ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

Εισαγωγή στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

2η ΟΣΣ – Τμήμα ΑΘΗ.1 – 07/12/2019

Νίκος Δημητρίου

Σημείωση: Οι διαφάνειες αυτές βασίζονται στις παρουσιάσεις της 2ης ΟΣΣ που έχουν αναρτηθεί στο study.eap.gr και έχουν εμπλουτιστεί με περισσότερα παραδείγματα

Στόχοι Μελέτης

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
  - Παροχή Υπηρεσιών προς τους χρήστες
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
  - Τύποι Σημάτων
  - Χαρακτηριστικά Συστημάτων
  - Πράξεις σημάτων
  - Λειτουργία συστημάτων

Σήματα → Πεδίο χρόνου
→ Πεδίο συχνοτήτων } Συναρτήσεις 1 μεταβλητής (t ή f)

διαστήματα τιμών < διακριτά — Φυσικοί, Ακέραιοι
συνεχή — Ρητοί, Άρρητοι
Πραγματικοί

Αναλογικά - Ψηφιακά σήματα
Συνεχούς Χρόνου — Διακριτού χρόνου

Περιοδικά → Τριγωνομετρικά
Μη περιοδικά → rect, tri, sinc, δ } Κριτήρια περιοδικότητας Αθροίσματος σημάτων

⇒ OCTAVE MATLAB (σχεδίαση σημάτων / φασμάτων) + απλές πράξεις

Μετάβαση μεταξύ πεδίων χρόνου - συχνοτήτων: ΜΣ FOURIER

Ιδιότητες - Πίνακες

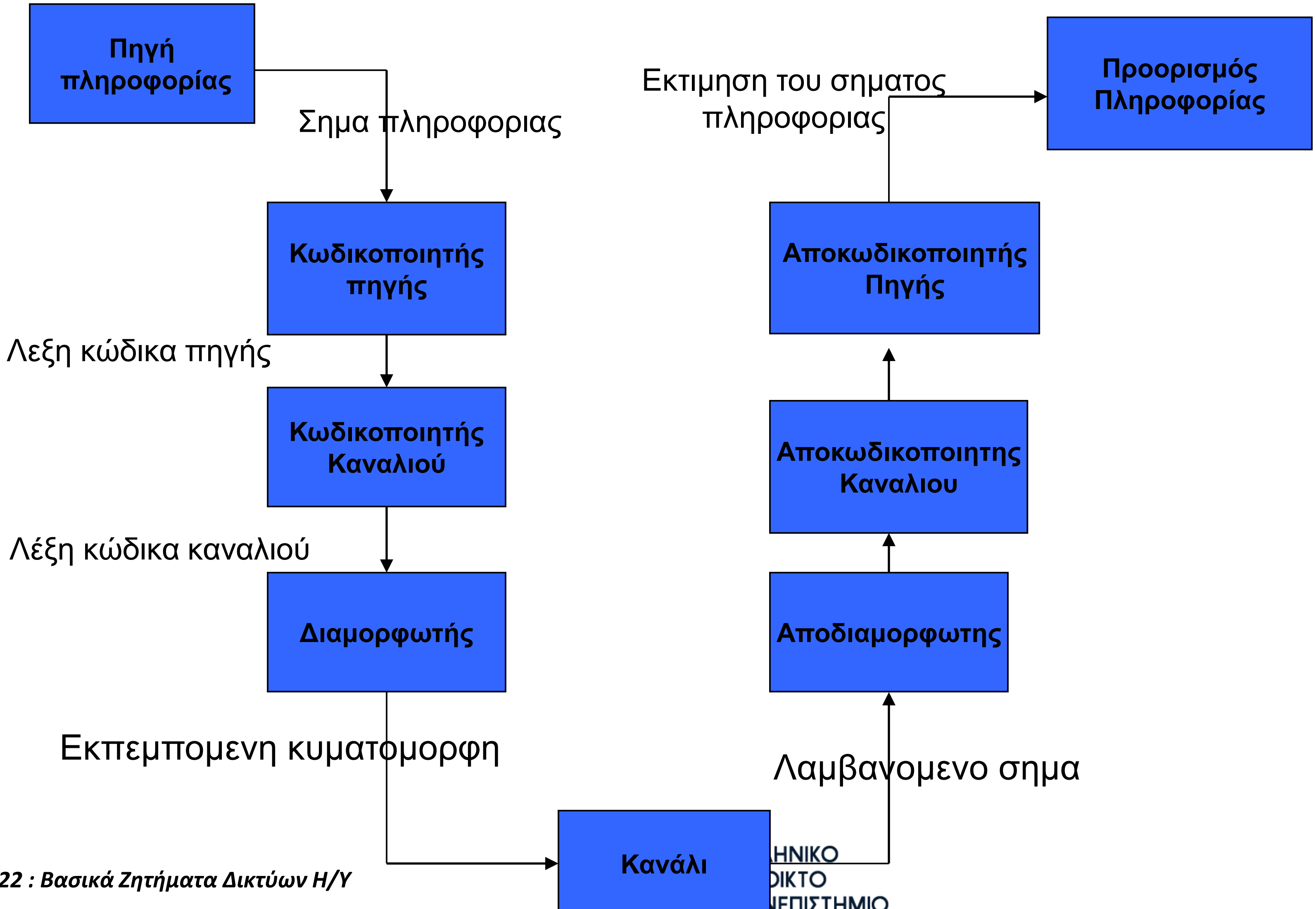
Συστήματα : (Γραμμική Χρονικά αναλλοίωτη) μεταβολή σήματος εισόδου σε ένα άλλο σήμα εξόδου

Πράξη συνέλιξης

Ιδανικά φίλτρα.

Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

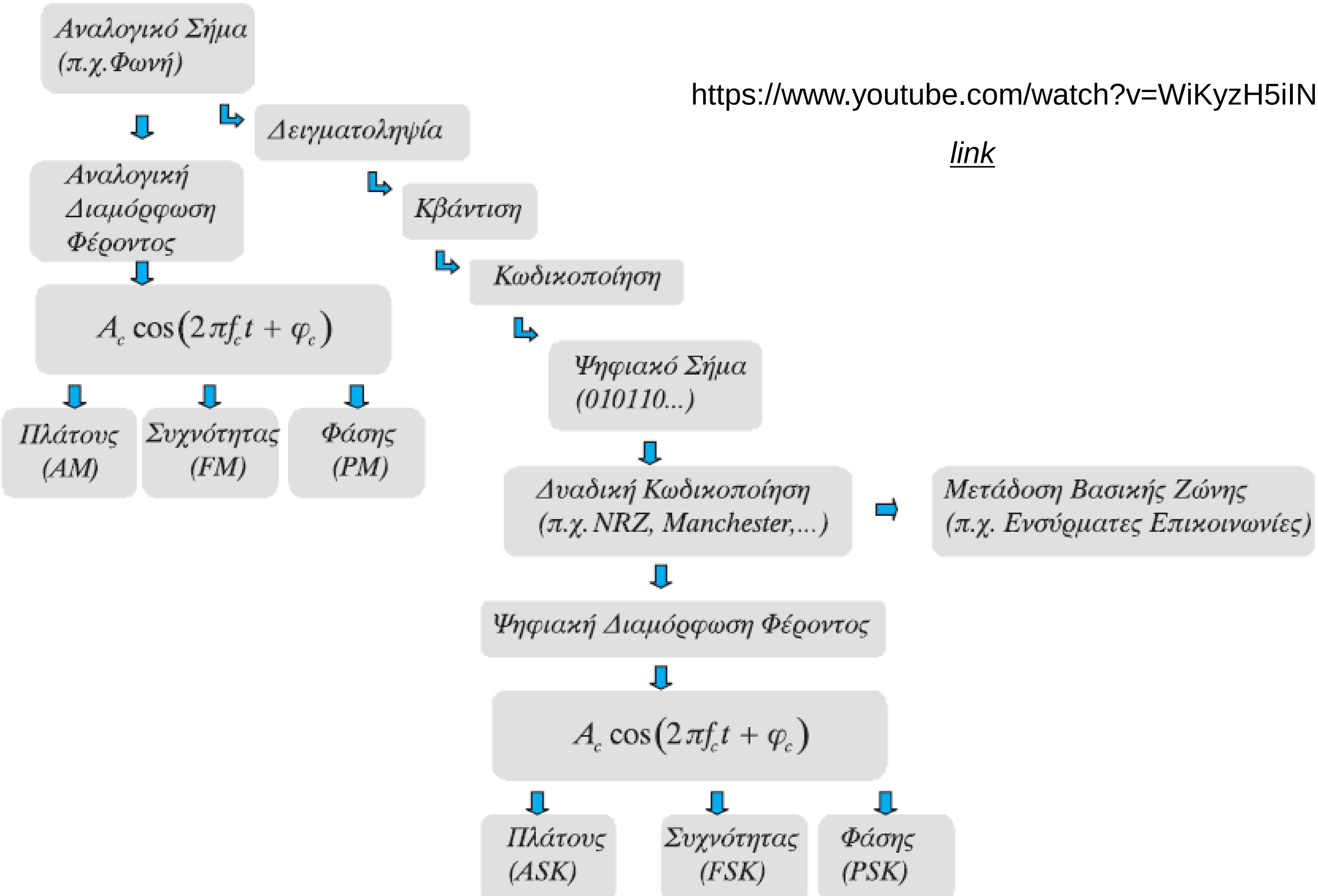
Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



Στάδια Επεξεργασίας σημάτων

https://www.youtube.com/watch?v=WiKyzH5iIN8

link

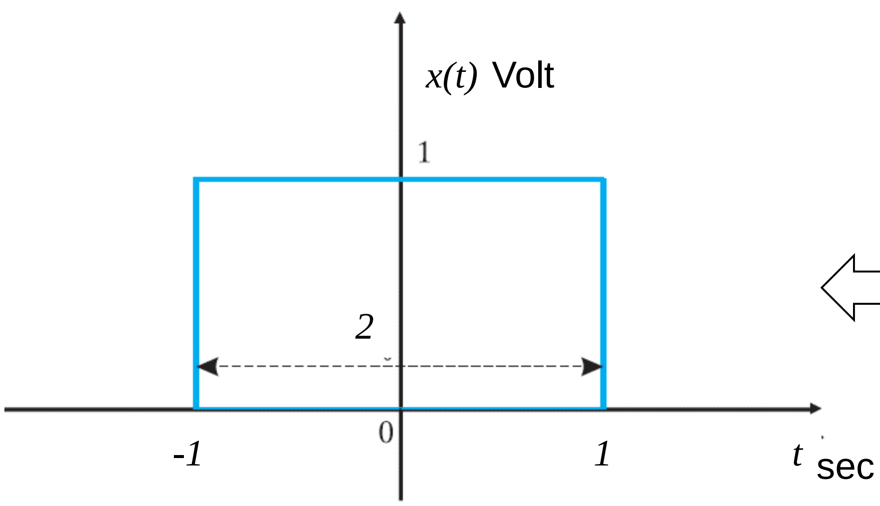


Σήματα και Συστήματα

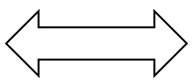
Σήμα

- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
  - Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα
  - Τα σήματα περιγράφονται από συναρτήσεις
    - Δίνουν τις τιμές των σημάτων στα πεδία του χρόνου ή των συχνοτήτων

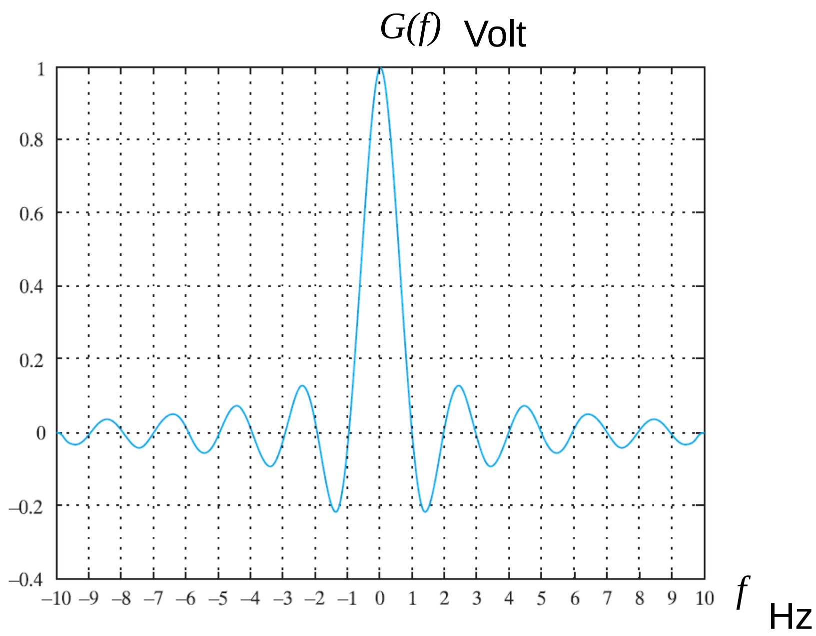
Πεδίο χρόνου



Χρονική κυματομορφή



Πεδίο συχνοτήτων



Φάσμα Πλάτους

2.1.1 Συνεχή – διακριτά σύνολα

Στην ενότητα αυτή γίνεται μια ανασκόπηση στην κατηγοριοποίηση των αριθμών σε σύνολα. Τα διάφορα σύνολα ορίζονται ως εξής:

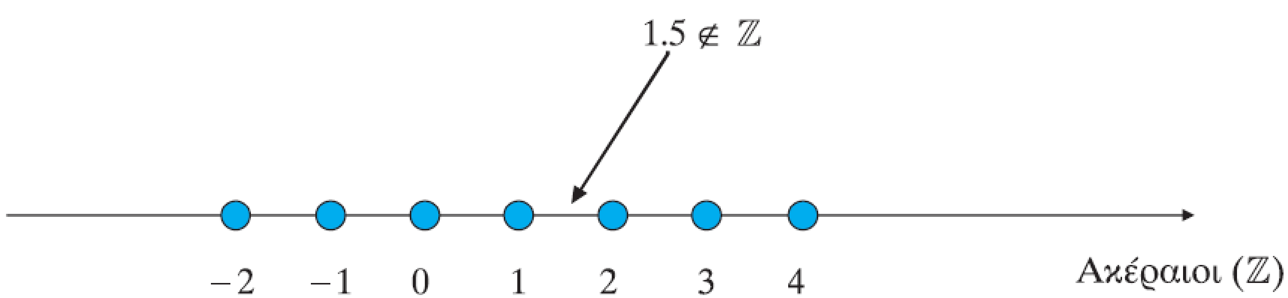
- Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
- Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$
- Ρητοί αριθμοί, που ορίζονται ως το πηλίκο ακεραίων:

$$z \in \mathbb{Q} \text{ όταν } \exists x, y \in \mathbb{Z} \ (y \neq 0) \text{ ώστε } z = \frac{x}{y}$$

- Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή πηλίκου ακεραίων. Είναι οι δεκαδικοί με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία.

Παραδείγματα άρρητων: $\pi = 3.1415927\ldots$, οι ρίζες μη τελείων τετραγώνων $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ κ.λπ.

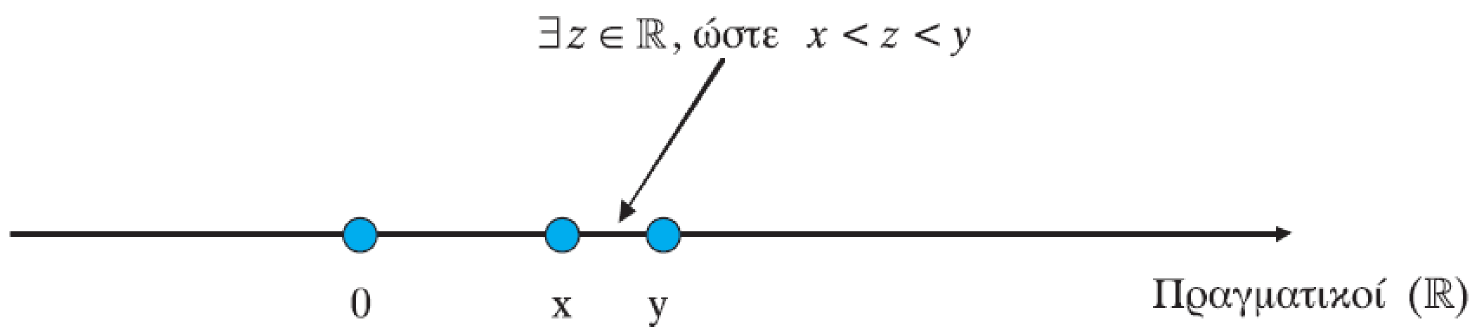
Τα παραπάνω σύνολα είναι διακριτά, δηλαδή αποτελούνται από διακριτές τιμές και είναι δυνατό μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών τους να υπάρχει αριθμός που να μην ανήκει στο σύνολο.



- Οι πραγματικοί αριθμοί ($\mathbb{R}$) συμπεριλαμβάνουν ρητούς και άρρητους.

Αποτελούν ένα συνεχές σύνολο αριθμών, δηλαδή για κάθε ζεύγος πραγματικών υπάρχει πραγματικός που να βρίσκεται ανάμεσά τους:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ με } x<y, \exists z \in \mathbb{R}, \text{ ώστε } x<z<y$$



Σχήμα 2.2

Παράδειγμα συνεχούς συνόλου

- Μιγαδικοί αριθμοί:

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

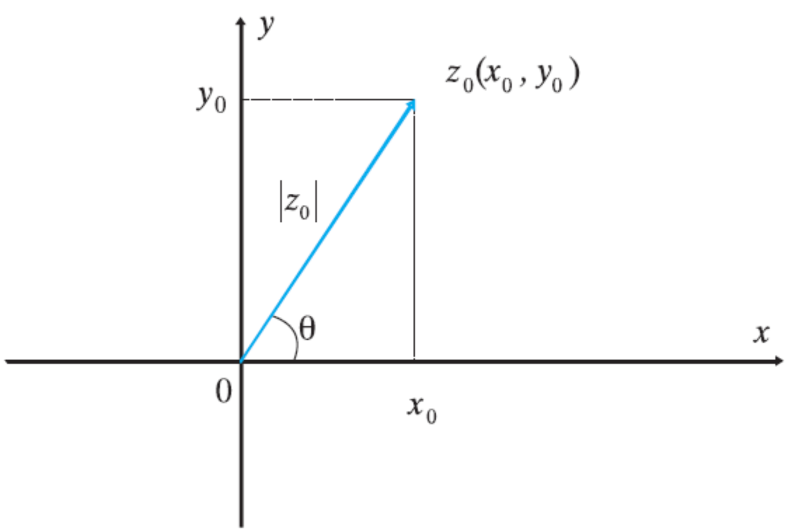
Ο μιγαδικός αριθμός «j» ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Ο πολλαπλασιασμός του «j» επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.



Σχήμα 2.7

Δισδιάστατη απεικόνιση μιγαδικού αριθμού

Κατηγορίες Σημάτων

- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
  - Περιοδικά Σήματα
  - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
    - Ημιτονοειδή Σήματα
    - Ορθογώνιος Παλμός
    - Τριγωνικός Παλμός
    - Κρουστικά Σήματα
    - Σήμα Βήματος

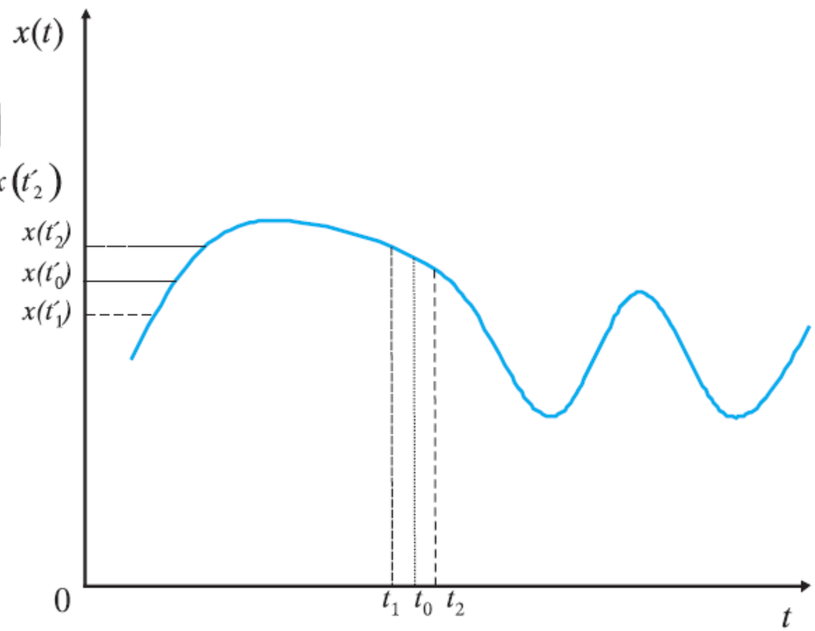
Κατηγορίες Σημάτων

2.2.3 Σήματα συνεχούς χρόνου – αναλογικά

Συνεχές Πεδίο Τιμών

$\forall \; t_1', t_2' \; [\text{με } x(t_1') < x(t_2')]$

$\exists \; t_0' \;$ ώστε $x(t_1') < x(t_0') < x(t_2')$



$\forall \; t_1, t_2 \; [\text{με } t_1 < t_2]$

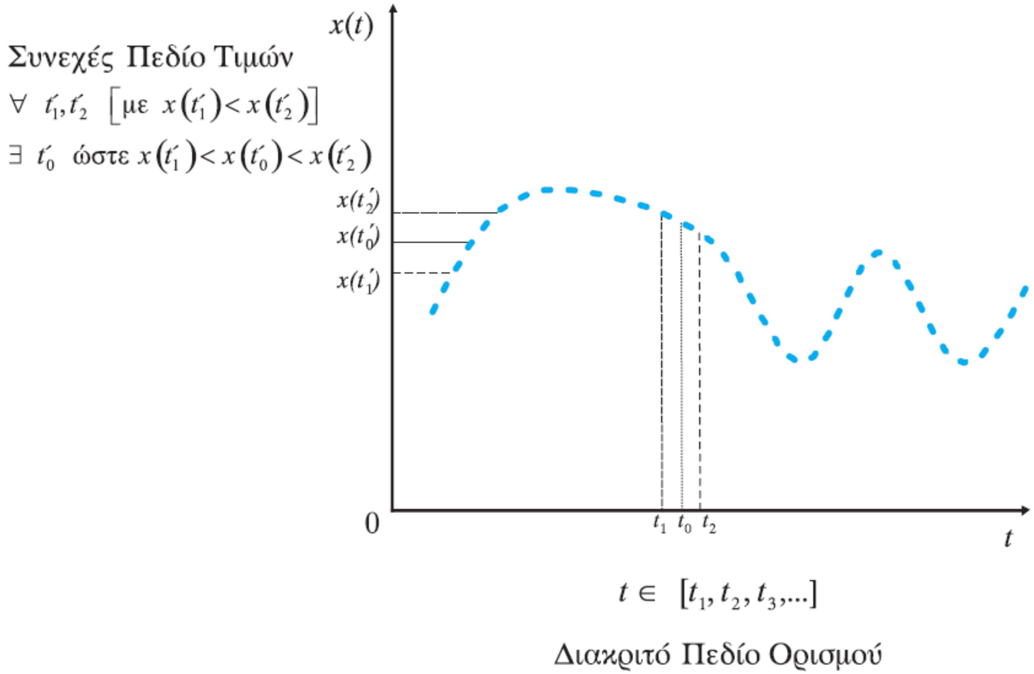
$\exists \; t_0 \;$ ώστε $t_1 < t_0 < t_2$

Συνεχές Πεδίο Ορισμού

Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_c t), \; t \in \mathbb{R}$

2.2.4 Σήματα διακριτού χρόνου

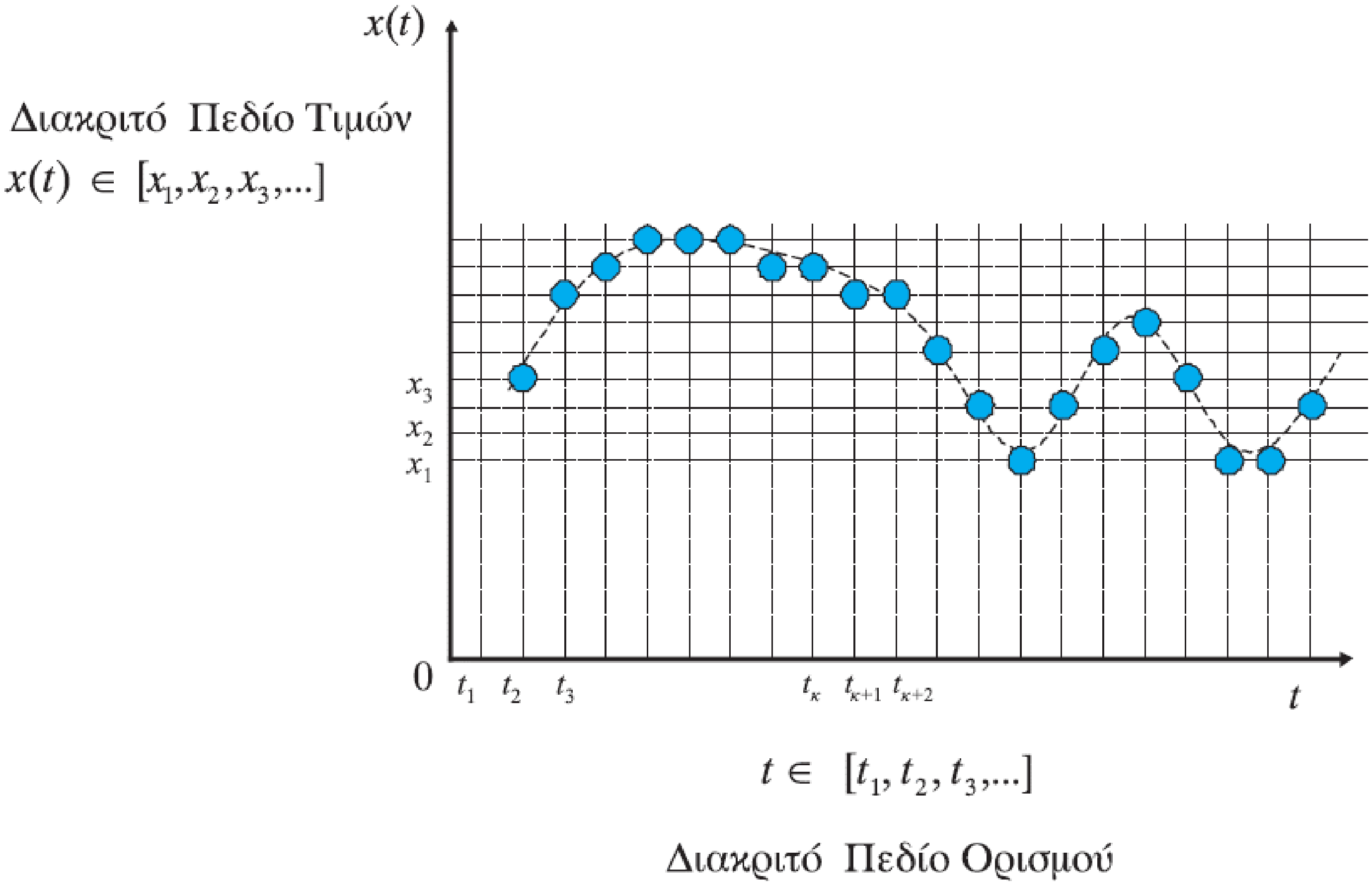
Τα σήματα διακριτού χρόνου έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών.



Για παράδειγμα, το σήμα $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n=0,1,2,\ldots$ και T_0 άρρητος $\left(\text{π.χ. } T_0=\sqrt{5}\right)$, είναι διακριτού χρόνου, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα συνεχές σύνολο [το $(-1,1)$] $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

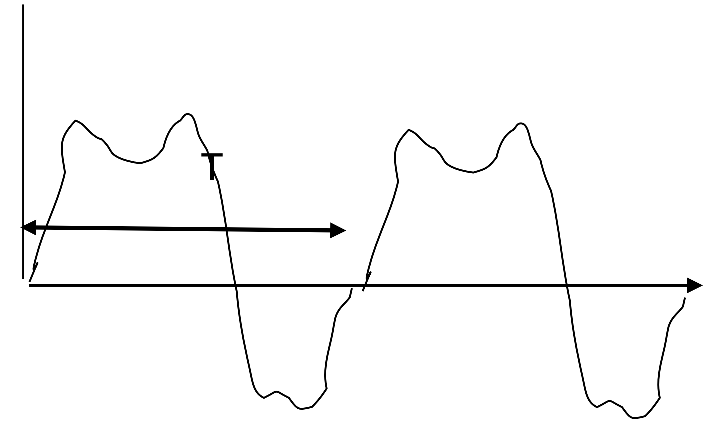
2.2.5 Ψηφιακά σήματα

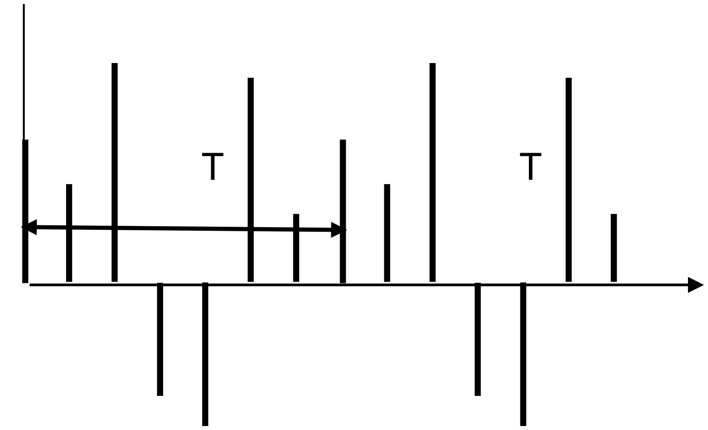
Τα ψηφιακά σήματα έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και διακριτό πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n=0,1,2,\ldots$ και T_0 ρητός, είναι ψηφιακό, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα διακριτό σύνολο [π.χ. για $T_0=5$, το $x(n)$ παίρνει τις τιμές $\{0.309,-0.809,1\}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$].



Περιοδικά Σήματα

- Αναλογικό Σήμα
  - Ισχύει η σχέση y(t)=y(t+T)
  - T είναι περίοδος και ορίζει τη μικρότερη χρονική διάρκεια μετά την οποία επιλαμβάνεται
- Διακριτό Σήμα
  - Ισχύει y(n)=y(n+N) για όλα τα n
  - N περίοδος





Παράδειγμα 2.2 – Συνημιτονοειδές σήμα

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) = A \cdot \cos(2\pi f t + \theta)$$

ω: κυκλική συχνότητα (μετράται σε rad/sec)

θ: φάση (μετράται σε rad)

f: συχνότητα (μετράται σε Hertz)

A: πλάτος (μετράται σε Volt)

Υπολογισμός περιόδου

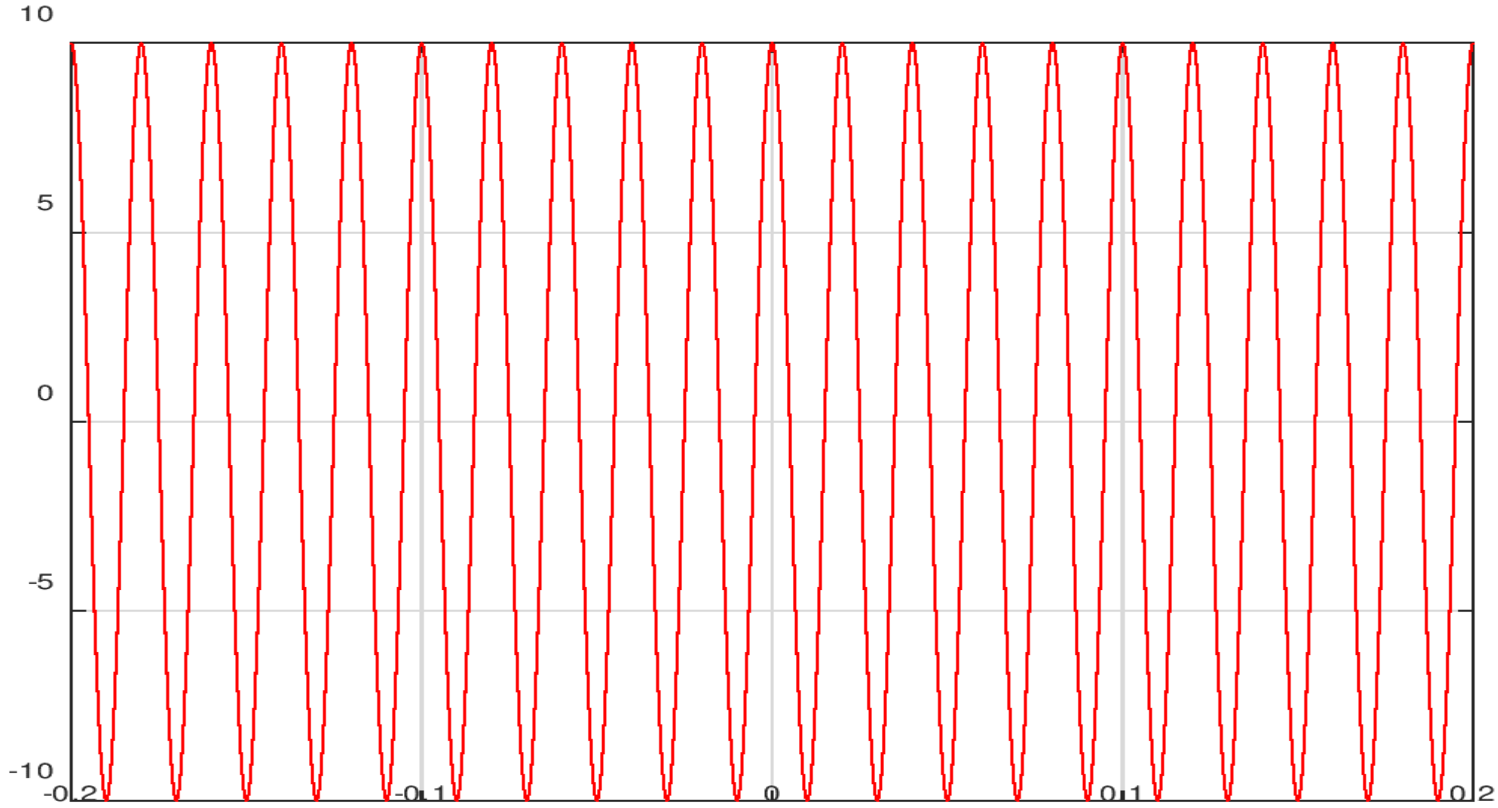
Αναζητείται θετικό $T \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιο ώστε $\forall t \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x(t+T) = x(t) \Leftrightarrow A \cdot \cos\left(2\pi f (t+T) + \theta\right) = A \cdot \cos(2\pi f t + \theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi f t + 2\pi f T + \theta) = \cos(2\pi f t + \theta) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ισχύει ότι αν } \cos(x) = \cos(y), \\ \text{τότε } x = 2k\pi + y,\ k = 1,2,\ldots \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi f t + 2\pi f T + \theta = 2\pi f t + \theta + 2k\pi, k = 1,2,\ldots$$

$$x(t)=10\cos(2\pi 50t)$$



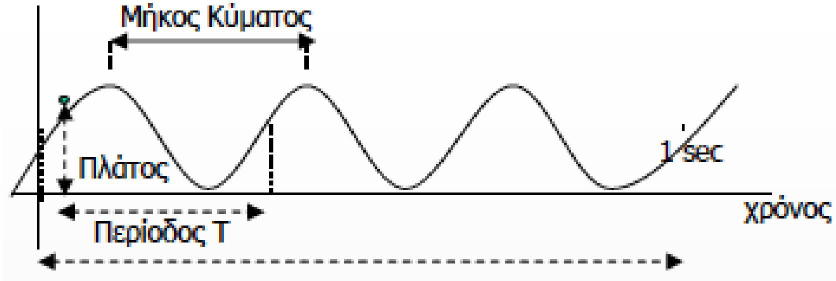
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Ημιτονοειδή Σήματα (1)

- Ειδική κατηγορία περιοδικών σημάτων
- Αναλογικού χρόνου
  - Παράσταση

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

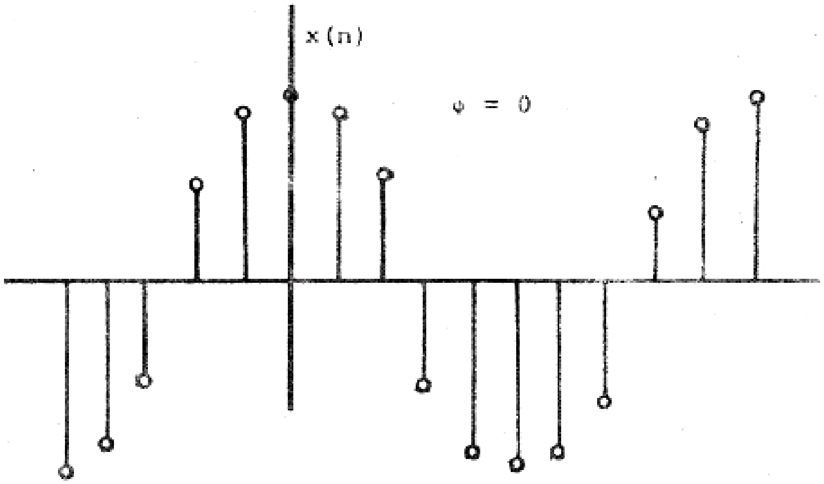
- φ → γωνία φάσης
- Τ → περίοδος
- ω=2πf → κυκλική συχνότητα



- Διακριτού χρόνου
  - Παράσταση

$$x(n) = cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \theta\right)$$

- Ν → Περίοδος
- θ → γωνία φάσης



Octave-Παράδειγμα 1

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$$

Γενίκευση:

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2, ..., T_N θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$$

Παράδειγμα

Βασικά Ζητήματα ΠΛΗ22 8/31

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5\pi t)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}\sec$

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=1,β=10 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \beta \mathrm{T}_1 = \alpha \mathrm{T}_2 = 4\sec$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25$ Hz

Examples1a,1b

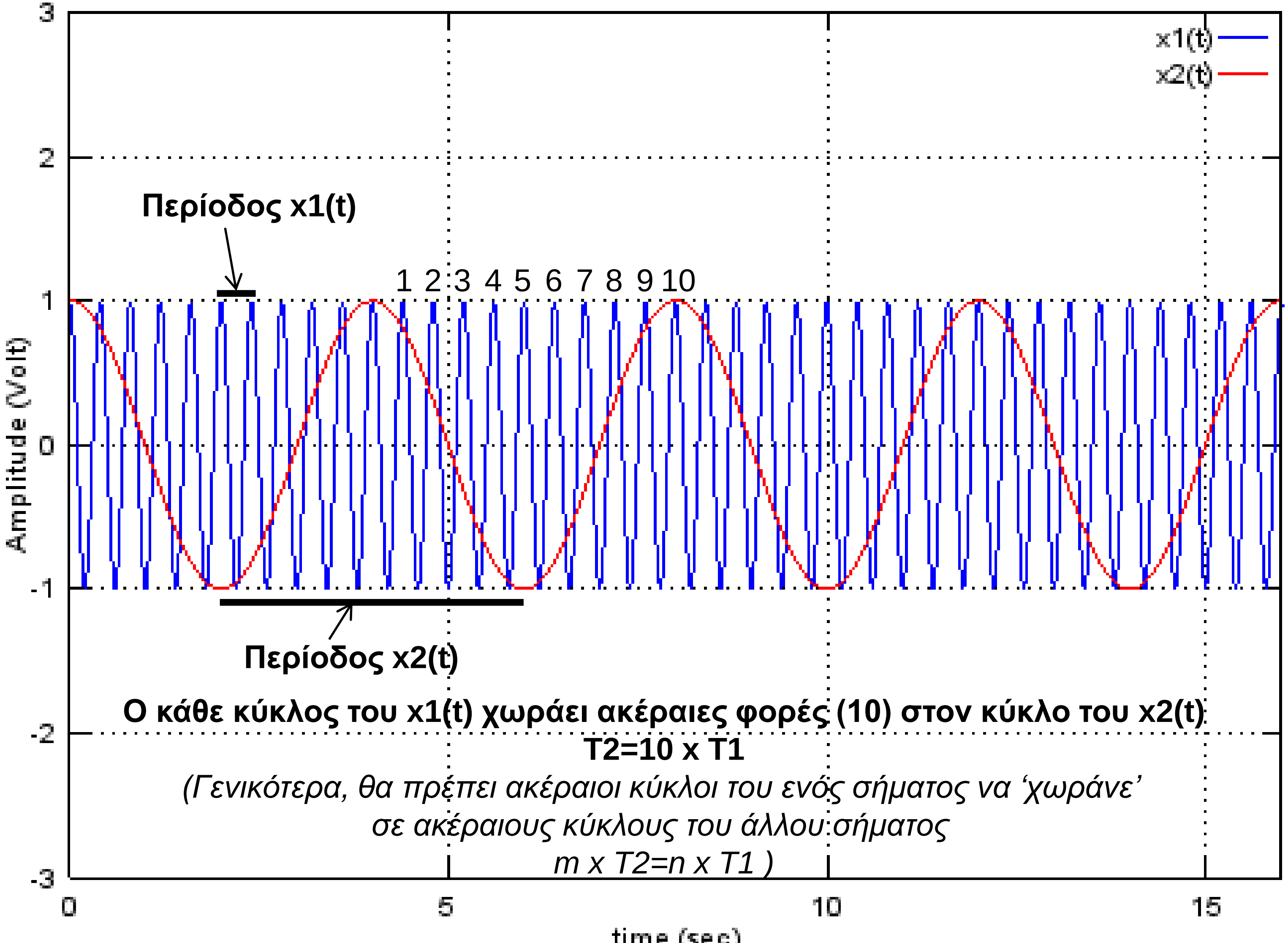
Γραφική απεικόνιση της προηγούμενης άσκησης στο OCTAVE

- *Παραπομπή: Για την εισαγωγή στο OCTAVE δείτε τις διαφάνειες octave_matlab_tutorial_v1.0.ppt*

Example 1a

- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*pi.*t); % 1st signal with frequency 2.5Hz
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal ‘b’ is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal ‘r’ is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k’); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1a

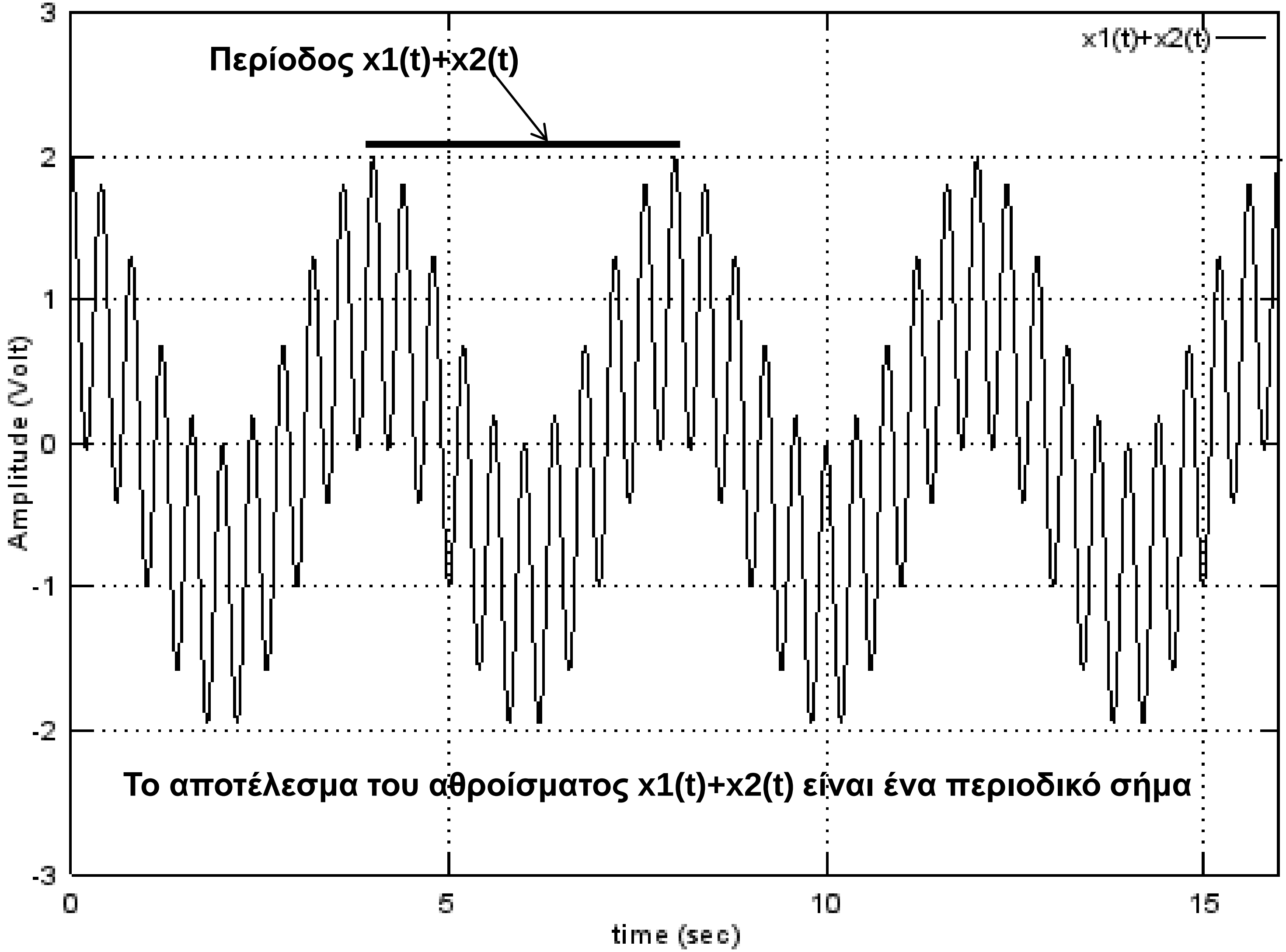


Ο κάθε κύκλος του x1(t) χωράει ακέραιες φορές (10) στον κύκλο του x2(t)

T2=10 x T1

(Γενικότερα, θα πρέπει ακέραιοι κύκλοι του ενός σήματος να 'χωράνε' σε ακέραιους κύκλους του άλλου σήματος m x T2=n x T1)

Example 1a



Περίοδος x1(t)+x2(t)
x1(t)+x2(t)
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) είναι ένα περιοδικό σήμα
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

Είναι $s_1(t) = \boxed{f(5t/\pi)+} \; f\left(\frac{t}{2}\right) = \boxed{\mathbf{cos(5t)}} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το **$cos(5t)$** η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5}$ ***sec***

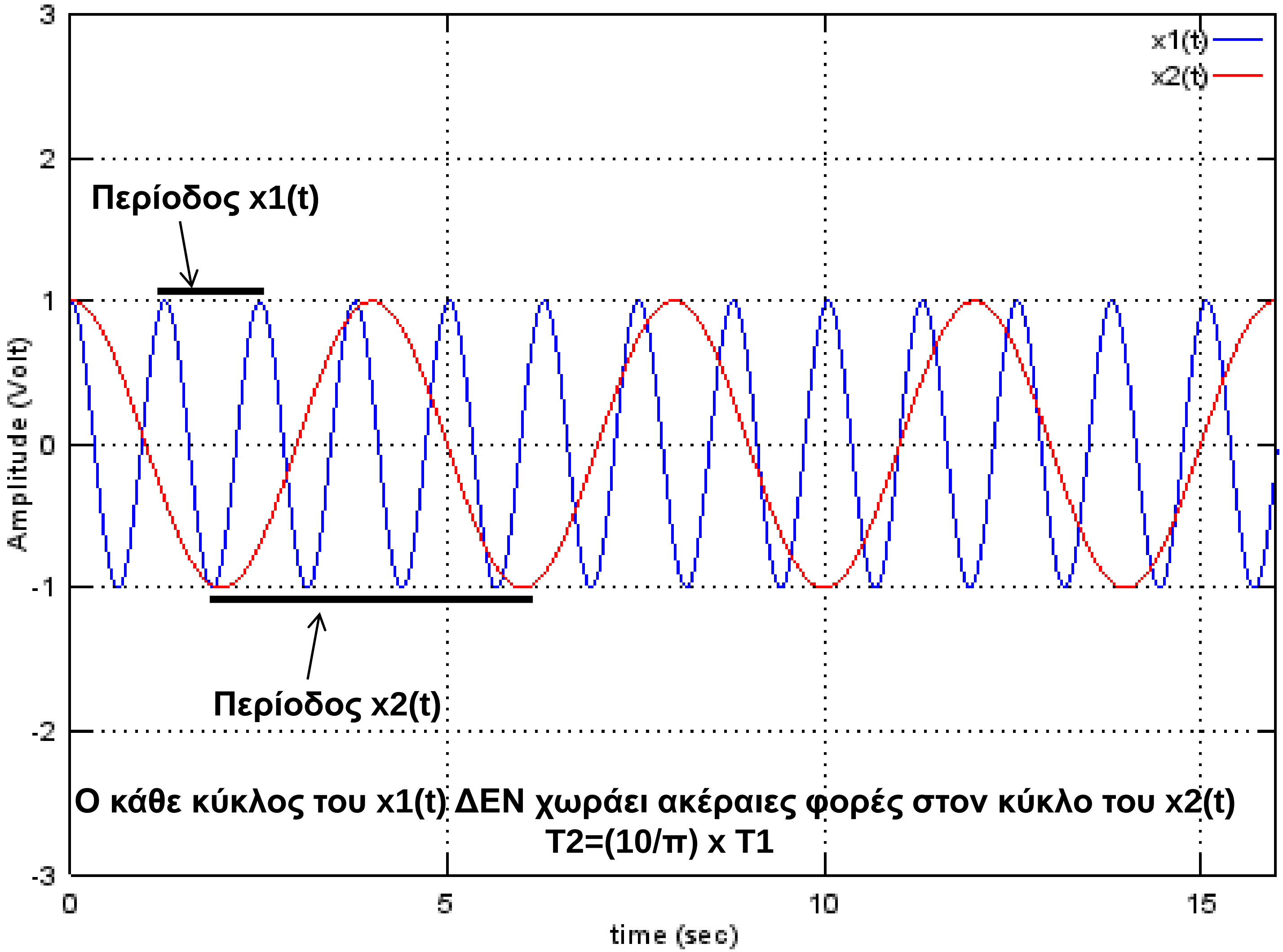
Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\,\mathrm{sec}$

Ο λόγος των περιόδων είναι, $T_1/T_2 = \pi/10$ Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

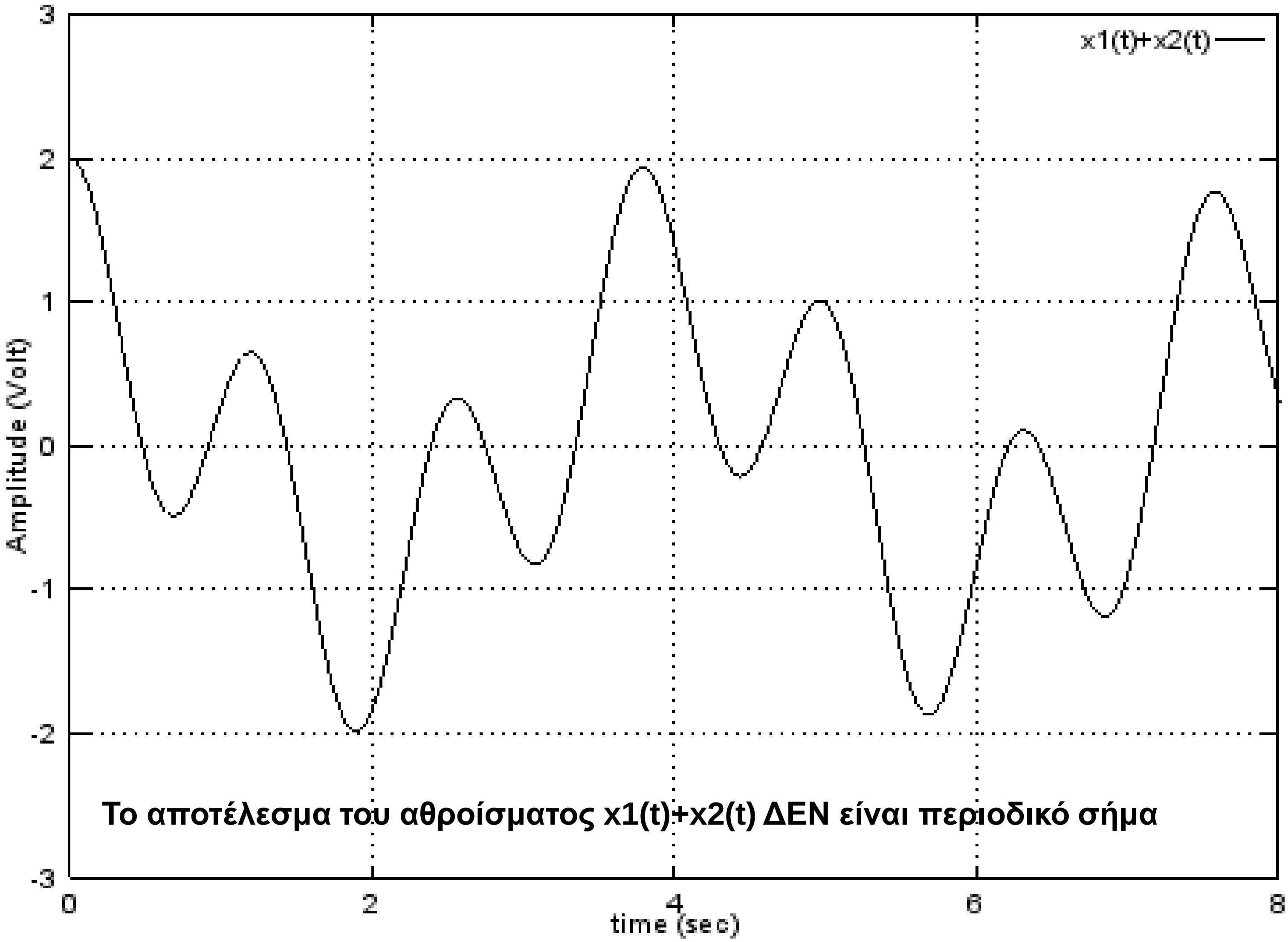
Example 1b

- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz ⇦ **Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a**
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal ‘b’ is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal ‘r’ is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k’); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1b


x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) ΔΕΝ χωράει ακέραιες φορές στον κύκλο του x2(t)
T2=(10/π) x T1
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Example 1b



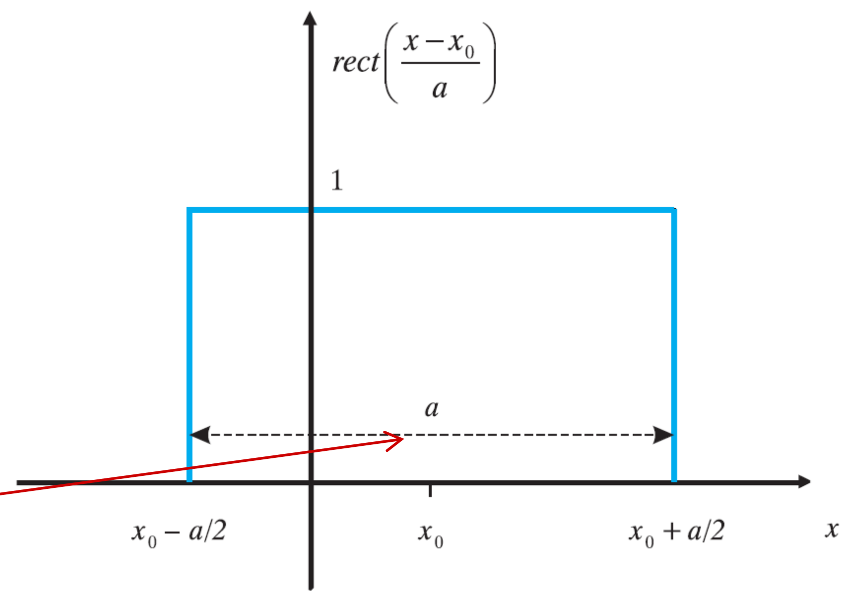
x1(t)+x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) ΔΕΝ είναι περιοδικό σήμα

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, \text{ όταν } |x-x_0|<\dfrac{a}{2}, \text{ δηλ. } x_0-\dfrac{a}{2}<x<x_0+\dfrac{a}{2}\\[2ex] 0, \text{ όταν } |x-x_0|>\dfrac{a}{2}, \text{ δηλ. } \begin{cases}x<x_0-\dfrac{a}{2}\\ \text{ή}\\ x>x_0+\dfrac{a}{2}\end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$



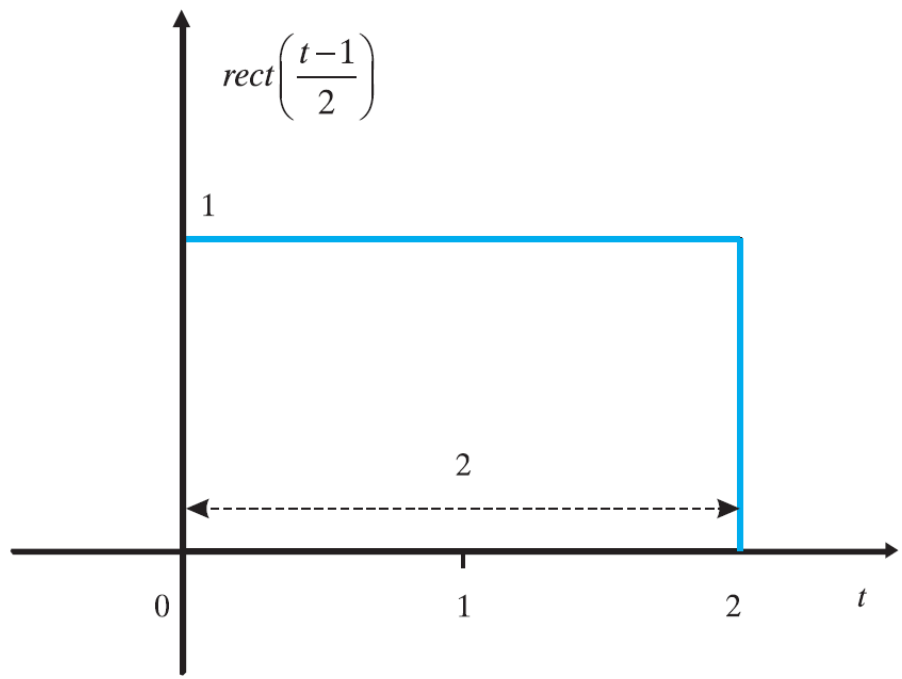
Σχεδιαστικό Εύρος

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (2)

- Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0,2)$.

- $x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$



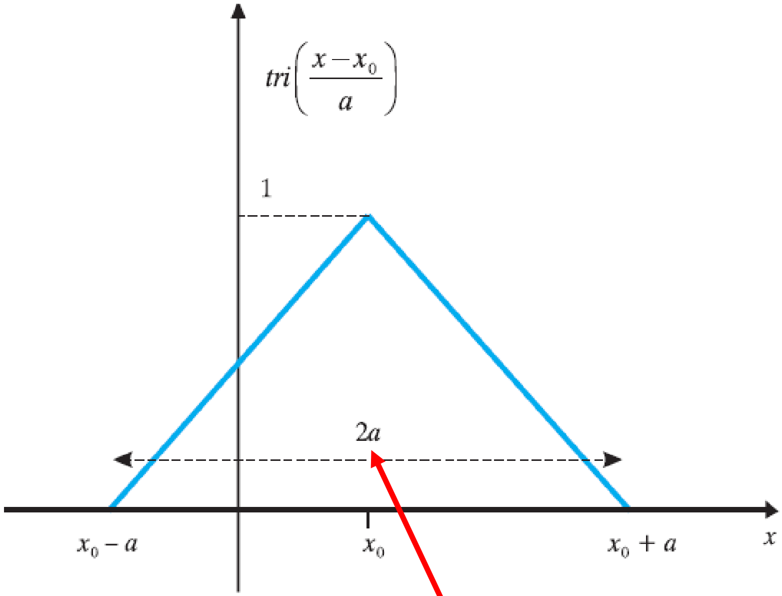
ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/ΟΣΣ2/7.12.2019/Ν.Δημητρίου

Σήμα Τριγωνικός Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-x_0|}{a}, \text{ όταν } |x-x_0|<a, \text{ δηλ. } x_0-a<x<x_0+a \\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>a, \text{ δηλ. } \begin{cases} x<x_0-a \\ \text{ή} \\ x>x_0+a \end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$



Προσοχή στην αναλυτική έκφραση για τα ολοκληρώματα

Σχεδιαστικό Εύρος

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/ΟΣΣ2/7.12.2019/Ν.Δημητρίου

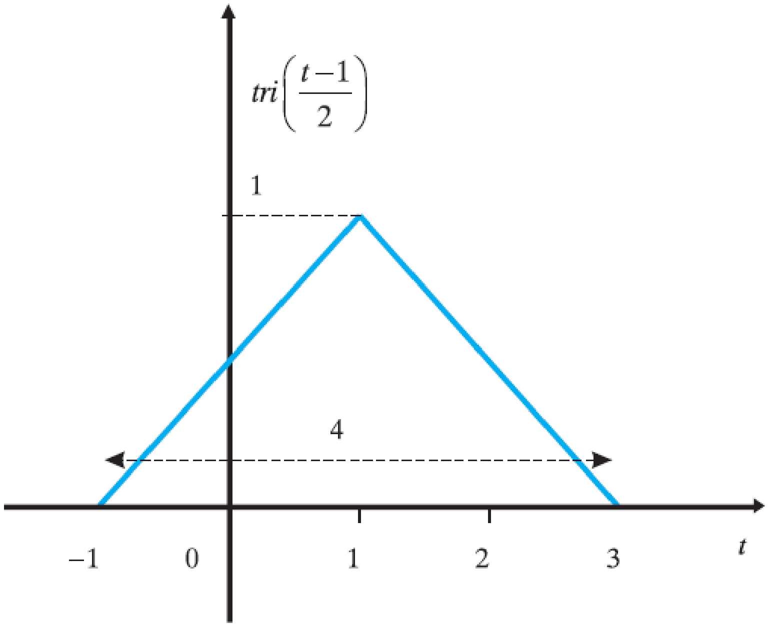
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (2)

- Παραδείγματα

- $x(t) = tri\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2},\ t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$.



ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/ΟΣΣ2/7.12.2019/Ν.Δημητρίου

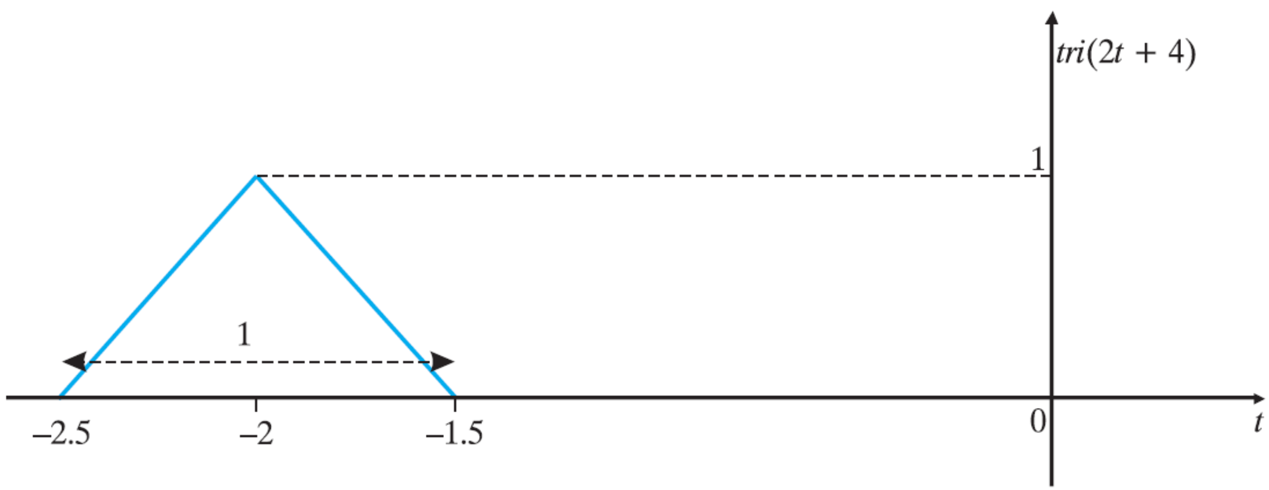
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (3)

- $x(t) = tri(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $tri\left(\dfrac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι: $x(t) = tri(2t+4) = tri(2(t+2)) = tri\left(\dfrac{t+2}{1/2}\right) = tri\left(\dfrac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \dfrac{1}{2}, t_0 + \dfrac{1}{2}) = (-2.5, -1.5)$.



ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1/ΟΣΣ2/7.12.2019/Ν.Δημητρίου

2.2.7.6 *Κρουστική Συνάρτηση δ(x) (Dirac)*

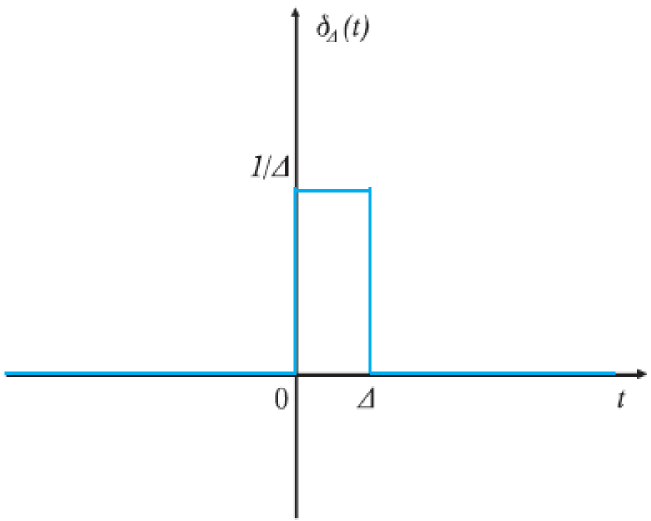
Λαμβάνεται ένας ορθογωνικός παλμός (μοναδιαίου εμβαδού) της εξής μορφής:

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}0, \text{ οταν } t<0\\ \dfrac{1}{\Delta}, \text{ οταν } 0<t<\Delta\\ 0, \text{ οταν } t>\Delta\end{cases}$$

όπου Δ>0.

Δηλαδή, ισχύει ότι

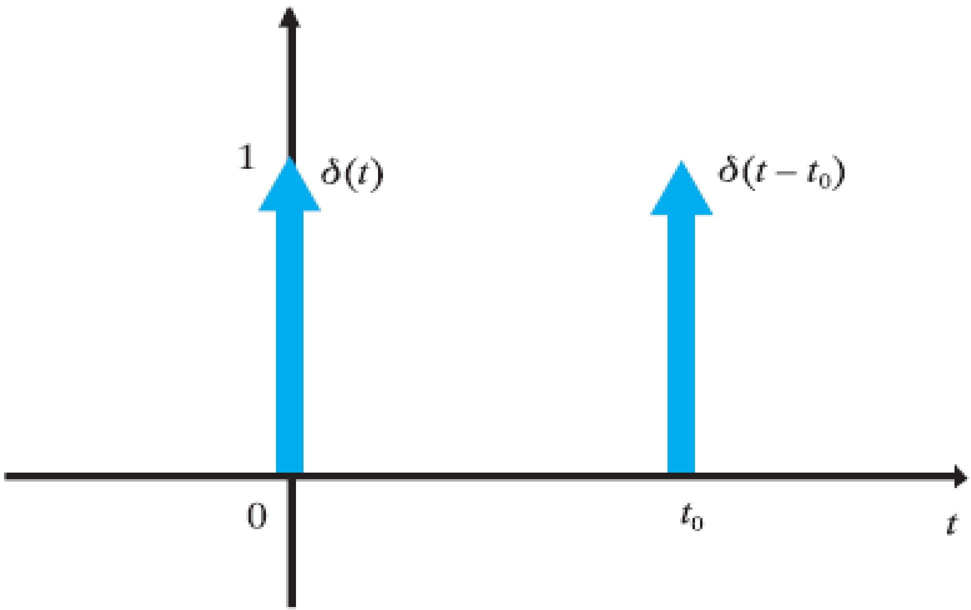
$$\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}rect\left(\frac{t-\frac{\Delta}{2}}{\Delta}\right)$$



Σχήμα 2.19

Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \to 0$), η χρονική διάρκεια του παλμο μηδενίζεται και το πλάτος του απειρίζεται, ενώ το εμβαδό του παραμένει ίσο με 1. κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0}\left[\delta_{\Delta}(t)\right]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες

- $\delta(t)=0$, οταν $t\neq 0$
- $\delta(t-t_0)=0$, οταν $t\neq t_0$
- $\delta(-t)=\delta(t)$
- $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt=\int_{t_0^-}^{t_0^+}\delta(t-t_0)\,dt=1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)$
- $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$
- $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

*f(x)*g(x)=g(x)*f(x) αντιμεταθετική*

*[f(x)*g(x)]*h(x)=f(x)*[g(x)*h(x)] προσεταιριστική*

f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)*g(x)+f(x)*h(x) επιμεριστική*

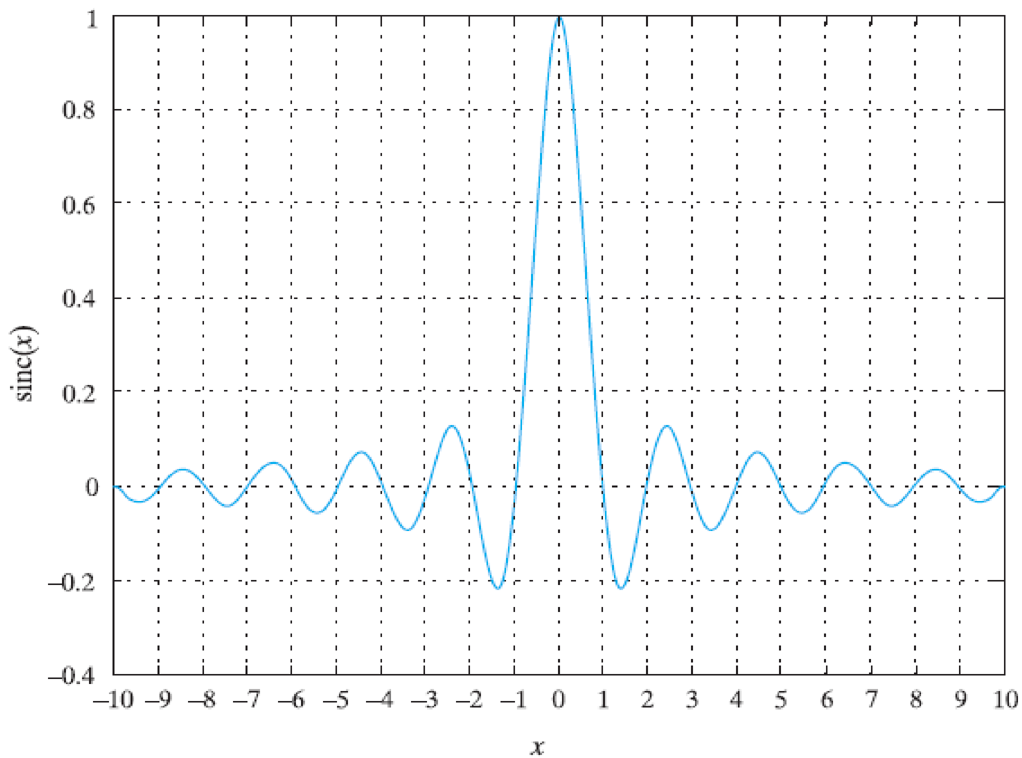
2.2.7.3 Συνάρτηση sinc

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:

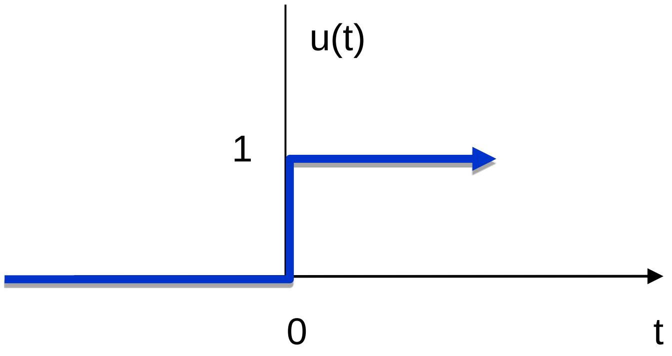


Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

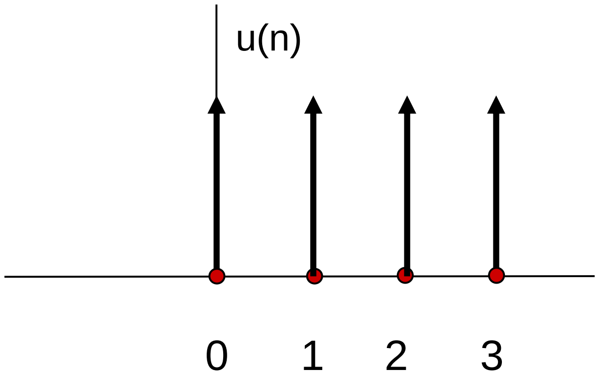
Σήμα Βήματος (1)

- Αναλογικό Σήμα
  - Ορισμός $$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ N/A & t = 0 \end{cases}$$
  - Ιδιότητες
    - Παραγώγιση $\frac{d}{dt}[u(t)] = \delta(t)$
    - Ολοκλήρωση $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)$



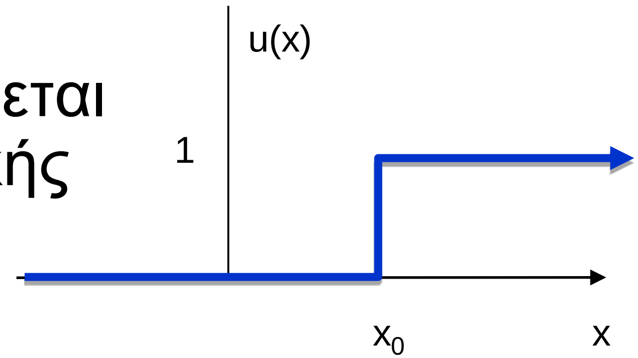
- Διακριτό Σήμα
  - Ορισμός

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

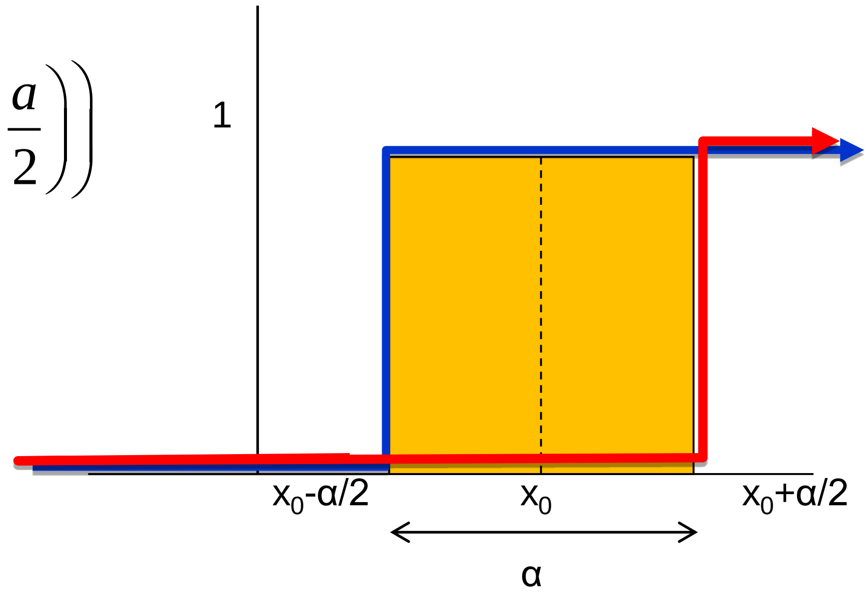


Σήμα Βήματος (2)

- Ο ορθογώνιος παλμός περιγράφεται και μέσω της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

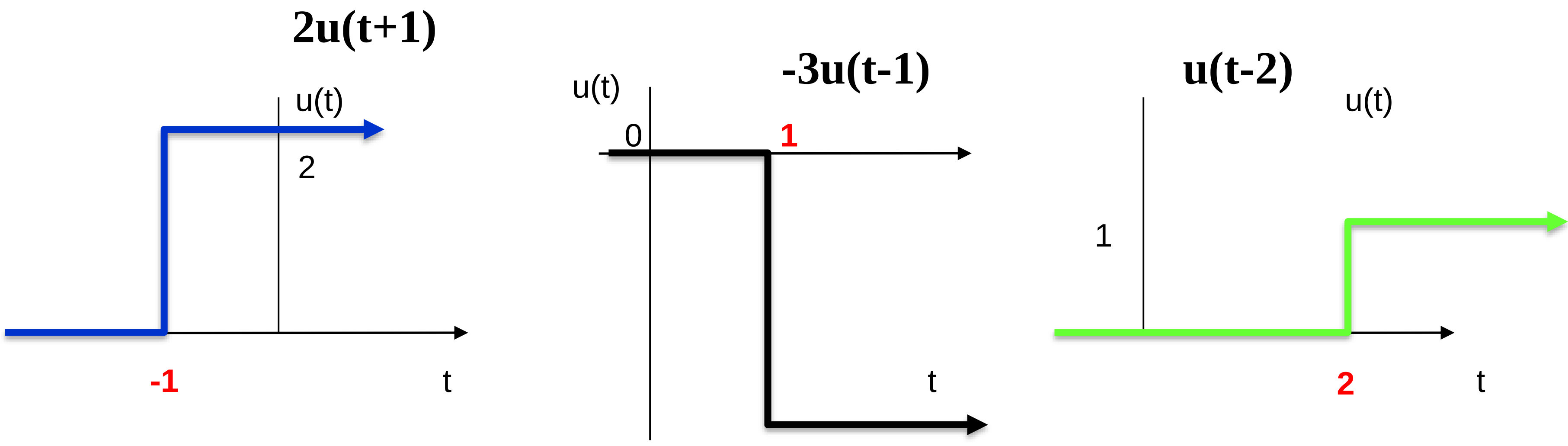


$$rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=u\left(x-\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right)-u\left(x-\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right)$$



Σήμα Βήματος (3)

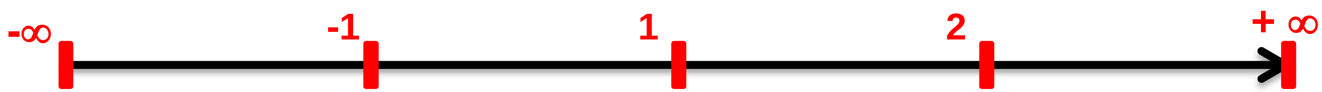
- Παραδείγματα
  - Να σχεδιαστεί το σήμα x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)
- Μέθοδος
- Βήμα 1: Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους



- Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1** και **2**

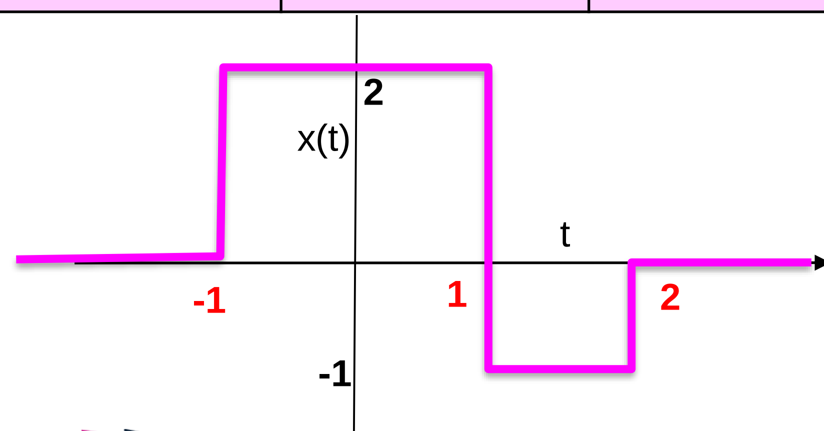
Σήμα Βήματος (4)

- <u>Βήμα 3:</u> Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



2u(t+1)	0	2	2	2
-3u(t-1)	0	0	-3	-3
u(t-2)	0	0	0	1
x(t)	0	2	-1	0

- <u>Βήμα 4:</u>
- Γραφική Παράσταση



Υπέρθεση Σημάτων (7)

- Από Εργασία 1η, (2009), Θέμα 6(β)

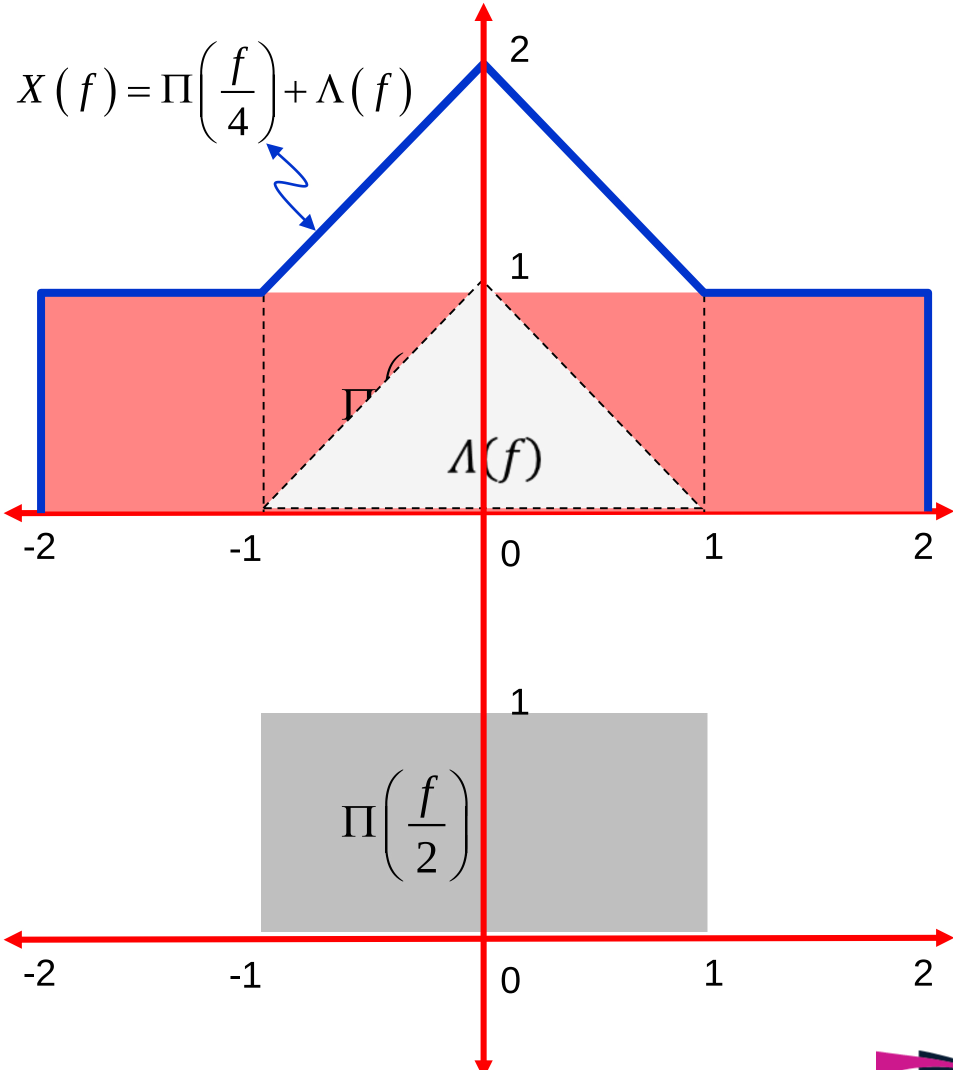
- Δίνεται το X(f) και H(f) που είναι
- $X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)$ και $\mathrm{H}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$

- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

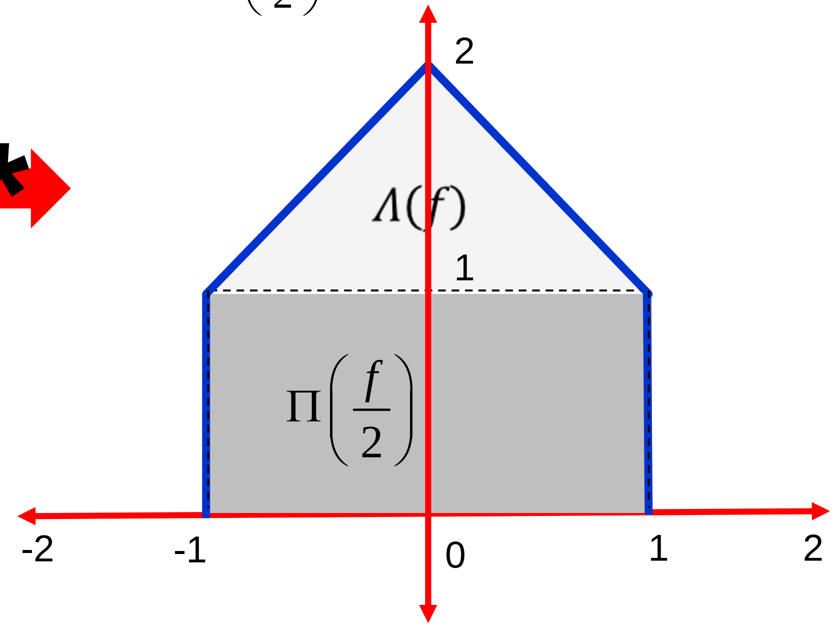
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Υπέρθεση Σημάτων (8)

$$X(f)=\Pi\left(\frac{f}{4}\right)+\Lambda(f)$$



$$\begin{aligned}Y(f)&=\left[\Pi\left(\frac{f}{4}\right)+\Lambda(f)\right]\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right)\\&=\Pi\left(\frac{f}{4}\right)\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right)+\Lambda(f)\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right)\\&=\Pi\left(\frac{f}{2}\right)+\Lambda(f)\end{aligned}$$



Υπέρθεση Σημάτων (1)

- Εργασία 1η, (2009), Θέμα 4

- Δίνεται το σήμα

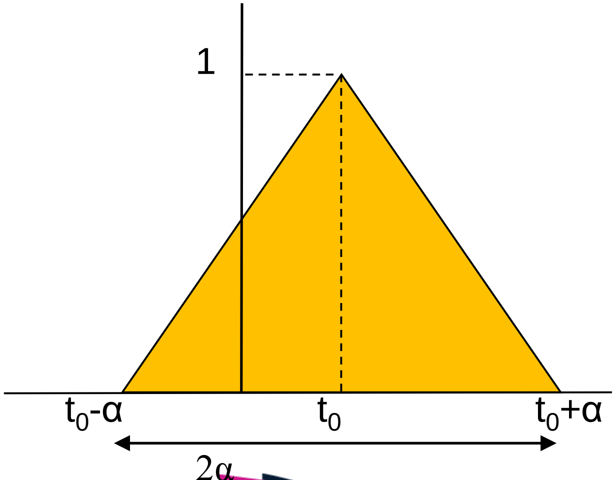
$$x(t) = -2\Lambda(\frac{t+2}{2}) + 2\Lambda(\frac{t}{2}) - 2\Lambda(\frac{t-2}{2})$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα *x(t)*.

Υπέρθεση Σημάτων (2)

- <u>Βήμα 1ο</u>: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

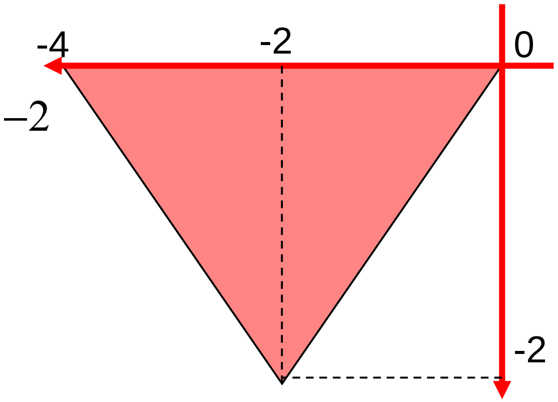
$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases} 1-\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad t_0<t<a+t_0 \\ 1-\dfrac{-(t-t_0)}{a}=1+\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad -a+t_0<t<t_0 \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad \left|t-t_0\right|>a \quad \acute{\eta} \quad -a+t_0>t \,\&\, t>t_0+a \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (3)

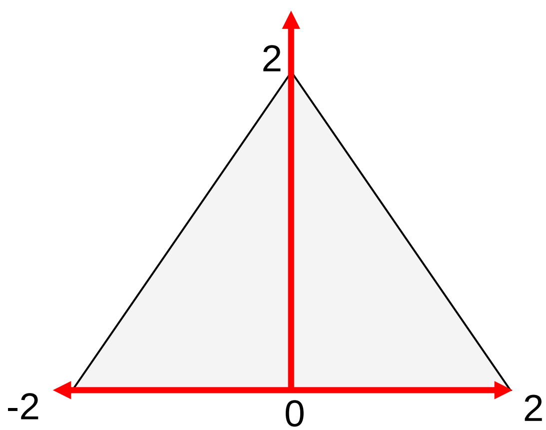
- Αρα 1ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right)=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t+2)}{2}\right]=-4-t, \text{όταν } -2<t+2<0 \Rightarrow -4<t<-2\\ -2\left[1-\frac{(t+2)}{2}\right]=t, \text{όταν } 0<t+2<2 \Rightarrow -2<t<0\\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0\end{cases}$$



2ο σήμα

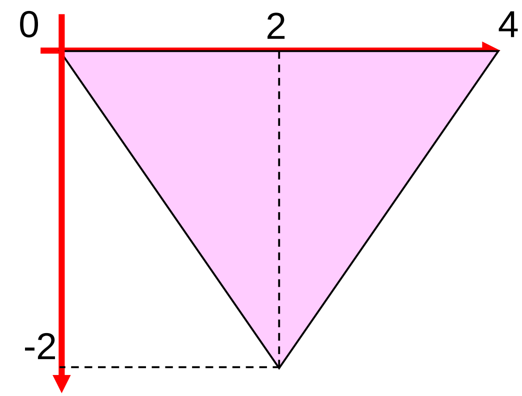
$$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)=\begin{cases}2\left[1-\frac{-(t)}{2}\right]=2+t, \text{όταν } -2<t<0\\ 2\left[1-\frac{(t)}{2}\right]=2-t, \text{όταν } 0<t<2\\ 0, \text{όταν } t<-2 \text{ ή } t>2\end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (4)

- 3ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t-2)}{2}\right]=-t, \text{όταν } -2<t-2<0 \Rightarrow 0<t<2 \\ -2\left[1-\frac{(t-2)}{2}\right]=t-4, \text{όταν } 0<t-2<2 \Rightarrow 2<t<4 \\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0 \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (5)

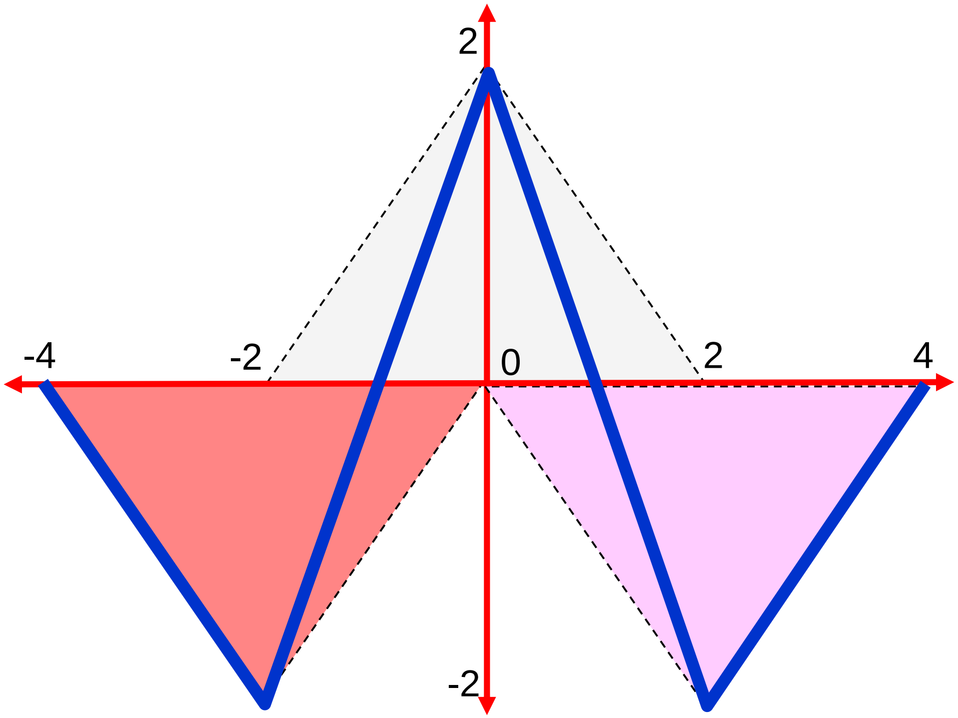
- Βήμα 2ο: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα

$-\infty$ -4   -2   0   2   4

$-2\Lambda(\frac{t+2}{2})$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda(\frac{t}{2})$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})$	0	0	0	-t	t-4
x(t)	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

Υπέρθεση Σημάτων (6)

- <u>Βήμα 3ο</u>: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα

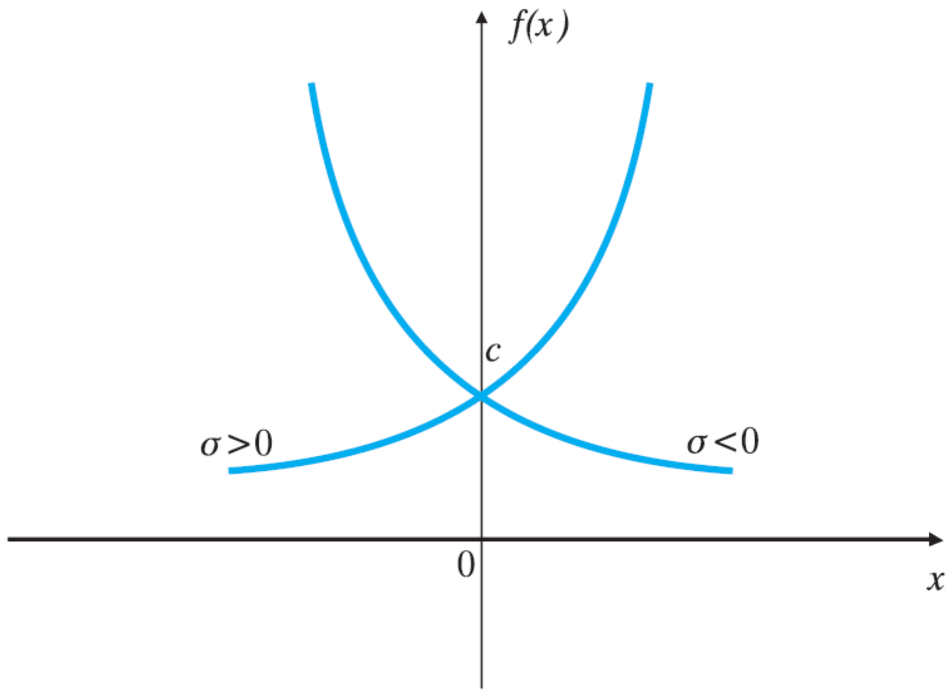


Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (1)

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\alpha x}, \text{ όπου } c,\ \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



Φάσμα πλάτους Σημάτων – Μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων

Παράδειγμα.

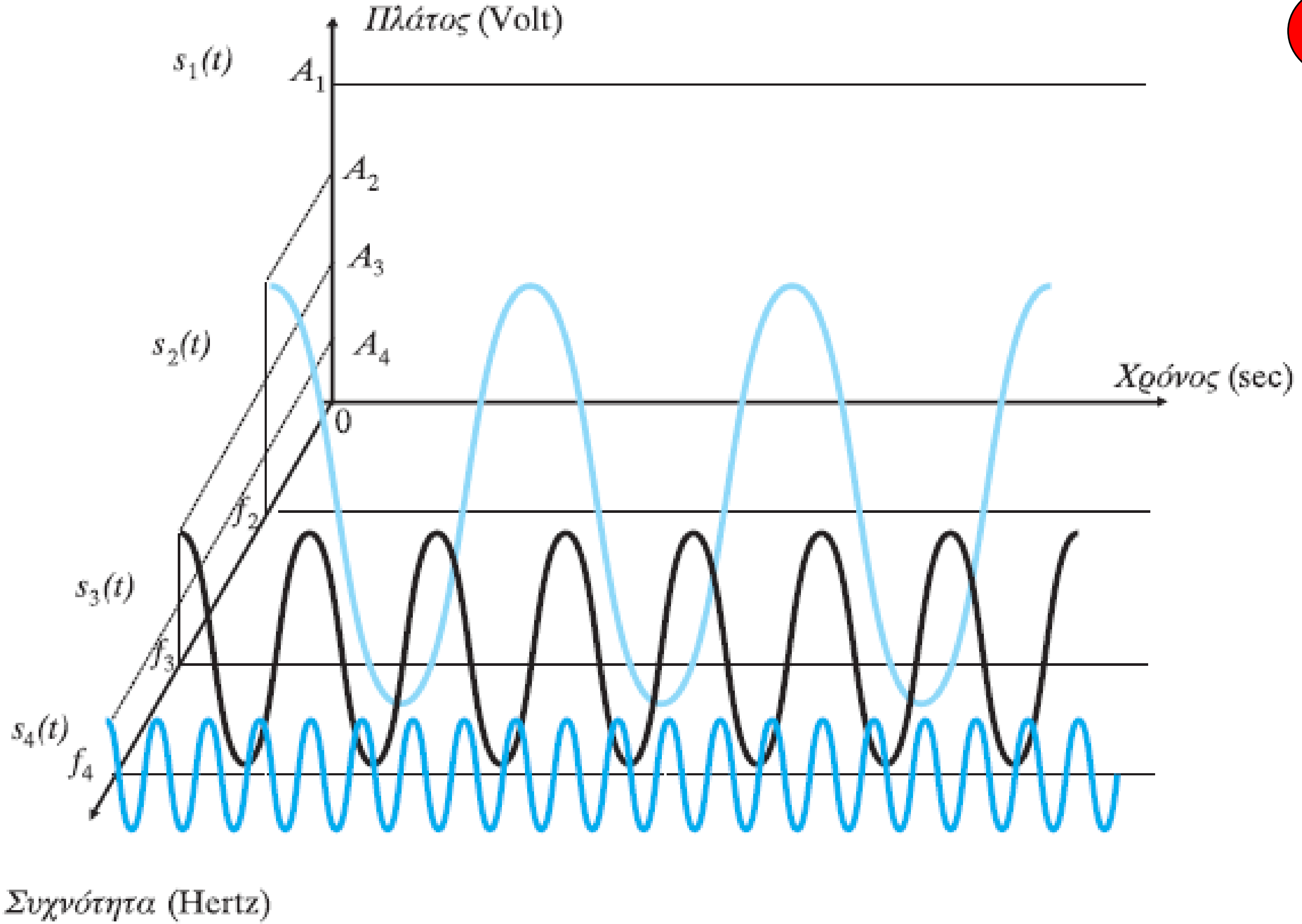
Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$
$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$
$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$
$$f_2 < f_3 < f_4$$
$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

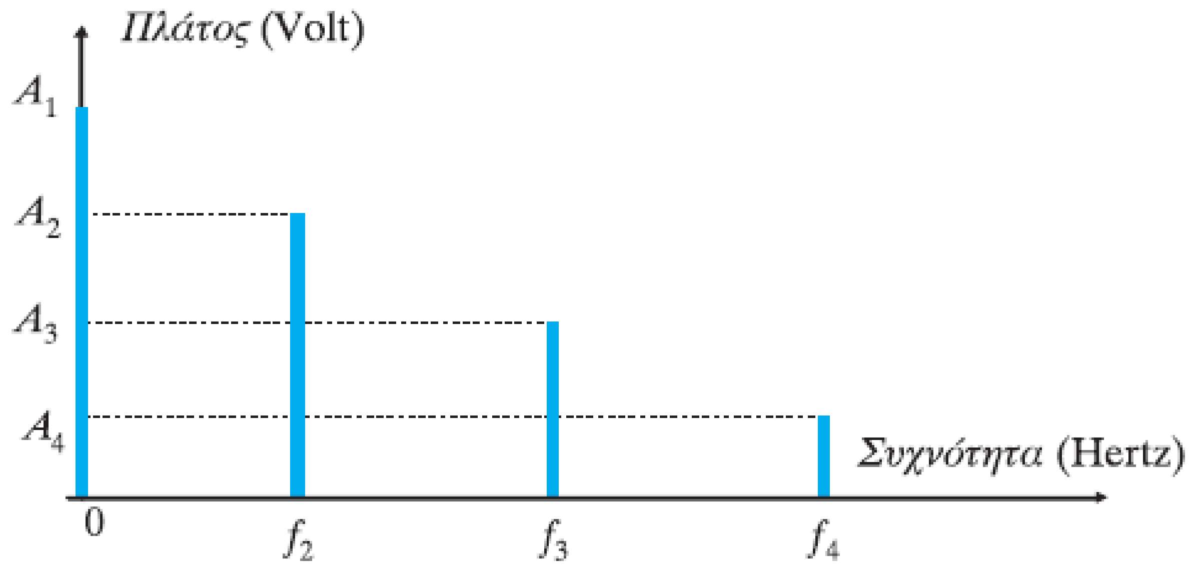
Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (2)

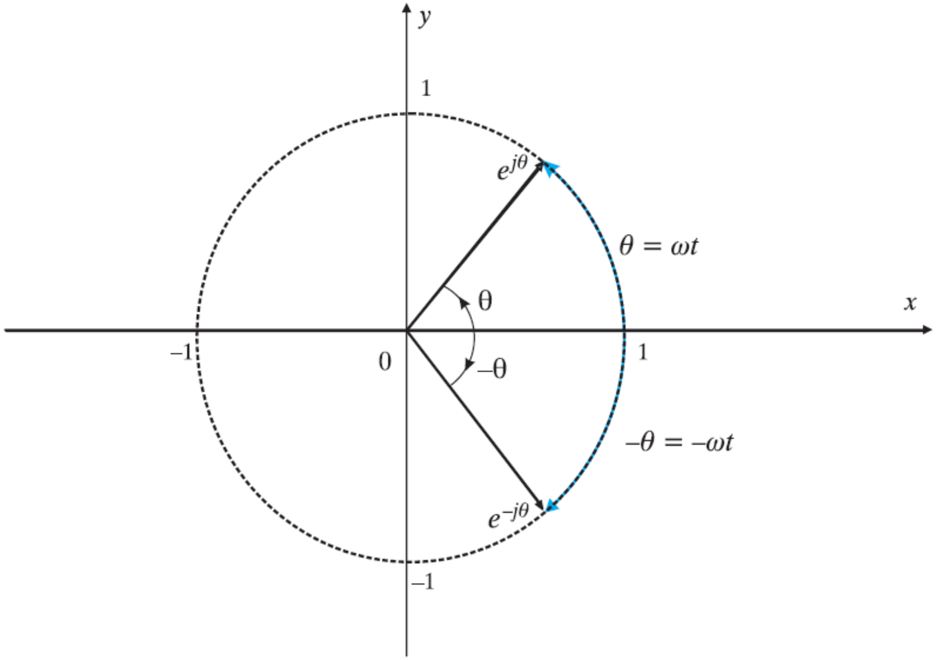
- Έκφραση περιοδικών σημά εκθετικών

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

- Με χρήση σχέσεων
- Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (i)

- Μιγαδικοί αριθμοί:

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

Ο μιγαδικός αριθμός «j» ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

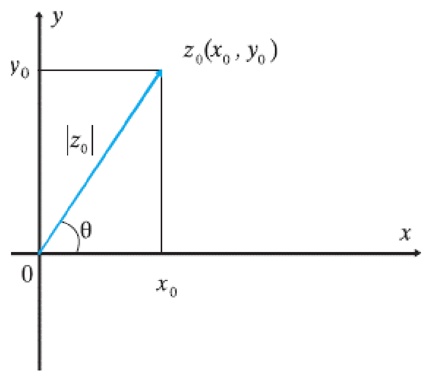
Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Ο πολλαπλασιασμός του «j» επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.

ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες (στο δισδιάστατο πεδίο που ορίζεται από τους άξονες των πραγματικών και φανταστικών αριθμών) ως ένα διάνυσμα μέτρου $|z_0|$ και φάσης θ.



Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (ii)

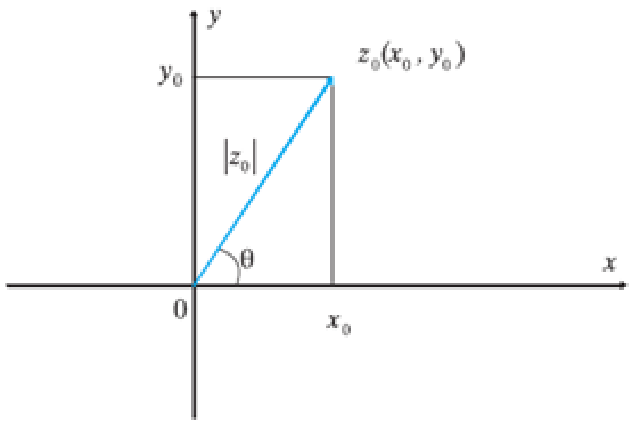
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0|\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0|\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0|\left[\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0| e^{j\theta}$$

Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (iii)

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι $\left|e^{j\theta}\right|=\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}=\sqrt{1}=1$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta}=\cos(-\theta)+j\sin(-\theta)=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)+\cos(\theta)-j\sin(\theta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)-\cos(\theta)+j\sin(\theta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos(\theta)\Leftrightarrow\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin(\theta)\Leftrightarrow\sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

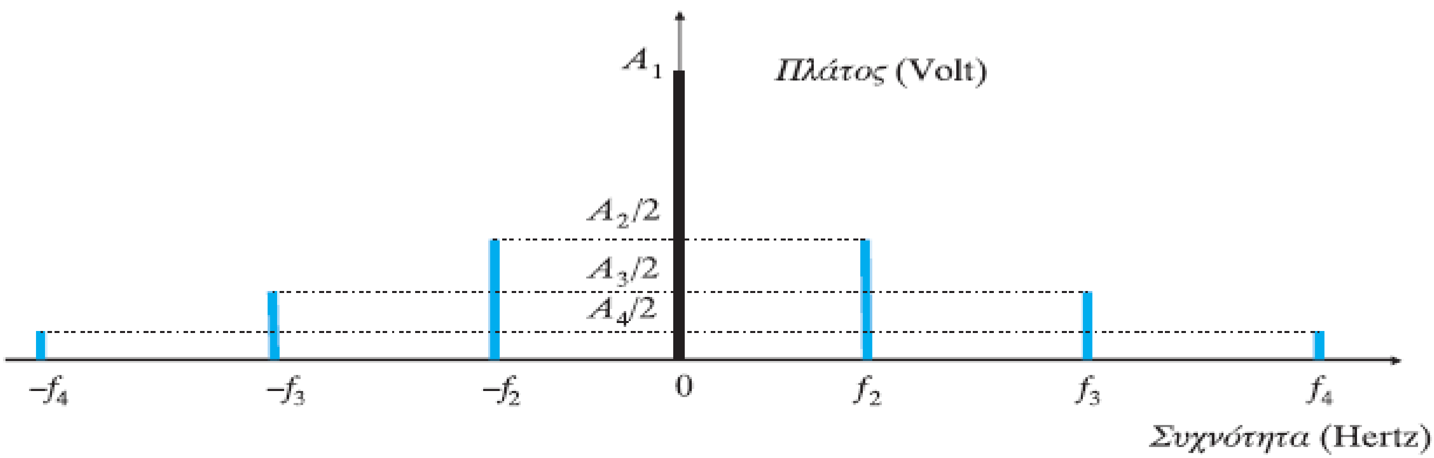
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

(συνέχεια από τη διαφάνεια 50)

$$s(t) = A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} =$$

$$= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t}$$

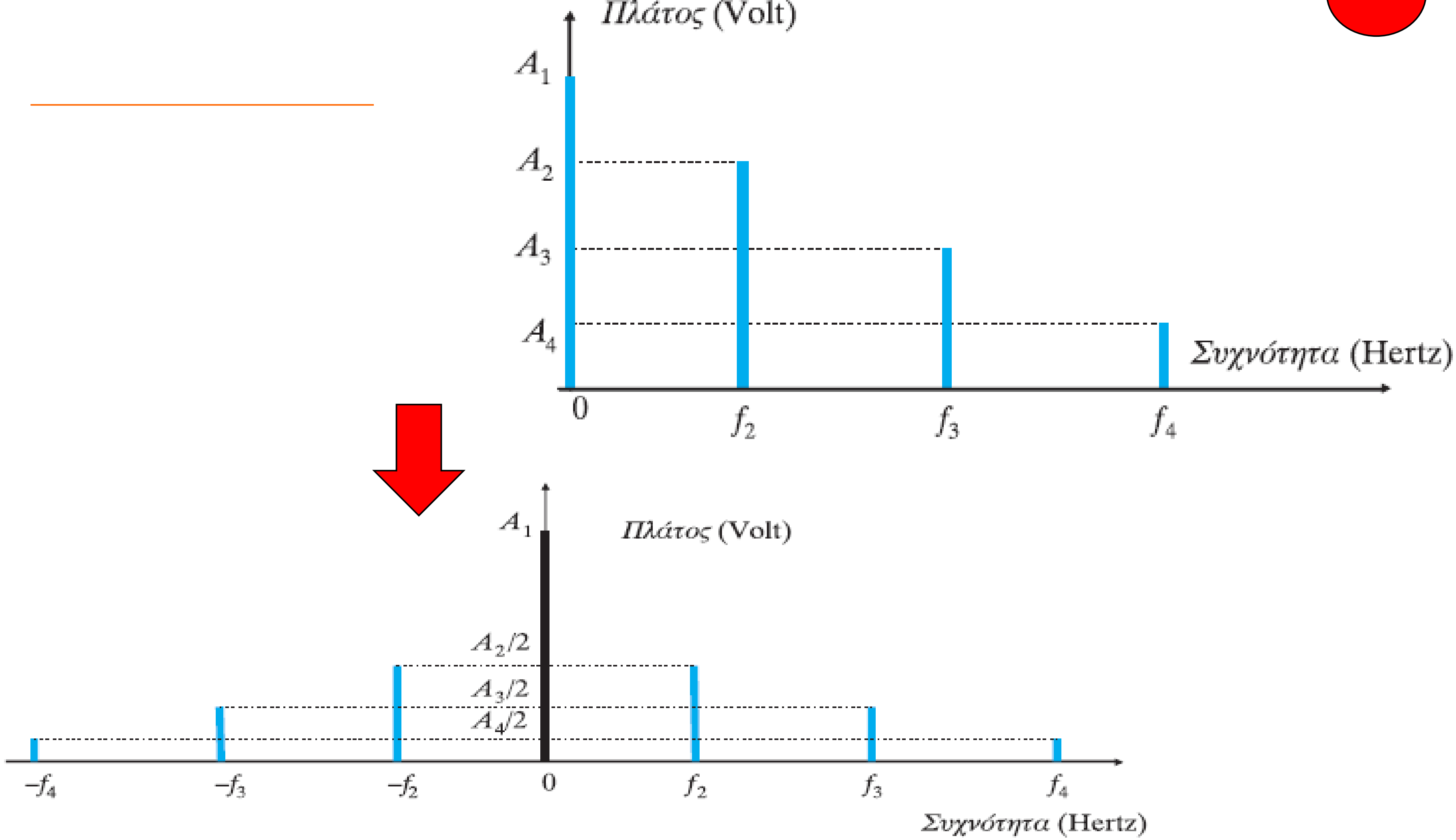
Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.



Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων:

- Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT) = x(t)\ \text{για}\ k = 1,2,\ldots$$

- Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N \quad m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

- Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από άθροισμα **<u>διακριτών</u>** παλμών $A_i\delta(f-f_i)$ σε συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση

$$f=f_1/m_1=f_2/m_2=\ldots=f_N/m_N \ , m_1,m_2\ldots m_N \in \mathbb{N}^*$$

Μετασχηματισμός Fourier

Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορει να θεωρηθει σαν ενας εργαλειο με το οποιο βλεπουμε ενα σημα απο μια αλλη οπτικη γωνια:
  – Κοιτάξτε πόσο διαφορετική μπορει να φανει μια καρεκλα οτα την βλέπουμε απο διαφορες γωνιες

- Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σηματος:
  – Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολές συναρτήσει του χρόνου
  – Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

Ορισμός – Επέκταση ανάλυσης Fourier για μη περιοδικά σήματα

Όπως αναφέρθηκε στην υποενότητα 2.3.1, το πλάτος και η φάση ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k=kf$ προσδιορίζονται με τον υπολογισμό του αντίστοιχου συντελεστή Fourier $V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi nft}dt = |V_k|e^{j\varphi_k}$. Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η περίοδος μπορεί να υποτεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \to +\infty$), και το φάσμα του σήματος θα είναι συνεχές και όχι διακριτό ($nf \to f$). Συνεπώς, με τη γενίκευση των εκφράσεων για τις σειρές Fourier προκύπτει η έκφραση του φάσματος μη περιοδικών σημάτων, δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad [\text{το μέτρο της } G(f) \text{ έχει μονάδες Volt/Hz}]$$

Αντίστοιχα, η σχέση που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του φάσματος ενός σήματος δίνεται παρακάτω:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df$$

Μετασχηματισμός Fourier (1)

- Ο μετασχηματισμος (Μ/Σ) Fourier του σηματος x(t) ειναι ο:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- Ο αντιστροφος Μ/Σ Fourier διδεται απο την σχεση:

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

- Συμβολίζουμε ένα ζεύγος Μ/Σ Fourier ως εξής: x(t)⇔X(f)

Άλλη Μορφή Μ/Σ Fourier

- Ισοδύναμες αναφορές με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} df$$

- Η κυκλική συχνότητα ω=2πf μετριέται σε radians/sec και dω=2πdf

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (1)

Σημείωση: δείτε τον πίνακα 2.3.5Α, σελ. 54-55 (τόμος Β, μέρος Β)

- Γραμμικότητα

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(f), \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(f) \Leftrightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$$

- Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου και Συχνότητας

$$x_1(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \qquad \frac{1}{|a|} x_1\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow X_1(af)$$

- Χρονική καθυστέρηση

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)\exp(-j2\pi f t_0)$$

- Δυϊσμός

Αν x(t) ⇔ X(f) => X(-t) ⇔ x(f) & X(t) ⇔ x(-f)

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (2)

- Συνδυασμός Αλλαγής Κλίμακας & Χρονικής Ολίσθησης

$$x_1\left(at-t_0\right) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \exp\left(-j2\pi\ f\ \frac{t_0}{a}\right)$$

- Ολίσθηση Συχνότητας

$$\exp\left(j2\pi\ f_c t\right) x(t) \leftrightarrow X\left(f-f_c\right)$$

- Συνέλιξη σημάτων στο πεδίο του χρόνου

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{x(t)} * \mathrm{g(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$\mathrm{y(t)} = \mathrm{x(t)} * \mathrm{g(t)} \xleftrightarrow{F} Y(f) = X(f) G(f)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (3)

- Παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)X(f)$$

- Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

- Διαμόρφωση

$$x(t)\cdot\cos(2\pi f t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c)$$

- Θεώρημα Parseval $E = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1
$x(t)=1$	$\delta(f)$

Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j2\pi f t_0}X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t}x(t)=e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f)+\frac{1}{2}X(f)\delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t)*h(t)$	$X(f)H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$[X(f)*Y(f)]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(\Omega)$ ή $x(t)\xleftrightarrow{F}X(f)$	$y(t)=X(t)$	$Y(f)=x(-f)$

Παραδείγματα

$$\operatorname{sinc}^2(t) \leftrightarrow tri(f)$$

$$4\operatorname{sinc}^2(4t) \leftrightarrow tri\left(\frac{f}{4}\right)$$

Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect(t-10) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f\cdot 10}\operatorname{sinc}(f)$$

Ιδιότητα χρονικής μετατόπισης

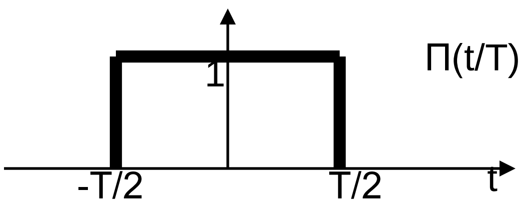
$$\cos(2\pi 10t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-10)+\delta(f+10)\right] \Leftrightarrow$$

Ιδιότητα δυϊσμού

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(t-10)+\delta(t+10)\right] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi 10(-f)) = \cos(2\pi 10 f)$$

Παραδείγματα (1)

- Τετραγωνικός Παλμός



$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \le T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

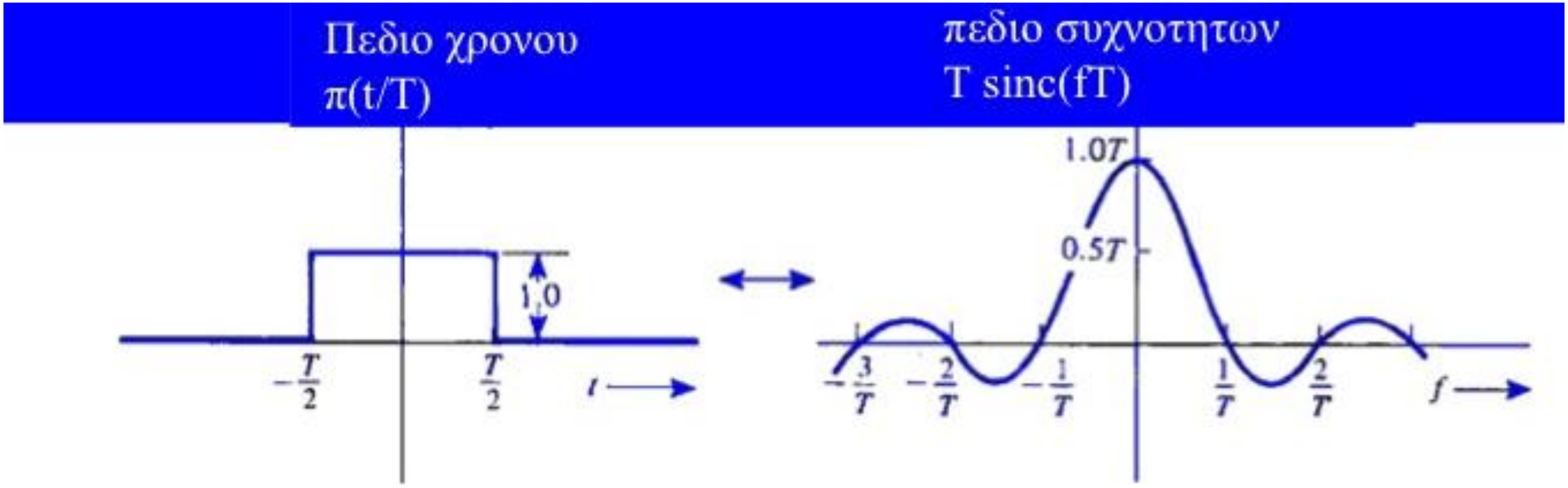
$$F[\Pi(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f}$$

- Αλλά $\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)/2j = \sin(x)$
- Αποτέλεσμα:

$$\Pi(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \cdot \sin c(fT)$$

Παραδείγματα (2)

- Είδαμε ότι Π(t/T) ⇔ Tsinc(f·T)
- Παρατηρήσεις:
  - Η διάρκεια του παλμού είναι αντιστρόφως ανάλογη του εύρους φάσματος
  - Η ασυνέχεια στο πεδίο του χρόνου οδηγεί σε απεριόριστο φάσμα



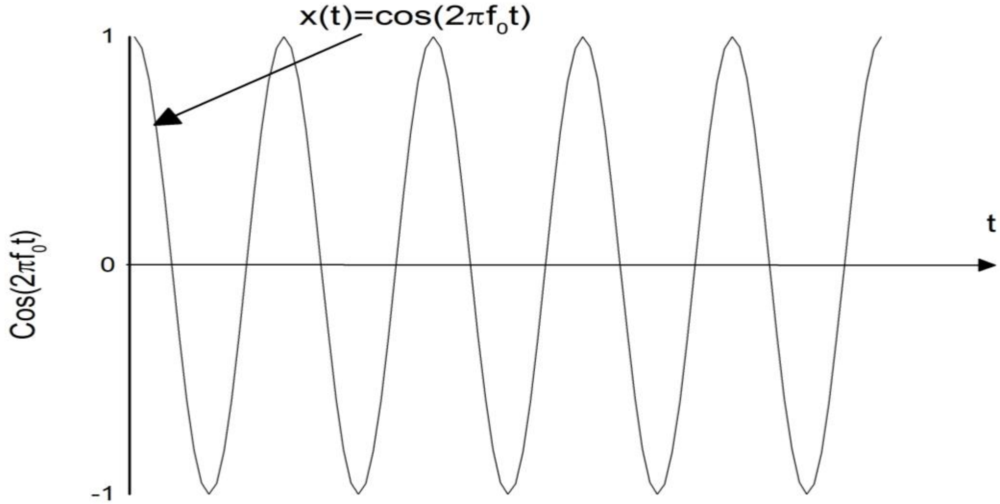
Παραδείγματα (3)

- Μερικές φορές ειναι ευκολότερο να βρουμε ενα σήμα στο χρόνο υπολογιζοντας τον αντιστροφο Μ/Σ
  - Δίνεται $X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)$
  - Βρίσκουμε

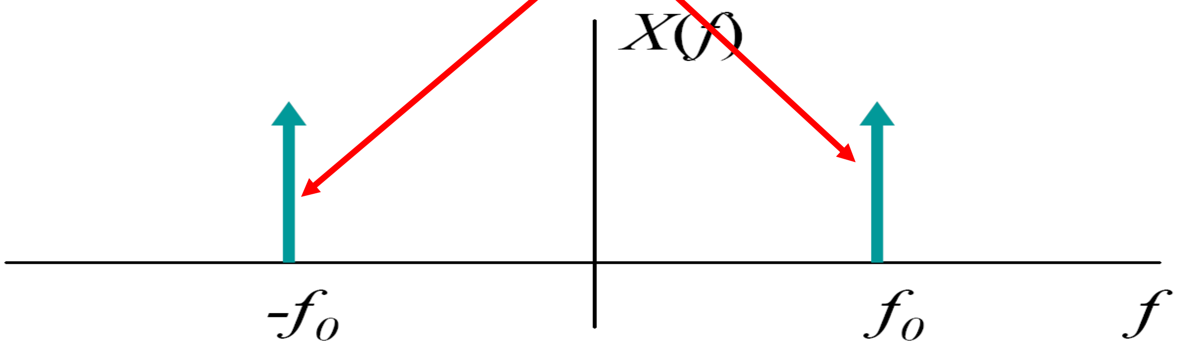
$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f - f_c)e^{j2\pi ft}\,df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f + f_c)e^{j2\pi ft}\,df$$

$$= \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} = \cos(2\pi f_c t)$$

Παραδείγματα (4)

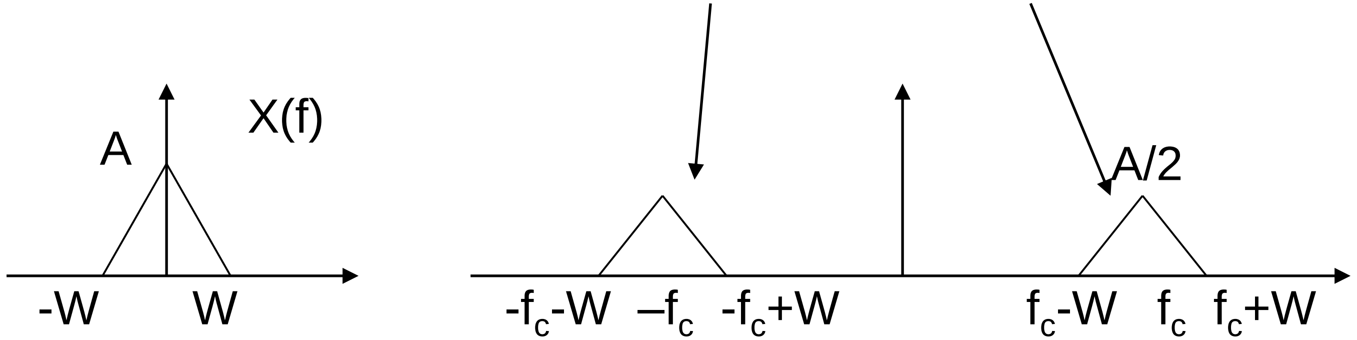


$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



Παραδείγματα (5)

- $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$

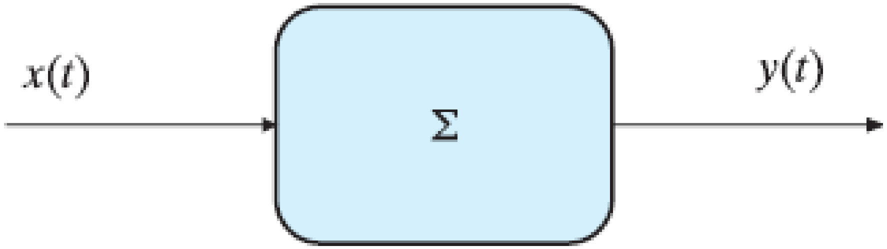


2.3.3.7 *Συνέλιξη*

Η έννοια της συνέλιξης σχετίζεται με τη χαρακτηριστική σχέση εισόδου-εξόδου σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα $y(t)$.



Σχήμα 2.24

Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου

Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S\left(x(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t))$$

και

$$y_2(t) = S(x_2(t))$$

τότε:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))$$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t)),\ y_2(t) = S(x_2(t)), \ldots,\ y_k(t) = S(x_k(t))$$

τότε:

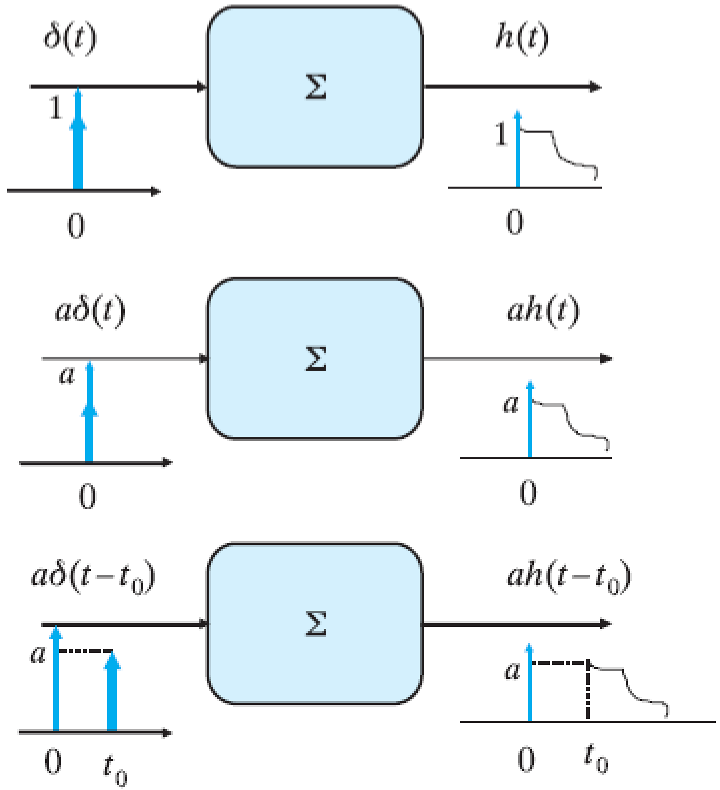
$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_k y_k(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(t) =$$

$$= S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \ldots + \alpha_k x_k(t)) = S\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i(t)\right)$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, εαν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0 , το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0.

Δηλαδή, αν $y(t) = S[x(t)]$ τότε $y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$.

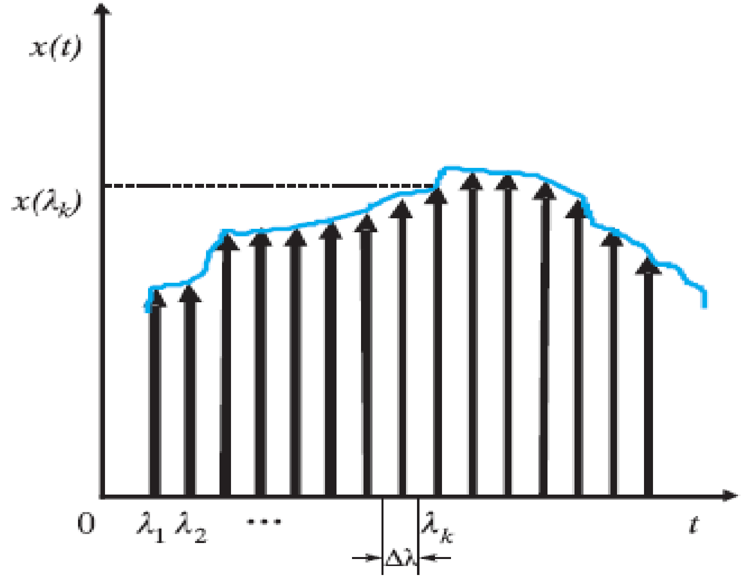
Η $\boxed{\text{κρουστική απόκριση}}$ ενός συστήματος *h(t)* είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση *δ(t)*. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



Σχήμα 2.25

Κρουστική απόκριση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



Σχήμα 2.26

Αναπαράσταση σήματος εισόδου ως αθροίσματος παλμών

οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)\delta(t-\lambda_i)$$

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\xrightarrow{\Delta\lambda\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(t)*h(t)$$

Η πράξη $x(t)*h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t), h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$$

αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος οπότε ισχύει:

$$\begin{array}{ccccc} y(t) = & x(t) & * & h(t) \\ \updownarrow F & \updownarrow F & & \updownarrow F \\ Y(f) = & X(f) & \cdot & H(f) \end{array}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

Φίλτρα

Φίλτρα

- Το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας H(f) παίρνει σημαντικές τιμές μόνο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων
- Κατηγορίες Φίλτρων
  - Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (LPF): επιτρέπει τη διέλευση όλων των συνιστωσών του σήματος εισόδου με συχνότητες κάτω από ένα όριο b
  - Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (HPF): Το ιδανικό HPF αποκόπτει όλες τις συνιστώσες του σήματος εισόδου με συχνότητες μικρότερες από b και αφήνει τη διέλευση όλων των συνιστωσών πάνω από b χωρίς παραμόρφωση
  - Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (BPF): Διέλευση μιας συγκεκριμένης ζώνης συχνότητας

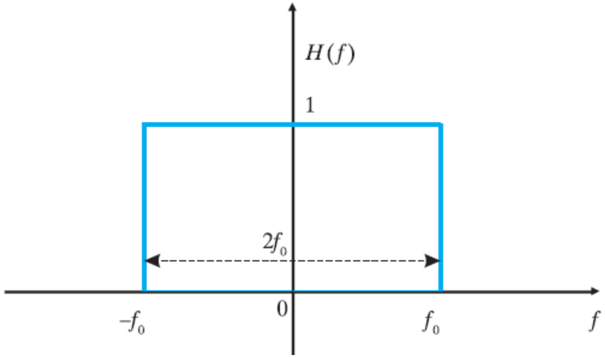
Φίλτρα

- Βαθυπερατά
  - Χαμηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Υψιπερατό
  - Υψηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Ζωνοπερατό
  - Συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζωνοφρακτικό
  - Φράση συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζώνες διέλευσης και αποκοπής

Τύποι Φίλτρων

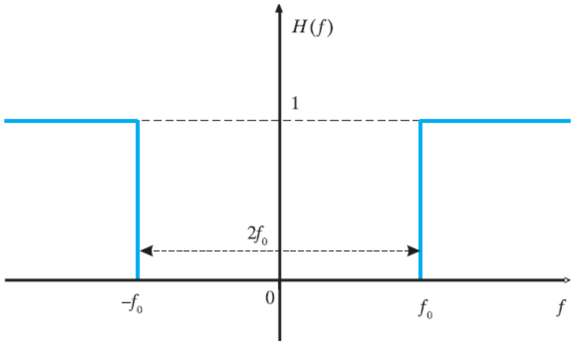
- Ιδανικό Βαθυπερατό (Low Pass)

$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|\le f_0\\ 0, & |f|>f_0\end{cases}$$



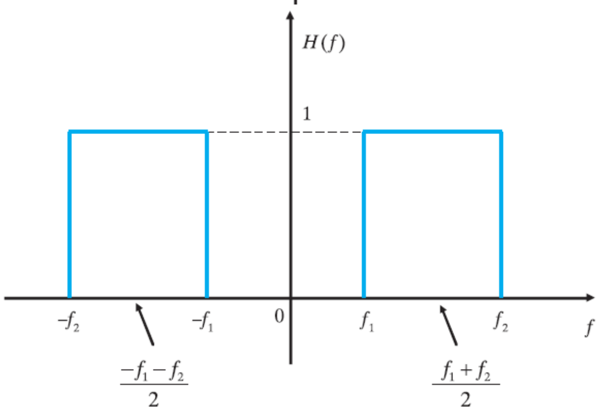
- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}0, & |f|\le f_0\\ 1, & |f|>f_0\end{cases}$$



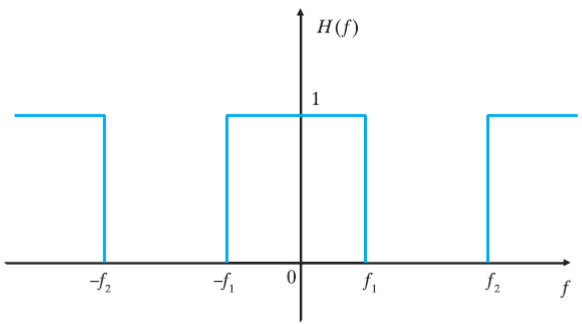
- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}1, & f_1\le|f|\le f_2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

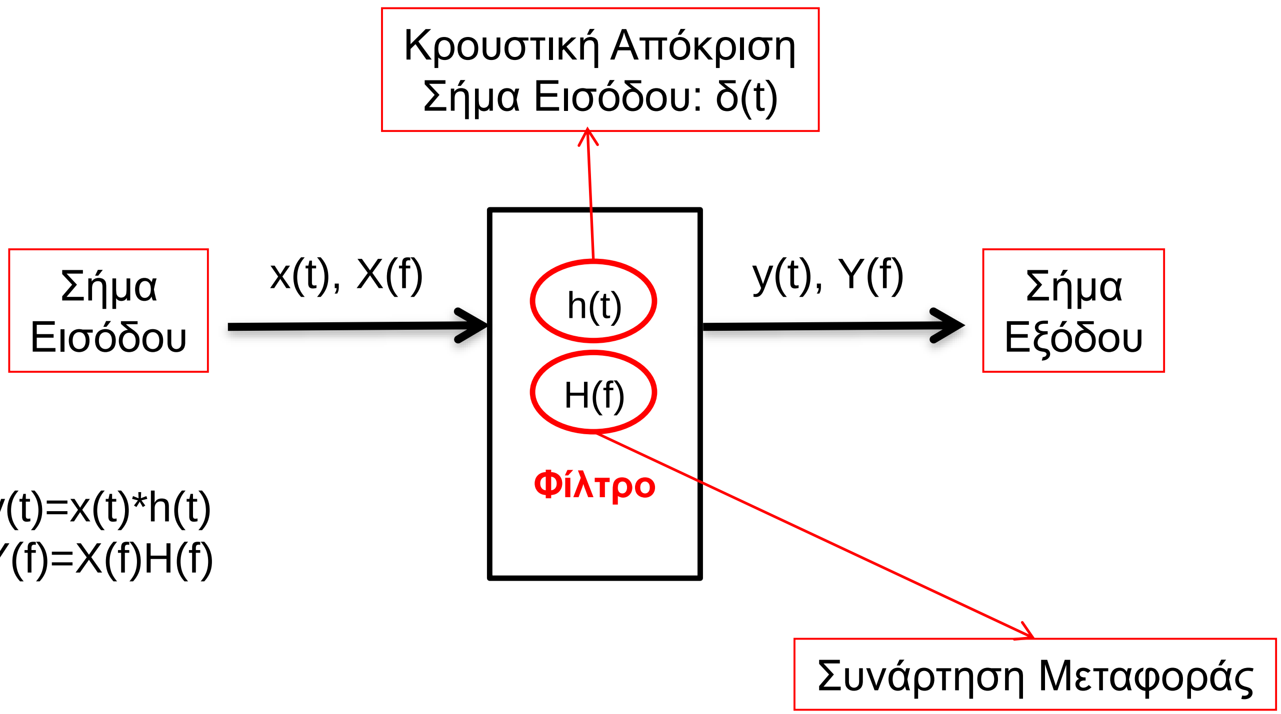


- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}0, & f_1\le|f|\le f_2\\ 1, & \text{αλλού}\end{cases}$$



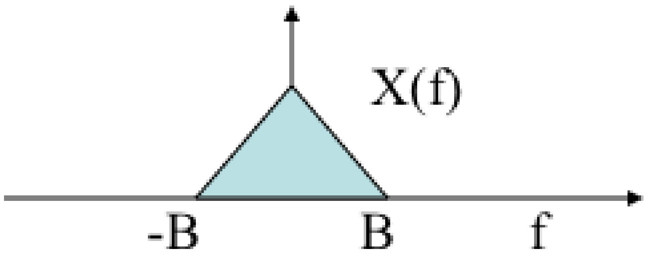
Ορολογία Φίλτρων



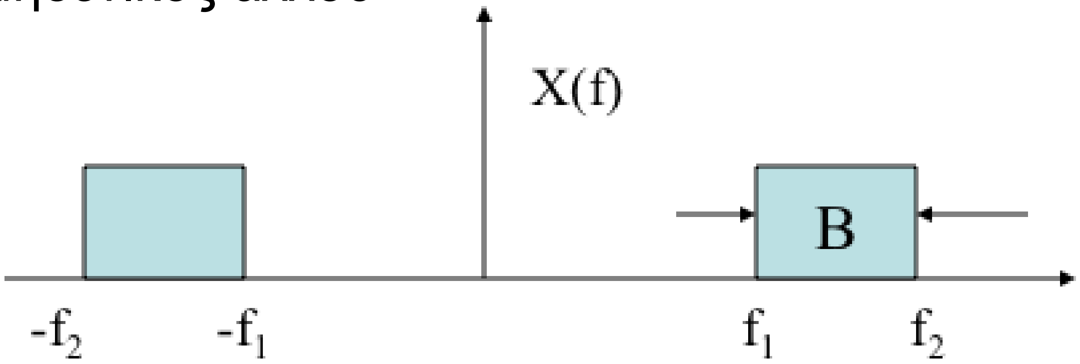
$y(t)=x(t)*h(t)$
$Y(f)=X(f)H(f)$

Σηματα Βασικης Ζωνης και Ζωνοπερατα
Baseband and Bandpass Signals

- ‘Ενα σήμα x(t) Βασικής Ζώνης με εύρος φάσματος B είναι ένα σήμα για το οποίο ο Μ/Σ Fourier X(f) ειναι μη μηδενικός για $|f| \leq B$, και ειναι μηδενικός X(f) = 0 για |f| > B.



- Ένα ζωνοπερατό σήμα x(t) με εύρος φάσματος B = f2 – f1 είναι ένα σήμα για το οποίο ο X(f) ειναι μη μηδενικός για $0 < f_1 < |f| < f_2$, και είναι μηδενικός αλλού



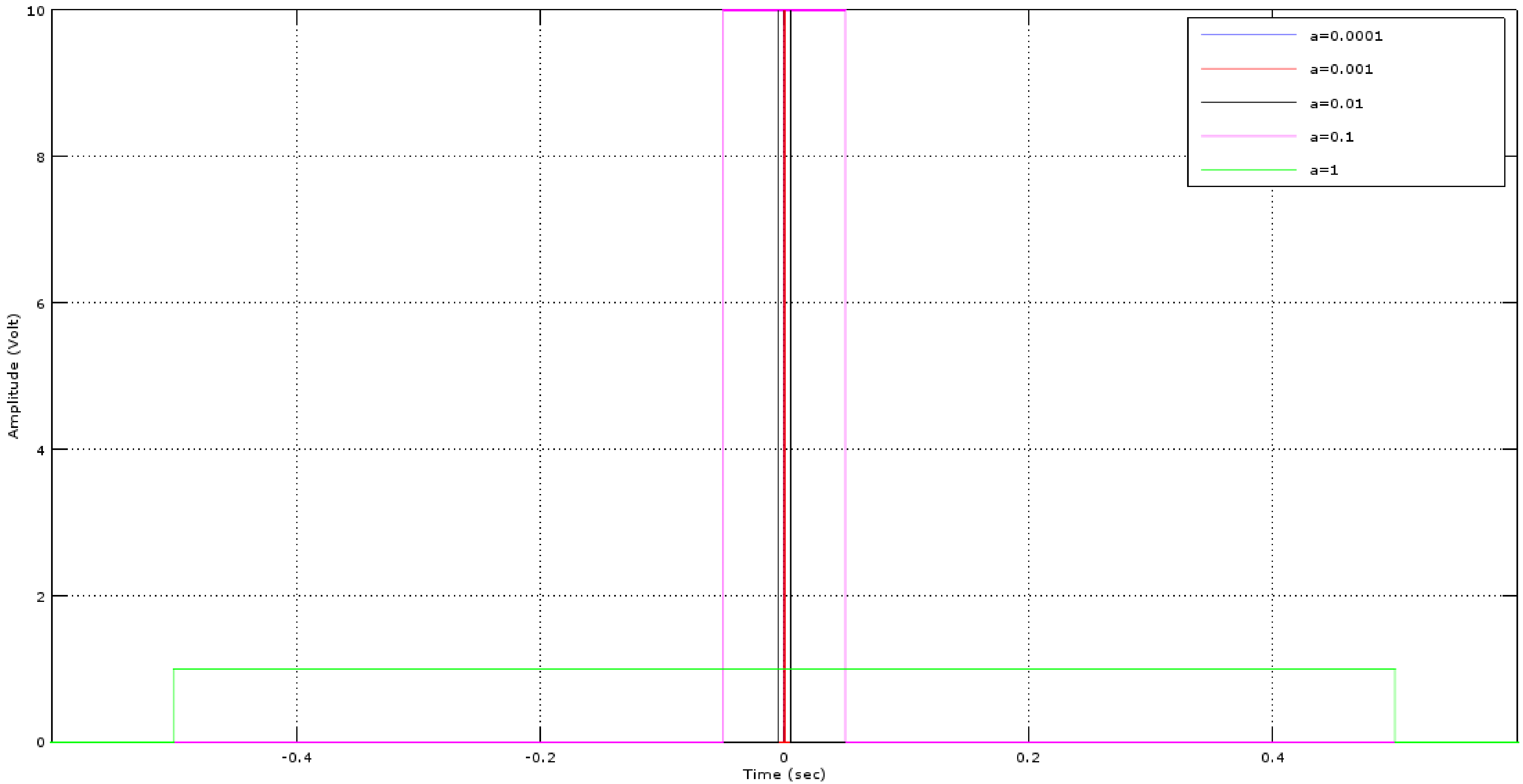
Μετασχηματισμός Fourier ενός παλμού δ(t)

- Γνωρίζουμε από πίνακες ότι δ(t)$\rightleftarrows$1 δηλαδή, θεωρητικά, ένας παλμός δ(t) απειροελάχιστης διάρκειας εμπεριέχει άπειρες συχνότητες.
- Ένας τρόπος επεξήγησης μπορεί να βασιστεί στον ορισμό του δ(t)=$\lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{a}rect\left(\frac{t}{a}\right)\right]$ (στην ίδια λογική με τον ορισμό στη διαφάνεια 37).
- Όσο περιορίζουμε το χρονικό εύρος του παλμού, τόσο αυξάνει το πλάτος του.
- *Η ‘απότομη’ μεταβολή του πλάτους από μια μεγαλύτερη μέγιστη τιμή στη μηδενική σε συνδυασμό με τη μικρότερη διάρκεια του παλμού οδηγούν σε μεγαλύτερο φασματικό περιεχόμενο*

Κώδικας Octave για απεικόνιση της κυματομορφής του (1/α)rect(t/α)

```
Ts=0.000001; %time sample duration
t=-1:Ts:1; %time samples definition
y0=1.*rectpulse(t,0,1);  % calculation of rect(t/1)
y1=(1./0.1).*rectpulse(t,0,0.1); %  calculation of (1/0.1)  * rect (t/0.1)
y2=(1./0.01).*rectpulse(t,0,0.01); %  calculation of (1/0.01)* rect(t/0.01)
y3=(1./0.001).*rectpulse(t,0,0.001); %  calculation of (1/0.001)* rect(t/0.001)
y4=(1./0.0001).*rectpulse(t,0,0.0001); %  calculation of (1/0.0001)* rect(t/0.0001)
figure(1); % Waveform plots
plot(t,y4,'b');
hold;
plot(t,y3,'r');
plot(t,y2,'k');
plot(t,y1,'m');
plot(t,y0,'g');
legend('a=0.0001', 'a=0.001', 'a=0.01','a=0.1', 'a=1');
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude (Volt)');
axis([-0.6 0.6 0 10])
grid;
```

Κυματομορφή (1/α)rect(t/α) για διάφορες τιμές του α



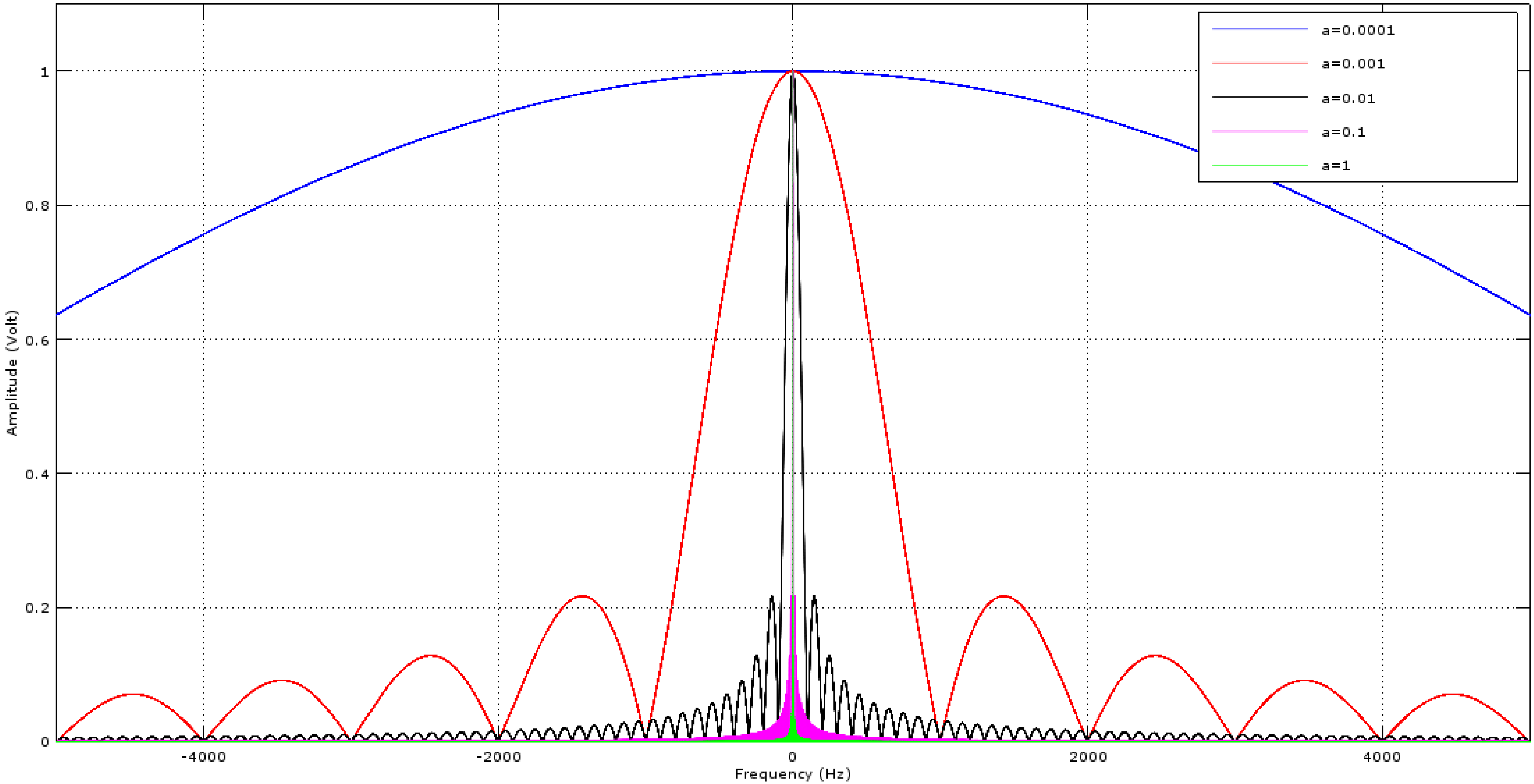
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Κώδικας Octave για απεικόνιση της κυματομορφής και του φάσματος πλάτους του (1/α)rect(t/α)

- f=-5000:1e-2:5000; % frequency samples definition
- g0=sinc(1.*f); % spectrum of rect(t/1)
- g1=sinc(0.1.*f); % spectrum of (1/0.1) * rect (t/0.1)
- g2=sinc(0.01.*f); % spectrum of (1/0.01) * rect (t/0.01)
- g3=sinc(0.001.*f); % spectrum of (1/0.001) * rect (t/0.001)
- g4=sinc(0.0001.*f); % spectrum of (1/0.0001) * rect (t/0.0001)

- figure(2); % Spectrum plots
- plot(f,abs(g4),'b');
- hold;
- plot(f,abs(g3),'r');
- plot(f,abs(g2),'k');
- plot(f,abs(g1),'m');
- plot(f,abs(g0),'g');
- legend('a=0.0001', 'a=0.001', 'a=0.01','a=0.1', 'a=1');
- xlabel('Frequency (Hz)');
- ylabel('Amplitude (Volt)');
- axis([-5000 5000 0 1.1]);
- grid;

Φάσμα του (1/α)rect(t/α) για διάφορες τιμές του α



Ερωτήσεις

Παραδείγματα

ΠΛΗ22_Εξέταση 1η_3-7-2019

ΘΕΜΑ 1 (20 Μονάδες)

Δίνεται το σήμα $x(t) = cos(2\pi 100t)$. Να υπολογιστεί η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (αν υπάρχουν) για τα παρακάτω σήματα:

Ερώτηση 1η (5 Μονάδες): $\mathrm{y_a(t) = x(t) + x(2t)}$

Ερώτηση 2η (5 Μονάδες): $y_\beta(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]^2$

Ερώτηση 3η (5 Μονάδες): $y_\gamma(t) = [x(t) \cdot x(5t)] * sinc(1000t) + 1$, όπου ο τελεστής '*' αντιστοιχεί στη συνέλιξη

Ερώτηση 4η (5 Μονάδες): $y_\delta(t) = [x(t) \cdot 10sinc^2(10t)] + \delta(t)$

Ερώτηση 1η :

$$y_a(t) = x(t) + x(2t) = cos(2\pi 100t) + cos(2\pi 200t)$$

Οι περίοδοι των 2 όρων είναι αντίστοιχα

$T_1 = \frac{1}{100} sec, T_2 = \frac{1}{200} sec.$

Ο λόγος τους είναι:

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{200}} = 2$, ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο

$T = T_1 = 2T_2 = \frac{1}{100} sec$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 200Hz άρα το σήμα έχει συχνότητα δειγματοληψίας ίση με 400Hz

Ερώτηση 2η :

$$y_\beta(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]^2 = cos^2(200t) = \frac{1 + cos(400t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\left(2\pi\frac{400}{2\pi}t\right)$$

Έχουμε έναν σταθερό και έναν περιοδικό όρο με συχνότητα $\frac{200}{\pi}Hz$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{\pi}{200}sec$ και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $\frac{400}{\pi}Hz$

Ερώτηση 3^η :

$$y_\gamma(t) = [x(t)\cdot x(5t)] * sinc(1000t) + 1$$

$$x(t)\cdot x(5t) = cos(2\pi 100t)\cdot cos(2\pi 500t) = \frac{1}{2}cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2}cos(2\pi 400t)$$

Άρα

$$y_\gamma(t) = \left[\frac{1}{2}cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2}cos(2\pi 400t)\right] * sinc(1000t) + 1 \overset{F}{\leftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\leftrightarrow} \quad F\left\{\frac{1}{2}cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2}cos(2\pi 400t)\right\}\cdot\frac{1}{1000}rect\left(\frac{f}{1000}\right) + \delta(f)$$

Στην ανωτέρω έκφραση ο τετραγωνικός παλμός αποκόπτει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από 500Hz οπότε τελικά έχουμε το σήμα :

$$y_\gamma(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{1000}cos(2\pi 400t) + 1$$

που είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{400}\,sec$ και συχνότητα 400Hz .

Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 800Hz

Ερώτηση 4^{η} :

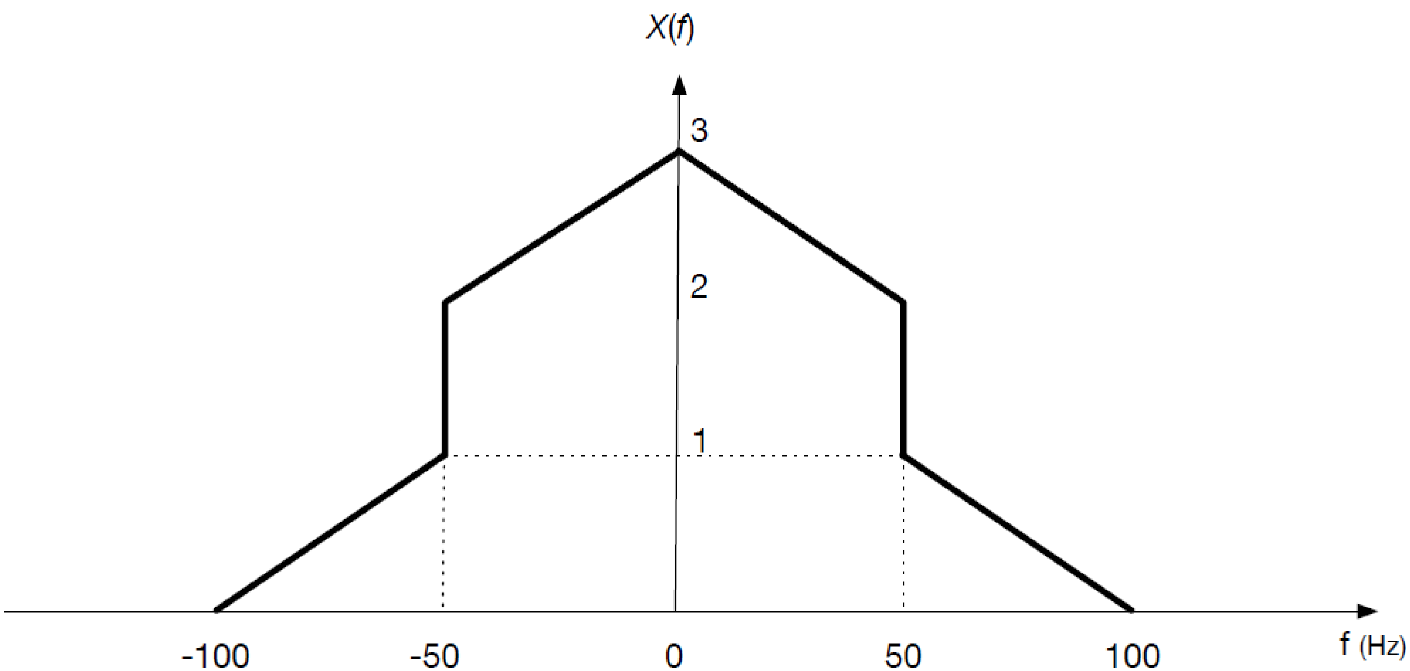
$$y_\delta(t) = [x(t) \cdot 10sinc^2(10t)] + \delta(t)$$
$$= cos(2\pi 100t) \cdot 10sinc^2(10t) + \delta(t) \overset{F}{\leftrightarrow}$$
$$\overset{F}{\leftrightarrow} \ \frac{1}{2}\left\{tri\left(\frac{f-100}{10}\right) + tri\left(\frac{f+100}{10}\right)\right\} + 1$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Επίσης, το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης άρα δεν δειγματίζεται με το κριτήριο Nyquist.

ΠΛΗ22_Εξέταση 1η_3-7-2019

ΘΕΜΑ 2 (20 Μονάδες)

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



Ερώτηση 1η (5 Μονάδες): Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

<u>Ερώτηση 1η :</u> Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2\ tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$asinc(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$asinc^2(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100sinc(100t) + 2 \cdot 100sinc^2(100t)$$

Παραδείγματα

ΘΕΜΑ 1 2018Β

Δίνεται το σήμα $x(t) = cos(2\pi 200t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα για τα ακόλουθα σήματα:

(α) $a(t) = \left[x(t\sqrt{2})\right]^2$

(β) $b(t) = x(t) + sinc(400t)$

(γ) $c(t) = [x(4t) + sinc^2(100t)] * [\delta(t) - 300sinc(300t)]$ (όπου το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη).

(δ) $e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot sinc(400t)$

(α) $a(t) = x^2\left(t\sqrt{2}\right) = \dfrac{1+\cos(2\pi 400\sqrt{2}\cdot t)}{2}$ με τη βοήθεια της ιδιότητας $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(\theta)}{2}$)

Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \dfrac{1}{400\sqrt{2}}\sec = \dfrac{\sqrt{2}}{800}\sec$

Συχνότητα $f = 400\sqrt{2}Hz$

(β)

$$b(t) = x(t) + \sin c(400t) = \cos(2\pi 200t) + \sin c(400t) \xleftrightarrow{F} c(t) = \frac{1}{2}\left\{\delta\left(f - 200\right) + \delta\left(f + 200\right)\right\} + \frac{1}{400} rect\left(\frac{f}{400}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα μη περιοδικό

(γ)

$$c(t)=\left[x(4t)+\sin c^{2}(100t)\right]*\left[\delta(t)-300\sin c(300t)\right]=$$

$$=\left[\cos(2\pi 800t)+\sin c^{2}(100t)\right]*\left[\delta(t)-300\sin c(300t)\right]\xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F}\left\{\frac{1}{2}\left\{\delta(f-800)+\delta(f+800)\right\}+\frac{1}{100}tri\left(\frac{f}{100}\right)\right\}\cdot\left\{1-rect\left(\frac{f}{300}\right)\right\}$$

Εδώ έχουμε υψιπερατό φίλτρο που αφήνει να περάσουν οι παλμοί δ στα +/- 800Hz

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T}=\frac{1}{800}\sec$

(δ)

$$e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot \sin c(400t) = 1 + \cos(2\pi 200t) \cdot t \cdot \frac{\sin(400\pi t)}{400\pi t} = 1 + \frac{1}{800\pi}\sin\left(2\pi 400t\right)$$ (με βάση την ιδιότητα sin(2θ)=2sin(θ)cos(θ))

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $T = \frac{1}{400}\sec$

ΘΕΜΑ 6 ΕΞ2016Α

Δίνεται το σήμα $x(t) = sin(100t)$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και η ικανότητα δειγματοληψίας (με το κριτήριο Nyquist) των παρακάτω σημάτων. Επίσης για κάθε σήμα να υπολογίσετε –αν υπάρχουν- την περίοδο και την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

(α) $y(t) = [x(t)]^2$

(β) $z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]$

(γ) $w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]^2$

(δ) $r(t) = x(5.5 \cdot t) \cdot x(2.5 \cdot t)$

(α)

$$y(t) = [x(t)]^2 = sin^2(100t) = \frac{1-cos(200t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{cos\left(2\pi\frac{200}{2\pi}t\right)}{2}$$

Το σήμα έχει έναν συνημιτονικό όρο άρα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_y = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi} Hz$,

με περίοδο $T_y = \frac{\pi}{100} sec$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,y} = \frac{200}{\pi} Hz$

(β)

$$z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right] = sin(100t) * \frac{sin(100\pi t)}{100\pi t} = sin(100t) * sinc(100t) =$$

$$=sin\left(2\pi\frac{100}{2\pi}t\right) * sinc(100t)$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$Z(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right)\right] \cdot \frac{1}{100} rect\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το τελικό σήμα περιλαμβάνει τους 2 παλμούς δ στις συχνότητες $\pm\frac{100}{2\pi}Hz = \pm\frac{50}{\pi}Hz$ (εφόσον στην ανωτέρω πράξη ο τετραγωνικός παλμός δρα ως βαθυπερατό φίλτρο με μεγαλύτερη συχνότητα αποκοπής, ίση με 50 Hz.

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_z = \frac{50}{\pi}Hz$,

με περίοδο $T_z = \frac{\pi}{50}sec$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,z} = \frac{100}{\pi}Hz$

$$(\gamma)\ w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]^2 = sin(100t) + \left[\frac{sin(100\pi t)}{100\pi t}\right]^2 = sin(100t) + sinc^2(100t) =$$

$$= sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) + sinc^2(100t)$$

Το σήμα έχει φάσμα πλάτους :

$$W(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right)\right] + \frac{1}{100} tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100Hz, άρα η ελάχιστη συχνότητα Nyquist είναι $f_{s,w} = 200Hz$.

(δ) $r(t) = x(5.5t) \cdot x(2.5t) = sin(550t) \cdot sin(250t) = \frac{1}{2}[cos(550t - 250t) - cos(550t + 250t)] =$

$= \frac{1}{2}[cos(300t) - cos(800t)]$

Οι περίοδοι των 2 συνημιτονικών όρων είναι οι εξής:

$T_1 = \frac{2\pi}{300} sec$

$T_2 = \frac{2\pi}{800} sec$

και ο λόγος τους είναι

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{300}}{\frac{2\pi}{800}} = \frac{8}{3}$, ρητός , οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_r = 3T_1 = 8T_2 = \frac{\pi}{50} sec$

, έχει συχνότητα $f_r = \frac{50}{\pi} Hz$,

και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,r} = 2\frac{400}{\pi} Hz = \frac{800}{\pi} Hz$

ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0=\dfrac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t)=x(t)*\left[2a\cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha>f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \Im\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

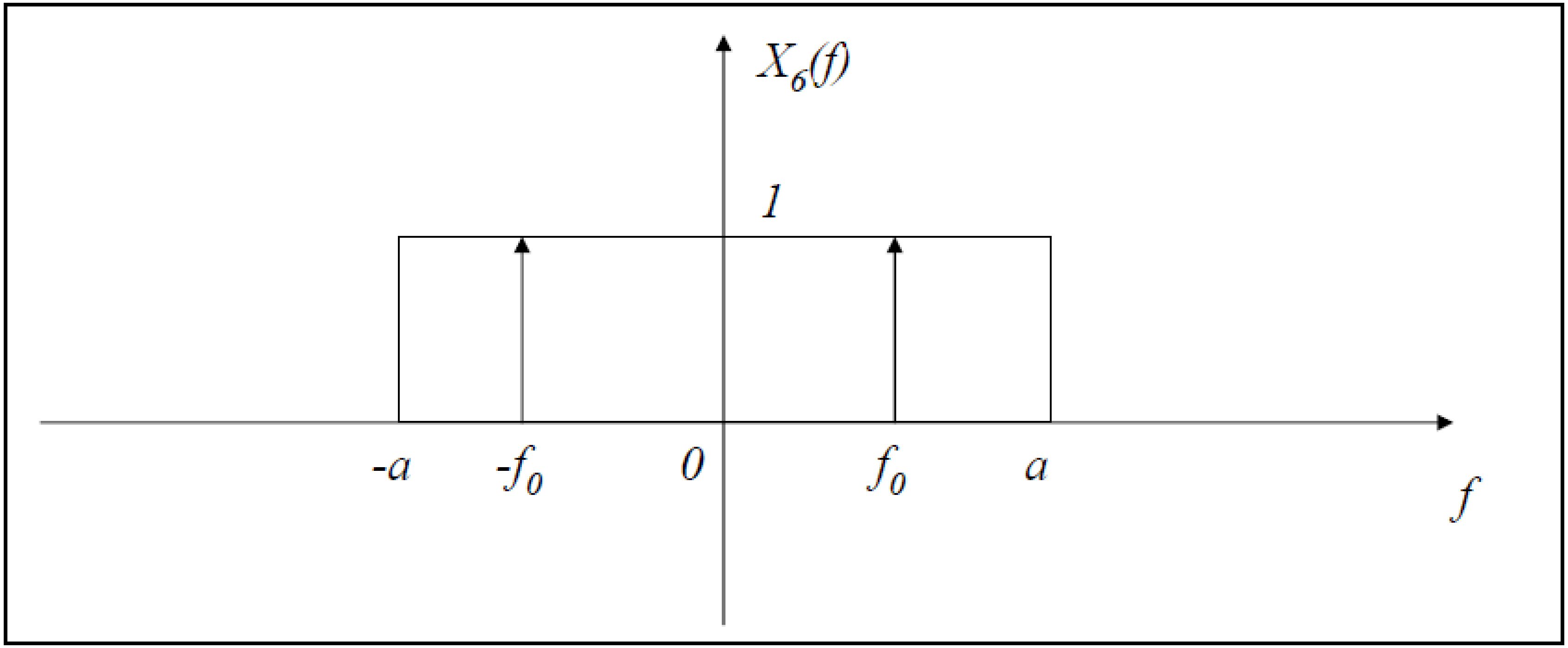
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] = X(f)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

και $\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} rect\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

Παράδειγμα με φίλτρα.

Ποιά η σχέση των a, b ώστε $(\alpha, b > 0)$

να ισχύει $\alpha\,\mathrm{sinc}(\alpha t) * b\,\mathrm{sinc}^2(bt) = b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$?

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$y(t) = x(t)$

$x(t)\ b\,\mathrm{sinc}^2(bt)$

$h(t) = \alpha \cdot \mathrm{sinc}(at)$ $\qquad \alpha, b > 0$

Υπολογισμός $X(f)$

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}(f)$

αλλ. μέγεθος $\text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b}\text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

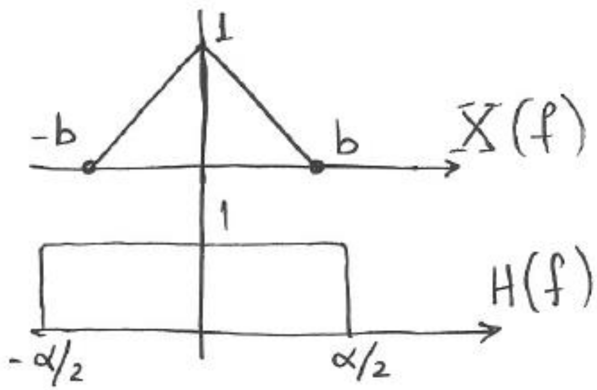
$\Rightarrow b\,\text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

Υπολογισμός $H(f)$.

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f)$

αλλ. μέγεθος $\text{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha}\text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow \alpha\,\text{sinc}(\alpha t) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

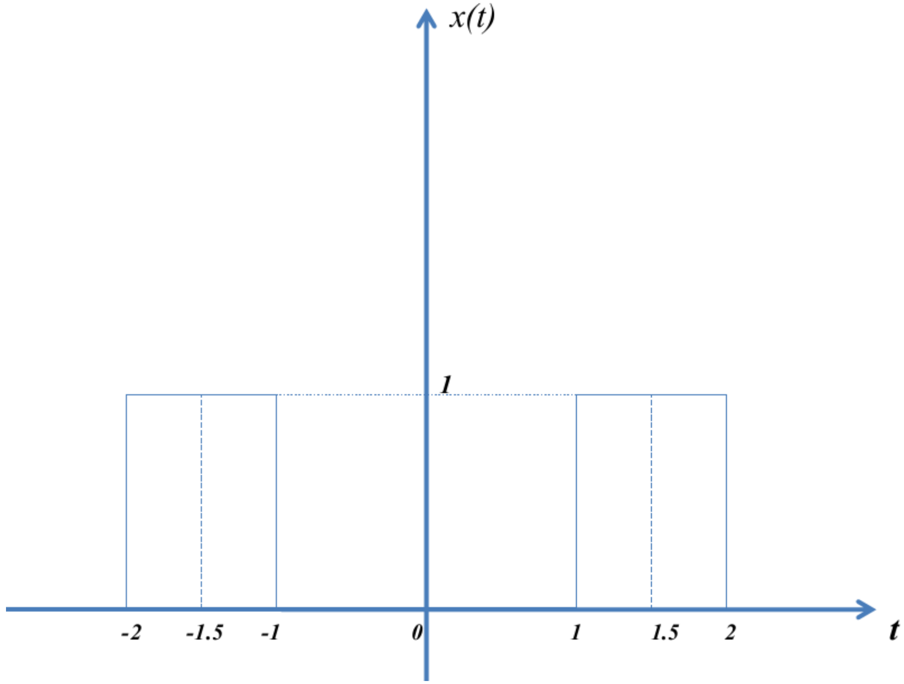


Εμείς θέλουμε $X(f)\cdot H(f) = X(f)$

οπότε $b \leq \frac{a}{2}$

ΘΕΜΑ 4 /ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής συνέλιξη: $y(t)=\left\{\delta(t)+\frac{1}{2}\left[\delta(t-3)+\delta(t+3)\right]\right\}*rect(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f)=\cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5) \; .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5}\mathrm{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f) \; .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} * rect(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$Y(f) = \Im\left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} \cdot \Im\left[rect(t)\right] =$$

$$= \left[1 + \cos(6\pi f)\right] \cdot \mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \mathrm{sinc}(f)$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right]\cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\operatorname{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

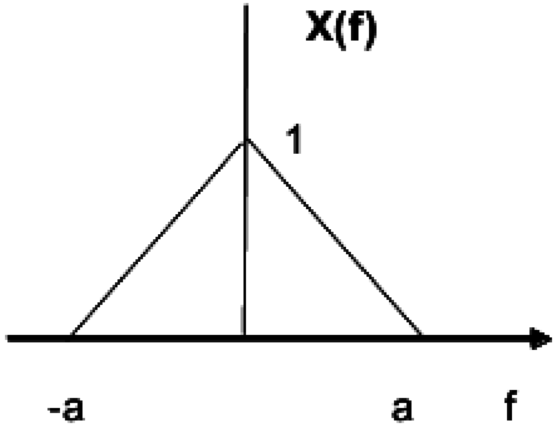
$$1+\cos(6\pi f)=2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

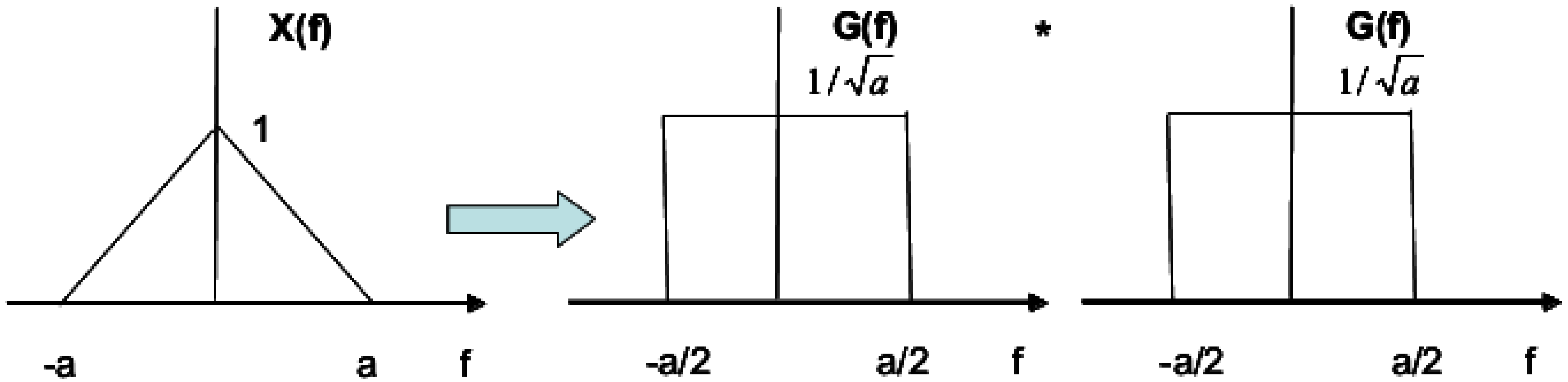
$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{2\cos^2(3\pi f)\cdot \operatorname{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\operatorname{sinc}(f)}=\cos(3\pi f)$$

Θέμα 5 ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα x(t) στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) [X(f)] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα x(t) προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier X(f) προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος G(f) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση g(t) με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a}\sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \sin c^2(at)$$

ΘΕΜΑ 4 ΓΕ1/1314

Στόχος της άσκησης *Η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας σημάτωντόσο στο πεδίο του χρόνου όσο στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως επίσης και η εφαρμοφή του κριτηρίου Nyquist για την εύρεση της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.*

Σχετικές ασκήσεις: *Άσκηση 1 (σελ.1), Άσκηση 5 (σελ.8) - Επεξεργασία Σημάτων και Φάσμα και Άσκηση 4 (σελ.27)-Διαμόρφωση από το plh22_oss1-final.pdf*

Δίνονται τα σήματα $x_1(t)=\cos(10\pi t)$, $x_2(t)=\sin(t)$.

Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περίοδοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(α) $y_1(t)=x_1(t)-x_2(t)$

(β) $y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(\pi t)$

Δίνονται τα σήματα $x_3(t)=\delta(t-100)+\delta(t+100)$, $x_4(t)=\frac{1}{200}\sin c\left(\frac{t}{200}\right)$

Να βρεθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(γ) $y_3(t)=x_3(t)+x_4(t)$

(δ) $y_4(t)=x_3(t)*x_4(t)$

(α)

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \cos(10\pi t) - \sin(t)$$

$\cos(10\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{1}{5}\sec$

$\sin(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = 2\pi\sec$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{1}{5}}{2\pi} = \frac{1}{10\pi}$ άρρητος, άρα το $y_1(t)$ απεριοδικό

(β)

$$y_2(t) = x_1(t)\cdot x_2(\pi t) = \cos(10\pi t)\cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi t + 10\pi t) + \sin(\pi t - 10\pi t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(11\pi t) - \sin(9\pi t)\right]$$

$\sin(11\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \dfrac{2}{11}\sec$

$\sin(9\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = \dfrac{2}{9}\sec$

Λόγος περιόδων $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{\frac{2}{11}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{9}{11}$ ρητος, άρα το $y_2(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_2 = 11T_A = 9T_B = 2\sec$

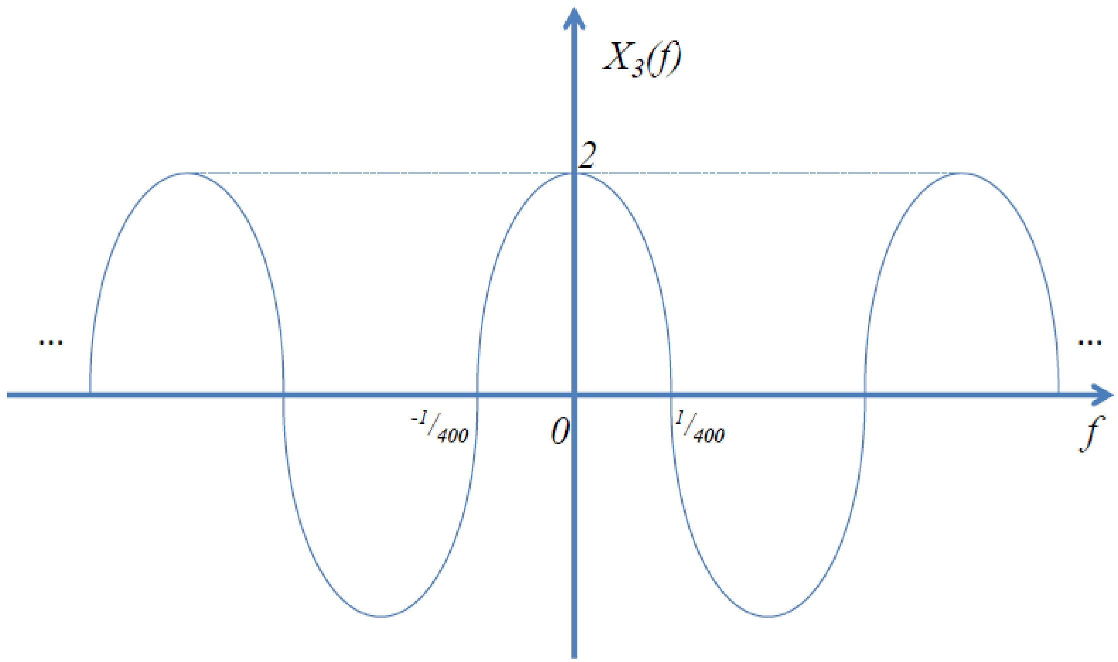
(γ)

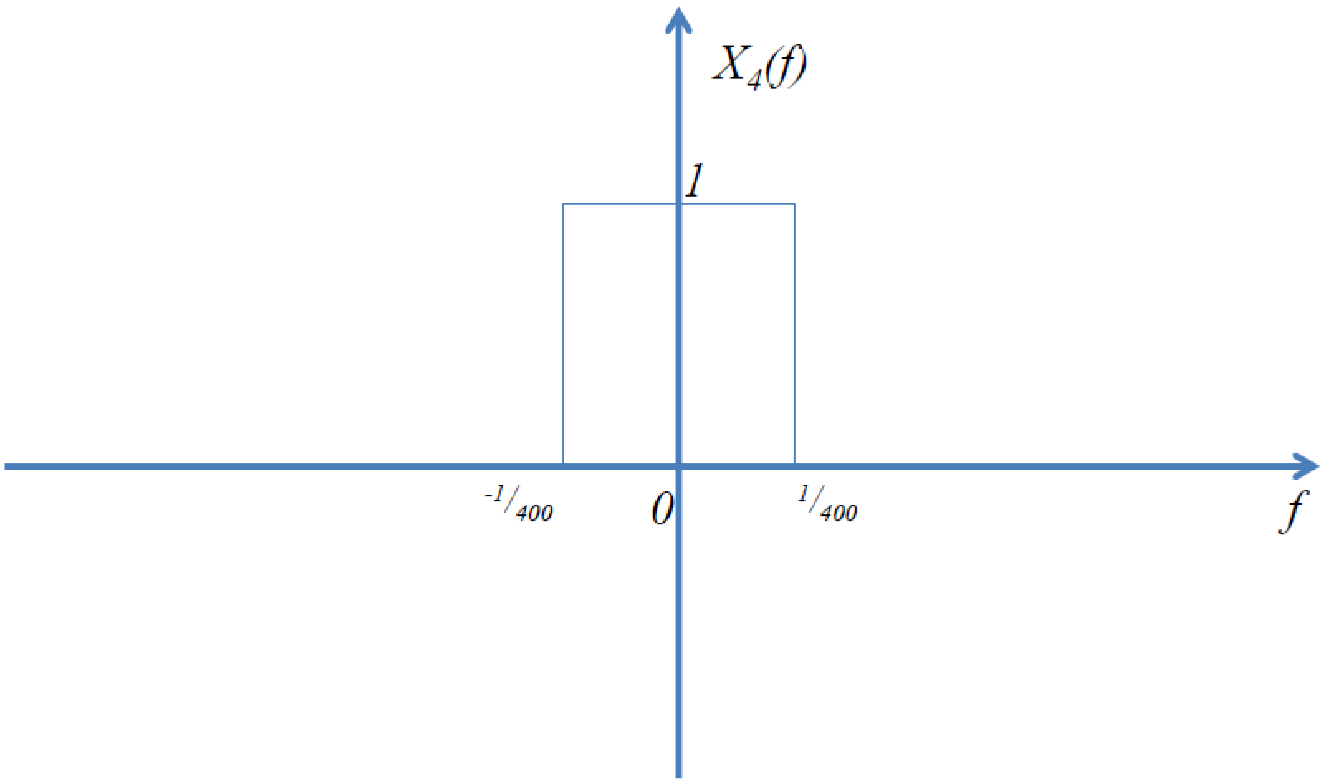
$$y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{F} 2\cos(2\pi f 100) = X_3(f)$$

$$x_4(t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{1/200}\right) = X_4(f)$$

Τα φάσματα πλάτους των ανωτέρω σημάτων απεικονίζονται παρακάτω

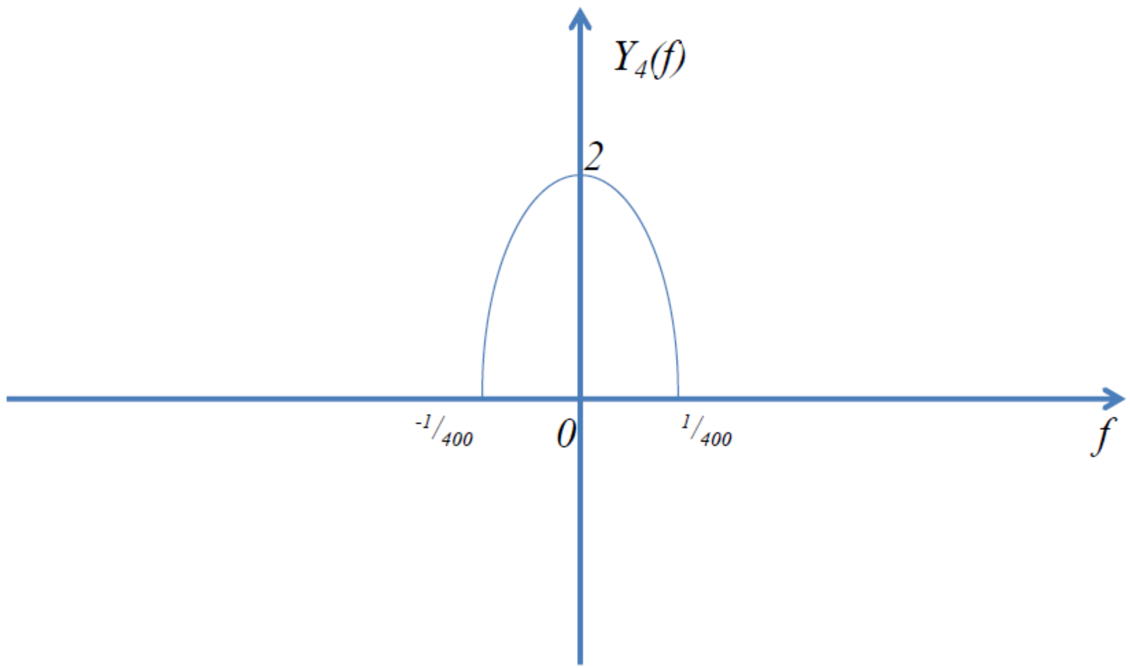




Το φάσμα $Y_3(f) = X_3(f) + X_4(f)$ είναι συνεχές συνεπώς το σήμα $y_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(δ) $y_4(t) = x_3(t) * x_4(t) \xleftrightarrow{F} X_3(f) \cdot X_4(f) = 2\cos(2\pi f 100) \cdot rect\left(\dfrac{f}{1/200}\right)$

Το φάσμα $Y_4(f)$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Το φάσμα είναι συνεχές, συνεπώς το σήμα $y_4(t)$ δεν είναι περιοδικό.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = 4\cos(800\pi t)$ και $X_2(f) = tri\left(\dfrac{f}{100}\right)$.

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

(α). Να υπολογιστεί η έκφραση $x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t)\right]$

(β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $x_3(t)$.

1/

(α), (β)

$$x_1\left(\frac{t}{2}\right) = 4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{t}{2}\right) = 4\cos\left(2\pi 200t\right) \leftrightarrow 2\left[\delta\left(f-200\right)+\delta\left(f+200\right)\right] \qquad \text{(A)}$$

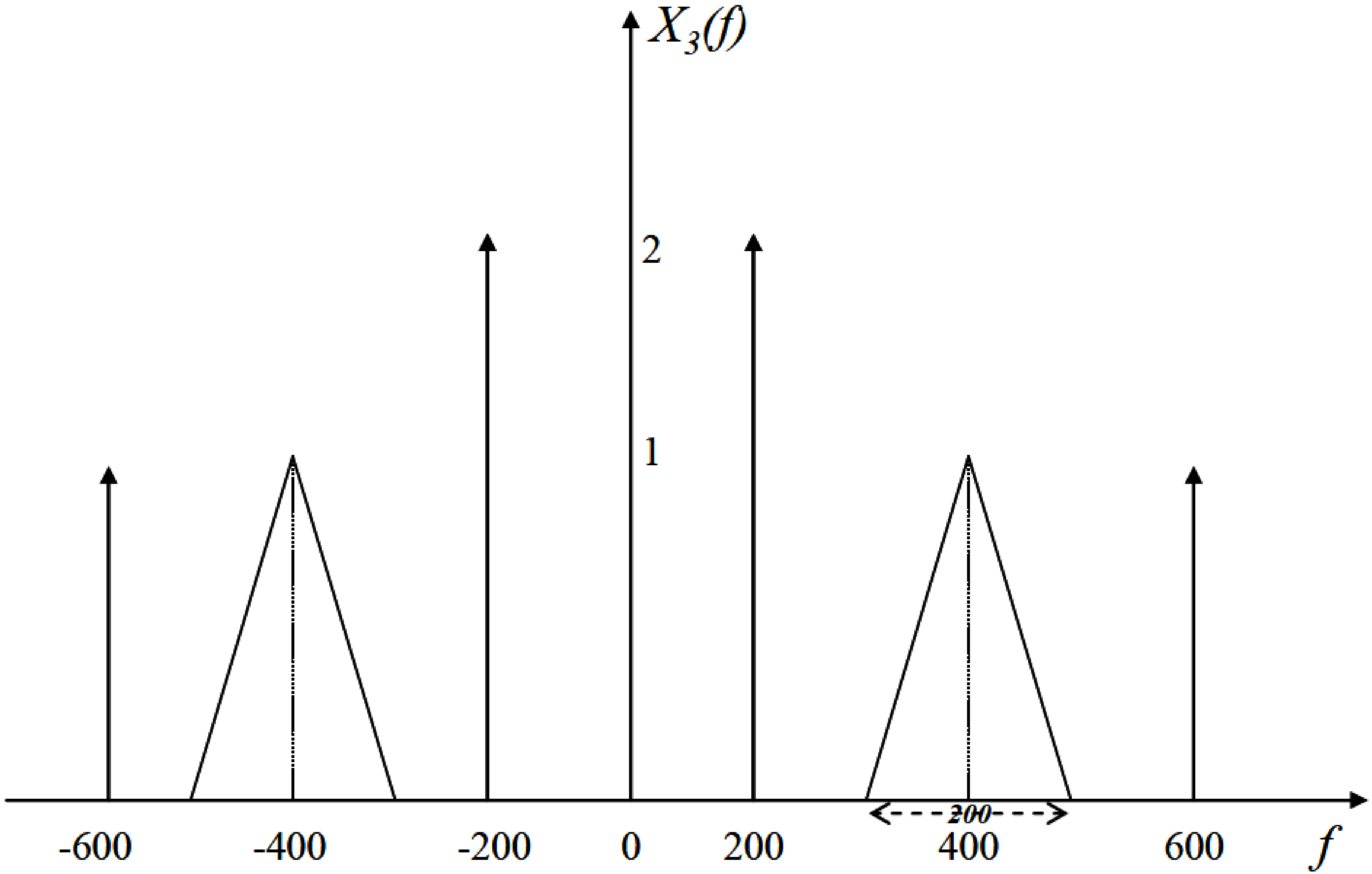
$$\frac{1}{2}x_1\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{1}{2}4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{3t}{2}\right) = 2\cos\left(2\pi 600t\right) \leftrightarrow \delta\left(f-600\right)+\delta\left(f+600\right) \qquad \text{(B)}$$

$$\frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) = 2\cos\left(2\pi 400t\right)100\sin c^2(100t) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left\{\delta\left(f-400\right)+\delta\left(f+400\right)\right\} * tri\left(\frac{f}{100}\right) = tri\left(\frac{f-400}{100}\right)+tri\left(\frac{f+400}{100}\right) \qquad \text{(Γ)}$$

Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t) \right] = 4\cos\left(2\pi 200t\right) + 2\cos\left(2\pi 600t\right) + 200\cos\left(2\pi 400t\right)\sin c^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2\left[\delta\left(f - 200\right) + \delta\left(f + 200\right)\right] + \left[\delta\left(f - 600\right) + \delta\left(f + 600\right)\right] + \left[tri\left(\frac{f - 400}{100}\right) + tri\left(\frac{f + 400}{100}\right)\right]$$



X3(f)
2
1
200
-600
-400
-200
0
200
400
600
f