Αντιπαράδειγμα υπολογισμού απόστασης κώδικα από το ελάχιστο βάρος του γεννήτορα πίνακα

ΘΕΜΑ 6 ΓΕ5/0304

Δίνεται ένα σύνολο S={1100011, 1010000, 1001011, 0100101, 0001101} και ο κώδικας C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμά του, δηλαδή C=<S>.

1. Ζητείται ένας γεννήτορας πίνακας του C.
2. Ζητούνται οι παράμετροι (n, k, d) του κώδικα C, δηλαδή το μήκος των κωδικών λέξεων, η διάσταση του κώδικα και η απόστασή του.
3. Ζητείται μια βάση του $C^{\perp}$.
4. Να κωδικοποιηθούν τα μηνύματα Α=«0011», Β=«1001», Γ=«1011» και Δ=«1111».
5. Να διακρίνετε τις κωδικές λέξεις ‘1101110’ και ‘0011011,’ στα ψηφία μηνύματος και τα αντίστοιχα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας.
6. Ζητείται το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, καθώς και ο προσδιορισμός της συνομάδας C+1111011.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας προκύπτει, από τον 1° στον 2° πίνακα ως εξής (όπου α η 1η γραμμή του 1ου πίνακα, β η 2η γραμμή, γ η 3η γραμμή, δ η 4η και ε η 5η γραμμή του 1ου πίνακα): η 1η γραμμή του 2ου πινακα είναι (α+δ), η 2η γραμμή είναι η (δ), η 3η γραμμή είναι η (β+γ), η 4η

γραμμή είναι η (ε) και η 5η γραμμή είναι η (α). Η 1η γραμμή του 3ου πίνακα είναι η (α+δ), η 2η είναι η (δ), η 3η είναι η (β+γ)+(ε), η 4η είναι η (ε) και η τελευταία είναι η (α+δ)+δ+α που είναι η 0000000. Επομένως, ο γεννήτορας πίνακας αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του 3ου πίνακα.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Σχόλιο: τα 3 ψηφία πλεονασμού υπολογίζονται από τα 4 ψηφία μηνύματος με τις εξής σχέσεις XOR: p1=d1+d2+d3+d4. p2=d1+d3, p3=d2+d4

2. (7, 4, 2)

3.

$$H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Επομένως, μια βάση του $C^{\perp}$ είναι το σύνολο $\{1111100, 1010010, 0101101\}$.

Σχόλιο: Η απόσταση είναι 2 διότι ο Η έχει 2 όμοια στοιχεία (και το 110 και το 101 επαναλαμβάνονται)
Όμως, ((βλ. προηγούμενη διαφάνεια) το ελάχιστο βάρος των γραμμών του G είναι 3.

4.
A.G=[0011].G=0011011,
B.G=[1001].G=1001011,
Γ.G=[1011].G=1011101,
Δ.G=[1111].G=1111000.

5.

Η κωδική λέξη '1101110' διακρίνεται στα πρώτα k=4 ψηφία πληροφορίας '1101' και τα υπόλοιπα n-k=d=3 ψηφία ελέγχου ισοτιμίας '110' και
Η κωδική λέξη '0011011' στα ψηφία πληροφορίας '0011' και στα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας '011'.

6. Οι συνομάδες είναι 8 (2^(7-4))
Πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε τον κώδικα C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμα του συνόλου S, δηλαδή C=<S>.
C={0000000, 1000110, 0100101, 1100011, 0010110, 1010000, 0110011, 1110101, 0001101, 1001011, 0101000, 1101110, 0011011, 1011101, 0111110, 1111000}.

Προσθέτοντας (xor) σε κάθε κωδική λέξη τη λέξη '1111011' λαμβάνουμε τη ζητούμενη συνομάδα.
C+1111011={1111011, 0111101, 1011110, 0011000, 1101101, 0101011, 1001000, 0001110, 1110110, 0110000, 1010011, 0010101, 1100000, 0100110, 1000101, 0000011}

Σχόλιο: Εάν γνωρίζαμε τον κώδικα (υπολογίζεται στο (6)) θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τον ίδιο γεννήτορα με το 2ο, 3ο, 5ο και 9ο στοιχείο. Ο γεννήτορας σε τυπική μορφή είναι μοναδικός και δεν έχει σημασία ο τρόπος προσδιορισμού του.
Από το αντιπαράδειγμα αυτό φαίνεται ότι δεν είναι σωστός ο προσδιορισμός του γεννήτορα βάσει του ελάχιστου βάρους του G.