} \quad X_{DSB}(f)\cdot \left[1-\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)\right] \end{cases}$$

οι ζώνες LSB, USB αποκόπτονται και με ζωνοπερατό φίλτρο

Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση (DSB)

$\left(x_{DSB}(t)\cdot A_c\cos(2\pi f_c t)\right)$ + Βαθυπερατό φίλτρο

$$\left\{\frac{1}{2}\left[X(f-f_c)+X(f+f_c)\right] * \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]\right\}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \qquad f_x < f_0 < 2f_c$$

$$\left\{\frac{A_c}{4}\left[X(f-2f_c)+X(f)+X(f)+X(f+2f_c)\right]\right\}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) = \frac{A_c}{2}X(f)$$

ΕΞ2018Β

Ερωτήματα α-γ (DSB)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σήμα $x(t) = 400sinc^2(400t)$

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του x(t).

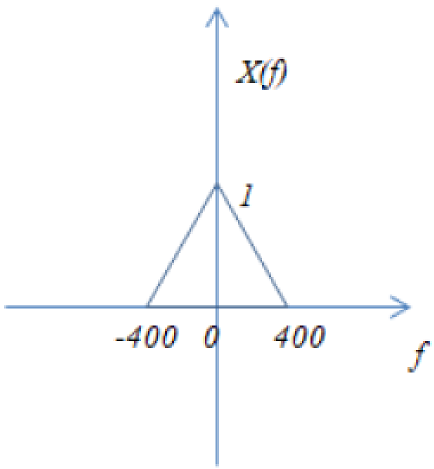
(β) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

(γ) Για τη λήψη της άνω πλευρικής του διαμορφωμένου σήματος χρησιμοποιείται υψιπερατό φίλτρο, ενώ για τη λήψη της κάτω πλευρικής χρησιμοποιείται βαθυπερατό φίλτρο. Να υπολογιστούν οι κρουστικές αποκρίσεις των 2 φίλτρων.

(δ) Το x(t) διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100KHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 8\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του.

Λύση:

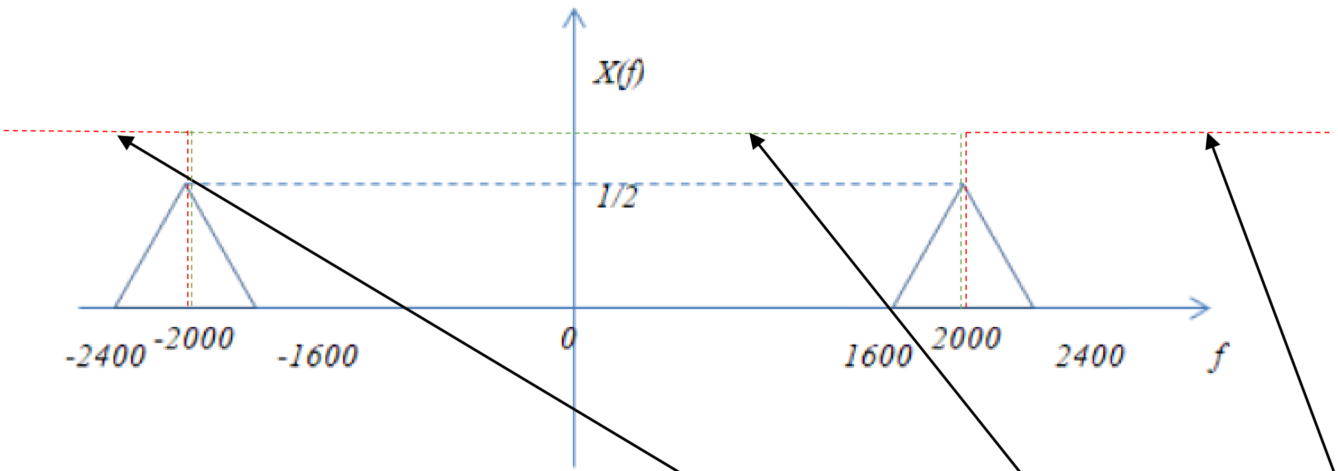
(α) $x(t) = 400\sin c^2(400t) \xleftrightarrow{F} tri\left(\frac{f}{400}\right) = X(f)$



(β) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz.

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cdot\cos(2\pi 2000t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(f-2000) + X(f+2000)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{tri\left(\frac{f-2000}{400}\right) + tri\left(\frac{f+2000}{400}\right)\right\}$$



(γ)

Για τη λήψη της κάτω πλευρικής ζώνης:

Βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f) = rect\left(\frac{f}{4000}\right)$ και κρουστική απόκριση

$$h(t) = 4000\sin c(4000t)$$

Για τη λήψη της άνω πλευρικής ζώνης:

Υψιπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{4000}\right)$ και κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t) - 4000\sin c(4000t)$$

ΕΞ 2015Β /Θ1

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Η έξοδος ενός διαμορφωτή AM είναι το σήμα: $x_{AM} = 5\cos^2(2000\pi t)\cos(6000\pi t)$

α) Αναγνωρίστε το σήμα πληροφορίας $x(t)$ και το φέρον στην παραπάνω έκφραση. ***(5 μονάδες)***

β) Να υπολογίσετε και να απεικονίσετε τα φάσματα πλάτους του φέροντος, του σήματος πληροφορίας και του διαμορφωμένου κατά AM σήματος. ***(8 μονάδες)***

γ) Να υπολογίσετε το δείκτη διαμόρφωσης μ. ***(7 μονάδες)***

(Σύνολο μονάδων 20)

Σκεπτικό: Θέλουμε να φέρουμε την έκφραση του σήματος στη μορφή σήματος AM, δηλαδή, Acos(2πfct)[1+x(t)]

α) Το διαμορφωμένο σήμα γράφεται με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2A\right)\right]$$

ως εξής

$$x_{AM} = 5\cos^2\left(2000\pi t\right)\cos\left(6000\pi t\right) = \frac{5}{2}\left[1+\cos\left(4000\pi t\right)\right]\cos\left(6000\pi t\right)$$

Άρα το σήμα πληροφορίας είναι το

$x = \cos\left(4000\pi t\right) = \cos\left(2\pi 2000t\right)$ και το φέρον είναι το

$$x_c = \frac{5}{2}\cos\left(6000\pi t\right) = \frac{5}{2}\cos\left(2\pi 3000t\right)$$

β) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος πληροφορίας είναι

$$G(f)=\Im\left[x(t)\right]=\frac{1}{2}\left[\delta(f-2000)+\delta(f+2000)\right]$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του φέροντος είναι

$$G_c(f)=\Im\left[x_c(t)\right]=\frac{5}{4}\left[\delta(f-3000)+\delta(f+3000)\right]$$

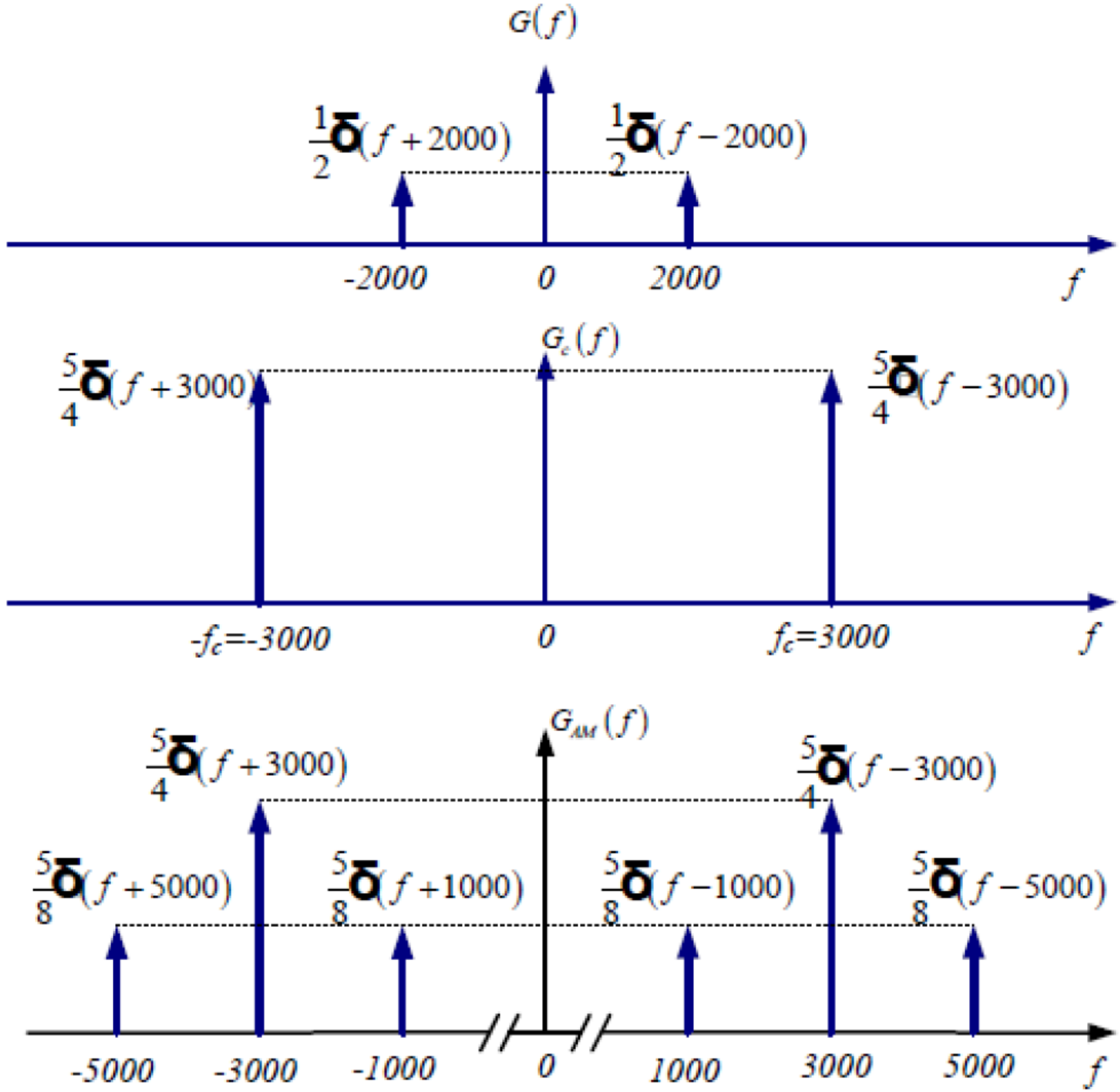
Ο μετασχηματισμός Fourier του διαμορφωμένου σήματος είναι

$$G_{AM}(f)=\frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]+\frac{A_c}{2}\left[G(f-f_c)+G(f+f_c)\right]$$

$$=\frac{5}{4}\left[\delta(f-3000)+\delta(f+3000)\right]+\frac{5}{8}\left\{\begin{bmatrix}\delta(f-2000-3000)+\delta(f+2000-3000)+\\ \delta(f-2000+3000)+\delta(f+2000+3000)\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\frac{5}{4}\left[\delta(f-3000)+\delta(f+3000)\right]+\frac{5}{8}\left\{\begin{bmatrix}\delta(f-5000)+\delta(f-1000)+\\ \delta(f+1000)+\delta(f+5000)\end{bmatrix}\right\}$$

Η απεικόνιση του φάσματος των σημάτων ακολουθεί


$G(f)$
$\frac{1}{2}\delta(f+2000)$
$\frac{1}{2}\delta(f-2000)$
-2000
0
2000
f
$G_c(f)$
$\frac{5}{4}\delta(f+3000)$
$\frac{5}{4}\delta(f-3000)$
$-f_c=-3000$
0
$f_c=3000$
f
$G_{AM}(f)$
$\frac{5}{4}\delta(f+3000)$
$\frac{5}{4}\delta(f-3000)$
$\frac{5}{8}\delta(f+5000)$
$\frac{5}{8}\delta(f+1000)$
$\frac{5}{8}\delta(f-1000)$
$\frac{5}{8}\delta(f-5000)$
-5000
-3000
-1000
0
1000
3000
5000
f

Δείτε και τη διαφάνειες 17,19

γ) Για να ανακτηθεί ένα σήμα πληροφορίας το οποίο έχει διαμορφωθεί κατά τα ΑΜ Παρατηρούμε ότι για το σήμα πληροφορίας ισχύει ότι $|x(t)| \le 1$, και μπορούμε να γράψουμε το διαμορφωμένο σήμα στη μορφή

$$x_{AM}(t) = \frac{5}{4}\left(1+\cos\left(4000\pi t\right)\right)\cos\left(6000\pi t\right) = A(t)\cos\left(6000\pi t\right)$$

ο δείκτης διαμόρφωσης είναι

$$\mu = \frac{\max\left[A(t)\right]-\min\left[A(t)\right]}{\max\left[A(t)\right]+\min\left[A(t)\right]} = \frac{\frac{5}{2}-0}{\frac{5}{2}+0} = 1$$

Παράδειγμα Octave -DSB

```
clear
fc=1000  %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platous shmatos plhroforias
xdsb=xm.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos dsb
[f,ff]=fourier_transform(xdsb,Ts); % ypologismos fasmatos shmatos dsb
figure
plot(t,xdsb);title('Shma DSB ');%apeikonish shmatos dsb sto xrono
figure
plot(f,ff);title('Fasma DSB ');%apeikonish fasmatos dsb
xx=xdsb.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t);%sygxronh apodiamorfwsh dsb
[f,ff]=fourier_transform(xx,Ts);% ypologismos fasmatos apodiamorfwmenou shmatos
%% Prosoxh: Den exoun apokopei oi oroi sta +/- 2fc
 title('Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc');
figure
plot(f,ff);% apeikonish apodiamorfwmenou shmatos me tis 2 zwnes sta /-2fc
hlp=(2./Ac.^2).*rectpulse(f,0,200); %synarthsh metaforas bathyperatou filtro sta +/-100Hz
figure;
plot(f,hlp,'r');%apeikonish synarthshs metaforas bathyperatou filtroy
title('Synarthsh metaforas filtrou');
gg=ff.*hlp; %ypologismos exodou tou filtrou
figure
plot(f,gg,'k'); %apeikonish lhfthentos apodiamorfwmenou shmatos
title('Fasma apodiamorfwmenou shmatos');
```

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/3η
ΟΣΣ/25.01.2020/Ν.Δημητρίου

$$x(t) = 50\,\mathrm{sinc}(50t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right)$$

$$x_c(t) = 200\cos(2\pi\, 1000\, t) \leftrightarrow 100\left[\delta(f-1000)+\delta(f+1000)\right]$$

$$x_{DSB}(t) = x_c(t)\cdot x(t)$$

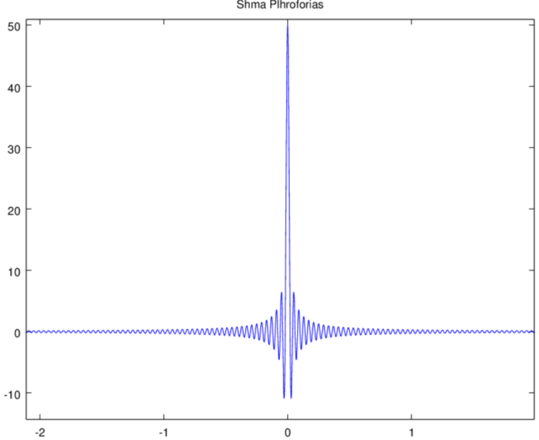
$$X_{DSB}(f) = 100\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-1000}{50}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f+1000}{50}\right)\right]$$

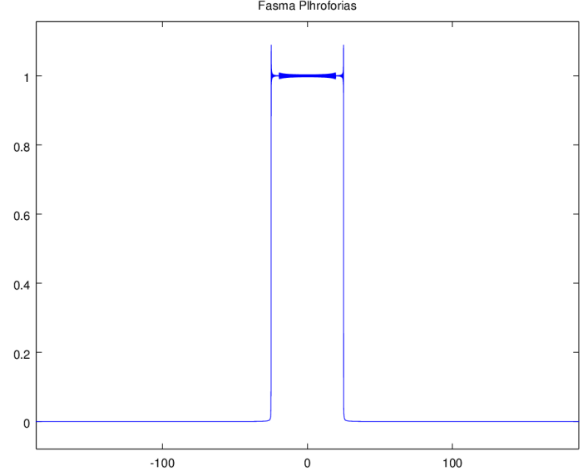
$$X_r(f) = 100\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-1000}{50}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f+1000}{50}\right)\right] *$$

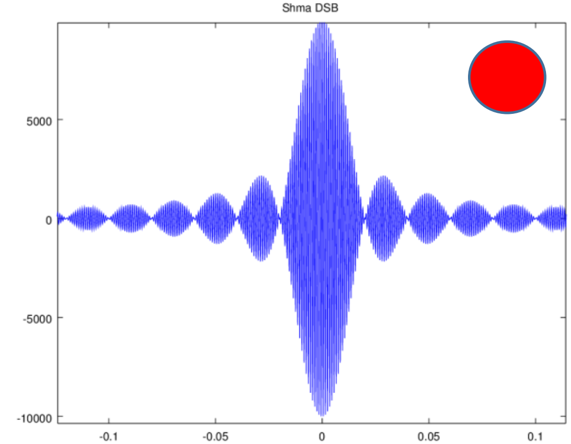
$$* 100\left[\delta(f-1000)+\delta(f+1000)\right] =$$

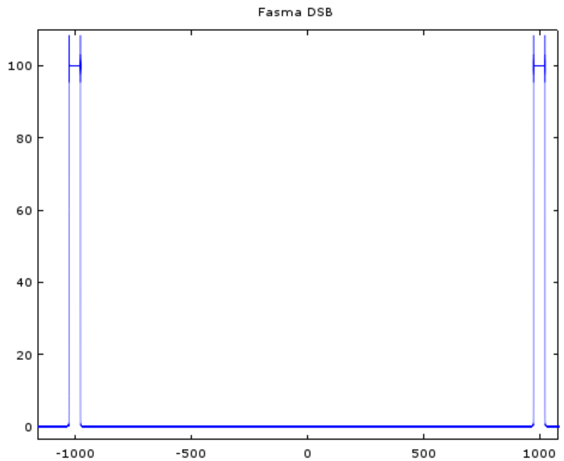
$$= 10.000\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-2000}{50}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f+2000}{50}\right)\right]$$

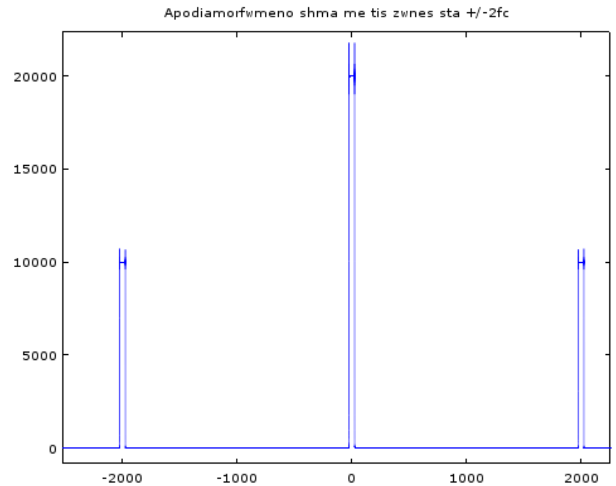
$$= 20.000\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right)+10.000\left(\mathrm{rect}\left(\frac{f-2000}{50}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f+2000}{50}\right)\right)$$

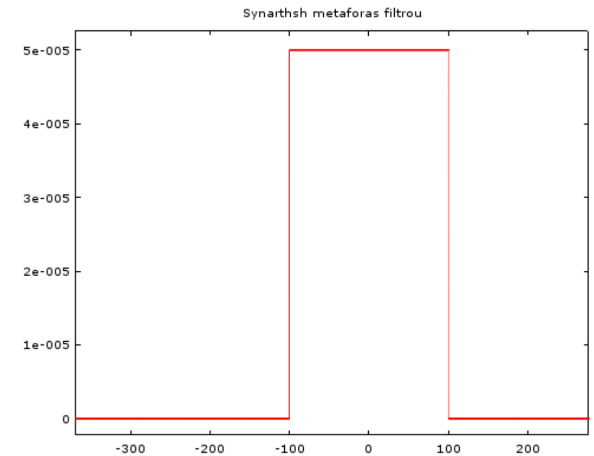

Shma Plhroforias
50
40
30
20
10
0
-10
-2
-1
0
1

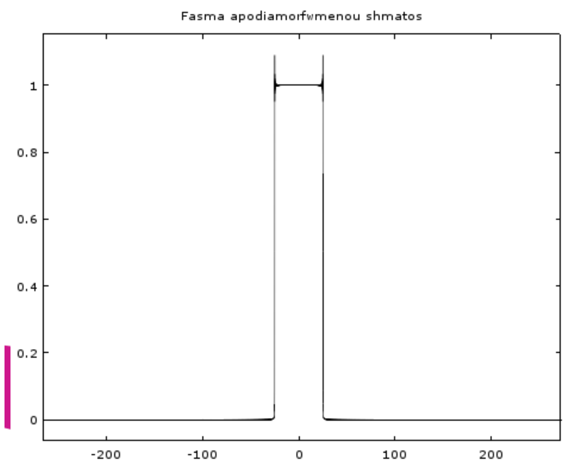

Fasma Plhroforias
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-100
0
100


Shma DSB
5000
0
-5000
-10000
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1


Fasma DSB
100
80
60
40
20
0
-1000
-500
0
500
1000

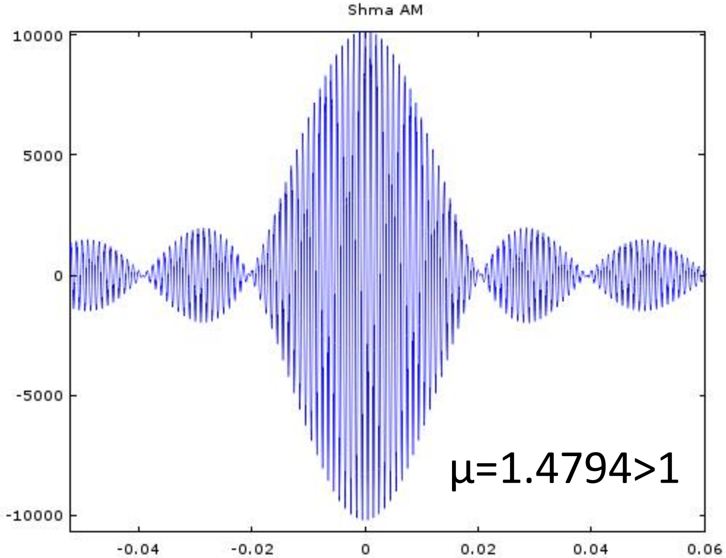

Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc
20000
15000
10000
5000
0
-2000
-1000
0
1000
2000

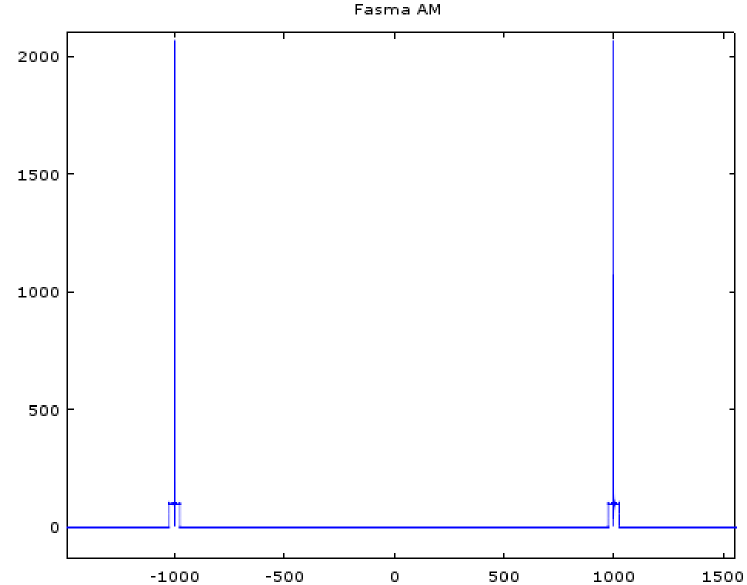

Synarthsh metaforas filtrou
5e-005
4e-005
3e-005
2e-005
1e-005
0
-300
-200
-100
0
100
200

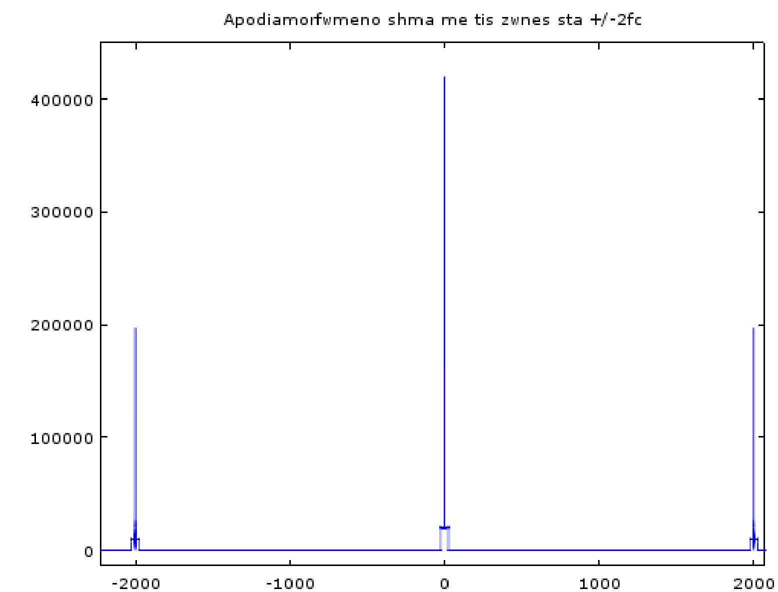

Fasma apodiamorfwmenou shmatos
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-200
-100
0
100
200

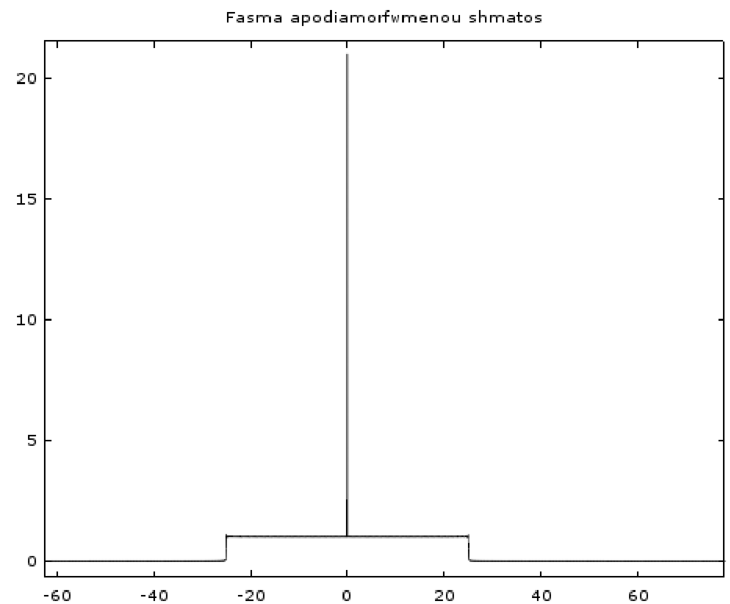
```
clear
fc=1000  %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platous shmatos plhroforias

xAM=(1+xm).*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos am
[f,ff]=fourier_transform(xAM,Ts); % ypologismos fasmatos shmatos am
figure
plot(t,xAM);title('Shma AM ');%apeikonish shmatos am sto xrono
figure
plot(f,ff);title('Fasma AM ');%apeikonish fasmatos am
xx=xAM.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t);%sygxronh apodiamorfwsh am
[f,ff]=fourier_transform(xx,Ts);% ypologismos fasmatos apodiamorfwmenou shmatos
%% Prosoxh: Den exoun apokopei oi oroi sta +/- 2fc
figure
plot(f,ff);% apeikonish apodiamorfwmenou shmatos me tis 2 zwnes sta /-2fc
title('Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc');
hlp=(2./Ac.^2).*rectpulse(f,0,200); %synarthsh metaforas bathyperatou filtro sta +/-100Hz
figure;
plot(f,hlp,'r');%apeikonish synarthshs metaforas bathyperatou filtroy
title('Synarthsh metaforas filtrou');
gg=ff.*hlp; %ypologismos exodou tou filtrou
figure
plot(f,gg,'k'); %apeikonish lhfthentos apodiamorfwmenou shmatos
title('Fasma apodiamorfwmenou shmatos');
```

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/3η
ΟΣΣ/25.01.2020/Ν.Δημητρίου

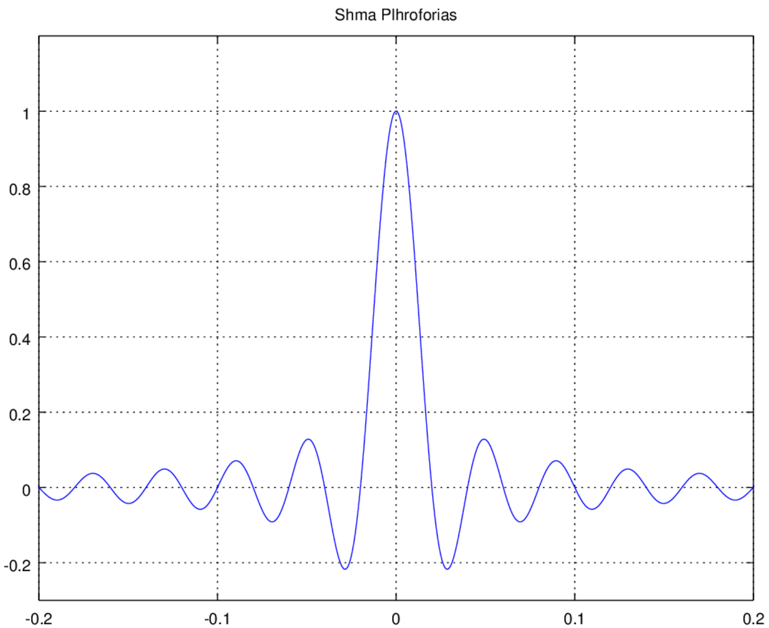

Shma AM
10000
5000
0
-5000
-10000
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
μ=1.4794>1

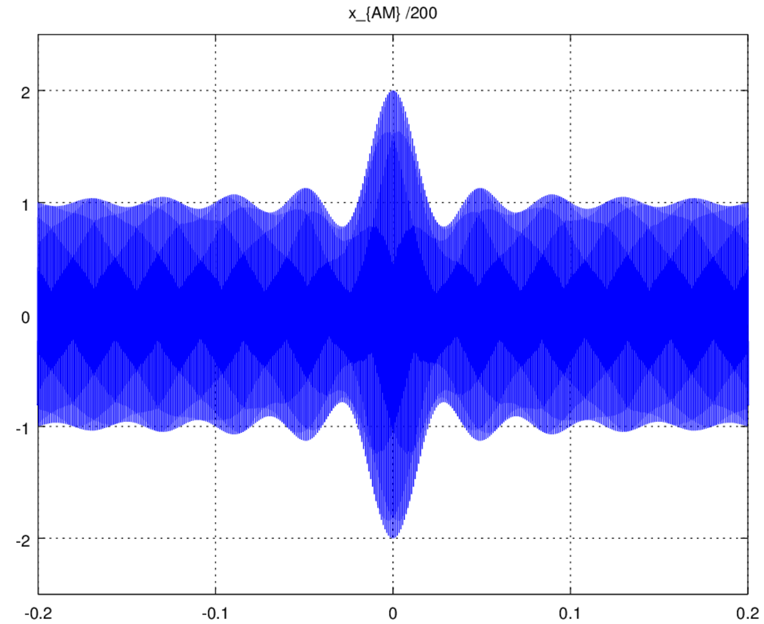

Fasma AM
2000
1500
1000
500
0
-1000
-500
0
500
1000
1500


Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc
400000
300000
200000
100000
0
-2000
-1000
0
1000
2000


Fasma apodiamorfwmenou shmatos
20
15
10
5
0
-60
-40
-20
0
20
40
60

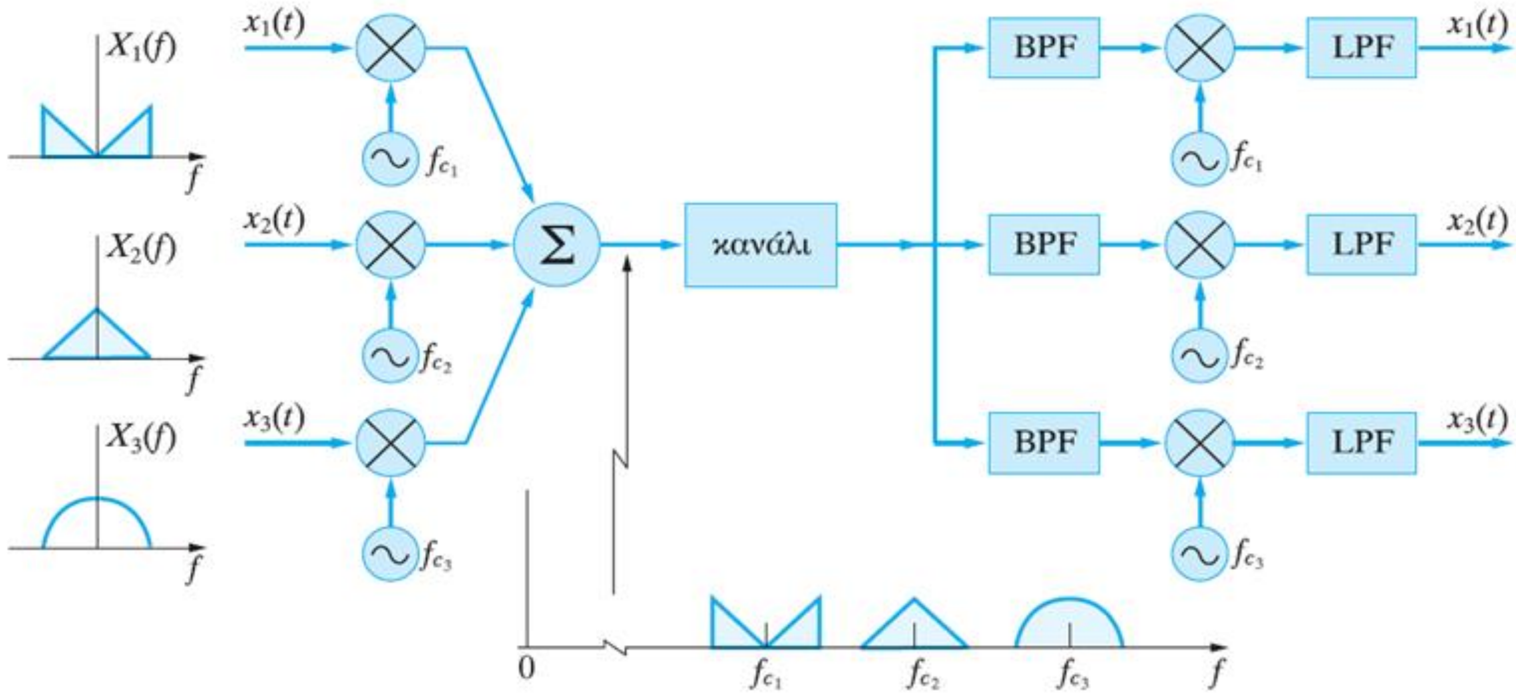
```
clear
fc=1000  %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=1.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
figure;
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
title('Shma Plhroforias’);
axis([-0.2 0.2 -0.3 1.2])

xAM=(1+xm).*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos am
figure
plot(t,xAM./200);title('Shma AM / 200');%apeikonish shmatos am sto xrono
axis([-0.2 0.2 -2.5 2.5])
```


Shma Plhroforias
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2


x_{AM} /200
2
1
0
-1
-2
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2

μ=0.43742<1

Πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (Frequency Division Multiplexing – FDM)



Έστω τρία σήματα μηνύματος πεπερασμένου εύρους ζώνης ($x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$), τα οποία θέλουμε να μεταδώσουμε ταυτόχρονα πάνω από το ίδιο κανάλι βασικής ζώνης. Για να το επιτύχουμε αυτό, μετατοπίζουμε το φάσμα του κάθε σήματος μηνύματος γύρω από τις τρεις διαφορετικές συχνότητες $f_{c_1}, f_{c_2}, f_{c_3}$, αντίστοιχα. Οι τιμές των $f_{c_1}, f_{c_2}, f_{c_3}$ έχουν επιλεγεί κατάλληλα, έτσι ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη των φασμάτων των σημάτων μηνύματος.

Γωνιακή Διαμόρφωση

- Στη γωνιακή διαμόρφωση, το διαμορφωμένο σήμα έχει τη μορφή

$$x_c(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

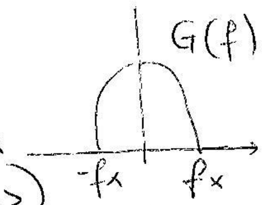
- Η φασματική γωνία φ(t) είναι συνάρτηση του σήματος μηνύματος x(t)
- Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι γωνιακής διαμόρφωσης, οι οποίοι διαφέρουν στη σχέση μεταξύ των φ(t) και x(t)
  - Διαμόρφωση φάσης (phase modulation – PM)
  - Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency modulation – FM)

Στιγμιαία γωνία $= \Theta(t)$ IV

Διαμορφώσεις γωνίας

$$X_A = A_c \cos\left[\underbrace{2\pi f_c t + \phi(t)}\right]$$

↑ φάση (περιέχει σήμα πληροφορίας)



$x(t) \xleftrightarrow{F} G(f)$

σταθ. απόκλ. φάσης

$\varphi(t) = K_p\, x(t)$ Διαμόρφωση φάσης (Phase Modulation - PM)

$\varphi(t) = K_f \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$ Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency Modulation) - FM.

σταθ. απόκλ. συχνότητας

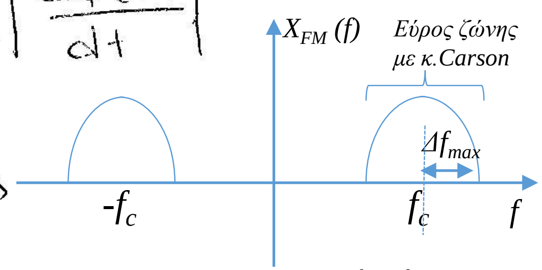
Στιγμιαία κυκλική συχνότητα: $\omega(t) = \dfrac{d\Theta(t)}{dt} = 2\pi f_c + \dfrac{d\phi(t)}{dt}$ (rad/sec)

Στιγμιαία συχνότητα: $f(t) = \dfrac{\omega(t)}{2\pi} = f_c + \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\phi(t)}{dt}$ (Hz)

Στιγμιαία απόκλιση συχνότητας: $\Delta f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\phi(t)}{dt}$

Λόγος απόκλισης: $D = \dfrac{\max|\Delta f(t)|}{f_x} = \dfrac{1}{2\pi f_x}\max\left|\dfrac{d\phi(t)}{dt}\right|$

↑ εύρος ζώνης σήματος πληροφορίας



Προσεγγιστικό σχήμα

Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος:

$$W \simeq 2(D+1)\cdot f_x \quad \text{Κανόνας Carson.}$$

ΕΞ2018Β

Ερώτημα δ (FM)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σήμα $x(t) = 400sinc^2(400t)$

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του x(t).

(β) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

(γ) Για τη λήψη της άνω πλευρικής του διαμορφωμένου σήματος χρησιμοποιείται υψιπερατό φίλτρο, ενώ για τη λήψη της κάτω πλευρικής χρησιμοποιείται βαθυπερατό φίλτρο. Να υπολογιστούν οι κρουστικές αποκρίσεις των 2 φίλτρων.

(δ) Το x(t) διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100KHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 8\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του.

Εφαρμογή κανόνα Carson

$$(\delta)\ \ x_{FM}(t) = \cos\left(2\pi 100000t + 8\pi \int_{-\infty}^{t} 400 \sin c^2(400\lambda)\, d\lambda\right)$$

Λόγος απόκλισης:

Μέγιστη απόλυτη τιμή στο πεδίο του χρόνου

$$D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_x} = \frac{\frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|x(t)\right|\right)}{f_x} = \frac{\frac{8\pi}{2\pi}400}{400} = 4$$

Εύρος ζώνης στο πεδίο της συχνότητας

$$W = 2(D+1)f_x = 2(4+1)400Hz = 4KHz$$

ΘΕΜΑ 2

Υποθέστε ένα σήμα πληροφορίας είναι της μορφής $m(t)=10sinc(600t)$ και διαμορφώνει κατά FM το φέρον $c(t)=100\cos(2\pi f_c t)$. Αν ο λόγος απόκλισης είναι $D=8$,

<u>Ερώτηση 1η:</u> Δώστε τη μορφή του διαμορφωμένου σήματος.

<u>Ερώτηση 2η:</u> Υπολογίστε τη μέγιστη απόκλιση συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος.

<u>Ερώτηση 3η:</u> Υπολογίστε το εύρος ζώνης μετάδοσης και την ισχύ του διαμορφωμένου σήματος

<u>Ερώτηση 4η:</u> Ποιο θα ήταν το εύρος ζώνης μετάδοσης αν το σήμα πληροφορίας διαμόρφωνε το φέρον κατά AM

A) Εχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|m(t)\right|\right),\text{ ή } k_f = \frac{2\pi\Delta f_{\max}}{\max\left(\left|m(t)\right|\right)}$$

Το διαμορφωμένο FM σήμα γράφεται:

$$y_{FM}(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)d\lambda\right) = 100\cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} 10sinc(600\lambda)d\lambda\right)$$

B) Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι

$\Delta f_{\max} = f_m D$, όπου f_m το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας.

Όμως $F\left[10sinc(600t)\right] = \frac{10}{600}\Pi\left(\frac{f}{600}\right)$, άρα το εύρος ζώνης είναι $f_m = 300$ και η μέγιστη απόκλιση συχνότητας

$$\Delta f_{\max} = f_m D = 300 \cdot 8 = 2400\,\text{Hz}$$

C) Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W = 2(D+1)f_m$$

Συνεπώς το εύρος ζώνης του FM σήματος είναι:

$$W = 2 \cdot 9 \cdot 300 = 5400 \text{ Hz}$$

Η ισχύς του διαμορφωμένου είναι η ισχύς ουσιαστικά ενός συνημιτονοειδούς σήματος με πλάτος 100, άρα

$$P = \frac{100^2}{2} = 5000$$

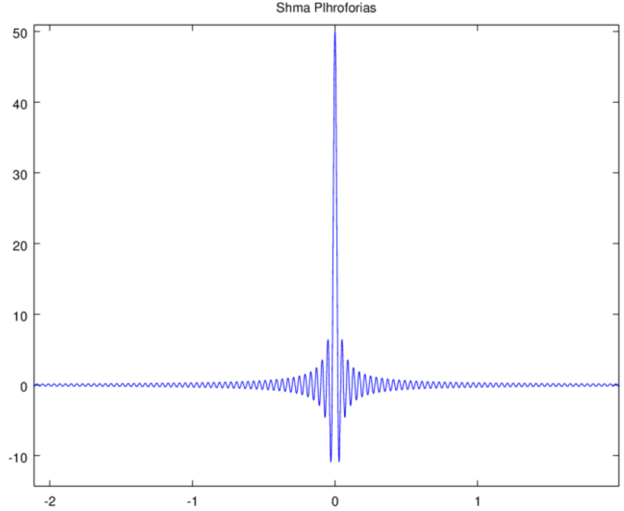
Ισχύς συνημιτονοειδούς σήματος Acos(2πfct+φ): $P=0.5*A^2$ (Watt)

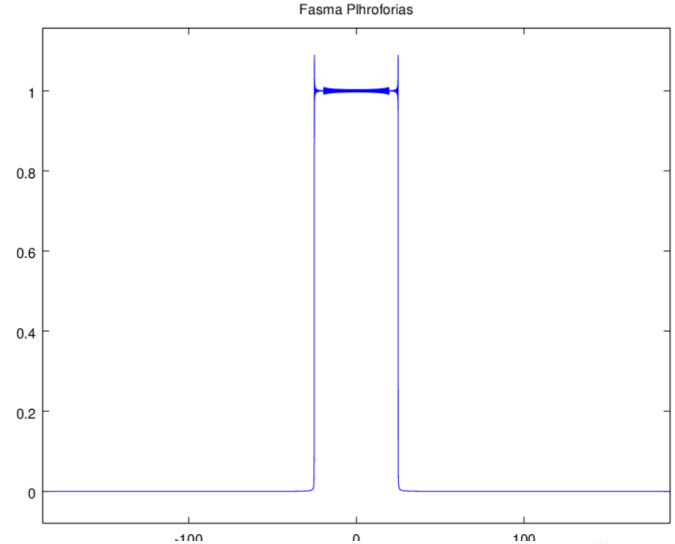
Δ) Το εύρος ζώνης στην περίπτωση διαμόρφωσης AM θα ήταν

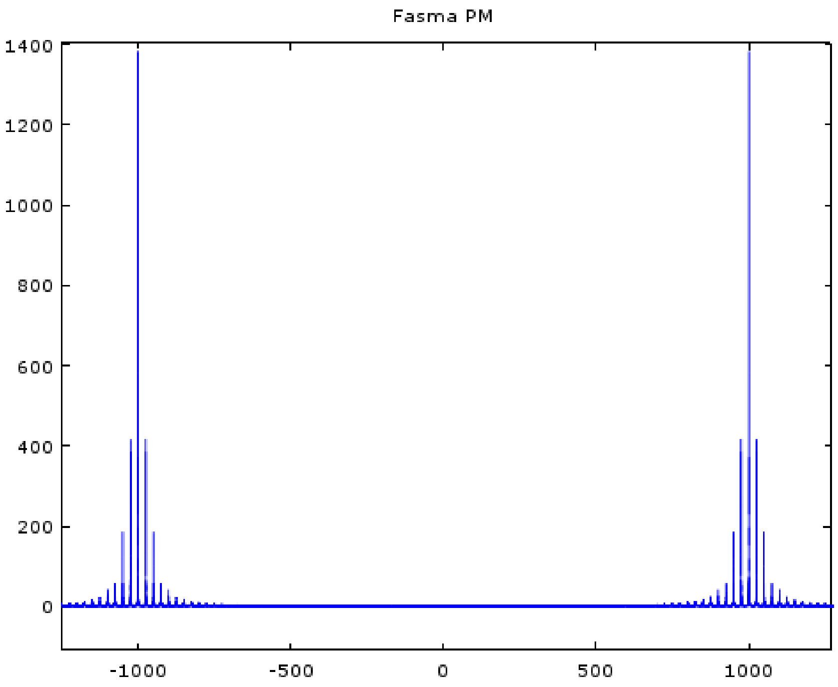
$$W = 2f_m = 600 \text{ Hz}$$

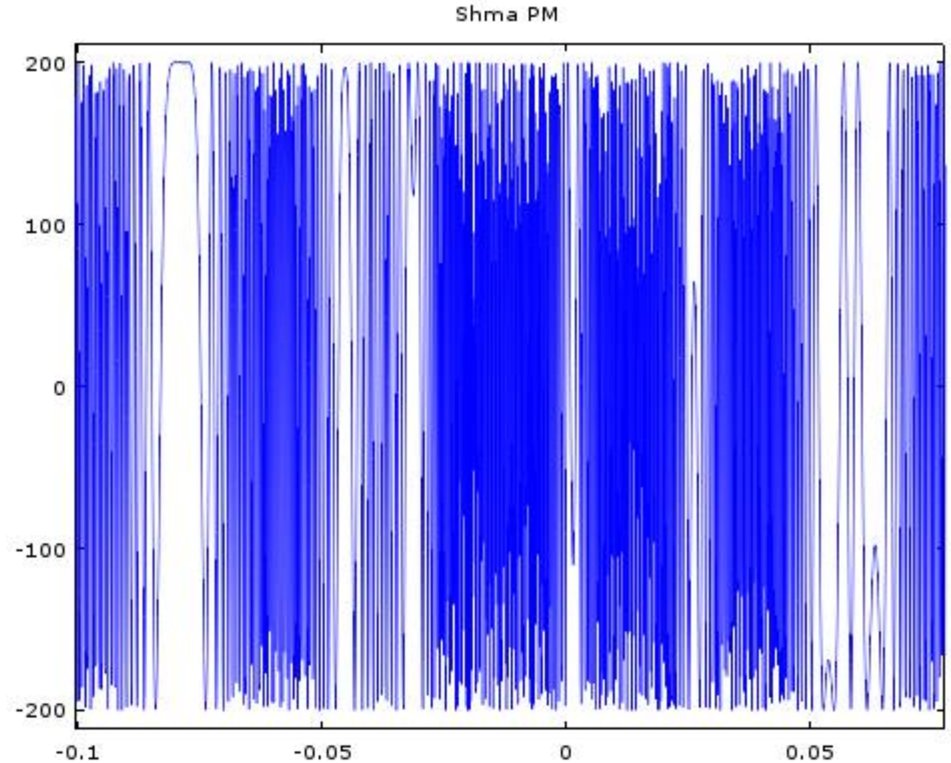
Παράδειγμα Octave

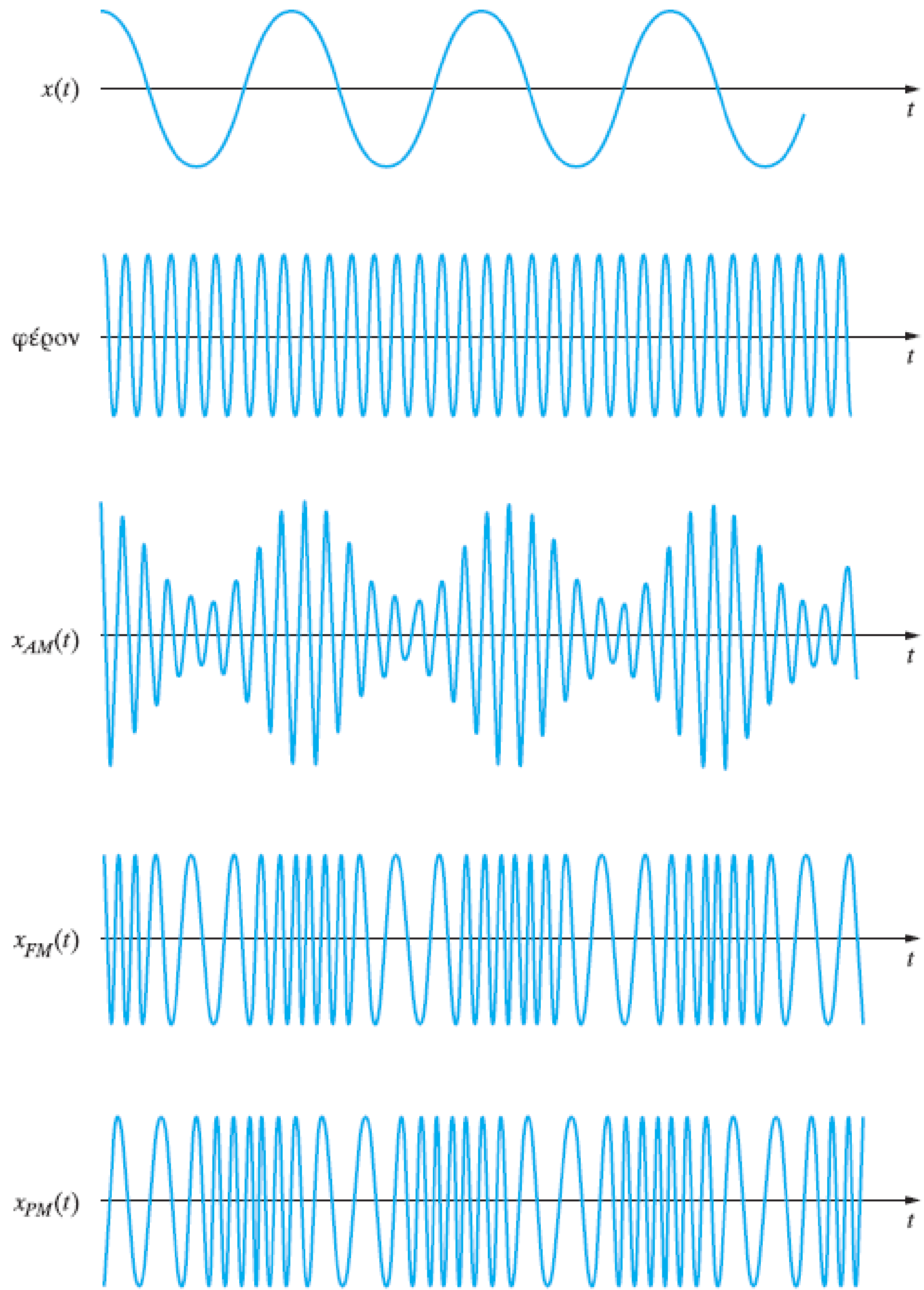
```
clear
fc=1000  %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platous shmatos plhroforias
xpm=Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t+10.*xm); % Shma PM me kp=10
[f,ff]=fourier_transform(xpm,Ts); %ypologismos fasmatos PM
figure
plot(f,ff);title('Fasma PM '); %apeikonish fasmatos PM
figure
plot(t,xpm);title('Shma PM '); %Apeikonish shmatos PM sto xrono
```


Shma Plhroforias


Fasma Plhroforias


Fasma PM


Shma PM



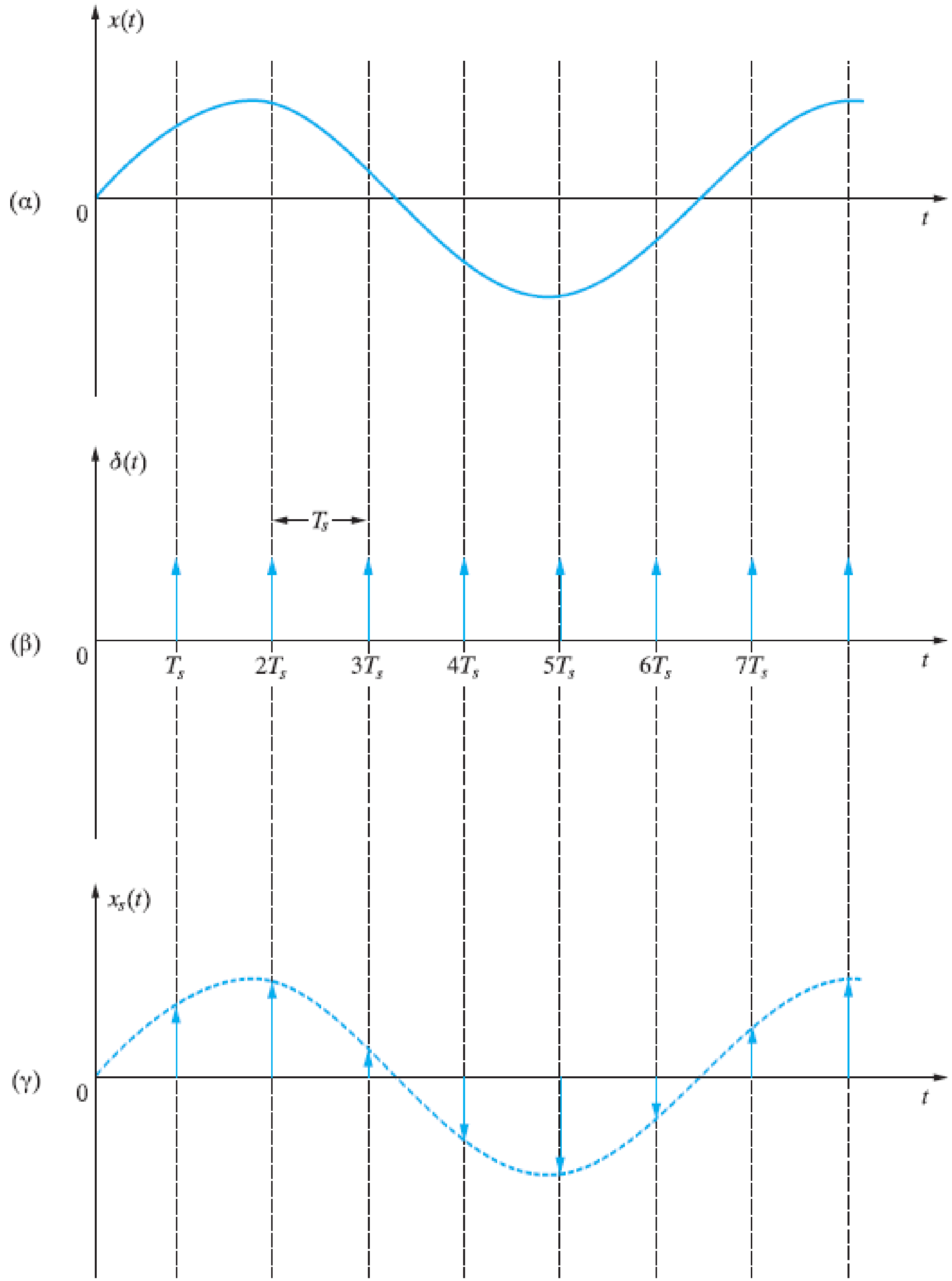
Σχήμα 3.15

Τα σήματα AM, FM και PM που δημιουργούνται για τη μετάδοση ενός ημιτονικού σήματος μηνύματος.

Βασικές Αρχές Δειγματοληψίας

Δειγματοληψία

- Η διαδικασία κατά την οποία ένα σήμα συνεχούς χρόνου μετατρέπεται σε σήμα διακριτού χρόνου.
- Ερωτήματα που τίθενται
  - ρυθμός δειγματοληψίας (φάσμα)
  - τρόπος ανακατασκευής του αρχικού σήματος από τα δείγματα (συνάρτηση παρεμβολής)
- Και στα δύο ερωτήματα απαντά το *θεώρημα της δειγματοληψίας* που διατυπώθηκε από τον Claude Shannon το 1949, ο οποίος στηρίχθηκε στην εργασία του H. Nyquist, που έδωσε το ρυθμό δειγματοληψίας.



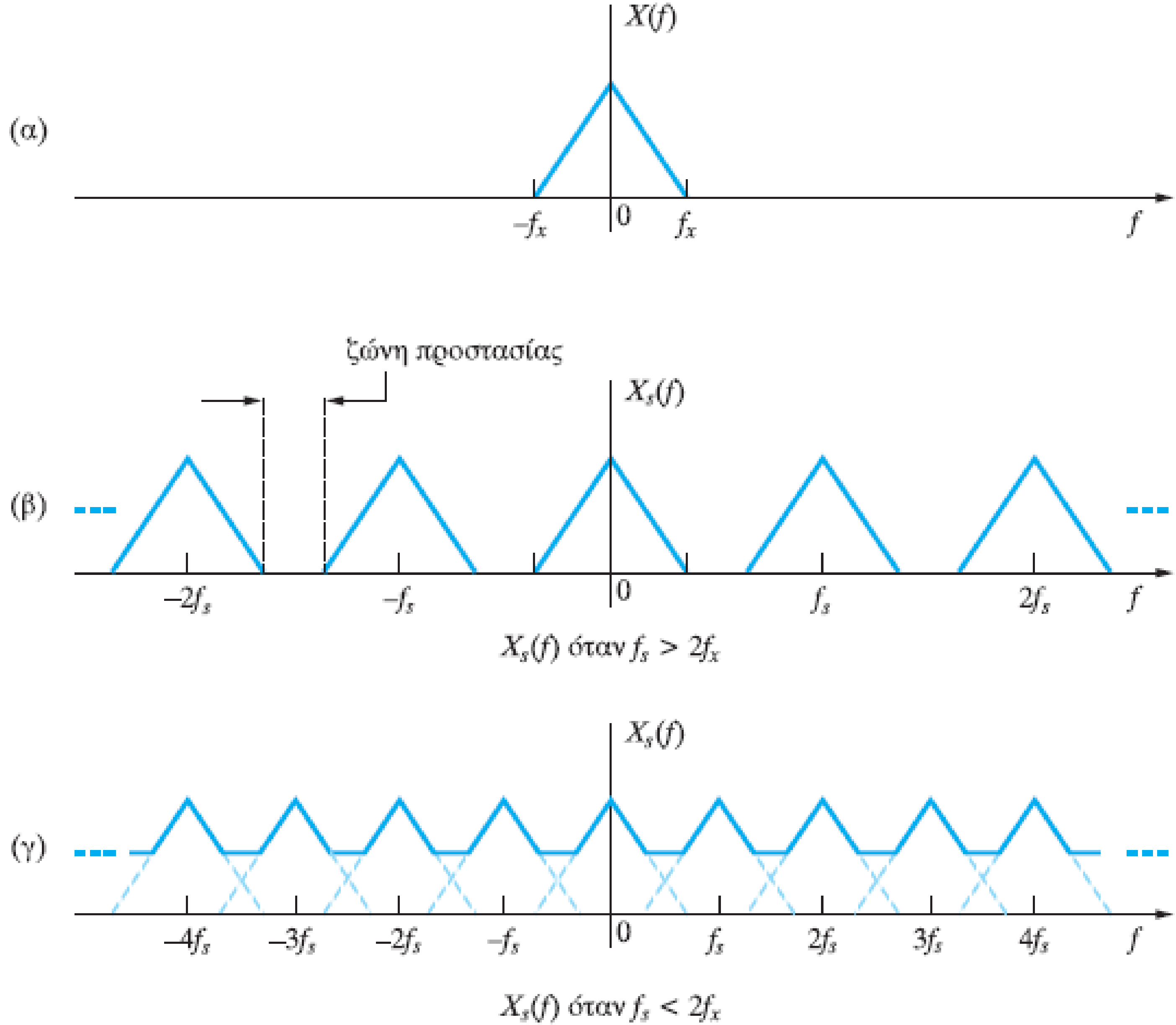
Σχήμα 4.1

Η πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο του χρόνου:
(α) το αρχικό σήμα $x(t)$,
(β) μια σειρά στιγμιαίων παλμών $\delta(t)$, με περίοδο T_s δευτερόλεπτα, και
(γ) το διακριτό σήμα $x_s(t) = x(nT_s)$, $n = 1, 2, ...,$ που προκύπτει από τη δειγματοληψία.

Ρυθμός Δειγματοληψίας Nyquist

- Ο ρυθμός του Nyquist είναι ο ελάχιστος επιτρεπτός ρυθμός δειγματοληψίας ενός αναλογικού σήματος που εξασφαλίζει την ορθή επανάκτηση του αρχικού σήματος από τα δείγματά του.
- Αν συμβολίσουμε με f_s το ρυθμό δειγματοληψίας ενός σήματος με περιορισμένο εύρος ζώνης, όπου η μέγιστη συχνότητα στο φάσμα του είναι f_x, τότε για να μπορούμε να ανακτήσουμε πλήρως και χωρίς σφάλματα το αρχικό σήμα, θα πρέπει

$$f_s \geq 2 f_x$$



Σχήμα 4.2
Η πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο συχνοτήτων: (α) το φάσμα $X(f)$ του σήματος $x(t)$, (β) το φάσμα $X_s(f)$ του σήματος $x_s(t)$, που προκύπτει από τη δειγματοληψία, όταν $f_s > 2f_x$, και (γ) το φάσμα $X_s(f)$, όταν $f_s < 2f_x$

Δειγματοληψία

Αναλογικό σήμα $x(t) \xrightarrow[T_s]{\text{περίοδος δειγματοληψίας}}$ $x(t) = x_s(n)$

$t \to nT_s$ $\quad$ n ακέραιος

Συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = \frac{1}{T_s}$

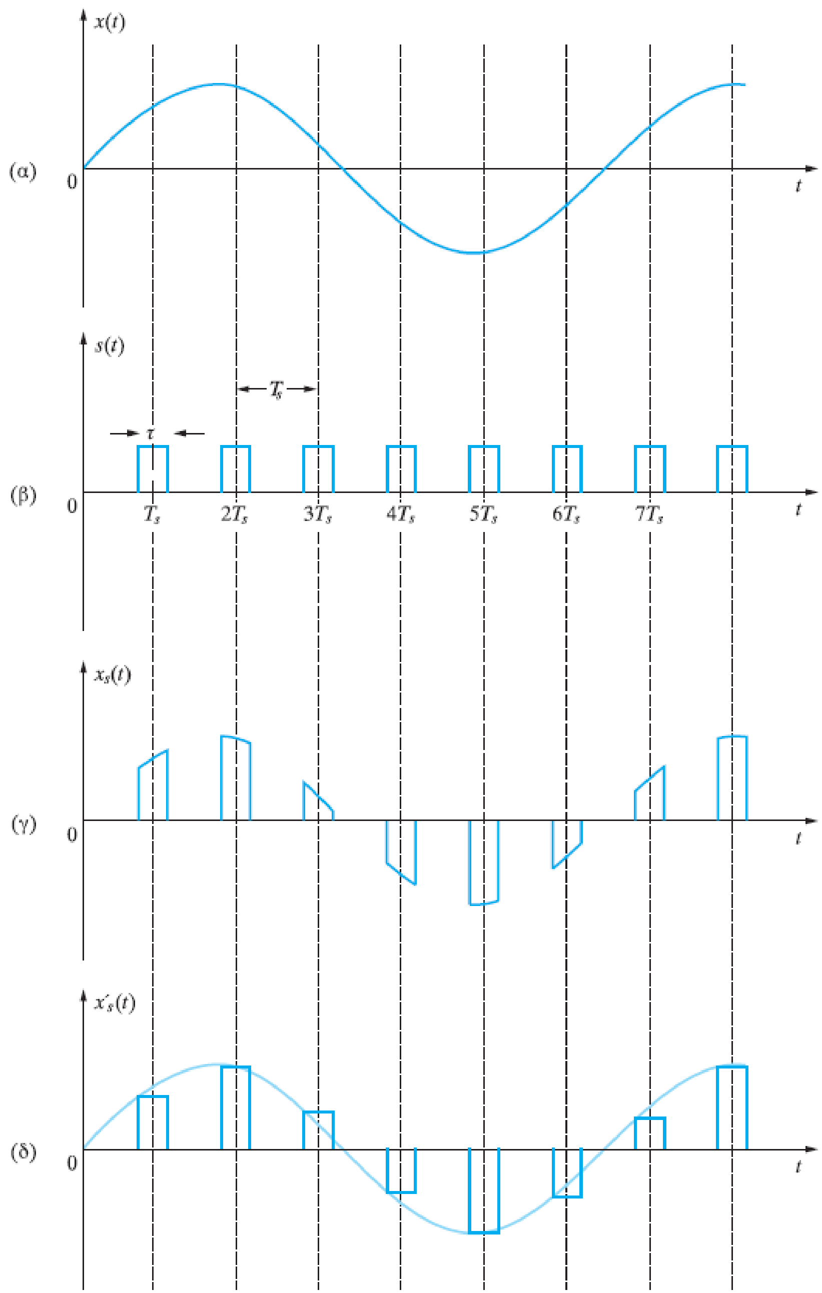
$$x_s(n) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) * \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{m}{T_s}\right)$$

$$= f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)$$

Κριτήριο Nyquist

- Για σήματα περιορισμένου εύρους ζώνης $\left(|X(f)| \neq 0,\ |f| \leq f_x\right)$

  $f_s \geq f_{s,min} = 2f_x$ για ανακατασκευή αναλογικού σήματος χωρίς παραμόρφωση



Σχήμα 4.3

Φυσική δειγματοληψία: (α) το αρχικό σήμα x(t), (β) η συνάρτηση δειγματοληψίας s(t) με παλμούς πεπερασμένου εύρους τ, (γ) το σήμα $x_s(t)$ της φυσικής δειγματοληψίας με δείγματα μεταβλητού πλάτους και (δ) το σήμα $x_s'(t)$ με δείγματα σταθερού πλάτους

ΕΞ2018Β

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται το σήμα $x(t) = cos(2\pi 200t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα και τη δειγματοληψία (με βάση το κριτήριο Nyquist) για τα ακόλουθα σήματα:

(α) $a(t) = \left[x(t\sqrt{2})\right]^2$

(β) $b(t) = x(t) + sinc(400t)$

(γ) $c(t) = [x(4t) + sinc^2(100t)] * [\delta(t) - 300sinc(300t)]$ (όπου το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη).

(δ) $e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot sinc(400t)$

(α) $a(t)=x^2\left(t\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+\cos(2\pi 400\sqrt{2}\cdot t)}{2}$ με τη βοήθεια της ιδιότητας $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1+\cos(\theta)}{2}$)

Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T}=\dfrac{1}{400\sqrt{2}}\sec=\dfrac{\sqrt{2}}{800}\sec$

Συχνότητα $f=400\sqrt{2}Hz$

Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_{s,\min}=800\sqrt{2}Hz$

(β)

$$b(t)=x(t)+\sin c(400t)=\cos(2\pi 200t)+\sin c(400t)\xleftrightarrow{F}c(t)=\frac{1}{2}\{\delta(f-200)+\delta(f+200)\}+\frac{1}{400}rect\left(\frac{f}{400}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα μη περιοδικό

Μέγιστη συχνότητα 200Hz, άρα ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min}=400Hz$

(γ)

$$c(t)=\left[x(4t)+\sin c^2(100t)\right]*\left[\delta(t)-300\sin c(300t)\right]=$$

$$=\left[\cos(2\pi 800t)+\sin c^2(100t)\right]*\left[\delta(t)-300\sin c(300t)\right]\overset{F}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\longleftrightarrow}\left\{\frac{1}{2}\{\delta(f-800)+\delta(f+800)\}+\frac{1}{100}tri\left(\frac{f}{100}\right)\right\}\cdot\left\{1-rect\left(\frac{f}{300}\right)\right\}$$

Εδώ έχουμε υψιπερατό φίλτρο που αφήνει να περάσουν οι παλμοί δ στα +/- 800Hz

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T}=\dfrac{1}{800}\sec$

Συχνότητα $f=800Hz$

Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_{s,\min}=1600Hz$

(δ)

$$e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot \sin c(400t) = 1 + \cos(2\pi 200t) \cdot t \cdot \frac{\sin(400\pi t)}{400\pi t} = 1 + \frac{1}{800\pi} \sin\left(2\pi 400t\right)$$ (με βάση την ιδιότητα sin(2θ)=2sin(θ)cos(θ))

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \frac{1}{400}\sec$

Συχνότητα $f = 400Hz$

Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_{s,\min} = 800Hz$

ΕΞ2018Α

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παρακάτω σήματα:

$x(t)=\cos(2\pi 100t)$

$y(t)=\cos(50t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα και τη δειγματοληψία (με το κριτήριο Nyquist) υπολογίζοντας αντίστοιχα την περίοδο και τη συχνότητα δειγματοληψίας (αν υπάρχουν) για τα ακόλουθα σήματα:

(α) $a(t)=1-x(t)-y(t)$

(β) $b(t)=\delta(t)+x\left(\frac{t}{\pi}\right)+y(t)$

(γ) $c(t)=1+x(t)\cdot y(\pi t)$

(δ) $e(t)=c(t)*\sin c(200t)$

(α) $a(t)=1-x(t)-y(t)$

$$a(t)=1-x(t)-y(t)=1-\cos(2\pi 100t)-\cos(2\pi\frac{50}{2\pi}t)$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{2\pi}{50}}=\frac{1}{4\pi}, \text{άρρητος άρα μη περιοδικό}$$

$$f_{\max}=100Hz, \text{άρα } f_{s,\min}=200Hz$$

(β) $b(t)=\delta(t)+x\left(\frac{t}{\pi}\right)+y(t)$

$$b(t)=\delta(t)+x\left(\frac{t}{\pi}\right)+y(t)=\delta(t)+\cos\left(2\pi\frac{100}{\pi}t\right)+\cos\left(2\pi\frac{50}{2\pi}t\right)\xleftrightarrow{F}1+\frac{1}{2}\left\{\delta\left(f-\frac{100}{\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{100}{\pi}\right)\right\}+\frac{1}{2}\left\{\delta\left(f-\frac{50}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{50}{2\pi}\right)\right\}$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές (λόγω του 1^{ου} όρου σταθ = 1) άρα το σήμα είναι μη περιοδικό.
Το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης (πάλι λόγω του 1^{ου} όρου) άρα δεν δειγματίζεται κατά Nyquist.

(γ) $c(t)=1+x(t)\cdot y(\pi t)$

$$c(t)=1+x(t)\cdot y(\pi t)=1+\cos(2\pi 100t)\cdot\cos(2\pi 25t)=1+\frac{1}{2}\{\cos(2\pi 125t)+\cos(2\pi 75t)\}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{125}}{\frac{1}{75}}=\frac{3}{5}, \text{ρητός άρα περιοδικό με περίοδο } \mathrm{T}=5T_1=3T_2=\frac{1}{25}\sec$$

$$f_{\max}=125Hz, \text{άρα } f_{s,\min}=250Hz$$

(δ) $e(t)=c(t)*\sin c(200t)$

$$c(t)=1+\frac{1}{2}\{\cos(2\pi 125t)+\cos(2\pi 75t)\}\xleftrightarrow{F}C(f)=\delta(f)+\frac{1}{4}\{\delta(f-125)+\delta(f+125)\}+\frac{1}{4}\{\delta(f-75)+\delta(f+75)\}$$

$$e(t)=c(t)*\sin c(200t)\xleftrightarrow{F}C(f)\cdot\frac{1}{200}rect\left(\frac{f}{200}\right)$$

Δηλ. έχουμε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 100Hz που αποκόπτει τους παλμούς δ στα +/-125Hz και συνεπώς το φάσμα εξόδου θα είναι: $E(f)=\frac{1}{200}\left\{\delta(f)+\frac{1}{4}\{\delta(f-75)+\delta(f+75)\}\right\}$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 1/75 sec και έχει συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 150Hz

ΕΞ2017Β

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα σήματα $x(t)=\cos(2\pi 30t)$ και $y(t)=\cos(10t)$

Για τα παρακάτω σήματα να διερευνηθεί (α) η περιοδικότητα και η δειγματοληψία (με το κριτήριο Nyquist) και (β) να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) οι αντίστοιχες περίοδοι και οι ελάχιστες συχνότητες δειγματοληψίας τους:

<u>Ερώτηση 1:</u> $a(t)=1+x(t)+y(t)$

<u>Ερώτηση 2:</u> $b(t)=x(t)+y(t)\cdot rect\left(\frac{t}{10}\right)$

<u>Ερώτηση 3:</u> $c(t)=\left[x(t)+y(t)\right]*20\text{sinc}^2(20t)$

<u>Ερώτηση 4:</u> $d(t)=\text{sinc}(60t)\cdot t\cdot x(t)$

(α)

$$a(t) = 1 + x(t) + y(t) = 1 + \cos(2\pi 30t) + \cos(10t) =$$

$$= 1 + \cos(2\pi 30t) + \cos\left(2\pi \frac{10}{2\pi} t\right)$$

$$\cos(2\pi 30t)$$

Περίοδος $T_1 = \dfrac{1}{30}\,\mathrm{sec}$

$$\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)$$

$$\text{Περίοδος } T_2=\frac{2\pi}{10}\sec$$

Ο λόγος των 2 περιόδων είναι:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{2\pi}{10}}=\frac{1}{6\pi}$$

Άρρητος άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 30 Hz άρα το σήμα έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας 60Hz.

(β)

$$b(t) = \cos(2\pi 30t) + \cos\left(2\pi \frac{10}{2\pi} t\right) \cdot rect\left(\frac{t}{10}\right)$$

$$\mathrm{B}(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-30) + \delta(f+30)\right] + \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{10}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{10}{2\pi}\right)\right] * 10\mathrm{sinc}(10f) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(f-30) + \delta(f+30)\right] + \frac{1}{2}\left[10\mathrm{sinc}\left(10\left(f - \frac{10}{2\pi}\right)\right) + 10\mathrm{sinc}\left(10\left(f + \frac{10}{2\pi}\right)\right)\right]$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης άρα δεν ορίζεται συχνότητα Nyquist.

(γ)

$$c(t)=\left[x(t)+y(t)\right]*20\mathrm{sinc}^2(20t)=\left[\cos(2\pi 30t)+\cos\left(2\pi\frac{10}{2\pi}t\right)\right]*20\mathrm{sinc}^2(20t)$$

$$C(f)=\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-30)+\delta(f+30)\right]+\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]\right\}\cdot tri\left(\frac{f}{20}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\left(tri\left(\frac{\left(\frac{10}{2\pi}\right)}{20}\right)\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\left(tri\left(\frac{\left(-\frac{10}{2\pi}\right)}{20}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)\left(-\frac{1}{20}\left(\frac{10}{2\pi}\right)+1\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{20}\left(-\frac{10}{2\pi}\right)+1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{10}{40\pi}\right)+1\right)\left[\delta\left(f-\frac{10}{2\pi}\right)+\delta\left(f+\frac{10}{2\pi}\right)\right]$$

Το σήμα είναι ένας τόνος συχνότητας 10/2π Hz (άρα η περίοδοςτου είναι 2π/10 Hz) και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 20/2π Hz.

Σημείωση: Το ερώτημα δεν απαιτούσε τον ακριβή υπολογισμό του πλάτους των παλμών δ (με βάση την τιμή του τριγωνικού παλμού στα σημεία 10/2π Hz, -10/2π Hz).

(δ)

$$d(t) = \operatorname{sinc}(60t) \cdot t \cdot x(t) =$$

$$= \frac{\sin(60\pi t)}{60\pi t} t \cdot \cos(2\pi 30t) = \frac{1}{60\pi} \sin(2\pi 30\pi t) \cos(2\pi 30t) = \frac{1}{60\pi} \frac{1}{2} \sin(2\pi 60\pi t)$$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο ίση με 1/60 sec.
Το σήμα είναι ένας τόνος συχνότητας 60 Hz και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist 120 Hz.

ΕΞ2017Α

ΘΕΜΑ 1

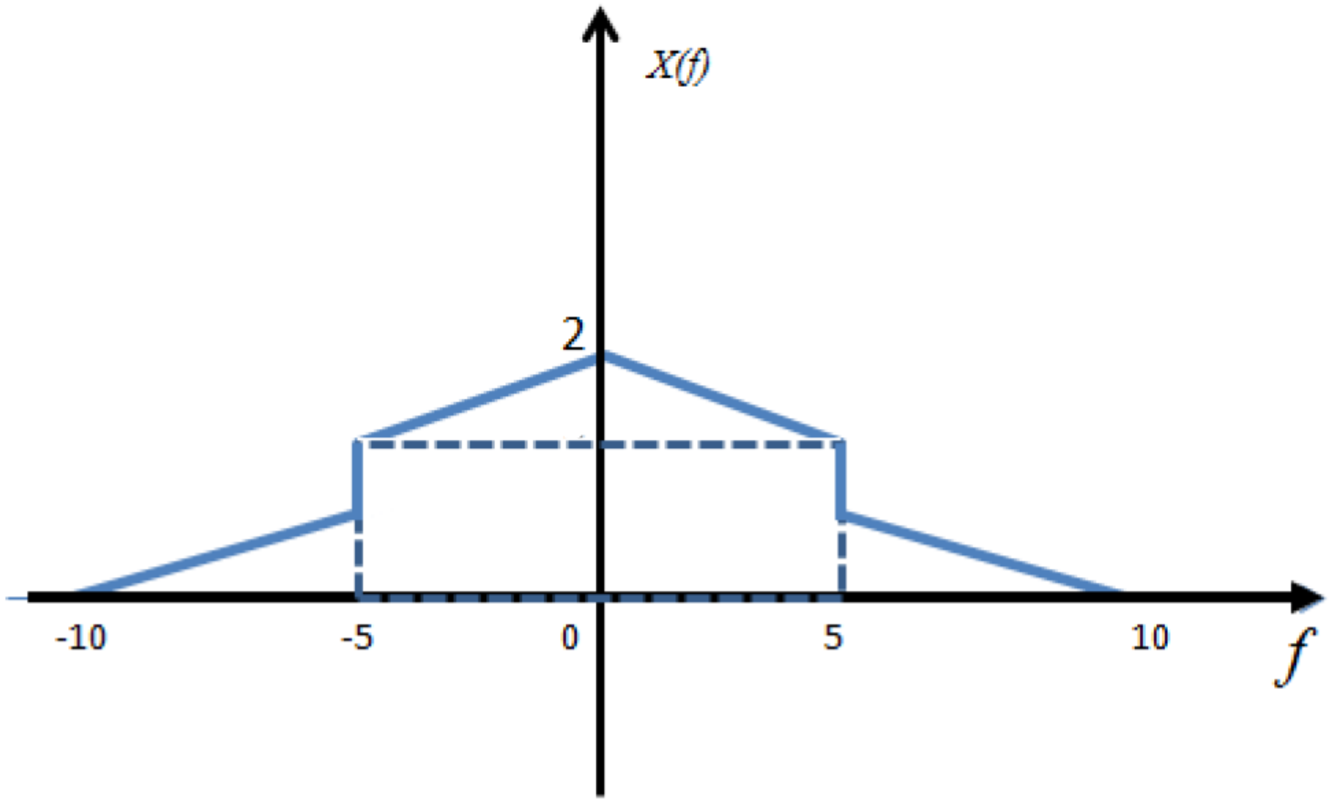
Δίνεται το σήμα $x(t) = 10\operatorname{sinc}(10t)\cdot\left[1+\operatorname{sinc}(10t)\right]$

Ερώτηση 1η: Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του $x(t)$

Ερώτηση 2η: Να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min}$ κατά Nyqist του $x(t)$ και να δοθούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος $x_s(t)$ με την υπολογισθείσα συχνότητα δειγματοληψίας στα πεδία χρόνου και συχνοτήτων.

Ερώτηση 3η: Το σήμα $x(t)$ δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας $f_\delta = 50\cdot f_{s,\min}$ και διέρχεται από κατάλληλο ζωνοπερατό φίλτρο - με τη μικρότερη δυνατή ζώνη διέλευσης - του οποίου η έξοδος είναι ένα σήμα που μπορεί να προκύψει και με DSB διαμόρφωση συνημιτονοειδούς φέροντος συχνότητας 1000Hz και πλάτους 100 Volt από το σήμα $x(t)$. Η μια συχνότητα αποκοπής του φίλτρου ισούται με $f_{low} = 10Hz$ Να υπολογίσετε την άλλη συχνότητα αποκοπής του ζωνοπερατού φίλτρου (f_{high}) και το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς του . Επίσης, να δώσετε την έκφραση της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου.

$$x(t)=10\operatorname{sinc}(10t)\cdot\left[1+\operatorname{sinc}(10t)\right]=10\operatorname{sinc}(10t)+10\operatorname{sinc}^2(10t)\xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{10}\right)+tri\left(\frac{f}{10}\right)$$



(β)
Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος του x(t) είναι 10Hz. Συνεπώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist είναι 20Hz.

Το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου γράφεται:

$$x_s(n) = 10\mathrm{sinc}\left(10\frac{n}{20}\right) + 10\mathrm{sinc}^2\left(10\frac{n}{20}\right),\ n \text{ ακέραιος}$$

Και στο πεδίο των συχνοτήτων το φάσμα του γράφεται:

$$X_s(f) = f_{s,\min}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - mf_{s,\min}\right) = 20\sum_{m=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{f-m20}{10}\right) + tri\left(\frac{f-m20}{10}\right)$$

(γ)

Το σήμα $x(t)$ δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας $f_\delta = 50 \cdot f_{s,\min} = 50 \cdot 20 = 1000Hz$

και διέρχεται από κατάλληλο ζωνοπερατό φίλτρο του οποίου η έξοδος είναι ένα σήμα που μπορεί να προκύψει και με DSB διαμόρφωση συνημιτονοειδούς φέροντος συχνότητας 1000Hz και πλάτους 100 Volt από το σήμα $x(t)$.

Το σήμα αυτό αντιστοιχεί στο

$$y(t) = x(t)100\cos(2\pi 1000t) \xleftrightarrow{F} 50\left[X(f-1000) + X(f+1000)\right]$$

Προκειμένου να προκύψει το ίδιο σήμα από δειγματοληψία του

$x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας $f_\delta = 50 \cdot f_{s,\min} = 50 \cdot 20 = 1000Hz$

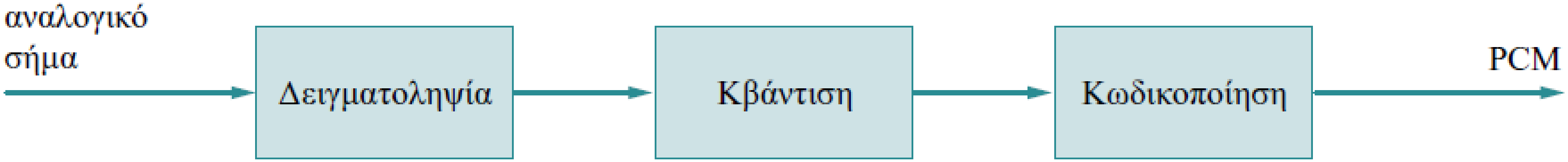
Θα πρέπει το ζωνοπερατό φίλτρο να έχει συχνότητες αποκοπής τις (f_{low}, f_{high})=(10Hz,1010Hz)

Επίσης, προκειμένου να προκύψει το πλάτος 50 θα πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρπου να έχει πλάτος ίσο με 1/20

Η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου ισούται με

$$H_{BP}(f) = \frac{1}{20}\left[rect\left(\frac{f-510}{1000}\right) + rect\left(\frac{f+510}{1000}\right)\right]$$

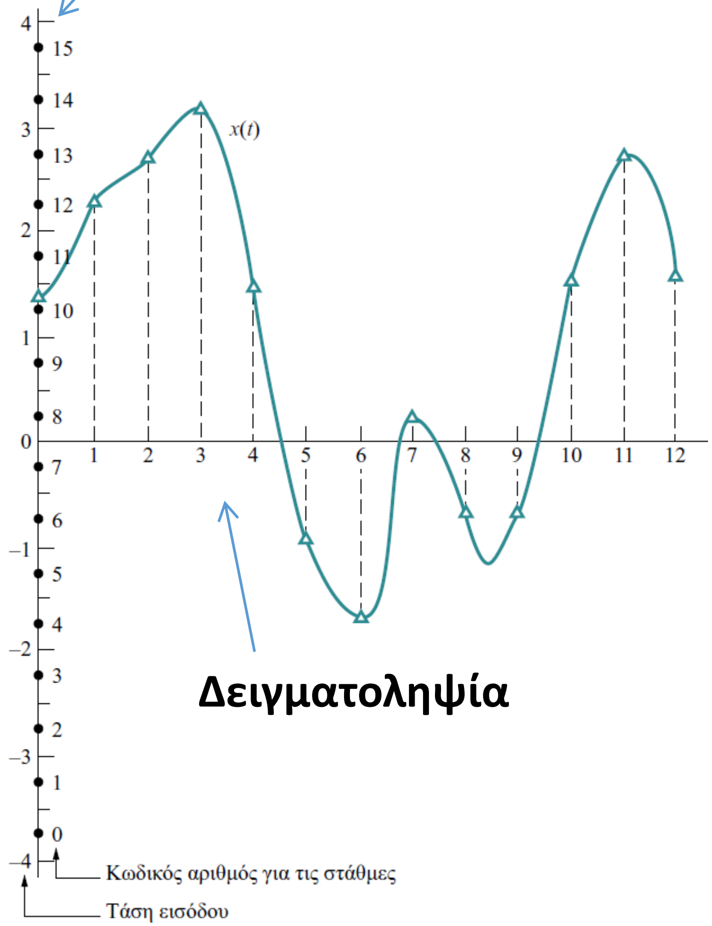
Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)



Παράδειγμα

Κβάντιση

Κωδικοποίηση



Δειγματοληψία

Αριθμός δείγματος	$x_s(t)$	$x_q(t)$	Αριθμός στάθμης	Δυαδική τιμή αριθμού στάθμης
0	1,3	1,25	10	1010
1	2,3	2,25	12	1100
2	2,7	2,75	13	1101
3	3,2	3,25	14	1110
4	1,45	1,25	10	1010
5	– 0,9	– 0,75	6	0110
6	– 1,7	– 1,75	4	0100
7	0,3	0,25	8	1000
8	0,7	0,75	9	1001
9	0,7	0,75	9	1001
10	1,6	1,75	11	1011
11	2,8	2,75	13	1101
12	1,7	1,75	11	1011

Διαδικασία Κβάντισης

Μέγιστο Σφάλμα ομοιόμορφης κβάντισης: $\dfrac{\Delta}{2}$

Αριθμός σταθμών κβάντισης:

$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{\Delta} = \frac{V_{p-p}}{\Delta}$$

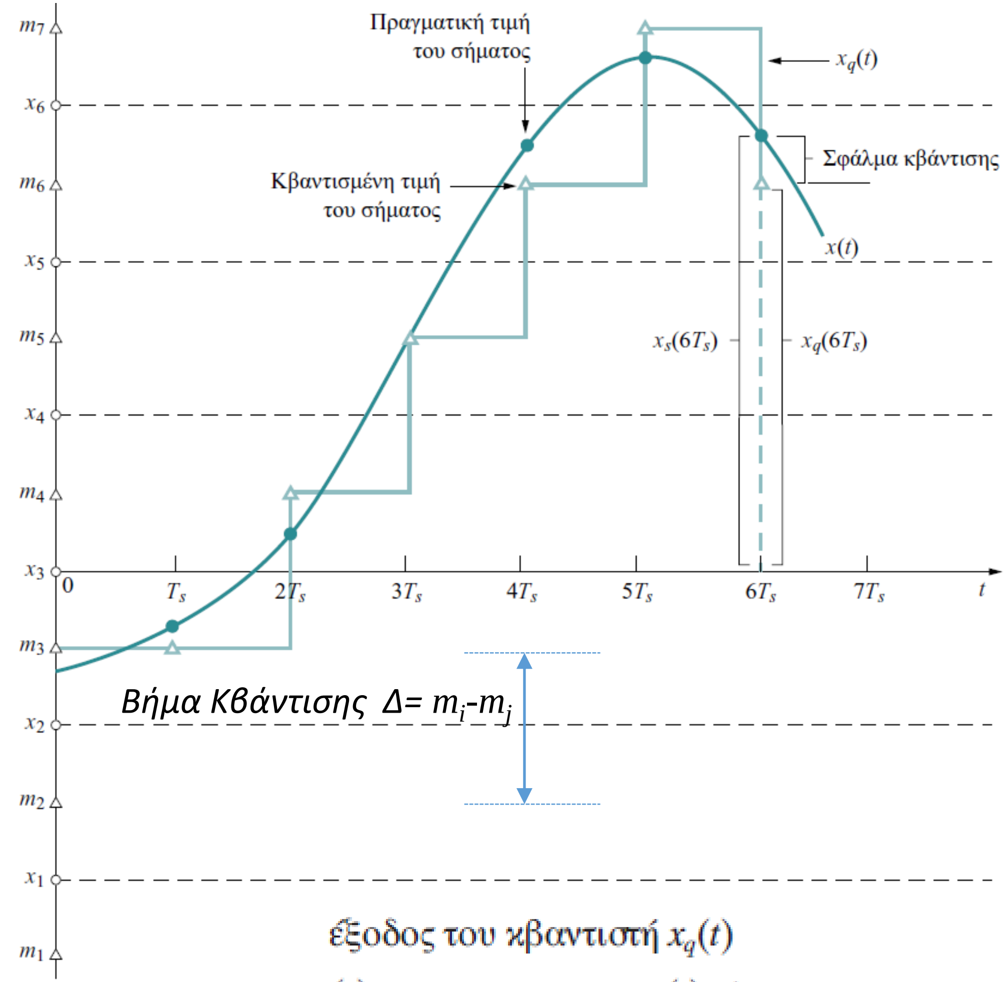
Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης:

$$SNR_q = 10\log_{10}\left(L^2\right)$$

Αριθμός απαιτούμενων δυαδικών bits ανά στάθμη κβάντισης:

$$n = \left\lceil \log_2\left(L\right) \right\rceil$$

Q στάθμες κβάντισης $m_1, m_2, \ldots, m_L$



έξοδος του κβαντιστή $x_q(t)$

$$x_q(t) = m_i \quad \text{αν} \quad x_{i-1} < x(t) \leq x_i$$

Σημειώσεις σχετικά με τις μονάδες dB (decibel)

4.6 Σηματοθορυβικός λόγος – Οι μονάδες Decibel

ο σηματοθορυβικός λόγος ισούται με το λόγο της ισχύος του σήματος πληροφορίας προς την ισχύ του θορύβου που υπεισέρχεται στο δέκτη:

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{E\left(s^2(t)\right)}{E\left(n^2(t)\right)}$$

Στην παραπάνω σχέση η ισχύς του σήματος και του θορύβου υπολογίζεται σε μονάδες Watt, οπότε ο σηματοθορυβικός λόγος δεν έχει μονάδες (είναι αδιάστατο μέγεθος, εκφράζει απλά πόσες «φορές» είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη η ισχύς του σήματος από την ισχύ του θορύβου).

Η ισχύς μπορεί να εκφραστεί και με τη μορφή που συμπεριλαμβάνει το δεκαδικό λογάριθμο $S_{dBW} = 10 \cdot \log_{10}(S_W)$ και μετριέται σε μονάδες dBW (dB–Watt), εφόσον η ισχύς S είναι σε μονάδες Watt. Εάν η ισχύς S είναι σε μονάδες mW, τότε η αντίστοιχη λογαριθμική τιμή της ισχύος θα είναι $S_{dBm} = 10 \cdot \log_{10}(S_{mW})$ και μετριέται σε μονάδες dBm (dB–milliWatt).

Με βάση τα παραπάνω ισχύουν και τα εξής:

$$x\,\text{dBm} = 10^{\frac{x}{10}}\,\text{mW} = 10^{\frac{x}{10}} \cdot 10^{-3}\,\text{W} = 10 \cdot \log_{10}\left(10^{\frac{x}{10}} \cdot 10^{-3}\right)\text{dBW} =$$

$$= \left\{10 \cdot \log_{10}\left(10^{\frac{x}{10}}\right) + 10 \cdot \log_{10}\left(10^{-3}\right)\right\}\text{dBW} =$$

$$= \left\{10 \cdot \frac{x}{10} \cdot \log_{10}(10) + 10 \cdot (-3)\log_{10}(10)\right\}\text{dBW} =$$

$$= (x - 30)\,\text{dBW}$$

Αντίστοιχα,

$$x\,\text{dBW} = (x + 30)\,\text{dBm}$$

Άρα,

$$1\,\text{mWatt} = 0\,\text{dBm} = -30\,\text{dBW} = 10^{-3}\ \text{Watt}$$

$$1\,\text{Watt} = 0\,\text{dBW} = 30\,\text{dBm} = 10^{3}\ \text{mWatt}$$

Εάν εκφραστεί ο σηματοθορυβικός λόγος με τις ανωτέρω λογαριθμικές εκφράσεις, θα ισχύουν τα εξής:

Τόμος β! Μέρος β! ενότητα 4.6

αν $y = \log_a(x)$

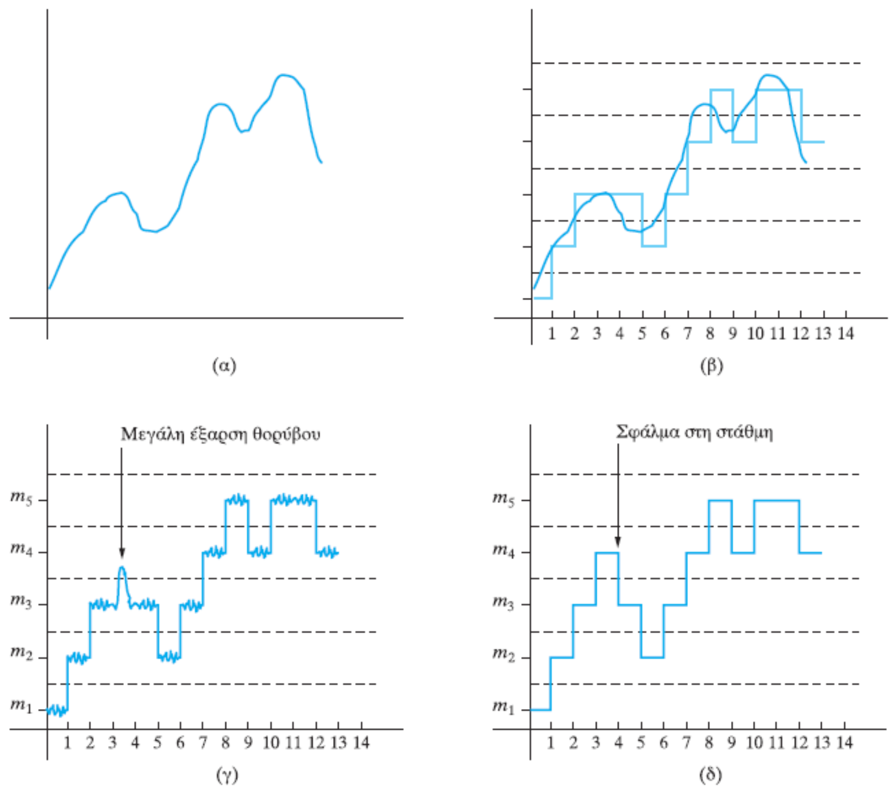
τότε $x = a^y$

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{S_{Watt}}{N_{Watt}}\right) = \left\{10 \cdot \log_{10}\left(S_{Watt}\right)\right\} \mathrm{dBW} - \left\{10 \cdot \log_{10}\left(N_{Watt}\right)\right\} \mathrm{dBW} =$$

$$= \left\{10 \cdot \log_{10}\left(S_{Watt}\right) - 10 \cdot \log_{10}\left(N_{Watt}\right)\right\} \mathrm{dB}$$

Δηλαδή, ο σηματοθορυβικός λόγος χρησιμοποιώντας τις λογαριθμικές εκφράσεις θα εκφράζεται σε dB, που δηλώνουν πόσες «φορές» είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη η ισχύς του σήματος από την ισχύ του θορύβου. Αν $SNR_{dB} = 3dB$, τότε η ισχύς του σήματος είναι διπλάσια $\left(10^{\frac{3}{10}} = 2\right)$ της ισχύος του θορύβου.

Σε ότι αφορά το σηματοθορυβικό λόγο κβάντισης, το σφάλμα στην κβάντιση σχετίζεται με την ανοχή του σήματος στην επίδραση θορύβου στο πλάτος του κβαντισμένου σήματος.



Σχήμα 4.8

Η ανοχή του κβαντισμένου σήματος στον εξωτερικό προσθετικό θόρυβο: (α) το αρχικό σήμα, (β) το κβαντισμένο σήμα πριν από τη μετάδοση, (γ) το σήμα που λαμβάνεται από τον παραλήπτη, στο οποίο έχει προστεθεί ο εξωτερικός θόρυβος, και (δ) το σήμα μετά τον επανακβαντισμό, στο οποίο εμφανίζεται σφάλμα λόγω της υψηλής στάθμης θορύβου.

Εύρος Ζώνης PCM

εάν f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας,

τότε ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας θα είναι ίσος με $\boxed{f_s \log_2 L \text{ bits/sec.}}$

Όμως

στα δυαδικά συστήματα τα κανάλια βασικής ζώνης μπορούν να μεταφέρουν μέχρι

$$\boxed{2 \text{ bits/sec/Hz,}}$$

Άρα

το απαιτούμενο εύρος ζώνης, B_{PCM}, του σήματος PCM εκφράζεται

από τον τύπο

$$\boxed{B_{\mathrm{PCM}} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L}$$

Διαμόρφωση PCM

Δειγματοληψία → διακριτοποίηση πεδίου χρόνου (ορισμού) χρονικά δείγματα

Κβάντιση → διακριτοποίηση πεδίου τιμών (στάθμες κβάντισης)

Κωδικοποίηση → Απεικόνιση σταθμών κβάντισης με δυαδικά bits

Υπόθεση: Συχνότητα Δειγματοληψίας $f_s \frac{\text{samples}}{\text{sec}}$

Πλήθος σταθμών κβάντισης: L

$\Rightarrow$ bits / στάθμη κβάντισης: $\eta = \lceil \log_2 L \rceil \frac{\text{bits}}{\text{sample}}$

$\Rightarrow$ Ρυθμός Μετάδοσης Δειγματισμένου σήματος (PCM) $f_s \frac{\cancel{\text{samples}}}{\text{sec}} \cdot \lceil \log_2 L \rceil \frac{\text{bits}}{\cancel{\text{sample}}}$

Δυαδικά Συστήματα: μεταφορά $2 \frac{\text{bits/sec}}{\text{Hz}}$ στο κανάλι βασικής ζώνης

$\Rightarrow$ Εύρος ζώνης PCM σήματος: $B_{PCM} = \frac{1}{2} f_s \cdot \log_2 L$ Hz

Σηματοθορυβικός λόγος Κβάντισης (ομοιόμορφη κβάντιση) $SQNR = 10\log_{10} L^2 = 20\log_{10} L$

ΕΞ2018Α

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το σήμα $x(t) = 200 \sin c(200t) + 100 \sin c^2 (100t)$.

1) Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του x(t) και να δοθούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.

2) Το x(t) διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον πλάτους 2V και συχνότητας 1000Hz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

3) Το x(t) δειγματίζεται με κατάλληλη συχνότητα f_δ και διέρχεται από κατάλληλο ζωνοπερατό φίλτρο με την ελάχιστη δυνατή ζώνη διέλευσης και με χαμηλή συχνότητα αποκοπής ίση με f_{low}=100Hz, ώστε να προκύψει φάσμα πανομοιότυπο με αυτό της απάντησης του ερωτήματος (β). Να υπολογιστούν η συχνότητα δειγματοληψίας f_δ, καθώς και η κρουστική απόκριση και η συνάρτηση μεταφοράς (απόκριση συχνότητας) του φίλτρου.

4) Το x(t) θα μεταδοθεί με διαμόρφωση PCM, με συχνότητα δειγματοληψίας 10πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και με ομοιόμορφη κβάντιση χρησιμοποιώντας 15 ψηφία ανά δείγμα. Να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος καθώς και ο σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης.

(α)

$$x(t) = 200\sin c(200t) + 100\sin c^2(100t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{200}\right) + tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Μέγιστη συχνότητα: 100Hz

Ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min} = 200Hz$

και περίοδος δειγματοληψίας Ts = 1/200

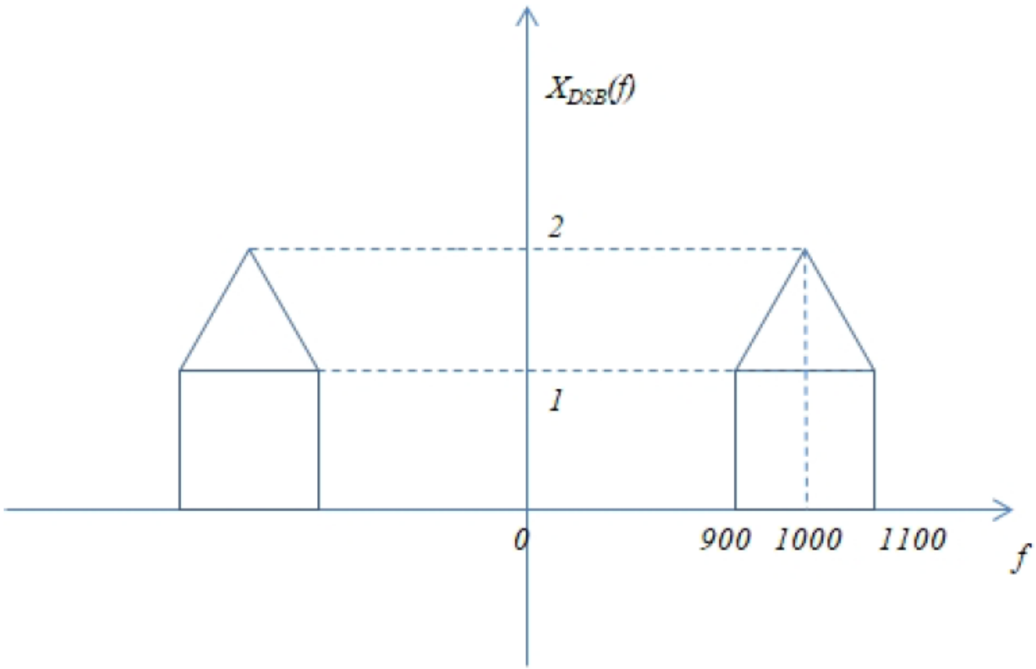
$$x_s(n) = \underset{t=nT_s}{x(t)} = 200\sin c(200n\frac{1}{200}) + 100\sin c^2\left(100n\frac{1}{200}\right), n \text{ ακέραιος}$$

$$X_s(f) = 200\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s) = 200\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{rect\left(\frac{f-m200}{200}\right) + tri\left(\frac{f-m200}{100}\right)\right\}$$

(β)

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cdot 2\cos(2\pi 1000t) \xleftrightarrow{F} X(f-1000) + X(f+1000) =$$

$$= rect\left(\frac{f-1000}{200}\right) + tri\left(\frac{f-1000}{100}\right) + rect\left(\frac{f+1000}{200}\right) + tri\left(\frac{f+1000}{100}\right)$$



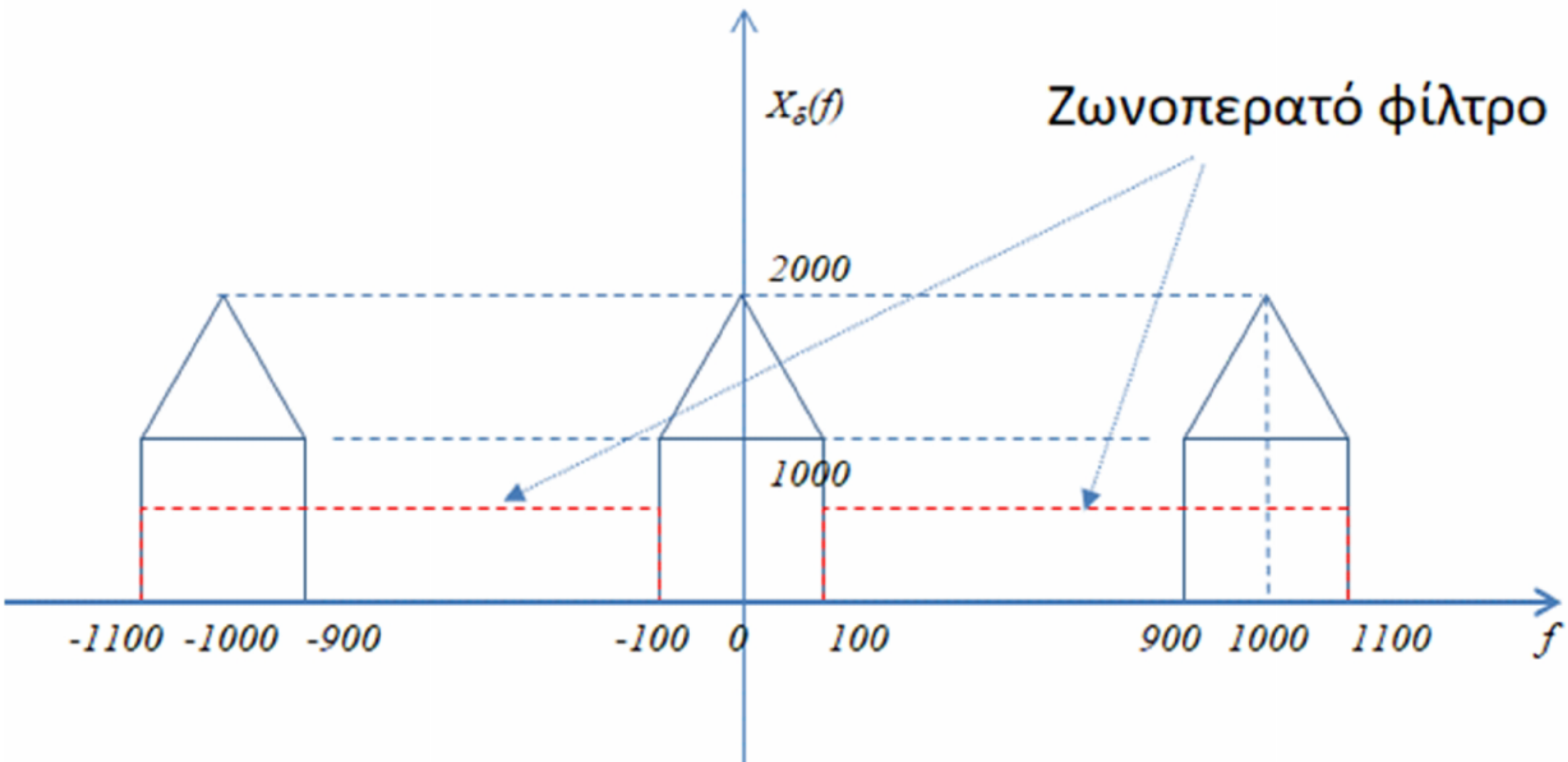
(γ)

Η συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι ίση με 1000 Hz

Το φάσμα του δειγματισμένου σήματος θα ισούται με:

$$X_\delta(f) = 1000\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m1000) = 1000\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{rect\left(\frac{f - m1000}{200}\right) + tri\left(\frac{f - m1000}{100}\right)\right\}$$

Για να προκύψει το ζητούμενο φάσμα θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ζωνοπερατό φίλτρο με συχνότητες αποκοπής 100Hz, 1100Hz και πλάτος 1/1000.



Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(f)=\frac{1}{1000}\left\{rect\left(\frac{f-600}{1000}\right)+rect\left(\frac{f+600}{1000}\right)\right\}$$

και η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t)=\frac{1}{1000}\left\{e^{j2\pi600t}1000\sin c(1000t)+e^{-j2\pi600t}1000\sin c(1000t)\right\}=\frac{1}{1000}1000\sin c(1000t)2\cos(2\pi600t)=2\sin c(1000t)\cos(2\pi600t)$$

(δ)

Εύρος ζώνης PCM: $W=\frac{1}{2}10\cdot200\frac{samples}{\sec}\cdot15\frac{bits}{sample}=15KHz$

Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης: $SNR_q=20\log_{10}(L)=20\log_{10}(2^{15})=90.39dB$

ΘΕΜΑ 2

ΕΞ 2014 /Θ2

Δίνεται το σήμα $X(f) = rect\left(\frac{f}{4a}\right)$.

α) Να προσδιοριστούν για το σήμα $y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right)$, οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου $y_\delta(n)$. *(5 μονάδες)*

β) Να εξηγήσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και να υπολογιστούν οι περίοδοι (αν υπάρχουν)

i) *y(t)* και *(3 μονάδες)*

ii) $z(t) = \dfrac{\Im^{-1}\left\{X(f) * \left[\delta(f-20) + \delta(f+20)\right]\right\}}{2a\pi \sin c(4at)}$, *(7 μονάδες)*

(όπου με $\Im^{-1}\{\ \}$ εννοείται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier και με ‘*’ εννοείται η πράξη της συνέλιξης).

γ) Προκειμένου να μεταδοθούν τα σήματα *y(t)* και z*(t)* κάθε ένα θα υποστεί δειγματοληψία σε ρυθμό Nyquist, θα κωδικοποιηθεί κατά PCM με 8 bits και κατόπιν θα μεταδοθούν και τα δύο με πολυπλεξία FDMA. Να υπολογιστεί το συνολικό απαιτούμενο εύρος ζώνης αν *α=10.* *(5 μονάδες)*

α)

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{4a}\right) \leftrightarrow 4a\sin c(4at) = x(t)$$

$$y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right) = 4a\sin c(4at) + \frac{1}{2}4a\sin c(4a\frac{t}{2}) = 4a\sin c(4at) + 2a\sin c(2at)$$

$$y(t) = 4a\sin c(4at) + 2a\sin c(2at) \leftrightarrow rect\left(\frac{f}{4a}\right) + rect\left(\frac{f}{2a}\right) = Y(f)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα δύο σημάτων βασικής ζώνης με εύρος 4a ($f_{max}=2a$) και 2a ($f_{max}=a$) αντίστοιχα. Άρα $f_{max}=2a$ και επομένως η συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist είναι $f_{s,min}=4a$.

Άρα το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου $y_\delta(n)$ είναι:

$$y_\delta(n) = \underset{t=nT_s}{y(t)} = 4a\sin c(4an\frac{1}{f_{s,\min}}) + 2a\sin c(2an\frac{1}{f_{s,\min}}) =$$

$$= 4a\sin c(4an\frac{1}{4a}) + 2a\sin c(2an\frac{1}{4a}) =$$

$$= 4a\sin c(n) + 2a\sin c(\frac{n}{2})$$

β)

(i) Το σήμα *y(t)* δεν είναι περιοδικό γιατί το φάσμα του είναι συνεχές

(ii)

$$z(t)=\frac{\Im^{-1}\left\{X(f)*\left[\delta(f-20)+\delta(f+20)\right]\right\}}{2a\pi\sin c(4at)}=\frac{x(t)2\cos\left(2\pi 20\tau\right)}{2a\pi\sin c(4at)}= \qquad \text{(A)}$$

$$=\frac{4a\sin c(4at)2\cos\left(2\pi 20t\right)}{2a\pi\sin c(4at)}\Leftrightarrow z(t)=\frac{4}{\pi}\cos\left(2\pi 20t\right)$$

Άρα το σήμα αυτό είναι περιοδικό με περίοδο 1/20 sec.

γ)

Σύφωνα με την ανάλυση στο ερώτημα 1), η συχνότητα δειγματοληψίας για το *y(t)* είναι $f_{s,min}=4a$ *samples/sec*.

Το αντίστοιχο εύρος ζώνης θα είναι

$$\frac{1}{2} f_{s,\min} N = \frac{1}{2} 4a \cdot 8 = 16a \,\mathrm{Hz}$$

Από την (Α) βλέπουμε ότι

$Z(f) = \frac{2}{\pi}\left(\delta(f-20)+\delta(f+20)\right)$, άρα η συχνότητα δειγματοληψίας για το z*(t)* είναι $f'_{s,min}=40Hz$. Το αντίστοιχο εύρος ζώνης θα είναι

$$\frac{1}{2} f'_{s,\min} N = \frac{1}{2} 40 \cdot 8 = 160 \,\mathrm{Hz}$$

Επομένως συνολικά απαιτείται εύρος ζώνης 16*α*+160=320 Hz.

ΘΕΜΑ 3

ΓΕ3/1415/Θ3

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις τεχνικές πολυπλεξίας σημάτων και την παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM).*

Σχετικές Ασκήσεις: *ΓΕ2/0910/Θ7, ΓΕ2/1011/Θ7, ΓΕ2/1112/Θ7*

Σε ένα στούντιο εγγραφής τα δύο ακουστικά σήματα, από το δεξιό και το αριστερό μικρόφωνο (Left (L) ,Right (R)), δειγματοληπτούνται και τα δείγματα ψηφιοποιούνται από έναν αναλογικο/ψηφιακό μετατροπέα. Θεωρείστε ότι το εύρος ζώνης των ακουστικών σημάτων περιορίζεται περίπου στα 20 kHz. Η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist.

(α) Υπολογίστε το ρυθμό δειγματοληψίας των δύο ακουστικών σημάτων

(β) Αν απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος μεγαλύτερος από 92 dB υπολογίστε το πλήθος των σταθμών κβάντισης. Υποθέστε ότι τα δείγματα των δύο ακουστικών σημάτων κβαντίζονται με ομοιόμορφο κβαντιστή PCM.

(γ) Ποια η επιδείνωση του σηματοθορυβικού λόγου αν χρησιμοποιηθούν οι μισές στάθμες από εκείνες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα; Παρατηρήστε τι γίνεται για διαδοχικούς υποδιπλασιασμούς και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με τον αριθμό των bits που χρησιμοποιούνται.

(δ) Υπολογίστε τον συνολικό αριθμό των bits και bytes και για τα δύο ακουστικά σήματα (L,R) που προκύπτουν για ένα μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών.

(ε) Αν τα δύο ακουστικά σήματα πολυπλεχθούν κατά TDM (πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου) και μεταδοθούν από τον ίδιο δίαυλο, υπολογίστε το ελάχιστο εύρος ζώνης του διαύλου για την τεχνική PCM και υποδείξτε το ρυθμό μετάδοσης στο δίαυλο.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση σήματος με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (εκφρασμένος σε decibel) ισούται με* $SNR = 10 \cdot \log_{10}\left(L^2\right)$.

(α) Τα δύο ακουστικά σήματα δειγατοληπτούνται το καθένα χωριστά. Επειδή η μέγιστη συχνότητα των ακουστικών σημάτων είναι τα 20 kHz, σύμφωνα με τον Nyquist ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι τουλάχιστο 40 kHz. Επιπλέον, στην εκφώνηση αναφέρεται ότι η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist, συνεπώς για κάθε ακουστικό κανάλι έχουμε

Ρυθμός Δειγματοληψίας = 40 kHz * 1,1025 = 44,1 kHz

(β) Προκειμένου κάθε σήμα να μεταδοθεί με PCM με σηματοθορυβικό λόγο SNR > 92 dB, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log_{10} L$

Άρα ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών κβάντισης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$SNR = 20\log_{10} L \geq 92 \Rightarrow L \geq 10^{92/20} \approx 39,811$$

Άρα επειδή θα πρέπει το πλήθος των σταθμών να είναι δύναμη του 2, τελικά θα έχουμε $2^{16} = 65.536$ στάθμες.

(γ) Χρησιμοποιώντας $2^{16} = 65.536$ στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος

$$SNR = 20\log_{10} L = 20\log_{10}\left(65.536\right) = 96,3\ dB$$

Αν υποδιπλασιάσουμε τις στάθμες τότε θα χρησιμοποιήσουμε 15 bits για την κάθε κωδική λέξη και θα έχουμε $2^{15} = 32.768$ στάθμες. Άρα ο σηματοθορυβικός λόγος θα είναι

$$SNR = 20\log_{10} L = 20\log_{10}\left(32.768\right) = 90,3\ dB$$

Άρα η επιδείνωση με τη μείωση ενός bit είναι 6 dB.

Το ίδιο ισχύει για κάθε μείωση κατά 1 bit (π.χ. με 16.384 στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος 84.3 dB, κλπ.)

(δ) Με συχνότητα δειγματοληψίας 44.100 Hz, έχουμε 44.100 δείγματα/sec. Με 16 bits/δείγμα προκύπτει ρυθμός 44.100 x 16 = 705.600 bits/sec από κάθε ακουστικό σήμα. Για μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών δηλαδή 180 sec προκύπτουν ανά κανάλι

705.600 bits/sec x 180 sec = 127,008 x 10^6 bits = 15,876 Mbytes

Συνολικά για τα δύο κανάλια

2 x 705.600 bits/sec x 180 sec = 254,016 x 10^6 bits = 31,752 Mbytes

(ε) Αν χρησιμοποιηθεί πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου, τότε το πλαίσιο θα περιέχει δύο χρονοθυρίδες και ο ελάχιστος ρυθμός που πρέπει να μπορεί να υποστηρίζει ο δίαυλος είναι το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών δειγματοληψίας, δηλαδή 2 x 44.100 samples/sec = 88.200 samples/sec.

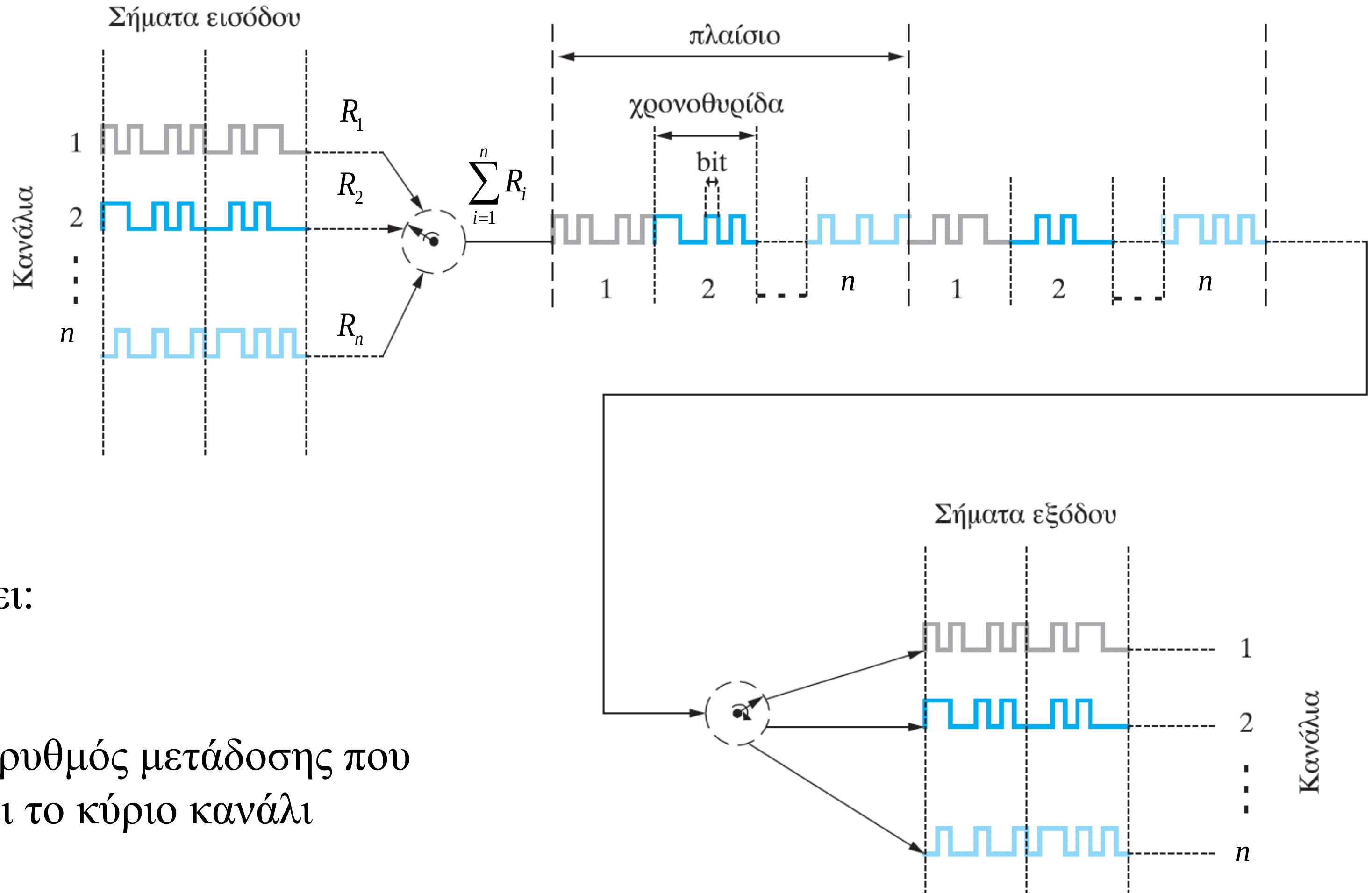
Επειδή όμως θα χρησιμοποιηθεί τεχνική PCM με κβαντοποίηση σε 65.536 στάθμες, το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} \times 88.200 \times \log_2 65.536 = 44.100 \times 16 = 705600\ Hz = 705,6\ kHz$$

Ο ρυθμός μετάδοσης είναι $705,6 \times 2 = 1411,2\ kbps = 1,4112\ Mbps$

Πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (Time Division Multiplexing - TDM)

- Τα *n* σήματα διαχωρίζονται μεταξύ τους στο πεδίο του χρόνου
- Ο χρόνος υποδιαιρείται σε *n* χρονοθυρίδες με σταθερή διάρκεια



- Θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \le R_{\max}$$

όπου R_{max} ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να υποστηρίξει το κύριο κανάλι επικοινωνίας

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Συνδυαστική άσκηση

ΕΞ 2015Α /Θ1

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογίσετε τις τιμές του α>0 για τις οποίες ισχύει η κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Το σήμα $\cos(2\pi at)+\sin(2\pi f_2 t)$ είναι περιοδικό. ***(3 μονάδες)***

β) Το σήμα $\cos(2\pi f_1 t) * a\sin c(at)$ είναι περιοδικό. ***(3 μονάδες)***

γ) Ισχύει ότι $a\sin c(at) * g(t) = g(t)$ όπου $g(t) \xleftrightarrow{F} G(f)$ και $\begin{matrix} G(f)>0, |f|<60 \\ G(f)=0, |f|>60 \end{matrix}$ ***(4 μονάδες)***

δ) Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist του $x(t)=a\sin c(at)\cdot 100a\sin c^2(100at)$ είναι 804Hz. ***(6 μονάδες)***

ε) Το εύρος ζώνης του σήματος που προκύπτει από διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από σήμα πληροφορίας $x(t)=a\sin c^3(100t)$ με $k_f=50\pi$ είναι 600Hz. ***(6 μονάδες)***

[<u>Υπόδειξη :</u> ο τελεστής ∗ αντιστοιχεί σε συνέλιξη]

(Σύνολο μονάδων 22)

(α) Για το $\cos(2\pi a t)+\sin(2\pi f_2 t)$ έχουμε

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{f_2}}=\frac{f_2}{a}$$

Το σήμα θα είναι περιοδικό αν ο λόγος των περιόδων είναι ρητός δηλ.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{f_2}}=\frac{f_2}{a}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow a=\frac{n}{m}f_2$$

(β) Έχουμε:

$\cos(2\pi f_1 t) * a\sin c(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\right]\cdot rect\left(\frac{f}{a}\right)$ δηλ. διέλευση ενός τόνου από βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής α/2.

Για να είναι περιοδικό το $\cos(2\pi f_1 t)\cdot a\sin c(at)$ θα πρέπει η συχνότητα f_1 να είναι μικρότερη από το εύρος ζώνης του φίλτρου δηλ $f_1 \le \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \ge 2 f_1$

(γ) $a\sin c(at) * g(t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{a}\right)G(f)$ δηλ. διέλευση του φάσματος G(f) από βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής α/2.

$rect\left(\frac{f}{a}\right)G(f) = G(f)$ δηλ. το G(f) διέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο εφόσον $\frac{a}{2} \geq 60 \Leftrightarrow a \geq 120$

(δ) Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist του $x(t)=a\sin c(at)\cdot 100a\sin c^2(100at)$ είναι 804Hz

Είναι

$$x(t)=a\sin c(at)\cdot 100a\sin c^2(100at)\xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{a}\right)*tri\left(\frac{f}{100a}\right)=X(f)$$

Η μέγιστη συχνότητα της συνέλιξης των 2 φασμάτων αντιστοιχεί στο άθροισμα των επιμέρους μέγιστων συχνοτήτων , δηλ. $f_{\max}=\frac{a}{2}+100a=\frac{201a}{2}$

Συνεπώς, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,\min}=2\frac{201a}{2}=201a=804 \Leftrightarrow a=4$

(ε) $x(t)=a\sin c^3(100t)=a\cdot \mathrm{sinc}(100t)\mathrm{sinc}^2(100t)\xleftrightarrow{F} a\frac{1}{100}rect\left(\frac{f}{100}\right)*\frac{1}{100}tri\left(\frac{f}{100}\right)$

Μέγιστο πλάτος : α

Εύρος ζώνης: 50+100=150Hz

Μέγιστη απόκλιση συχνότητας $\Delta f_{\max}=\frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|x(t)\right|\right)=\frac{50\pi}{2\pi}\alpha=25\alpha Hz$

και ο λόγος απόκλισης είναι

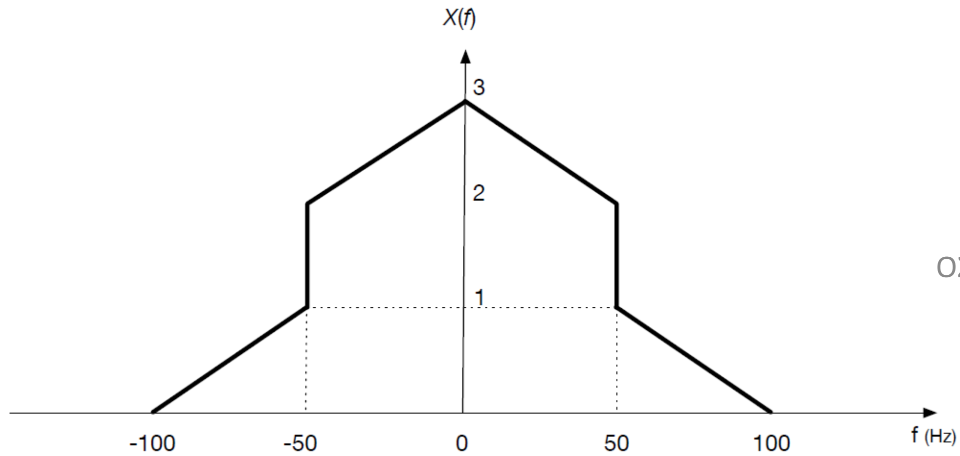
$$D=\frac{25a}{150}=\frac{a}{6}$$

Άρα με βάση τον κανόνα Carson έχουμε:

$$W=2\left(\frac{a}{6}+1\right)\cdot 150\ Hz=600\ Hz \Leftrightarrow \frac{a}{6}+1=2 \Leftrightarrow a=6$$

ΘΕΜΑ 2 (20 Μονάδες) 2019A

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/3η
ΟΣΣ/25.01.2020/Ν.Δημητρίου

Ερώτηση 1η (5 Μονάδες): Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

Ερώτηση 2η (5 Μονάδες): Να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,min}$ κατά Nyquist του $x(t)$ και η αντίστοιχη περίοδος δειγματοληψίας. Αν το σήμα $x(t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα διπλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist, να δοθεί η έκφραση του δειγματισμένου σήματος $x_s(n)$ στο πεδίο του χρόνου.

Ερώτηση 3η (5 Μονάδες): Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB-SC συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 10 kHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το πλάτος φάσματος του διαμορφωμένου σήματος.

Ερώτηση 4η (5 Μονάδες): Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100 kHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 4\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του. Σημείωση: Το σήμα $x(t)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του για $t = 0$.

<u>Ερώτηση 1η :</u> Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2\, tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$asinc(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$asinc^2(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/3η
ΟΣΣ/25.01.2020/Ν.Δημητρίου

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100sinc(100t) + 2 \cdot 100sinc^2(100t)$$

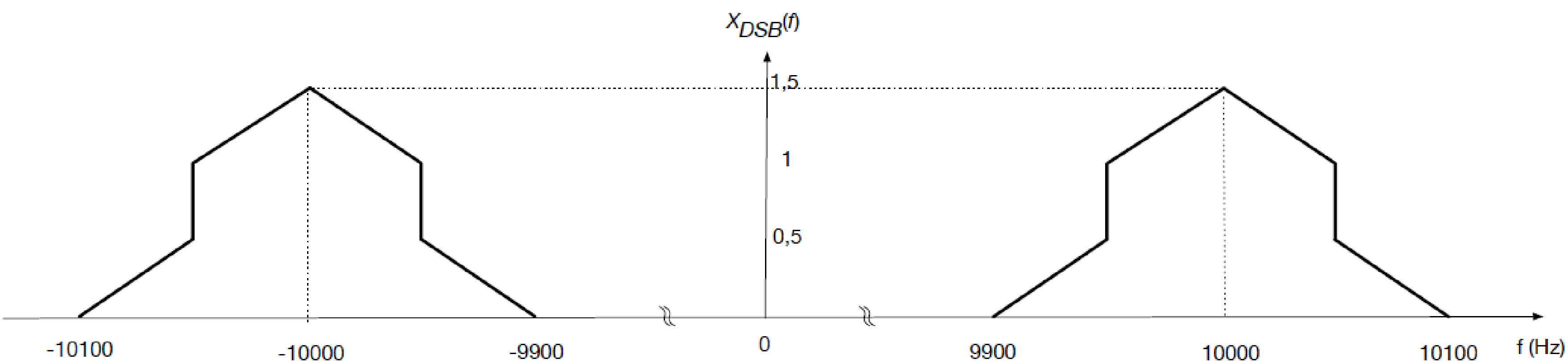
Ερώτηση 2η : Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος του x(t) είναι f_{max} = 100Hz. Συνεπώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist είναι $f_{s,min}$ = $2f_{max}$ = 200Hz και η περίοδος δειγματοληψίας είναι T_s = 1/200 = 0.005 sec.
Για συχνότητα δειγματοληψίας $2f_{s,min}$ = 400Hz, η περίοδος δειγματοληψίας είναι T_s = 1/400 = 0.0025 sec, και το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου γράφεται:

$$
\begin{aligned}
x_s(n) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) \\
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \\
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 100sinc\left(100\frac{n}{400}\right) + 2\cdot 100sinc^2\left(100\frac{n}{400}\right)
\end{aligned}
$$

όπου *n* ακέραιος αριθμός.

Ερώτηση 3η : Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB-SC συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 10kHz. Η έκφραση στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας για το διαμορφωμένο σήμα είναι:

$$x_{DSB-SC}(t) = x(t) \cdot cos(2\pi 10000t) \overset{F}{\Leftrightarrow} X_{DSB-SC}(f)$$
$$= \frac{1}{2}[X(f-10000) + X(f+10000)]$$
$$= \frac{1}{2}\left\{rect\left(\frac{f-10000}{100}\right) + 2\ tri\left(\frac{f-10000}{100}\right) + rect\left(\frac{f+10000}{100}\right) + 2\ tri\left(\frac{f+10000}{100}\right)\right\}$$



Ερώτηση 4η : Η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$x_{FM}(t) = cos\left(2\pi 100000t + 4\pi \int_{-\infty}^{t}[100sinc(100\lambda) + 2\cdot 100sinc^2(100\lambda)]d\lambda\right)$$

Ο λόγος απόκλισης είναι: $D = \frac{\Delta f_{max}}{f_x} = \frac{\frac{k_f}{2\pi}max(|x(t)|)}{f_x} = \frac{\frac{4\pi}{2\pi}300}{100} = 6$

Και το εύρος ζώνης είναι: $W = 2(D+1)f_x = 2(6+1)100 = 1.4\ kHz$

ΠΛΗ22_Εξέταση 2η_28-7-2019

ΘΕΜΑ 5 (20 Μονάδες)

Δίνονται τα παρακάτω σήματα

$$x(t) = 3\left(e^{j10\pi t} + e^{-j10\pi t}\right)$$

$$y(t) = 10sinc^2(10t)$$

$$z(t) = 24sinc(12t)$$

Ερώτηση 1η (6 Μονάδες): Να υπολογισθεί η μαθηματική έκφραση των σημάτων $x(t),\ y(t),\ z(t)$ στο πεδίο της συχνότητας.

Ερώτηση 2η : Για τα παρακάτω σήματα, να υπολογιστούν οι μαθηματικές εκφράσεις στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας, η περίοδος (αν υπάρχει) και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

Α) (4 Μονάδες): $q_1(t) = 2 \cdot x(t) + y(t) + z(t)$

Β) (5 Μονάδες): $q_2(t) = x(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot z(t)$

Γ) (5 Μονάδες): $q_3(t) = x(t) * y(t) * z(t)$, όπου το σύμβολο '*' αντιστοιχεί στην πράξη της συνέλιξης.

Ερώτηση 1η :

Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler, δηλαδή

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$x(t) = 6\cos\,(10\pi t)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $cos(2\pi f_0 t)$ δίνεται από

$$cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Με βάση τα παραπάνω, ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ δίνεται από

$$X(f) = 3[\delta(f - 5) + \delta(f + 5)]$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

$$tri(t) \leftrightarrow sinc^2(f)$$
$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $y(t)$ δίνεται από

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = tri\left(\frac{f}{10}\right)$$

Με την ίδια λογική, ο μετασχηματισμός Fourier του $z(t)$ δίνεται από

$$Z(f) = 2rect\left(\frac{f}{12}\right)$$

Ερώτηση 2$^{\eta}$:

Α)

Το σήμα $q_1(t) = 2 \cdot x(t) + y(t) + z(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$q_1(t) = 12\cos(10\pi t) + 10sinc^2(10t) + 24sinc(12t)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $q_1(t)$ δίνεται από

$$Q_1(f) = 6[\delta(f-5) + \delta(f+5)] + tri\left(\frac{f}{10}\right) + 2rect\left(\frac{f}{12}\right)$$

Το σήμα αυτό έχει συνεχές φάσμα συνεπώς δεν είναι περιοδικό.
Η μέγιστη συχνότητα στο σήμα είναι η 10 Hz και άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 20 Hz.

Β)

Το σήμα $q_2(t) = x(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot z(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} q_2(t) &= 6\cos(10\pi t)\, 10 sinc^2(10t) + 6\cos(10\pi t)\, 24 sinc(12t) \\ &= 60\cos(10\pi t)\, sinc^2(10t) + 144\cos(10\pi t)\, sinc(12t) \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $q_2(t)$, θα βασιστούμε στην ιδιότητα της διαμόρφωσης, δηλαδή

$$x(t)\cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c)$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της διαμόρφωσης και της γραμμικότητας, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $q_2(t)$, $Q_2(f)$, μπορεί να γραφτεί ως

$$Q_2(f) = \mathcal{F}\{60\cos(10\pi t)\, sinc^2(10t)\} + \mathcal{F}\{144\cos(10\pi t)\, sinc(12t)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{60}{10} tri\left(\frac{f-5}{10}\right) + \frac{60}{10} tri\left(\frac{f+5}{10}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{144}{12} rect\left(\frac{f-5}{12}\right) + \frac{144}{12} rect\left(\frac{f+5}{12}\right)\right]$$

$$= 3\left[tri\left(\frac{f-5}{10}\right) + tri\left(\frac{f+5}{10}\right)\right] + 6\left[rect\left(\frac{f-5}{12}\right) + rect\left(\frac{f+5}{12}\right)\right]$$

Το σήμα αυτό έχει συνεχές φάσμα συνεπώς δεν είναι περιοδικό.
Η μέγιστη συχνότητα στο σήμα είναι η 15 Hz και άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 30Hz

Γ)

Σύμφωνα με τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο των συχνοτήτων. Συνεπώς,

$$Q_3(f) = \mathcal{F}\{x(t) * y(t) * z(t)\} = \mathcal{F}\{s(t) * z(t)\} = S(f)Z(f)$$

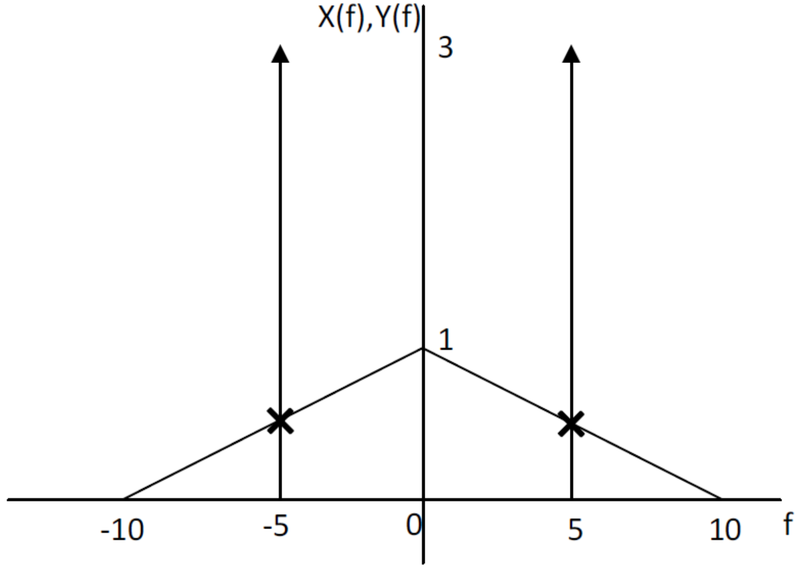
όπου

$$s(t) = x(t) * y(t) \text{ και } S(f) = X(f)Y(f)$$ [1]

Δεδομένου ότι τα φάσματα των σημάτων $X(f)$ και $Y(f)$ δίνονται από

$$X(f) = 3(\delta(f-5) + \delta(f+5))$$
$$Y(f) = tri\left(\frac{f}{10}\right)$$

Με την ακόλουθη γραφική παράσταση



(είτε απευθείας από τον τύπο του τριγωνικού παλμού) μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της $Y(f)$ για την οποία $f = \pm 5$, δηλαδή

$$\mathrm{tri}\left(\frac{\pm 5}{10}\right) = 1 - \frac{|\pm 5|}{10} = 0.5$$

Άρα το $S(f)$

$$S(f) = X(f)Y(f) = 1.5[\delta(f-5) + \delta(f+5)]$$

Συνεπώς

$$Q_3(f) = \left[1.5\left(\delta(f-5) + \delta(f+5)\right)\right]Z(f) = 3[\delta(f-5) + \delta(f+5)]$$

Πραγματοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $Q_3(f)$ υπολογίζεται η $q_3(t)$

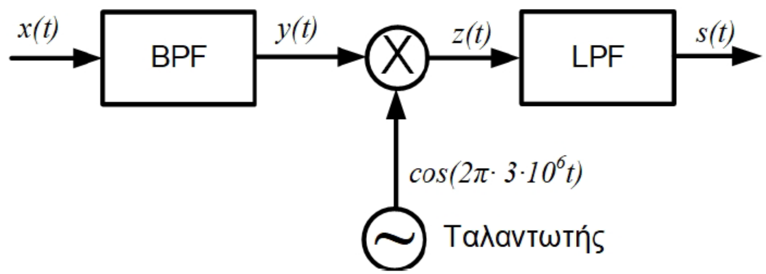
$$q_3(t) = 6\cos\,(2\pi 5t)$$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T=0.2 sec
Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 10Hz.

ΠΛΗ22_Εξέταση 2η_28-7-2019

ΘΕΜΑ 6 (20 Μονάδες)

Θεωρήστε ότι το σήμα εισόδου στο ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο (BPF) του σχήματος είναι $x(t)=m(t)\left[1+\cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^6 t\right)\right]$, όπου $m(t)=10^6 sinc\left(10^6 t\right)$. Η συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοπερατού φίλτρου είναι $H_{BPF}(f)=\Pi\left(\frac{f-3\cdot 10^6}{10^6}\right)+\Pi\left(\frac{f+3\cdot 10^6}{10^6}\right)$. Το βαθυπερατό φίλτρο (LPF) έχει συχνότητα αποκοπής τα $1,5\cdot 10^6$Hz.



<u>Ερώτηση 1η (7 Μονάδες):</u> Υπολογίστε και απεικονίστε το πλάτος του φάσματος του σήματος εξόδου, $Y(f)$, του ζωνοπερατού φίλτρου.

<u>Ερώτηση 2η (4 Μονάδες):</u> Υπολογίστε το σήμα $s(t)$ στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου.

<u>Ερώτηση 3η (4 Μονάδες):</u> Ποιος είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας κατά Nyquist των σημάτων $x(t)$ και $s(t)$.

<u>Ερώτηση 4η (5 Μονάδες):</u> Αν εναλλακτικά το σήμα $s(t)$ υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα διπλάσια εκείνης που υποδεικνύει ο Nyquist και στη συνέχεια μετατραπεί σε ένα ψηφιακό σήμα PCM, υπολογίστε το εύρος ζώνης που θα απαιτηθεί για τη μετάδοση του σήματος PCM, υποθέτοντας ότι ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος για τη μετάδοση είναι τουλάχιστο 40 dB.

Ερώτηση 1η: Αρχικά υπολογίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου, ώστε να εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα των ΓΧΑ συστημάτων που συνδέει το φάσμα του σήματος εισόδου με το φάσμα του σήματος εξόδου και τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου: $Y(f)=H_{BPF}(f)X(f)$.

Άρα

$$x(t)=m(t)\left[1+\cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^6 t\right)\right]\Rightarrow X(f)=F\left\{m(t)\left[1+\cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^6 t\right)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow X(f)=F\left\{m(t)+m(t)\cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^6 t\right)\right\}$$

$$\Rightarrow X(f)=F\left\{m(t)\right\}+F\left\{m(t)\cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^6 t\right)\right\}$$

$$\Rightarrow X(f)=M(f)+M(f)*F\left\{\cos\left(2\pi\cdot 3\cdot 10^6 t\right)\right\}$$

$$\Rightarrow X(f)=M(f)+M(f)*\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-3\cdot 10^6\right)+\delta\left(f+3\cdot 10^6\right)\right]$$

$$\Rightarrow X(f)=M(f)+\frac{1}{2}M\left(f-3\cdot 10^6\right)+\frac{1}{2}M\left(f+3\cdot 10^6\right)$$

όπου με * συμβολίζεται η πράξη της συνέλιξης.

Επειδή

$$m(t)=10^6 sinc\left(10^6 t\right)\Rightarrow M(f)=F\left\{10^6 sinc\left(10^6 t\right)\right\}\Rightarrow M(f)=\Pi\left(\frac{f}{10^6}\right)$$

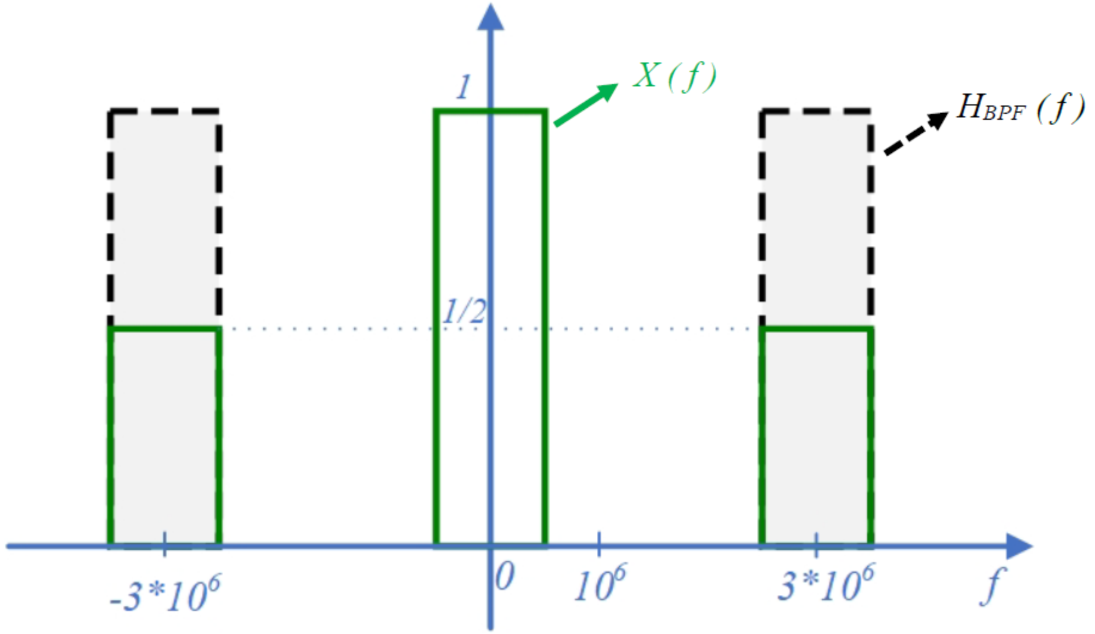
Άρα

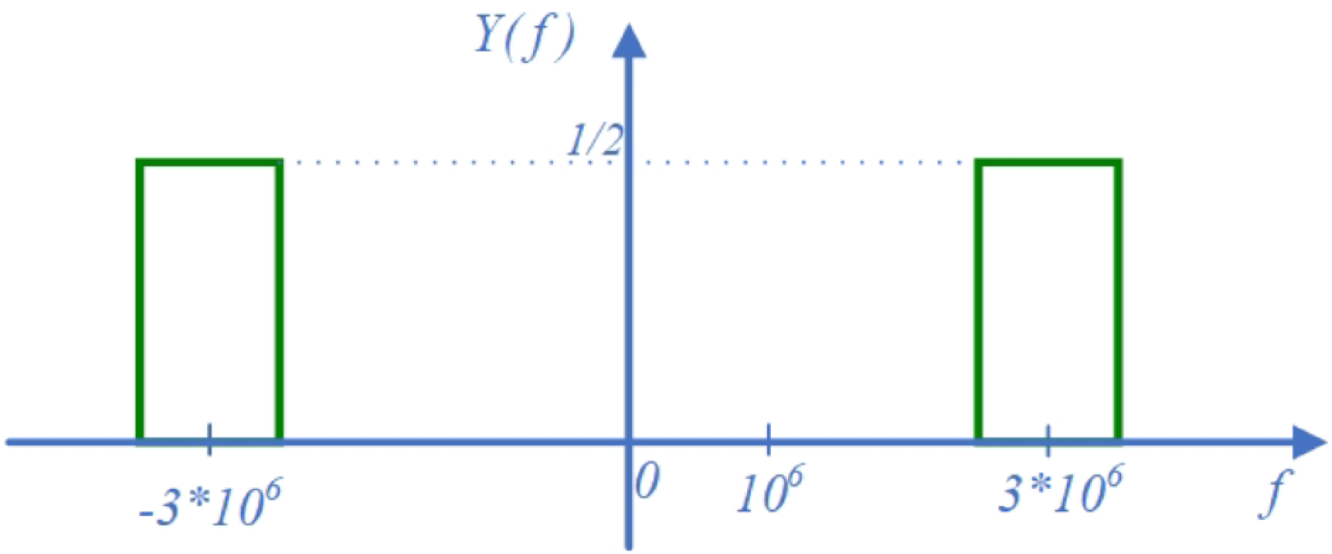
$$X(f)=\Pi\left(\frac{f}{10^6}\right)+\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f-3\cdot 10^6}{10^6}\right)+\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f+3\cdot 10^6}{10^6}\right)$$

Άρα

$$\begin{aligned}Y(f)&=H_{BPF}(f)X(f)\\&=\left[\Pi\left(\frac{f-3\cdot 10^6}{10^6}\right)+\Pi\left(\frac{f+3\cdot 10^6}{10^6}\right)\right]\left[\Pi\left(\frac{f}{10^6}\right)+\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f-3\cdot 10^6}{10^6}\right)+\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f+3\cdot 10^6}{10^6}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f-3\cdot 10^6}{10^6}\right)+\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f+3\cdot 10^6}{10^6}\right)\end{aligned}$$

Το γινόμενο μπορεί να υπολογισθεί εύκολα και γραφικά

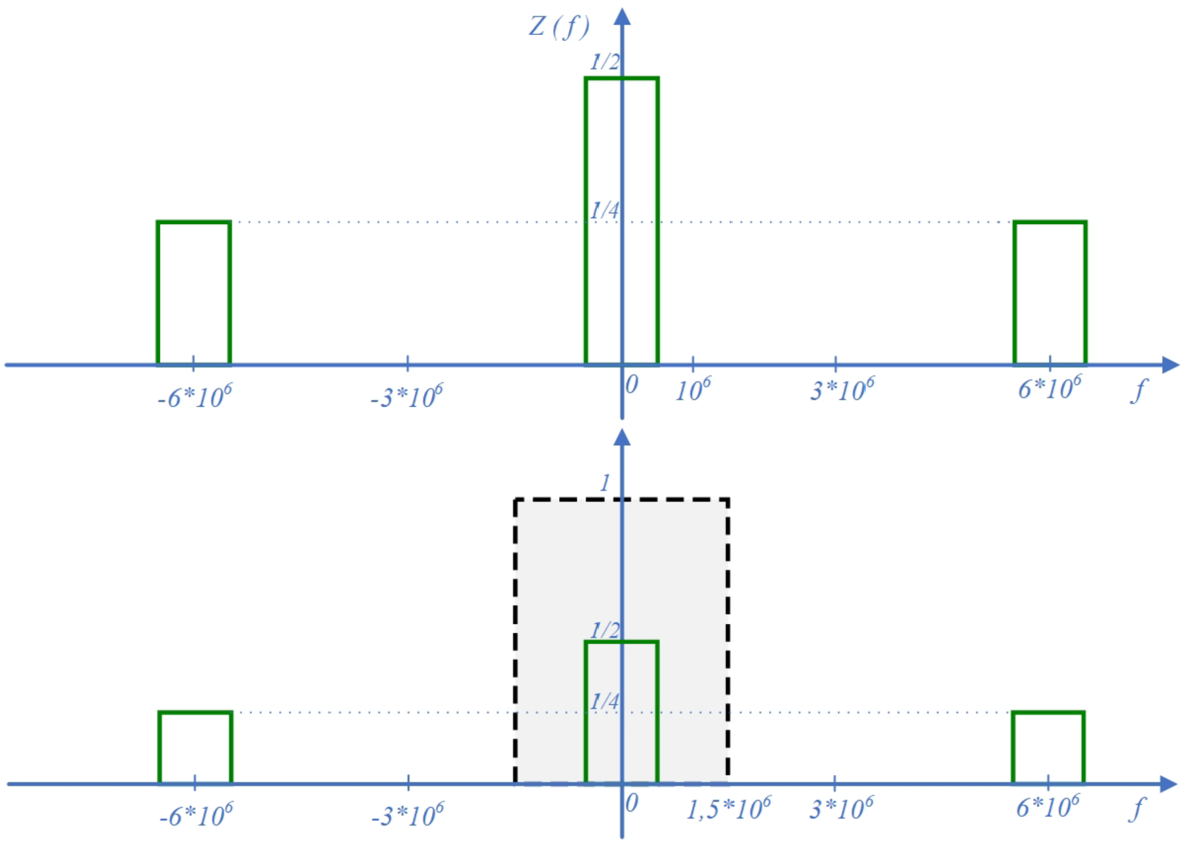




<u>Ερώτηση 2η:</u> Το φάσμα του σήματος $z(t)$ στην έξοδο του πολλαπλασιαστή είναι

$$Z(f)=Y(f)*\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-3\cdot10^{6}\right)+\delta\left(f+3\cdot10^{6}\right)\right]=\frac{1}{2}Y\left(f-3\cdot10^{6}\right)+\frac{1}{2}Y\left(f+3\cdot10^{6}\right)$$

Το σήμα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου υπολογίζεται εύκολα γραφικά αν απεικονίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου στο ίδιο σχήμα με το φάσμα του σήματος στην έξοδο του πολλαπλασιαστή ως εξής:



Άρα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου έχουμε το φάσμα

$S(f)=\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f}{10^{6}}\right)$ και άρα το σήμα στο πεδίο του χρόνου είναι $s(t)=\frac{10^{6}}{2}sinc\left(10^{6}t\right)$.

Εναλλακτική λύση

$$x(t) = m(t)\cdot\left[1 + \cos\left(2\pi\, 3\cdot 10^6 t\right)\right] \qquad f_1 = 3\cdot 10^6\ Hz$$

$$m(t) = 10^6 \operatorname{sinc}(10^6 t) \qquad M(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{10^6}\right)$$

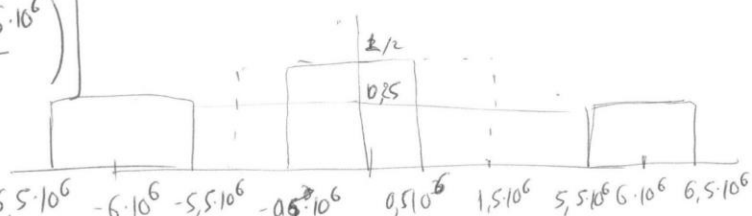
$$X(f) = M(f) + \frac{1}{2}\left[M(f-f_1) + M(f+f_1)\right]$$

$$= \operatorname{rect}\left(\frac{f}{10^6}\right) + \frac{1}{2}\left[\operatorname{rect}\left(\frac{f-3\cdot 10^6}{10^6}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f+3\cdot 10^6}{10^6}\right)\right]$$

$$Y(f) = X(f)\cdot H_{BP}(f) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{rect}\left(\frac{f-3\cdot 10^6}{10^6}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f+3\cdot 10^6}{10^6}\right)\right]$$

$$Z(t) = \frac{1}{2}\cdot\left[Y(f-3\cdot 10^6) + Y(f+3\cdot 10^6)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\operatorname{rect}\left(\frac{f-6\cdot 10^6}{10^6}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f}{10^6}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f}{10^6}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f+6\cdot 10^6}{10^6}\right)\right]$$



$$S(f) = \frac{1}{2}\operatorname{rect}\left(\frac{f}{10^6}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{2} 10^6 \operatorname{sinc}(10^6 t)$$

<u>Ερώτηση 3^{η}:</u>

Ο ρυθμός δειγματοληψίας κατά Nyquist για μεν το $x(t)$ είναι 7 MHz, για δε το $s(t)$ είναι 1 MHz.

<u>Ερώτηση 4^{η}:</u>

Αν δειγματοληπτήσουμε το σήμα με συχνότητα διπλάσια του Nyquist, τότε $f_s = 2\,MHz$. Επειδή απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος $SNR \geq 40\,dB \Rightarrow 20\log_{10} L \geq 40 \Rightarrow L \geq 10^2 = 100$. Όμως στην PCM έχουμε στάθμες που είναι δυνάμεις του 2, και άρα $L = 128$, δηλαδή απαιτούνται 7 bits/sample.

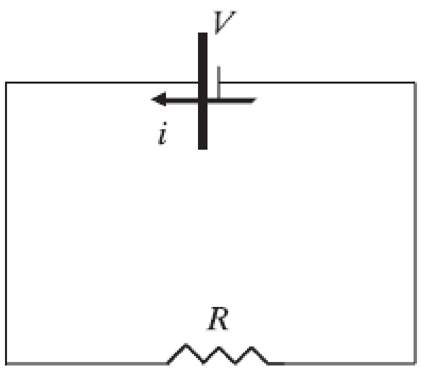
Άρα $B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} 2 \cdot 7 = 7\ MHz$

Ερωτήσεις

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (1)

2.4.1 Στιγμιαία ισχύς/ενέργεια

Θεωρούμε καταρχήν το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος:



Σχήμα 2.27

Ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος

Υποθέτουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση V είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το χρόνο. Η ισχύς που παράγεται στο κύκλωμα και καταναλώνεται στην αντίσταση ισούται με:

$$P = V \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (2)

Και η αντίστοιχη ενέργεια που έχει παραχθεί στο κύκλωμα και έχει καταναλωθεί στην αντίσταση σε χρόνο t ισούται με το γινόμενο της ισχύος επί τον αντίστοιχο χρόνο, δηλαδή:

$$E(t) = P \cdot t = V \cdot i \cdot t = i^2 \cdot R \cdot t = \frac{V^2}{R} \cdot t$$

Οι μονάδες ισχύος είναι τα Watt (1W = 1Joule/sec) και ενέργειας είναι τα Joule ή οι Wh ($1\text{Wh} = 1\text{Watt} \times 1\text{hour} = 1\frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \times 3.600\,\text{sec} = 3.600\,\text{Joule}$)

Εάν στο παραπάνω σχήμα υποθέσουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε οι ανωτέρω σχέσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R = \frac{V^2(t)}{R}$$

$$E(t) = \int_0^t P(t) \cdot dt = \int_0^t V(t) \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^t i^2(t) \cdot R \cdot dt = \int_0^t \frac{V^2(t)}{R} \cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (3)

Για τηλεπικοινωνιακά συστήματα θεωρούμε ότι $R = 1\Omega$, οπότε το τηλεπικοινωνιακό σήμα $x(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί εξίσου με την εφαρμοζόμενη τάση ή το ρεύμα στις ανωτέρω σχέσεις, οι οποίες μετασχηματίζονται ως εξής:

Στιγμιαία ισχύς πραγματικού σήματος $P(t) = x^2(t)$

Ενέργεια πραγματικού σήματος $E(t) = \int_0^t x^2(t) \cdot dt$

Προκειμένου οι ανωτέρω ορισμοί να ισχύουν και για μιγαδικά σήματα $x(t)$ (των οποίων η ισχύς εξαρτάται μόνο από το μέτρο τους), οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

Στιγμιαία ισχύς σήματος $P(t) = |x(t)|^2$

Ενέργεια σήματος $E(t) = \int_0^t |x(t)|^2 \cdot dt$

Σημείωση: Για πραγματικά σήματα $x(t)$ ισχύει ότι $|x(t)|^2 = x^2(t)$.

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (4)

2.4.2 Μέση ισχύς

Γενικά, για ένα μέγεθος $m(t)$ που μεταβάλλεται με το χρόνο, η χρονική μέση τιμή του μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ($t_1 < t_2$) ορίζεται ως:

$$\overline{m(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} m(t)\cdot dt$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να εκφράσουμε τη μέση ισχύ ενός σήματος $x(t)$ λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή του καθ' όλη τη διάρκειά του (ή ισοδύναμα από $-\infty$ έως $+\infty$) ως εξής:

$$\overline{P(t)} = P_x = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty}\left\{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\} \overset{\substack{t_1\to -T\\ t_2\to T}}{=} \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\}$$

Αντίστοιχα, η ενέργεια αυτού του σήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$E_x = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty}\left\{(t_2 - t_1)\cdot P_x\right\} = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty}\left[\int_{t_1}^{t_2}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2\cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (5)

2.4.3 Σήματα ενέργειας – ισχύος

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$0 < E_x < +\infty$$

ονομάζονται ενεργειακά. Παραδείγματα σημάτων ενέργειας είναι διάφοροι παλμοί (τετραγωνικός, τριγωνικός), δηλαδή σήματα πεπερασμένης διάρκειας. Τα σήματα αυτά έχουν μηδενική ισχύ.

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ

$$0 < P_x < +\infty$$

ονομάζονται σήματα ισχύος. Παραδείγματα σημάτων ισχύος είναι τα περιοδικά και τα σήματα άπειρης διάρκειας (π.χ. το σήμα $x(t) = c,\ 0 < t < +\infty$). Τα σήματα αυτά έχουν άπειρη ενέργεια.

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (6)

2.4.4 Ταυτότητα Parseval – Μέση ισχύς περιοδικών σηµάτων

Για τα περιοδικά σήματα η σχέση υπολογισμού της μέσης ισχύος μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

Έστω σήμα $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 τέτοια ώστε να ισχύει $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$x(t+nT_0)=x(t),\ \forall\, n\ \in\ \mathbb{Z}$$

Στον υπολογισμό της μέσης ισχύος μπορούμε να περιορίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στη διάρκεια μιας περιόδου:

$$P_x = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\} \overset{t_2\to t_1+nT_0}{=} \lim_{nT_0\to\infty}\left\{\frac{1}{nT_0}\int_{t_1}^{t_1+nT_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{nT_0}\left[n\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right]\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt\right\} = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}\left|x(t)\right|^2\cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (7)

Για τα περιοδικά σήματα που γράφονται με τη μορφή μιγαδικής σειράς Fourier ως:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft}\ ,\ \text{όπου}\ V_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi nft}dt=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)e^{-j2\pi nft}dt$$

και έχουν ΜΣ Fourier:

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n\cdot\delta(f-nf_0)\ ,\ f_0=\frac{1}{T_0}$$

η μέση ισχύς μπορεί να γραφεί ως:

$$P_x=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}|x(t)|^2\cdot dt=\frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0}x(t)\cdot x^*(t)\cdot dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{V_n^*\cdot V_n\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|V_n|^2$$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/3η
ΟΣΣ/25.01.2020/Ν.Δημητρίου

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται ταυτότητα Parseval για περιοδικά σήματα.

Δηλαδή, βρίσκοντας την έκφραση του περιοδικού σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέση ισχύ του υπολογίζοντας το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών των όρων που περιλαμβάνει το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων.

Παράδειγμα (1)

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

Α΄ τρόπος: Υπολογισμοί με ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Το $x(t)$ έχει περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Η μέση ισχύς, σύμφωνα με την παραπάνω ενότητα, θα ισούται με:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} |A_0 \cos(2\pi f_0 t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} [A_0 \cos(2\pi f_0 t)]^2 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t)\cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(2\pi f_0 t)\cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\cdot dt =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1}{2}\cdot dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2}\cdot dt\right] = \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{1}{2}[t]_{t_1}^{t_1+T_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} (\sin(4\pi f_0 t))' \cdot dt\right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{1}{2}[t_1 + T_0 - t_1] + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}[\sin(4\pi f_0 t)]_{t_1}^{t_1+T_0}\right] =$$

$$\frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}[\sin(4\pi f_0 (t_1 + T_0)) - \sin(4\pi f_0 (t_1))]\right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi f_0}\left[\sin\left(4\pi f_0 t_1 + 4\pi f_0 \frac{1}{f_0}\right) - \sin(4\pi f_0 t_1)\right]\right] = \frac{A_0^2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2} + 0\right] = \frac{A_0^2}{2}$$

Παράδειγμα (2)

Β΄ τρόπος: Υπολογισμοί από τη σειρά Fourier – με την ταυτότητα Parseval

Το $x(t)$ μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς Fourier με τη χρήση της σχέσης Euler:

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{A_0}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Επίσης, ο ΜΣ Fourier του $x(t)$ ισούται με: $X(f) = \frac{A_0}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2}\delta(f + f_0)$

οπότε η μέση ισχύς υπολογίζεται (με χρήση της ταυτότητας Parseval) ως εξής:

$$P_x = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{A_0^2}{4} + \frac{A_0^2}{4} = \frac{A_0^2}{2}.$$