ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΑΘΗ.1

$5^{η}$ ΟΣΣ

02.05.2020

Συμπληρωματικές Διαφάνειες στους Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

Νίκος Δημητρίου

Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

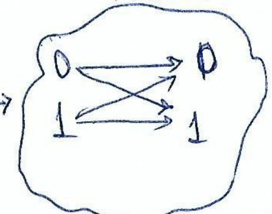
- Οι διαφάνειες αυτές είναι συμπληρωματικές της παρουσίασης που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr και περιέχουν παραπομπές σε συγκεκριμένα τμήματά της.
- Σκοπός είναι μέσω απλών παραδειγμάτων να γίνουν κατανοητές οι βασικές αρχές κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης, καθώς και να αναδειχθεί η μεθοδολογία που ακολουθείται σε αντίστοιχες ασκήσεις.

Κωδικοποίηση: Γραμμικοί κώδικες

Μήνυμα Πλεονασμός(parity)

$$\underbrace{[d_1\ d_2 \cdots d_k][p_1 p_2 \cdots p_{n-k}]}_{\text{Κωδικολέξη } n \text{ bits (στοιχείο κώδικα)}} \longrightarrow$$

Κανάλι



$\oplus$ $\underbrace{[0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \ldots 0]}_{\text{πρότυπο σφάλματος}}$

$\longrightarrow$ ληφθείσα λέξη

$\uparrow$ χρήση πλεονασμού για ανίχνευση ή διόρθωση σφαλμάτων

Ρυθμός πληροφορίας $r = \frac{k}{n}$

Γραμμικός κώδικας C: {σύνολο κωδικολέξεων}

Βλ. αρχείο
PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2019_2020
Διαφάνειες 14-35

ιδιότητες

1) $\forall\, x,y \in C,\ x+y \in C$

2) $\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ bits}} \in C$

Μήκος Κώδικα: n
Διάσταση κώδικα: k

3) $p_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i$ Κάθε ψηφίο ισοτιμίας είναι γραμμικός συνδυασμός των ψηφίων μηνύματος ($\alpha_i = 0$ ή 1)

: βάρος κωδικολέξης: Πλήθος των '1' που έχει η κωδικολέξη π.χ wt(1011) = "3"

απόσταση γραμμικού κώδικα ελάχιστη απόσταση μεταξύ 2 κωδικολέξεων

$\hookrightarrow$ ελάχιστο μη μηδενικό βάρος κωδικολέξης

Κωδικοποίηση / Πλεονασμός

1

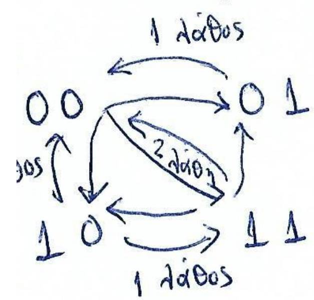
Μήνυμα.

d_1	d_2	$p_1 = d_1 + d_2$	$p_2 = d_1$	$p_3 = d_2$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

$2^k = 2^2$ κωδικολέξεις

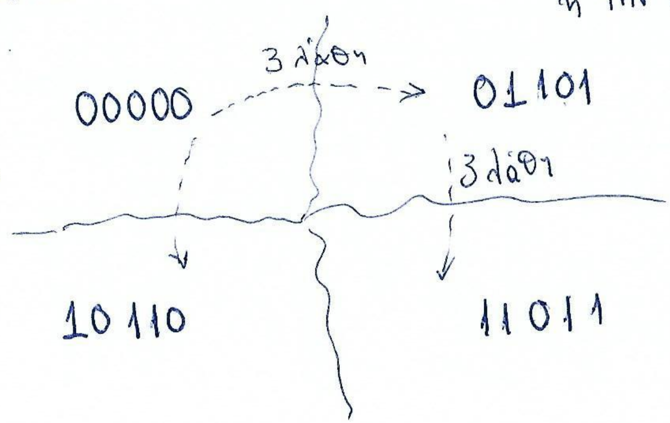
Κώδικας $(5,2)$

Απόσταση κώδικα: ελάχιστο βάρος $d = 3$ (από 2η κωδικολέξη 01101 ή την 3η -"- 10110)



Κωδικοποίηση

Δημιουργία "απόστασης ασφαλείας" μεταξύ διαφορετικών μηνυμάτων



Κώδικας $\{00000, 01101, 10110, 11011\} = C$

Απόσταση $d=3$. Διορθώνει όλα τα $\frac{d-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ λάθη

π. χ.

Αποστολή $01|101 \longrightarrow$ λήψη 00101

? έλεγχος σφαλμάτων

Σύγκριση ληφθείσας λέξης με όλες τις κωδικές λέξεις

00101 →	00000	απόσταση	2
00101 →	01101	– " –	1
00101 →	10110	– " –	3
00101 →	11011	– " –	4

$1 \xrightarrow[\text{απόσταση}]{\text{ελάχιστη}}$ άρα σωστή λέξη 01101 (σφάλμα στο 2ο bit)

Άρα μήνυμα '01'

Ικανότητες διόρθωσης/ανίχνευσης σφαλμάτων

Κώδικας $\mathcal{C}$ απόστασης d

$\Rightarrow$ Ανιχνεύει όλα τα σφάλματα ε με $wt(\varepsilon)<d-1$

$\Rightarrow$ Δεν ανιχνεύει ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με $wt(\varepsilon)=d$

$\Rightarrow$ Διορθώνει όλα τα σφάλματα ε με

$$wt(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$ ← ακέραιο μέρος

$\Rightarrow$ Δεν διορθώνε ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με

$$wt(\varepsilon) = 1+\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

Ισοδύναμη Μέθοδος

Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2019_2020
Διαφάνειες 52-57

Αθροίζουμε τη ληφθείσα λέξη 00101 με όλες τις λέξεις του κώδικα:

$$00101 + \{00000, 01101, 10110, 11011\} =$$

$$= \{00101, 01000, 10011, 11110\}$$ → συνομάδα $C + 00101$

ελάχιστο βάρος άρα επιλέγουμε την αντίστοιχη 2η κωδικολέξη 01101

συνομάδα $C + 00101$ = συνομάδα $C + 01000$

$$01000 + C = \{01000, 00101, 11110, 10011\}$$

Αν καταλήγαμε σε 2 υποψήφιες λέξεις με την ίδια απόσταση από η ληφθείσα:
- → Επιλέγουμε τυχαία μια από τις 2 (Πλήρης Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΠΑΜΠ)
- → Δεν επιλέγουμε και ζητείται επανεκπομπή (Ατελής Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΑΑΜΠ)

Πλήθος συνομάδων ενός γραμμικού κώδικα $C(n,k) = 2^{n-k}$

$C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

η 1 συνομάδα είναι η $C + 00000$ (ο ίδιος ο κώδικας)

οι υπόλοιπες $2^{5-2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ συνομάδες προκύπτουν

προσθέτοντας στον κώδικα τις λέξεις

00001, 00010, ..., 00111 (γιατί?)

Βάση Κώδικα: Εύρεση γεννήτορα πίνακα Διαστάσεων $k \times n$

Μορφή Περιορισμένης Κλιμακωτής Διάταξης Γραμμών (ΠΚΔΓ)

$$G_{k \times n} = \left[I_k \,\vdots\, M_{k,n-k} \right]$$

← οι γραμμές αντιστοιχούν σε κωδικολέξεις

π.χ. $C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2019_2020 Διαφάνειες 36-51, 58-64

$k = 2, \quad n = 5$

$$G = \underbrace{\left[I_2 \,\vdots\, M_{2,3} \right]}_{5 \text{ στήλες}} \Big\} \text{ 2 γραμμές}$$

Επιλογή 2 στοιχείων του C για το 'χτίσιμο' του I_2 (2η, 3η κωδ/λέξη)

$$G = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

άρα βάση του C: $\{10110, 01101\}$

Χρήση G:

μήνυμα × G = κωδικολέξη

π.χ. για το μήνυμα 11:

$$11 \times \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = 1 \cdot 10110 + 1 \cdot 01101 =$$

$$= 11 \vdots 011$$

Για την αποκωδικοποίηση:

Κατασκευή πίνακα ισοτιμίας H.

$$H = \begin{bmatrix} M_{k,n-k} \\ \hline I_{n-k} \end{bmatrix}$$

ιδιότητα: $G \cdot H = [0]_{k,n-k}$

Για τον κώδικα C με $G = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

M

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} I_3 \end{matrix}$$

$$G \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2019_2020 Διαφάνειες 43-64

Αποκωδικοποίηση ληφθείσας λέξης C_0:

- πολλαπλασιασμός $C_0 \cdot H$
- Αν $C_0 \cdot H = 0$, τότε C_0 ανήκει στον κώδικα.
- Αν $C_0 \cdot H \neq 0$, τότε το αποτέλεσμα συγκρίνεται με πίνακα ΤΔΑ.

8

Κατασκευή πίνακα Τυπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ)

υπα Σφάλματος ελαχίστου βάρους x_i	Σύνδρομο $x_i H$
10000	110
01000	101
00100	100
00010	010
00001	001
00011 ή 11000	011
10001 ή 01010	111

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εαν υπολογιστεί ένα από αυτά τα σύνδρομα
- στην ΠΑΜΠ επιλέγεται τυχαία ένα από τα υποψήφια πρότυπα σφάλματος
- στην ΑΑΜΠ ζητείται επανεκπομπή άρα στα πρότυπα σφάλματος βάζουμε '-'

π.χ. λήψη 10000

$10000 \times H = 110$

από πίνακα ΤΔΑ πρότυπο σφάλματος $\rightarrow 10000$

άρα σωστή λέξη $10000 + 10000 = \underbrace{00}_{\text{μήνυμα}}000$

λήψη 11111

$$11111 \times H = 11111 \cdot \begin{bmatrix} 110 \\ 101 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} = 100 \rightarrow \text{πρότυπο σφάλματος } 00100$$

άρα σωστή λέξη: $11111 + 00100 = \underbrace{11}_{\text{μήνυμα}}011$

Εύρεση Απόστασης Κώδικα. 10

- $d-1 \le n-k$ (όριο Singleton)
- Αν έχουμε όλες τις λέξεις του κώδικα: ελάχιστο βάρος μη μηδενικό

$$C = \{00000,\ 01101,\ 10110,\ 11011\}$$

$$0 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 4$$

$$d = 3$$

- Από τους G, H:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ελάχιστος αριθμός γραμμών που αθροιζόμενες δίνουν '000' (ελάχιστες γραμμικά εξαρτημένες γραμμές)

2 ίσες γραμμές ? όχι

3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές ? ΝΑΙ

π.χ. η 1η, 3η, 4η αθροιζόμενες δίνουν '000'

Δυικός Κώδικας ενός κώδικα $C:(n,k)$

Συμβολίζεται με $C^{\perp}(n, n-k)$

Ιδιότητα: Για κάθε στοιχείο α_i του C και b_j στοιχείο του $C^{\perp}$

ισχύει $\alpha_i \cdot b_j = 0$

οι στήλες του πίνακα H για τον C δίνουν μια βάση

για τον $C^{\perp}$

$C_{(5,2)} = \{00000,\ 01101,\ 10110,\ 11011\}$

$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ άρα μια βάση $C^{\perp} = \{11100, 10010, 01001\}$

Ιδιότητα ~~καθετότητας~~ ορθογωνιότητας $C, C^{\perp}$

π.χ $(01101) \times (10010) = 0\cdot1+1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0$
$= 0$

$11011 \times 11100 = 1\times1+1\times1+0\times1+1\times0+1\times0 =$
$= 1+1+0+0+0 = 0$

Κατασκευή γεννήτορα πίνακα $C^{\perp}$ από τα στοιχεία της βάσης που υπολογίστηκαν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν έχει μορφή I_3

ακολουθούν γραμμοπράξεις
- πρόσθεση γραμμών
- εναλλαγή γραμμών

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

μορφή ΠΚΔΓ

άρα μια άλλη βάση $C^{\perp} = \{10010, 01001, 00111\}$

$$H_{C^{\perp}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απόσταση ?

$d-1 \leq n-k$

ο $H_{C^{\perp}}$ έχει 2 ίσες γραμμές (1η, 4η ή 2η, 5η)
άρα $d = 2$

ΘΕΜΑ 3	ΓΕ4/1718

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων ελέγχου σφάλματος.
Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ4/1617/Θ4,5, ΓΕ4/1516/Θ6

(α) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={ $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$} κάθε κωδική λέξη του οποίου προκύπτει από το προς κωδικοποίηση μήνυμα m={m1, m2, m3} σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$c_1 = m_1$$
$$c_2 = m_2$$
$$c_3 = m_3$$
$$c_4 = m_1 + m_2$$
$$c_5 = m_2 + m_3$$
$$c_6 = m_1 + m_3$$

Ζητούνται τα εξής:
i). Το πλήθος των κωδικών λέξεων του συγκεκριμένου κώδικα και ο ρυθμός πληροφορίας του.
ii). Ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H του κώδικα
iii) Να υπολογιστεί η απόσταση του κώδικα και να υπολογιστεί το πλήθος των σφαλμάτων που μπορεί να διορθώσει.
iv) Να υπολογιστεί η ΤΔΑ του κώδικα και να αποκωδικοποιηθεί η ληφθείσα λέξη r=[110000]

(β) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={000000, 001110, 010111, 011001, 100101, 101011, 110010, 111100}
Ζητούνται τα εξής:
i). Να υπολογιστεί το πλήθος ψηφίων μηνύματος του συγκεκριμένου κώδικα και το πλήθος των συνομάδων του.
ii). Να υπολογιστούν ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H του κώδικα.
iii) Να υπολογιστεί η απόσταση του κώδικα καθώς και το πλήθος των σφαλμάτων που μπορεί να διορθώσει.
iv) Να βρεθεί η κωδικοποίηση του μηνύματος [110] με τον παραπάνω κώδικα και να αποκωδικοποιηθεί η ληφθείσα λέξη r=[110011] με τη μέθοδο των συνομάδων.

(α) i). Το πλήθος των κωδικών λέξεων εξαρτάται από το μήκος των αρχικών μηνυμάτων και όχι από το μήκος των κωδικοποιημένων μηνυμάτων, και δίνεται από τι σχέση 2^k, όπου $k=3$ το μήκος του μηνύματος πληροφορίας. Επομένως, το πλήθος των κωδικών λέξεων είναι 8.

Ο ρυθμός πληροφορίας κάθε κώδικα δίνεται από τη σχέση

$$R = \frac{k}{n}$$

Δεδομένου ότι $k=3$ και n=6 ο ρυθμός πληροφορίας είναι

$$R = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

.

ii). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα γεννήτορα G και τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, θα πρέπει να σχηματίσουμε τον πίνακα M.
Παρατηρώντας τις μαθηματικές εκφράσεις, ο πίνακας γεννήτορας G διαστάσεων [3 x 6] θα είναι της μορφής [I M]

Ο πίνακας M είναι διαστάσεων [3 x 3] και ο μοναδιαίος I είναι [3 x 3]
Τα στοιχεία του M προκύπτουν εφαρμόζοντας τις δεδομένες σχέσεις XOR που δίνουν τα αντίστοιχα ψηφία c_4, c_5, c_6 συναρτήσει των m_1, m_2, m_3.
Επομένως

$$G = [I_k \quad M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & M \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως $\begin{bmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{I}_{n-k} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

iii).Με βάση το όριο του Singleton για την απόσταση του κώδικα ισχύει $d-1 \leq n-k$, άρα $d \leq 4$

Δεν υπάρχουν 2 κοινές (γραμμικά εξαρτημένες) γραμμές στον πίνακα ισοτιμίας άρα $d>2$
Μπορούμε να βρούμε 3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές στον H π.χ. η 1η, η 4η, η 6η που αθροιζόμενες δίνουν αποτέλεσμα 000 άρα η απόσταση του κώδικα είναι $d=3$.
Ο κώδικας διορθώνει όλα τα σφάλματα $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ =1 bit.

(iv) Ο πίνακας ΤΔΑ για τον κώδικα καταστρώνεται ως εξής:

Οδηγός συνομάδας	**Σύνδρομο**
000000	000
100000	101
010000	110
001000	011
000100	100
000010	010
000001	001
010001 ή 100010	111*

* Στην ΠΑΜΠ διαλέγουμε τυχαία ένα από τα πιθανά πρότυπα σφάλματος.
Στην ΑΑΜΠ αγνοούνται τα πρότυπα σφάλματος και ζητείται επανεκπομπή

Αποκωδικοποίηση **r=[110000]:**
Έχουμε ότι

$$r \cdot H = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1]$$

Το σύνδρομο 011 αντιστοιχεί με βάση τον πίνακα ΤΔΑ στο πρότυπο σφάλματος 001000 οπότε η ληφθείσα λέξη διορθώνεται στην 110000+001000=111000

(β)

i) Εάν συμβολίσουμε με k το πλήθος των ψηφίων μηνύματος των κωδικών λέξεων, δηλ. το μήκος των αρχικών μηνυμάτων, τότε ο κώδικας θα περιέχει συνολικά 2^k κωδικές λέξεις, συνεπώς έχουμε $2^k=8$ οπότε $k=3$.
Επίσης αν επιπλέον συμβολίσουμε ως n το μέγεθος της κάθε κωδικής λέξης, το πλήθος των συνομάδων του κώδικα είναι ίσο με $2^{n-k}=8$.

ii). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα γεννήτορα G επιλέγουμε κατάλληλες λέξεις του κώδικα:
Επομένως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Μ είναι διαστάσεων [3 x 3] και ο μοναδιαίος Ι είναι [3 x 3]

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως [M I]

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii). Με βάση το όριο του Singleton για την απόσταση του κώδικα ισχύει $d-1 \leq n-k$, άρα $d \leq 4$

Δεν υπάρχουν 2 κοινές (γραμμικά εξαρτημένες) γραμμές στον πίνακα ισοτιμίας άρα $d>2$

Μπορούμε να βρούμε 3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές στον H π.χ. η 1η, η 2η, η 5η που αθροιζόμενες δίνουν αποτέλεσμα 000 άρα η απόσταση του κώδικα είναι $d=3$.

Ο κώδικας διορθώνει όλα τα σφάλματα $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1$ bit.

iv)
Η κωδικοποίηση του μηνύματος γίνεται ως εξής:

$$C = m \cdot G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αποκωδικοποίηση **r=[110011]:**
Προσθέτουμε τη ληφθείσα λέξη σε όλες τις λέξεις του κώδικα και σχηματίζουμε την αντίστοιχη συνομάδα:

C+**110011**=**110011**+{000000,
001110,010111,011001,100101,101011,110010,111100}=
={110011, 110001, 100100,101010,010110,011000,000001,001111}
Η λέξη ελαχίστου βάρους είναι η 000001 που αντιστοιχεί και στο ζητούμενο πρότυπο σφάλματος, οπότε η σωστή λέξη είναι
110011+000001=110010

ΘΕΜΑ 6 ΓΕ4/1617

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*
Σχετικές ασκήσεις*: Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3/ΓΕ5/2010-11*

Δίδεται ο κώδικας C={ $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$} κάθε κωδική λέξη του οποίου προκύπτει από το προς κωδικοποίηση μήνυμα u={u1, u2, u3, u4} σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$c_1=u_1+u_2+u_4$

$c_2=u_1+u_3+u_4$

$c_3=u_2+u_3+u_4$

$c_4=u_1$

$c_5=u_2$

$c_6=u_3$

$c_7=u_4$

Ζητείται

α). Το πλήθος των κωδικών λέξεων του συγκεκριμένου κώδικα.
β). Ο ρυθμός πληροφορίας του κώδικα.
γ). Ο γεννήτορας πίνακας **G** και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας **H** του κώδικα.
δ). Να βρεθεί η κωδικοποίηση του μηνύματος [1001] σύμφωνα με τον παραπάνω κώδικα.
ε). Υποθέστε ότι ο συστηματικός κώδικας εκπέμπεται μέσα από κανάλι και ο δέκτης λαμβάνει τη λέξη **r=[1100001]**, να ελεγχθεί η ύπαρξη σφάλματος στη ληφθείσα λέξη.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να υπολογίσετε πρώτα τα βασικά μεγέθη του κώδικα σύμφωνα με τη θεωρία. Επίσης να σχηματισθεί ο γεννήτορας πίνακας σύμφωνα με τη θεωρία και να υπολογισθεί ο πίνακας ισοτιμίας. Επίσης εφαρμόζοντας τις αρχές της κωδικοποίησης να υπολογισθούν τα ερωτήματα (δ) και (ε).*

α). Το πλήθος των κωδικών λέξεων εξαρτάται από το μήκος των αρχικών μηνυμάτων και όχι από το μήκος των κωδικοποιημένων μηνυμάτων, και δίνεται από τι σχέση 2^k , όπου $k=4$ το μήκος του μηνύματος πληροφορίας. Επομένως, το πλήθος των κωδικών λέξεων είναι 16.

β). Ο ρυθμός πληροφορίας κάθε κώδικα δίνεται από τη σχέση

$$R=\frac{k}{n}$$

Δεδομένου ότι $k=4$ και $n=7$ ο ρυθμός πληροφορίας είναι

$$R=\frac{k}{n}=\frac{4}{7}=0.57$$

γ). Για να υπολογίσω τον πίνακα γεννήτορα G και τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, θα πρέπει να σχηματίσω τον πίνακα M.

Παρατηρώντας τις μαθηματικές εκφράσεις, ο πίνακας γεννήτορας G διαστάσεων [4 x 7] θα είναι της μορφής [M I] και όχι όπως συνήθως [I M] καθότι τα ψηφία πληροφορίας καταλαμβάνουν τις 4 τελευταίες θέσεις της κάθε κωδικής λέξης.

Ο πίνακας M είναι διαστάσεων [4 x 3] και ο μοναδιαίος I είναι [4 x 4]

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Επομένως

$$G=[M \quad I]=\begin{bmatrix} & 1 & 0 & 0 & 0\\ & 0 & 1 & 0 & 0\\ M & 0 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως [I M] και όχι ως [M I]

$$H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

δ) Η κωδικοποίηση του μηνύματος δίνεται από

$$C = u \cdot G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ε). Δεδομένου ότι λήφθηκε το κωδικοποιημένο μήνυμα r=[1100001], για την αποκωδικοποίηση θα έχουμε

$$y = r.H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως υπάρχει σφάλμα.

ΕΞ2016Α

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γραμμικός κώδικας C με πίνακα ελέγχου ισοτιμίας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

α). Ο γεννήτορας πίνακας G.

β). i. Η διάσταση και η απόσταση του κώδικα, δηλαδή οι παράμετροι (7, k, d), καθώς και

ii. Το πλήθος των διαφορετικών συνομάδων του κώδικα.

γ). Να δείξτε ότι η λέξη $s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ δεν είναι κωδική λέξη του γραμμικού κώδικα C

δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

ε) Το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$, η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη $z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

α) Δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας Η είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

β). i. Η διάσταση του πίνακα είναι k=4 και η απόστασή του μπορεί να *προσδιορισθεί με τη βοήθεια του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, υπολογίζοντας τον ελάχιστο αριθμό γραμμών του πίνακα των οποίων το άθροισμα είναι 0.*
Οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο αυτό στις γραμμές $1^η$,$4^η$,$6^η$ παρατηρούμε ότι το άθροισμα είναι μηδέν επομένως η ταυτότητα του κώδικα είναι (7,4,3)
ii. Σύμφωνα με το βιβλίο «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 142, το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, διάστασης k=4 και μήκους n=7 ισούται με $2^{7-4} = 8$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη s στον κώδικα C θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.
Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.
Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$\begin{aligned}
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot H &= [0 \quad 0 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 1] \\
[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 1]
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$

$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζετε και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

Κώδικας Hamming:

_Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2019_2020 Διαφάνειες 80-86_

Χαρακτηριστικά:

→ Μήκος της μορφής $n = 2^r - 1 \quad r \geq 2$

→ Πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H με όλες τις μη μηδενικές λέξεις μήκους r

→ Διάσταση $k = n - r = 2^r - 1 - r$

→ Απόσταση $d = 3$

→ Ικανότητα διόρθωσης 1 σφάλματος $\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1 \right)$

→ Στην ΤΔΑ ο πίνακας συνδρόμων περιλαμβάνει όλες τις γραμμές του H [όλες τις δυνατές λέξεις μήκους r]

Όριο Hamming.

Αν έχουμε κώδικα C με πλήθος κωδικών λέξεων $|C|$ μήκος κωδικολέξης n και απόσταση $d=2t+1$ ή $d=2t+2$

Τότε ισχύει ότι $$|C| \cdot \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{t}\right] \leq 2^n$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Τέλειοι κώδικες

Αν $d=2t+1$ και ισχύει η ανωτέρω σχέση με το σύμβολο της ισότητας, ο κώδικας είναι <u>Τέλειος</u>

Παράδειγμα κώδικα Hamming

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

← όλες οι δυνατές μη μηδενικές λέξεις 3 bit

$n = 7$

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$k = 4$

d-1≤n-k (όριο Singleton)

$d = 3$ (ιδιότητα Hamming)

Πλήθος κωδικολέξεων

$$|C| = 2^k = 2^4$$

Υπολογισμός ορίου Hamming $\quad d = 2\cdot 1 + 1$

$t = 1$

$$|C| \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{t}\right] =$$

$$= 2^4 \cdot \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1}\right] = 2^4 \cdot \left[\frac{7!}{0!\,7!} + \frac{7!}{1!\cdot 6!}\right] =$$

$$= 2^4 \left[1 + 7\right] = 2^4 \cdot 8 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7 = 2^n.$$

∴ Άρα, <u>τέλειος κώδικας</u>

Πρόσθετα παραδείγματα

ΘΕΜΑ 2/ΓΕ5/2012-13

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με έννοιες και αλγόριθμους που εφαρμόζονται σε γραμμικούς κώδικες ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις: *Θ3/ΓΕ5/2011-12, Θ4/ΓΕ5/2010-11, Θ4/ΓΕ5/2009-10, Θ5/ΕΞ2009Α και Θ5/ΕΞ2010Β*

Δίνεται κώδικας Hamming μήκους 7 με πίνακα ισοτιμίας τον ακόλουθο:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Να προσδιοριστούν τα α_1, α_2, α_3,

(β). Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

(γ). Δείξτε ότι η λέξη

$s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

δεν είναι κωδική λέξη του κώδικα.

(δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

(ε).Να βρεθούν το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη

$$z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

α). Επειδή ο κώδικας είναι Hamming μήκους n=7, ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H πρέπει να απαρτίζεται από όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3 (βλ. τον ορισμό κώδικα Hamming, σελ. 151 βιβλίου, Ορισμός 4.6) αφού ισχύει

$$n = 2^r - 1 = 7$$

Επομένως η απόστασή του είναι d=3 και η διάστασή του είναι k=4.

Α! τρόπος.

Με απλή παρατήρηση των γραμμών του H βλέπουμε ότι οι παραμετρικές γραμμές αντιστοιχούν στις λέξεις 101 και 110 οπότε, λόγω και της θέσης των παραμέτρων α_1, α_2, α_3 στις παραμετρικές λέξεις θα έχουμε:

$\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$.

Β! τρόπος

Για να υπολογίσω τους άγνωστους συντελεστές του πίνακα θα χρησιμοποιήσω τον κανόνα υπολογισμού της απόστασης του με τη χρήση *του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό γραμμών του πίνακα των οποίων το άθροισμα είναι 0.*

Βήμα 1^o

Χρησιμοποιώ τις γραμμές 3^η, 4^η, 7^η

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = 1$$

Επομένως ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2^o

Χρησιμοποιώ τις γραμμές 1^η, 2^η, 3^η

$$[1 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2] + [0 \quad 1 \quad 1] + [\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad 0] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$[1 + 0 + 1 \quad \alpha_1 + 1 + \mathbf{1} \quad \alpha_2 + 1 + 0] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1}$$

Τελικά ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β). Όπως γνωρίζω δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας H είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη **s** στον κώδικα, θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.

Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.

Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$
\begin{aligned}
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot H &= [0 \quad 0 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 1] \\
[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 1]
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

Παρατηρούμε ότι για κώδικες Hamming οι Τυπικές Διατάξεις Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ "συμπίπτουν"

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$

$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζεται και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

<u>ΘΕΜΑ 5</u> ΕΞ2012Β

Δίνονται οι συστηματικοί γραμμικοί κώδικες C1={00000, 10010, 01101, 11111} και C2={000000, 100101, 011010, 111111} και C3= {0000000, 1001011, 0110110, 1111101}. Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Ο ρυθμός πληροφορίας του κάθε κώδικα,
2. Μια βάση σε μορφή ΠΚΔΓ,
3. Τη διάσταση και την απόσταση καθενός από τους κώδικες C1, C2 και C3.
4. Ο αριθμός των σφαλμάτων που ανιχνεύει και διορθώνει καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.
5. Δείξτε από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν ανιχνεύει και από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν διορθώνει σωστά καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.

<u>Απάντηση</u>

1. Αφού όλοι οι κώδικες έχουν 4 κωδικές λέξεις, δηλαδή τα διαφορετικά μηνύματα είναι 4, αρκούν 2 bits για την παράστασή τους. Επομένως, ο ρυθμός πληροφορίας για τον κώδικα C1 είναι 2/5, για τον κώδικα C2 είναι 2/6 και για τον κώδικα C3 είναι 2/7.
2. Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε τις βάσεις των δεδομένων κωδίκων: για τον C1 η βάση είναι {10010, 01101}, για τον C2 {100101, 011010} και για τον C3 {1001011, 0110110}
3. Η διάσταση όλων των κωδίκων είναι 2 και οι αποστάσεις τους 2, 3 και 4, αντίστοιχα διότι είναι οι λέξεις με το ελάχιστο βάρος.
4. Ο κώδικας C1 ανιχνεύει 1 και δεν διορθώνει κανένα σφάλμα, ο κώδικας C2 ανιχνεύει 2 και διορθώνει 1 και C3 ανιχνεύει 3 και διορθώνει 1 σφάλματα.
5. Ο κώδικας C1 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘10010’ γιατί το βάρος του συμπίπτει με την απόσταση και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘10000’ γιατί το βάρος του είναι μικρότερο της απόστασης d-1/2. Ομοίως, ο κώδικας C2 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘100101’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘100001’, και ο C3 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘1001011’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘1000001’.

ΘΕΜΑ 4

ΓΕ5/1314

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις: *Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3-4/ΓΕ5/2008-09, Θ3/ΓΕ5/2010-11, Θ*

Θεωρείστε κωδικοποιητή γραμμικού κώδικα *μπλοκ* ελέγχου ισοτιμίας, C_1, τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ με επταψήφιες κωδικές λέξεις $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, οι οποίες ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

a) $x_1=u_1$, b) $x_2=u_2$, c) $x_3=u_3$, d) $x_4=u_4$,

e) $x_5=u_1\oplus u_2\oplus u_4$, f) $x_6=u_1\oplus u_2\oplus u_3$ και g) $x_7=u_2\oplus u_3\oplus u_4$.

Ο κωδικοποιητής χρησιμοποιείται για κωδικοποίηση και μετάδοση δυαδικής πληροφορίας.

Ζητείται:

(α) Να ελέγξετε κατά πόσο ότι ο γραμμικός κώδικας ελέγχου ισοτιμίας είναι συστηματικός.

(β) Να βρείτε τον Γεννήτορα και έναν Πίνακα Ελέγχου Ισοτιμίας του κώδικα.

(γ) Να χαρακτηρίσετε τη δυνατότητα «ανίχνευσης» & «διόρθωσης» λαθών του κώδικα. Επίσης, σχολιάσετε αν ο κώδικας είναι «τέλειος».

(δ) Να σχηματίσετε πίνακες Τυπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ.

(ε) Να βρείτε για την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης ΠΑΜΠ, πόσοι συνδυασμοί των 1, 2, και 3 σφαλμάτων αποκωδικοποιούνται σωστά.

(στ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος ε < ½ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου.

(α). Επειδή από τις σχέσεις των τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ με τις επταψήφιες κωδικές λέξεις $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, έχουμε ότι: 1) $x_1=u_1$, 2) $x_2=u_2$, 3) $x_3=u_3$, 4) $x_4=u_4$, καθώς και ότι 5) όλα τα ψηφία, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, των κωδικών λέξεων είναι Γραμμικοί Συνδυασμοί των ψηφίων u_1,u_2,u_3,u_4 της πληροφορίας, ο κώδικας είναι Συστηματικός Κώδικας Ελέγχου Ισοτιμίας.

β) Από τις παραπάνω σχέσεις ψηφίων πληροφορίας με ψηφία κωδικών λέξεων, έχουμε ότι ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H είναι:

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}, \qquad H=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

γ) Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H εμπεριέχει ως σειρές όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3. Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6 (βλ., σελ. 151 του βιβλίου «Θεωρίας της Πληροφορίας & Κωδικοποίησης) ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming. Επομένως, ο κώδικας είναι «Τέλειος» και έχει «απόσταση» d=3 (βλ. Άσκηση αυτό-αξιολόγησης 4.15). Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 (βλ. σελ. 4.2) είναι σε θέση να ανιχνεύει όλα τα «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 2, καθώς και να διορθώνει κάθε μεμονωμένο σφάλμα ή «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1.

δ) Αφού ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming, όλα τα δυνατά «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1, θα περιέχονται ως οδηγοί των συνομάδων. Τα αντίστοιχα σύνδρομα είναι η γραμμές του H, όπως πολλαπλασιάζονται με το μοναδικό 1 του οδηγού. Επειδή, οι γραμμές του H (σύνδρομα) είναι όλες διαφορετικές, οι τυπικές διατάξεις αποκωδικοποίησης του κώδικα για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ συμπίπτουν και είναι:

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				**ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ**						
0	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**		**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**		**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**		**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

ε) Σύμφωνα με τη τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, αποκωδικοποιούνται χωρίς σφάλμα, ή ο κώδικας έχει τη δυνατότητα διόρθωσης

a) όλων (επτά) των διατάξεων μεμονωμένων σφαλμάτων μετάδοσης,
b) καμίας διάταξης διπλού σφάλματος,
c) καμίας διάταξης τριπλού σφάλματος.

στ) Σύμφωνα με την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, η πιθανότητα σφάλματος, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος $\varepsilon < \frac{1}{2}$ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου, είναι:

$$\mathbf{P_I}(\varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon)^7 - 7\varepsilon(1-\varepsilon)^6$$

Όπου ο όρος $(1-\varepsilon)^7$ προκύπτει από την διάταξη μηδενικού (0000000) λάθους, και ο όρος $7\varepsilon(1-\varepsilon)^6$ από τις 7 πλήρως διορθώσιμες διατάξεις μεμονωμένου σφάλματος που υιοθετούνται στη ΤΔΑ για ΠΑΜΠ.

Ασκήσεις Ψηφιακών Επικοινωνιών και Δικτύων Η/Υ

ΘΕΜΑ 1 ΓΕ2/1819

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνοτήτων για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων. Επίσης, μόνο στο ερώτημα (ε) απαιτείται χρήση OCTAVE MATLAB*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/2010-11/Θ6, ΓΕ1/2011-12/Θ5,6, ΓΕ1/2012-13/Θ1,3

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *X(f)* του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω μοναδιαίων βηματικών σημάτων: $x(t)=u(t+4)-u(t+2)+u(t-2)-u(t-4)$

(β) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους *Y(f)* του σήματος με χρονική έκφραση

$$y(t)=8\operatorname{sinc}(8t)-4\operatorname{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$$

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *Z(f)* του σήματος με χρονική έκφραση

$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right]$. Επίσης να διερευνηθεί η περιοδικότητα του σήματος και να υπολογιστεί η περίοδός του (αν υπάρχει).

(δ) Να προσδιοριστούν και να σχεδιαστούν πρόχειρα τα φάσματα που προκύπτουν από τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των φασμάτων που υπολογίστηκαν στα ερωτήματα (β), (γ):

(i) $W(f)=Y(f)Z(f)$

(ii) $V(f)=Y(f)*Y(f)$ (το σύμβολο * αντιστοιχεί στην πράξη της συνέλιξης)

(α)
Έχουμε διαδοχικά:

$$x(t)=u(t+4)-u(t+2)+u(t-2)-u(t-4)=rect\left(\frac{t+3}{2}\right)+rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

$$rect(t)\xleftrightarrow{F}\sin c(f)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect\left(\frac{t}{2}\right)\xleftrightarrow{F}2\text{sinc}(2f)\Leftrightarrow\begin{cases}rect\left(\frac{t+3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}e^{j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)\\ rect\left(\frac{t-3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}e^{-j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(f)=e^{j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)+e^{-j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)=2\text{sinc}(2f)\left[e^{j2\pi f3}+e^{-j2\pi f3}\right]=2\text{sinc}(2f)2\cos(6\pi f)$$

(β)

Εφόσον στο προηγούμενο ερώτημα προέκυψε ότι $rect\left(\frac{t+3}{2}\right)+rect\left(\frac{t-3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}2\text{sinc}(2f)2\cos(6\pi f)$

με βάση την ιδιότητα του δυϊσμού θα ισχύει:

$$4\text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{-f+3}{2}\right)+rect\left(\frac{-f-3}{2}\right)=rect\left(\frac{f-3}{2}\right)+rect\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

Εναλλακτικά,

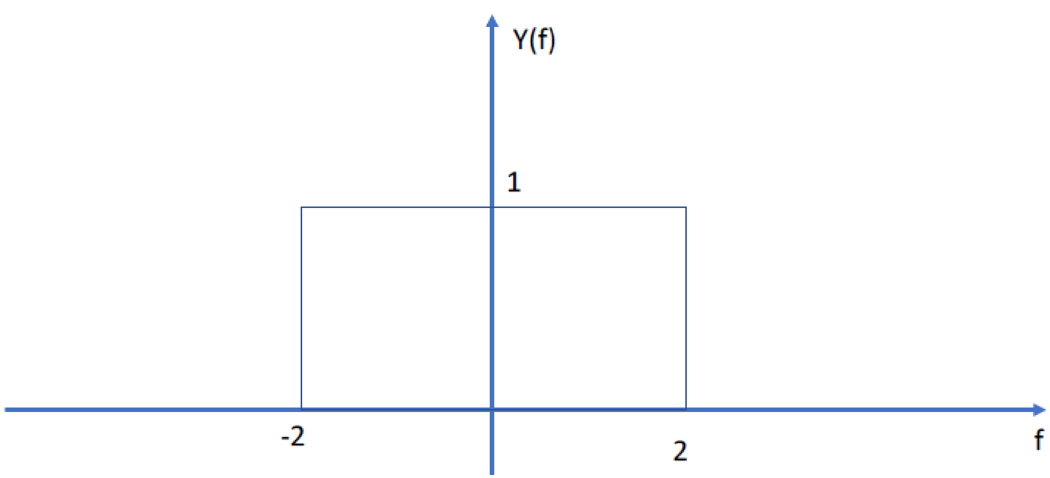
$$4\text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)=2\text{sinc}(2t)2\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{f}{2}\right)*\left[\delta(f-3)+\delta(f+3)\right]=$$

$$=rect\left(\frac{f-3}{2}\right)+rect\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$y(t)=8\text{sinc}(8t)-4\text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{f}{8}\right)-rect\left(\frac{f-3}{2}\right)-rect\left(\frac{f+3}{2}\right)=$$

$$=rect\left(\frac{f}{4}\right)$$



(γ)

Εφόσον ισχύει $\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$,

με την ιδιότητα του δυϊσμού θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\left[\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)\right] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi t_0 f)$$

Συνεπώς

$$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right] \xleftrightarrow{F} \cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$$

Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Εναλλακτικά

$$\delta\left(t-\frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f/8}$$

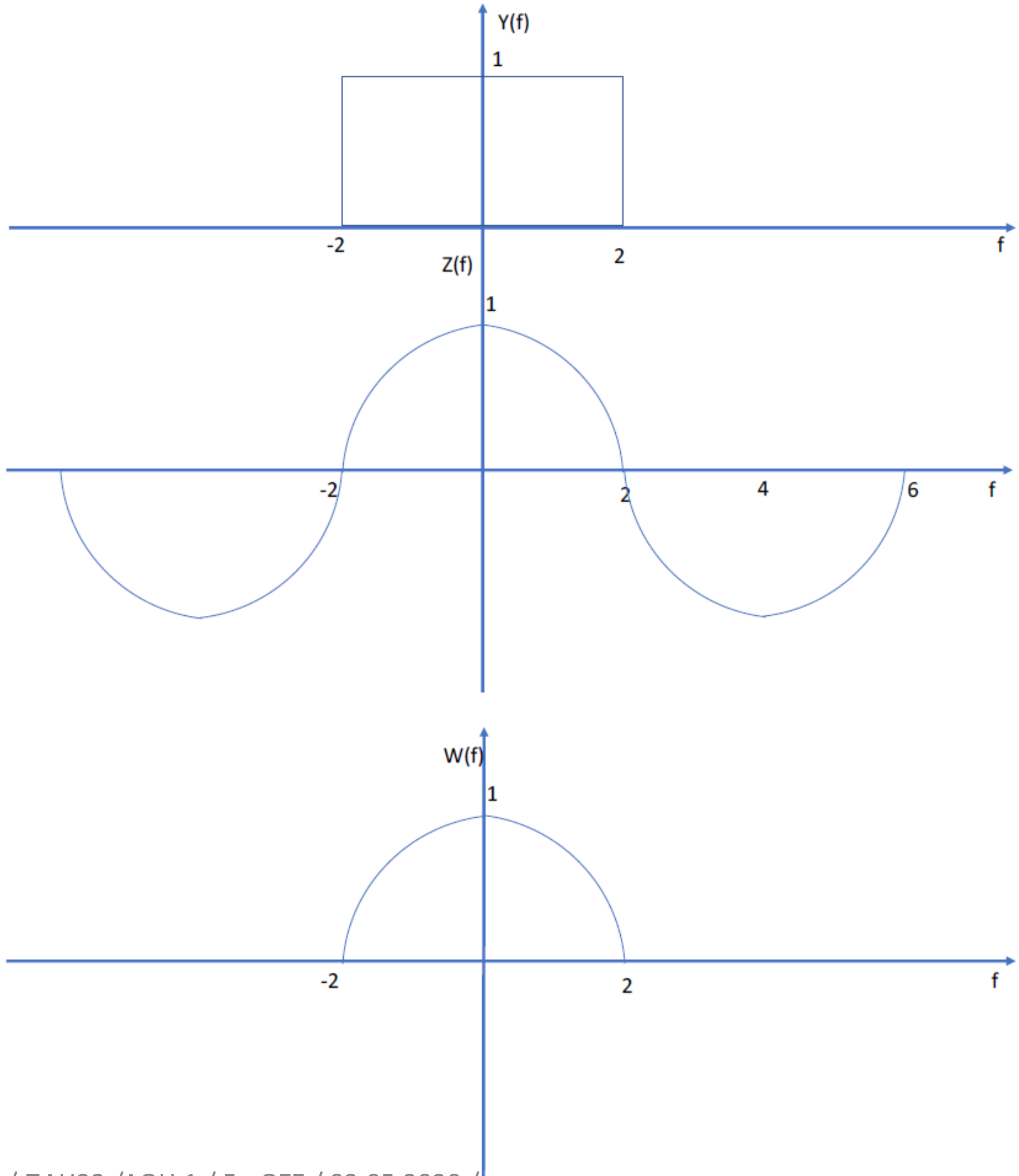
$$\delta\left(t+\frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f/8}$$

Και με χρήση του κανόνα του Euler

$$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi f/8}+e^{j2\pi f/8}\right]=\cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$$

(δ)

(i) $W(f) = Y(f)Z(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right)\cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$



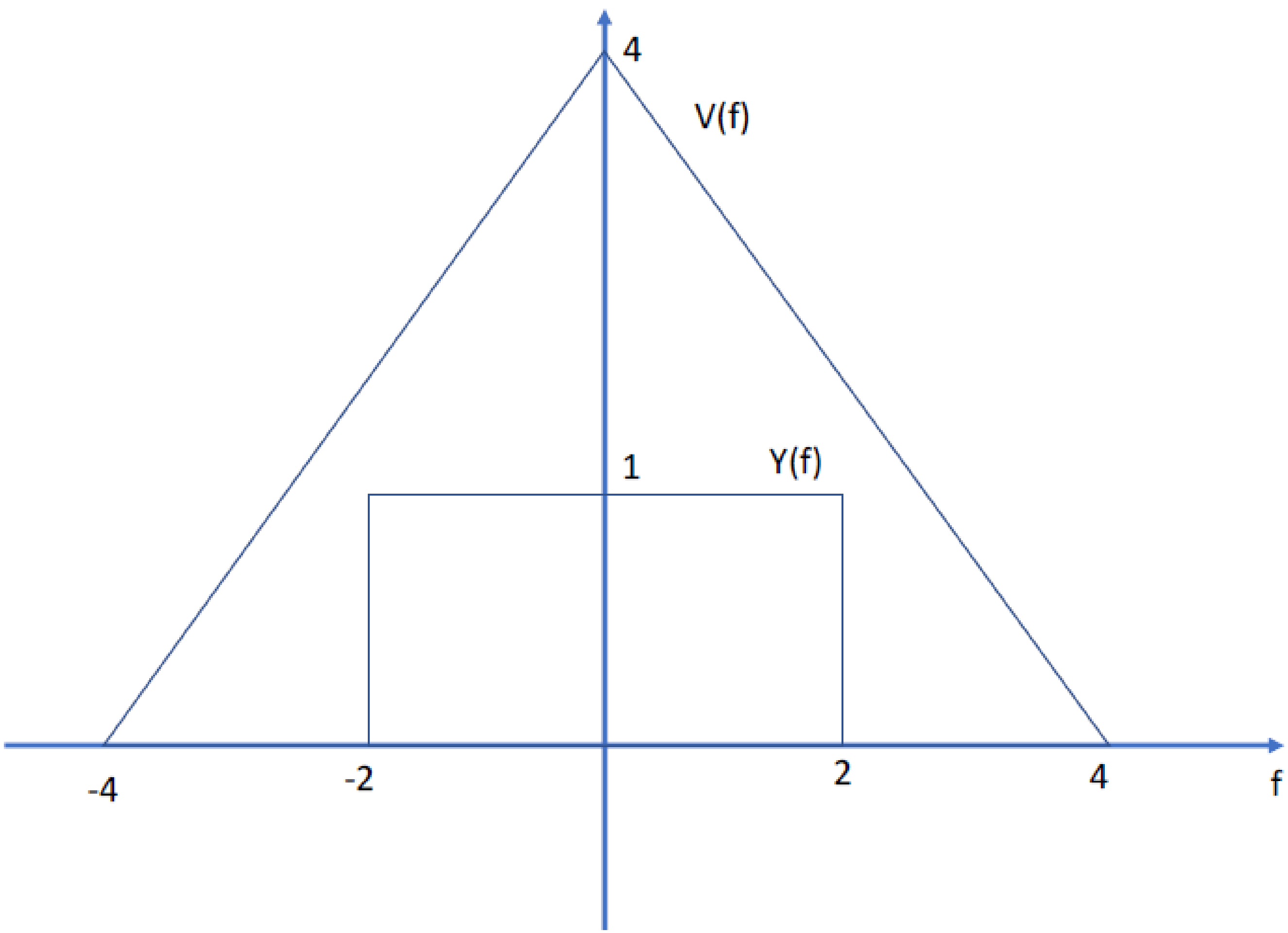
(ii) $V(f) = Y(f) * Y(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right) * rect\left(\frac{f}{4}\right)$

Στο πεδίο του χρόνου έχουμε:

$$v(t) = 4\sin c(4t) \cdot 4\sin c(4t) = 16\sin c^2(4t)$$

Επιστρέφοντας στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε:

$$v(t) = 16\sin c^2(4t) \xleftrightarrow{F} 16\frac{1}{4}tri\left(\frac{f}{4}\right) = 4tri\left(\frac{f}{4}\right)$$



ΘΕΜΑ 6

***Στόχος της άσκησης** είναι η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας και της δυνατότητας δειγματοληψίας αναλογικών σημάτων (κριτήριο Nyquist) καθώς και με τις διαμορφώσεις πλάτους και γωνίας.*

***Σχετικές ασκήσεις:** ΓΕ3/1617/Θ1, ΓΕ3/1516/Θ1, ΕΞ2018Α/Θ3*

Υποθέτουμε το σήμα *g(t)* με φάσμα πλάτους

$$G(f) = 1 + \cos\left(2\pi \frac{1}{800} f\right)$$

(α) Να υπολογισθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του *g(t)* (αν υπάρχουν)

(β) Να υπολογιστεί η χρονική έκφραση του σήματος *g(t)*

(γ) Το *g(t)* διέρχεται από βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς μοναδιαίου πλάτους και με συχνότητα αποκοπής 400Hz και προκύπτει το σήμα εξόδου *s(t)*. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου *H(f)*, η κρουστική του απόκριση *h(t)* καθώς και να δοθεί μια έκφραση για το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου, *S(f)*.

(δ) Το σήμα *s(t)* διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 500KHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 3\pi$ (rad/sec)/Volt. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου ως συνάρτηση του *s(t)* και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του.

(ε) Το σήμα *s(t)* δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας f_δ πολλαπλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και στη συνέχεια διέρχεται από ζωνοπερατό φίλτρο με ζώνη διέλευσης [400Hz, 2800Hz] (και την κατοπτρική της [-2800Hz, -400Hz] στον αρνητικό ημιάξονα των συχνοτήτων). Το σήμα *r(t)* στην έξοδο του φίλτρου ταυτίζεται με σήμα που λαμβάνεται από τη διαμόρφωση DSB συνημιτονικού φέροντος μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2400Hz από το σήμα *s(t)*. Να υπολογίσετε το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου και τη συχνότητα δειγματοληψίας f_δ.

(α) Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Επίσης το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης, οπότε δεν εφαρμόζεται το κριτήριο Nyquist.

(β) $G(f) = 1 + \cos\left(2\pi \frac{1}{800} f\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} \delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta\left(t - \frac{1}{800}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{800}\right)\right] = g(t)$

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του φίλτρου είναι :

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{800}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} 800\sin c(800t) = h(t)$$

Το φάσμα πλάτους και η χρονική έκφραση του σήματος εξόδου είναι:

$$S(f) = H(f)\cdot G(f) = rect\left(\frac{f}{800}\right)\cdot\left[1+\cos\left(2\pi\frac{1}{800}f\right)\right] \xleftrightarrow{F^{-1}}$$

$$\xleftrightarrow{F^{-1}} 800\sin c(800t) * \left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{800}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{800}\right)\right]\right\} =$$

$$= 800\sin c(800t) + \frac{1}{2}800\sin c\left[800\left(t-\frac{1}{800}\right)\right] + \frac{1}{2}800\sin c\left[800\left(t+\frac{1}{800}\right)\right] = s(t)$$

(δ)

$$x_{FM}(t) = \cos\left(2\pi 500000t + 3\pi \int_{-\infty}^{t} s(\lambda)\,d\lambda\right)$$

Λόγος απόκλισης:

$$D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_x} = \frac{\frac{k_f}{2\pi}\max\left(\left|s(t)\right|\right)}{f_x} = \frac{\frac{3\pi}{2\pi}800}{400} = 3$$

$$W = 2(D+1)f_x = 2(3+1)400Hz = 3200Hz$$

(ε) Το σήμα s(t) δειγματίζεται με συχνότητα δειγματοληψίας f_δ πολλαπλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist που ισούται με $f_{s,min}=2 \times 400Hz=800Hz$

και στη συνέχεια διέρχεται από ζωνοπερατό φίλτρο με ζώνη διέλευσης [400Hz, 2800Hz] (και την κατοπτρική της [-2800Hz, -400Hz] στον αρνητικό ημιάξονα των συχνοτήτων).

Προκειμένου να προκύψει σήμα r(t) στην έξοδο του φίλτρου που θα ταυτίζεται με σήμα που λαμβάνεται από τη DSB διαμόρφωση συνημιτονικού φέροντος μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2400Hz από το σήμα s(t), θα πρέπει στο διάστημα [400Hz, 2800Hz] να υπάρχει ένα μόνο αντίγραφο του σήματος s(t) και αυτό συμβαίνει όταν $f_\delta=3 \times f_{s,min} =3 \times 800 =2400Hz$.

Επίσης, το φάσμα του DSB σήματος θα έχει τη μορφή

$$S_{DSB}(f)=\frac{1}{2}\left\{S(f-2400)+S(f+2400)\right\}$$

κι επειδή το δειγματισμένο σήμα στην είσοδο του φίλτρου έχει τη μορφή

$$S_\delta(f)=f_\delta\sum_{m=-\infty}^{+\infty}S(f-mf_\delta)$$

θα πρέπει το πλάτος A του φίλτρου να έχει τέτοια τιμή ώστε

$$\frac{1}{2}=\mathrm{A}f_\delta \Leftrightarrow \mathrm{A}=\frac{1}{4800}$$

ΘΕΜΑ 1 ΓΕ5/1617

Στόχοι της άσκησης Η εξοικείωση με την λειτουργιά του πρωτοκόλλου Ethernet και της απόδοσης του

Σχετικές Ασκήσεις: *ΓΕ4/1415/Θ6, ΓΕ5/1526/Θ2*

Υποθέστε τέσσερις κόμβους Α, Β, Γ και Δ συνδεδεμένους μέσω ενός hub με καλωδίωση Ethernet 10 Mbps. Οι αποστάσεις μεταξύ του hub και των τεσσάρων κόμβων είναι 300m, 400m, 500m και 700m αντιστοίχως. Εφαρμόζεται το πρωτόκολλο CSMA/CD. Η ταχύτητα διάδοσης του σήματος είναι $2{\cdot}10^8$ m/s. (α) ποιο είναι το ελάχιστο απαιτούμενο μέγεθος πλαισίου; Ποιο το μέγιστο; (β) εάν όλα τα πλαίσια έχουν μέγεθος 1500 bits να προσδιορίσετε την απόδοση του συγκεκριμένου Ethernet δικτύου.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u>

Να δείτε τη θεωρία που σχετίζεται με τη μέγιστη απόσταση μεταξύ τερματικών κόμβων για την αποφυγή μη ανιχνεύσιμων συγκρούσεων στο δίαυλο και το σχετικο υπολογισμό της απόδοσης του CSMA/CD.

Απάντηση:

(α) το ελάχιστο απαιτούμενο μέγεθος πλαισίου απορρέει από την ικανότητα του κόμβου να ανιχνεύσει μία σύγκρουση πριν την ολοκλήρωση της μετάδοσης του τρέχοντος πλαισίου. Η οριακή περίπτωση ενδιαφέροντος αναφέρεται σε ταυτόχρονη μετάδοση από την άλλη άκρη του μέσου. Απλοί υπολογισμοί μας υποδεικνύουν ότι το L_{min} δίνεται από την σχέση:

$$L_{\min} = 2 \cdot T_{\text{prop}} \cdot R = 2 \cdot \frac{(500+700)m}{2 \cdot 10^8 m/s} \cdot 10 \cdot 10^6 bps = 120 bits$$

Δεν υπάρχει μέγιστο απαιτούμενο μέγεθος πλαισίου.

(β) η απόδοση του συγκεκριμένου δικτύου προσδιορίζεται βάσει της παρακάτω σχέσης:

$$e = \frac{1}{1 + 5 \cdot \frac{T_{prop}}{T_{trans}}} = 0.83$$