

ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

Εισαγωγή στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

2^η ΟΣΣ – Τμήμα ΗΛΕ.41– 12/12/2020

Νίκος Δημητρίου

Σημείωση: Οι διαφάνειες αυτές βασίζονται στις παρουσιάσεις της 2^{ης} ΟΣΣ που έχουν αναρτηθεί στο study.eap.gr και έχουν εμπλουτιστεί με περισσότερα παραδείγματα

Στόχοι Μελέτης

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
 - Παροχή Υπηρεσιών προς τους χρήστες
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
 - Τύποι Σημάτων
 - Χαρακτηριστικά Συστημάτων
 - Πράξεις σημάτων
 - Λειτουργία συστημάτων

Σήματα $\left\{ \begin{array}{l} \text{Πεδίο χρόνου} \\ \text{Πεδίο συχνότητων} \end{array} \right\}$ Συναρτήσεις 1 μεταβλητής
(t ή f)

Διαστήματα τιμών $\left\{ \begin{array}{l} \text{Διακριτά} \\ \text{συνεχή} \end{array} \right\}$ Φυσικοί, Ακέραιοι
Ρητοί, Άρρητοι
Πραγματικοί

Αναλογικά - Ψηφιακά σήματα
Συνέχους χρόνου Διακριτού χρόνου



Περιοδικά \rightarrow Τριγωνομετρικά

Μη περιοδικά \rightarrow Rect, tri, sinc, δ

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Κριτήρια} \\ \text{περιοδικότητας} \\ \text{Αθροίσματος σήματων} \end{array} \right\}$

\Rightarrow OCTAVE MATLAB (σχέδιαση σήματων / φασμάτων)
+ απλές πράξεις

Μετάβαση μεταξύ πεδίων χρόνου - συχνότητας: ΜΕ FOURIER

Ιδιότητες - Πίνακες

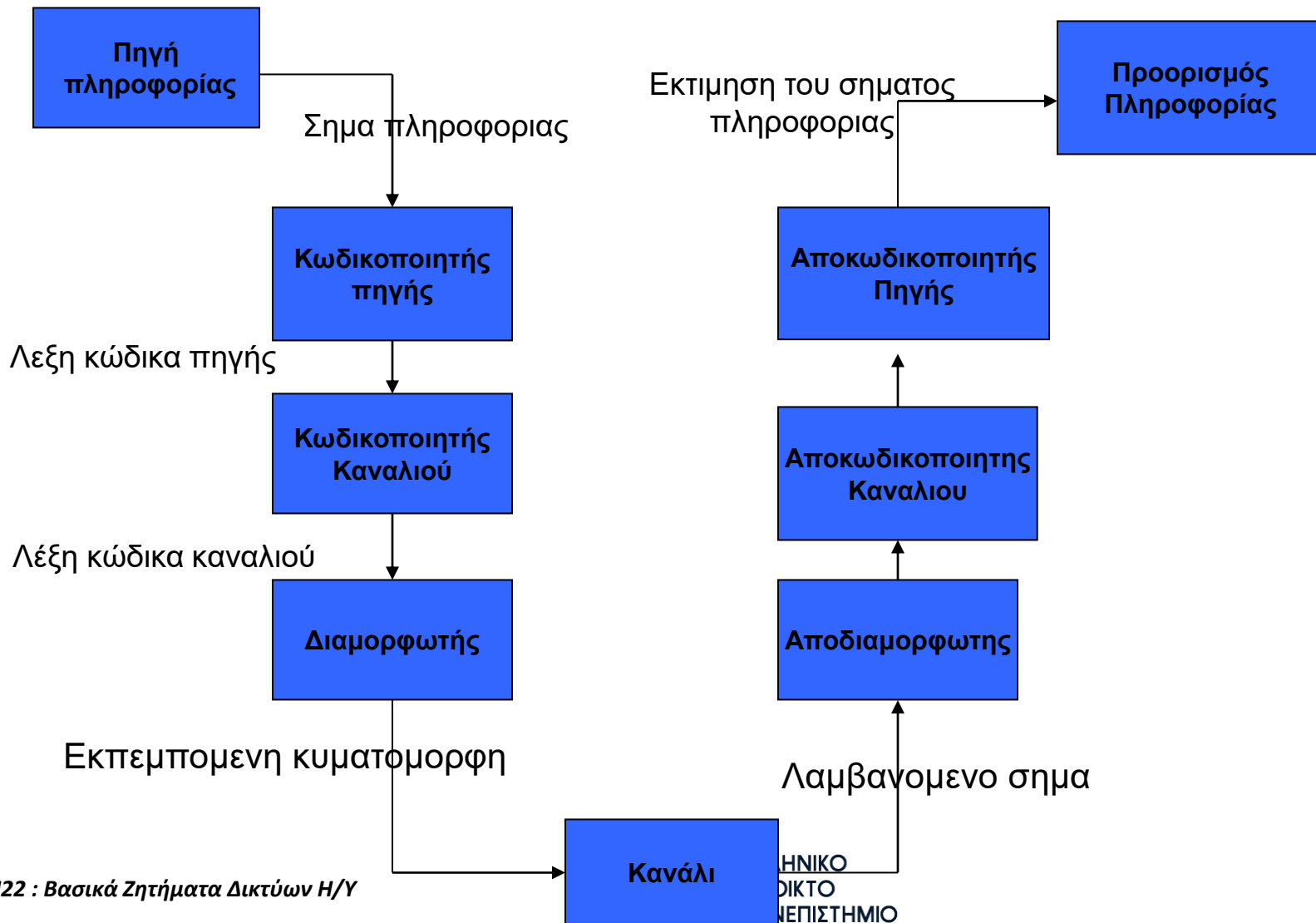
Συστήματα : (Γραμμικά χρονικά αλλοιωτή) μεταβολή
σήματος εισόδου σε ένα άλλο σήμα εξόδου

Πράξη συνέλιξης

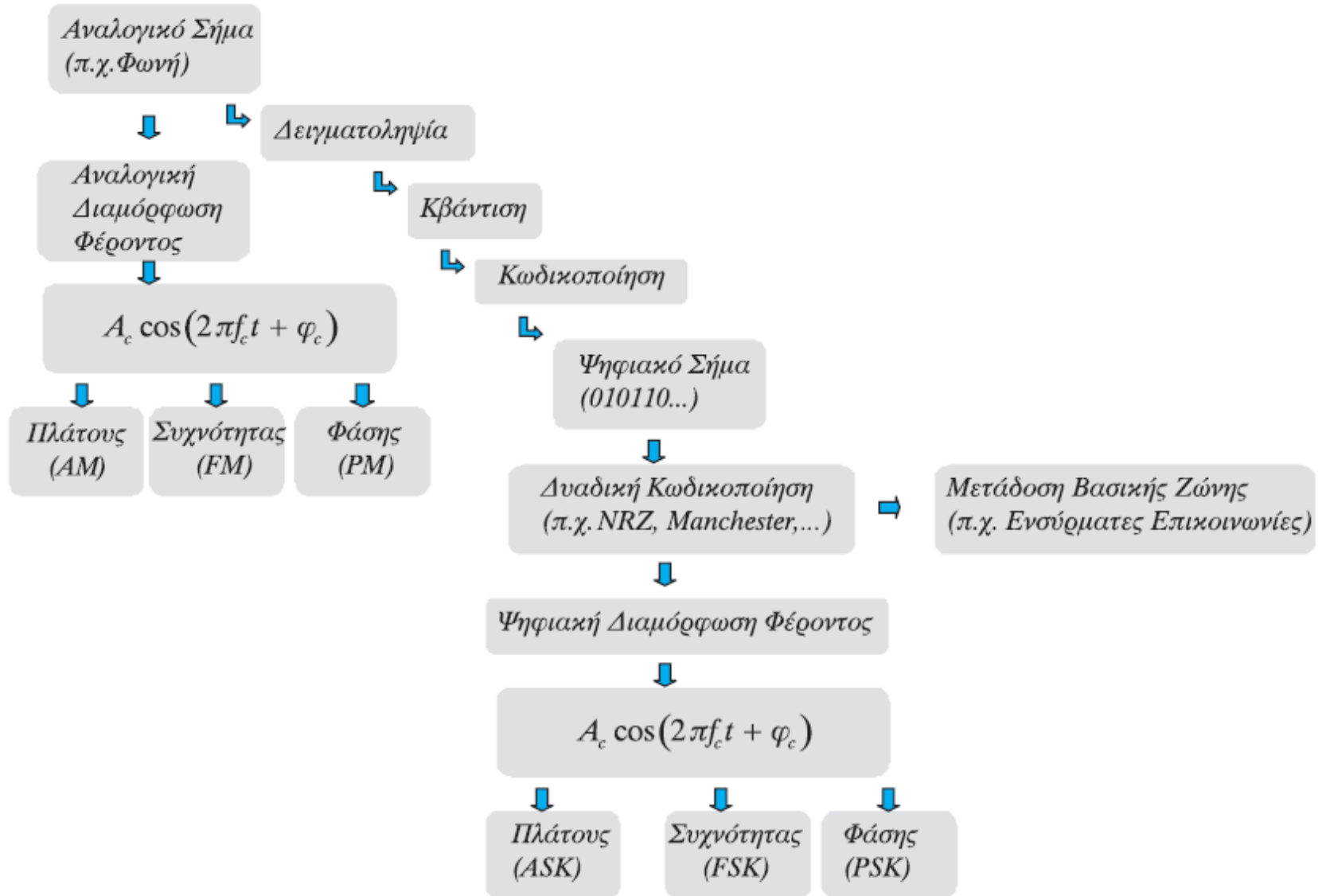
Ιδανικά φίλτρα.

Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



Στάδια Επεξεργασίας σημάτων



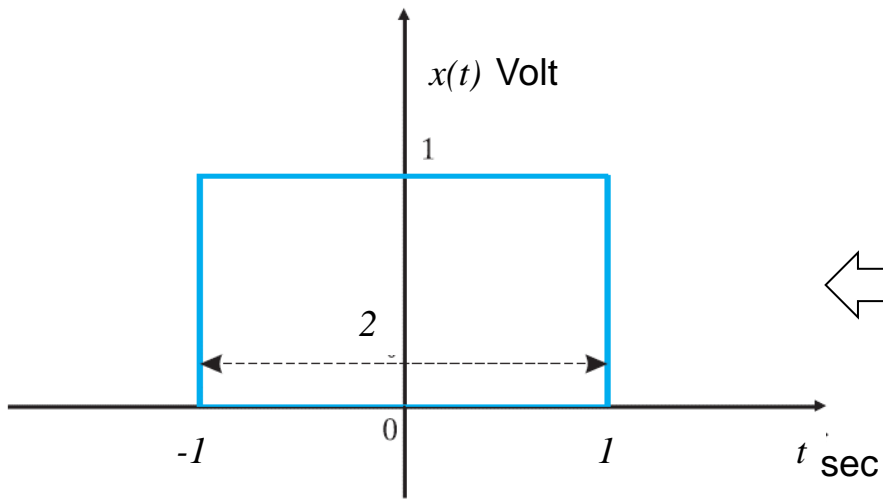
Σήματα και Συστήματα



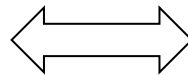
Σήμα

- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
 - Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα
 - Τα σήματα περιγράφονται από συναρτήσεις
 - Δίνουν τις τιμές των σημάτων στα πεδία του χρόνου ή των συχνοτήτων

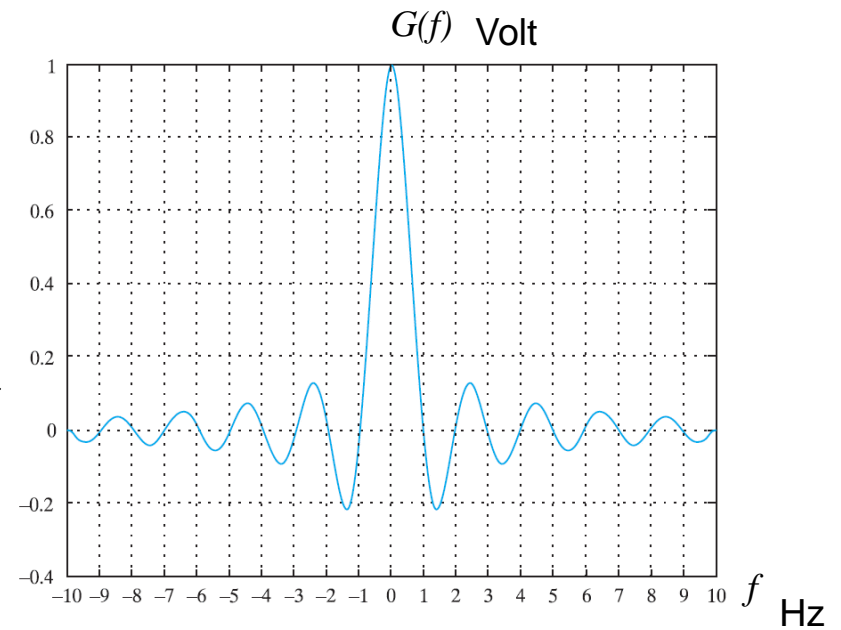
Πεδίο χρόνου



Χρονική κυματομορφή



Πεδίο συχνοτήτων



Φάσμα Πλάτους

2.1.1 Συνεχή – διακριτά σύνολα

Στην ενότητα αυτή γίνεται μια ανασκόπηση στην κατηγοριοποίηση των αριθμών σε σύνολα. Τα διάφορα σύνολα ορίζονται ως εξής:

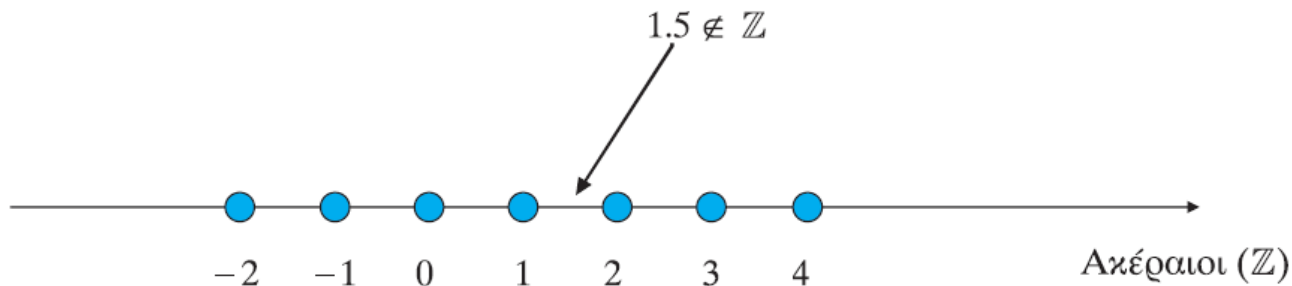
- Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Ρητοί αριθμοί, που ορίζονται ως το πηλίκο ακεραίων:

$$z \in \mathbb{Q} \text{ όταν } \exists x, y \in \mathbb{Z} (y \neq 0) \text{ ώστε } z = \frac{x}{y}$$

- Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή πηλίκου ακεραίων. Είναι οι δεκαδικοί με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία.

Παραδείγματα άρρητων: $\pi = 3.1415927\dots$, οι ρίζες μη τελείων τετραγώνων $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ κ.λπ.

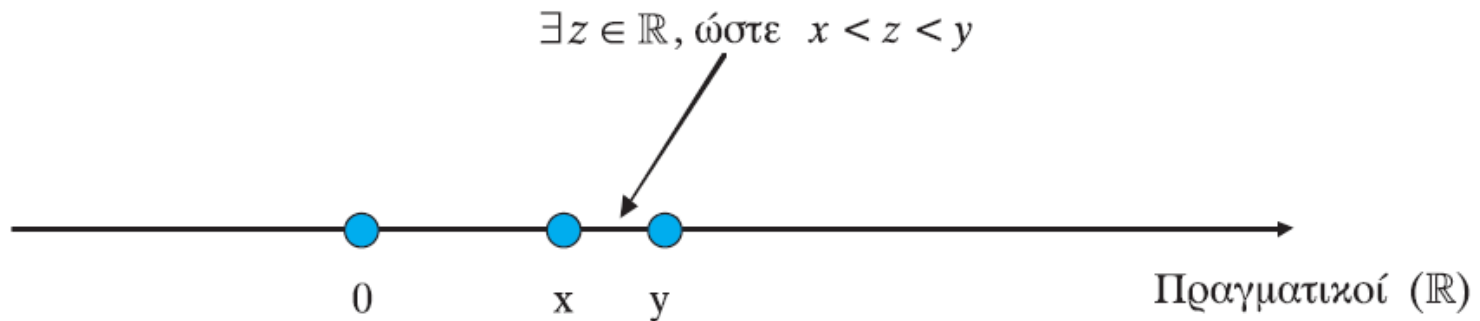
Τα παραπάνω σύνολα είναι διακριτά, δηλαδή αποτελούνται από διακριτές τιμές και είναι δυνατό μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών τους να υπάρχει αριθμός που να μην ανήκει στο σύνολο.



- Οι πραγματικοί αριθμοί (\mathbb{R}) συμπεριλαμβάνουν ρητούς και άρρητους.

Αποτελούν ένα συνεχές σύνολο αριθμών, δηλαδή για κάθε ζεύγος πραγματικών υπάρχει πραγματικός που να βρίσκεται ανάμεσά τους:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ με } x < y, \exists z \in \mathbb{R}, \text{ ώστε } x < z < y$$



Σχήμα 2.2

Παράδειγμα συνεχούς συνόλου

- Μιγαδικοί αριθμοί:

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

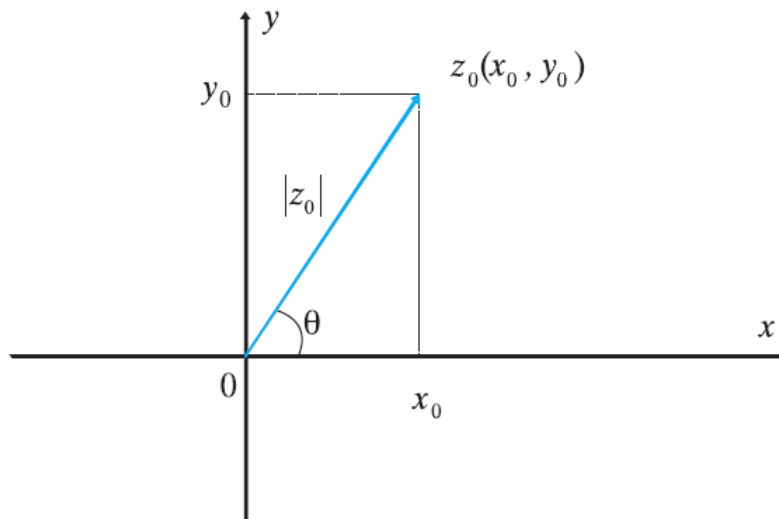
Ο μιγαδικός αριθμός « j » ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

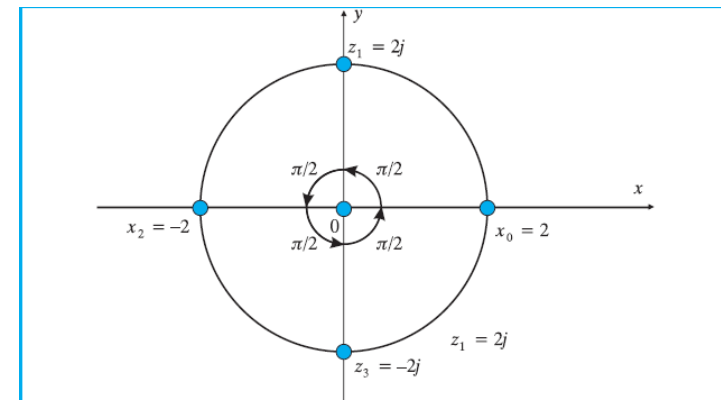
Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Ο πολλαπλασιασμός του « j » επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.



Σχήμα 2.7

Δισδιάστατη απεικόνιση μιγαδικού αριθμού



Σχήμα 2.3

Πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού επί « j »

Ο άξονας των x ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών και ο άξονας των y ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών.

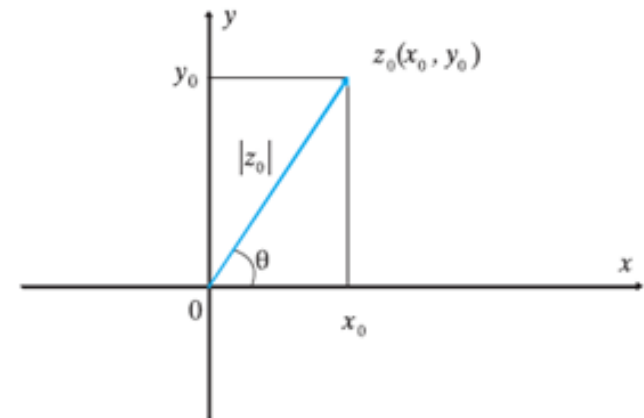
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0| \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0| \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0| [\cos(\theta) + j \sin(\theta)]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0| e^{j\theta}$$

Εξισώσεις Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Κατηγορίες Σημάτων

- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
 - Περιοδικά Σήματα
 - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
 - Ημιτονοειδή Σήματα
 - Ορθογώνιος Παλμός
 - Τριγωνικός Παλμός
 - Κρουστικά Σήματα
 - Σήμα Βήματος

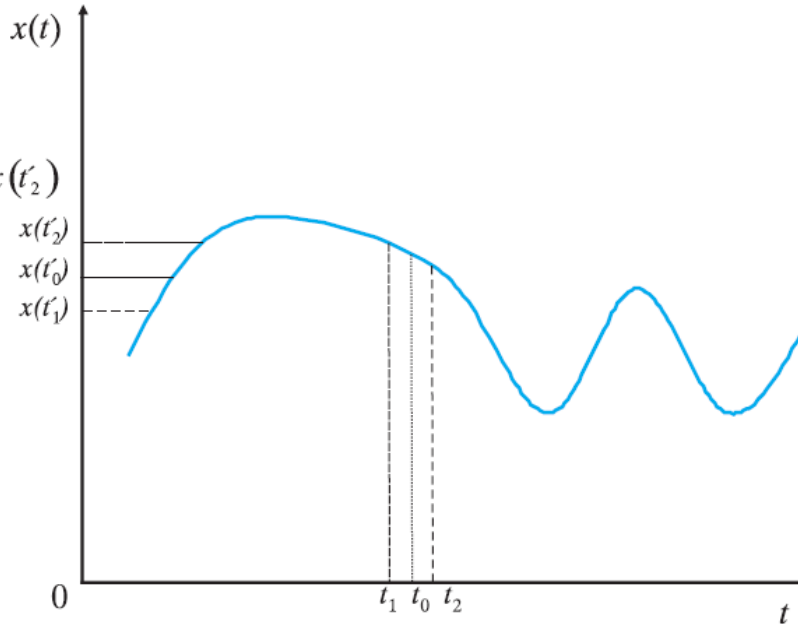
Κατηγορίες Σημάτων

2.2.3 Σήματα συνεχούς χρόνου – αναλογικά

Συνεχές Πεδίο Τιμών

$\forall t_1, t_2$ [με $x(t_1) < x(t_2)$]

$\exists t_0$ ώστε $x(t_1) < x(t_0) < x(t_2)$



$\forall t_1, t_2$ [με $t_1 < t_2$]

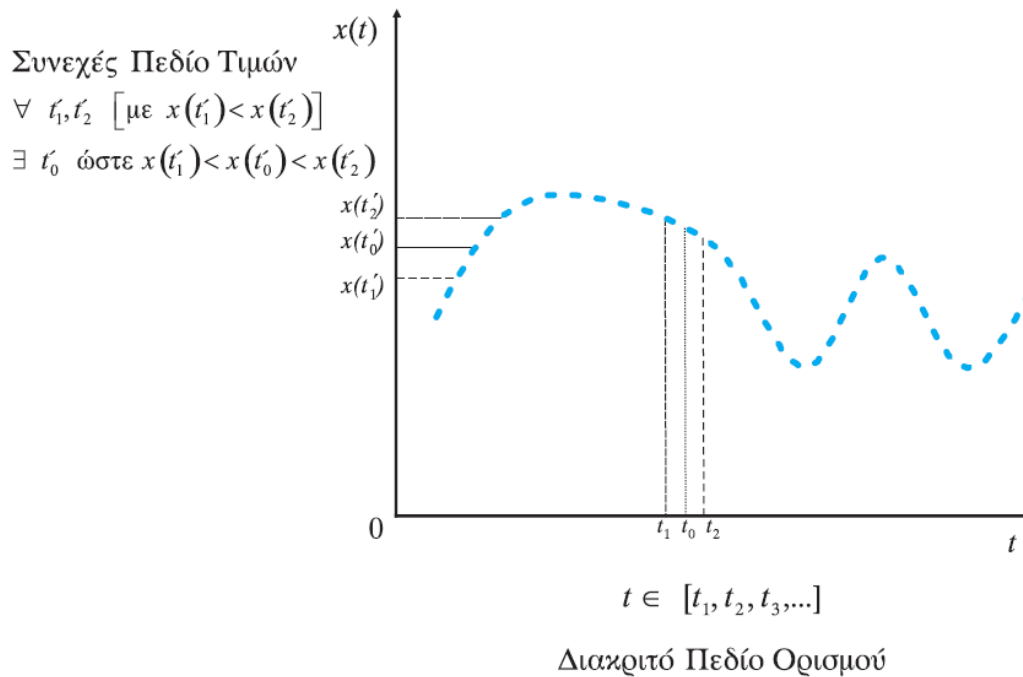
$\exists t_0$ ώστε $t_1 < t_0 < t_2$

Συνεχές Πεδίο Ορισμού

Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$, $t \in \mathbb{R}$

2.2.4 Σήματα διακριτού χρόνου

Τα σήματα διακριτού χρόνου έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών.

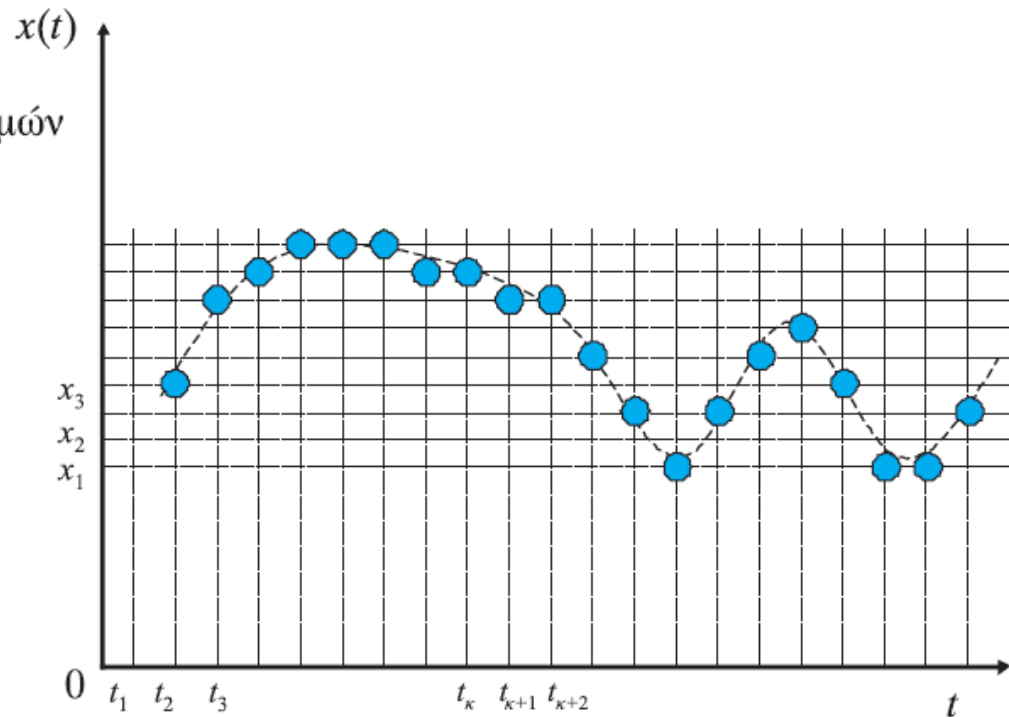


Για παράδειγμα, το σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και T_0 άρρητος (π.χ. $T_0 = \sqrt{5}$), είναι διακριτού χρόνου, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα συνεχές σύνολο [το $(-1, 1)$] $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.2.5 Ψηφιακά σήματα

Τα ψηφιακά σήματα έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και διακριτό πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και T_0 ρητός, είναι ψηφιακό, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα διακριτό σύνολο [π.χ. για $T_0 = 5$, το $x(n)$ παίρνει τις τιμές $\{0.309, -0.809, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$].

Διακριτό Πεδίο Τιμών
 $x(t) \in [x_1, x_2, x_3, \dots]$

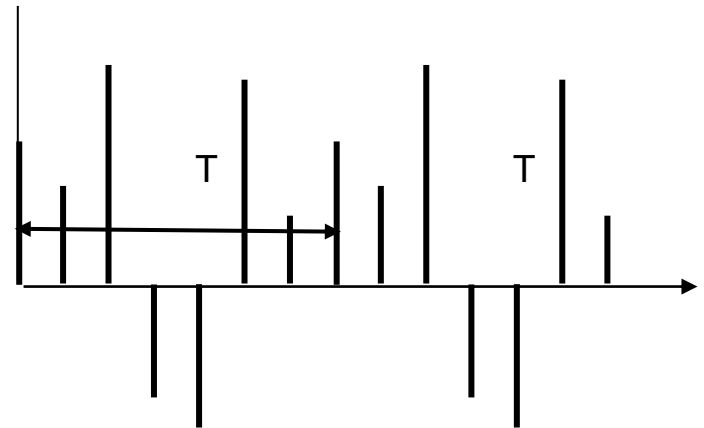
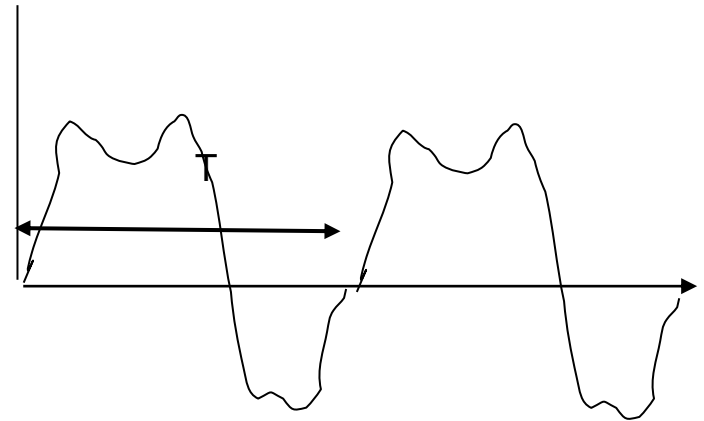


$t \in [t_1, t_2, t_3, \dots]$

Διακριτό Πεδίο Ορισμού

Περιοδικά Σήματα

- Αναλογικό Σήμα
 - Ισχύει η σχέση $y(t)=y(t+T)$
 - T είναι περίοδος και ορίζει τη μικρότερη χρονική διάρκεια μετά την οποία επιλαμβάνεται
- Διακριτό Σήμα
 - Ισχύει $y(n)=y(n+N)$ για όλα τα n
 - N περίοδος



Παράδειγμα 2.2 – Συνημιτονοειδές σήμα

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) = A \cdot \cos(2\pi f t + \theta)$$

ω : κυκλική συχνότητα (μετράται σε rad/sec)

θ : φάση (μετράται σε rad)

f : συχνότητα (μετράται σε Hertz)

A : πλάτος (μετράται σε Volt)

Υπολογισμός περιόδου

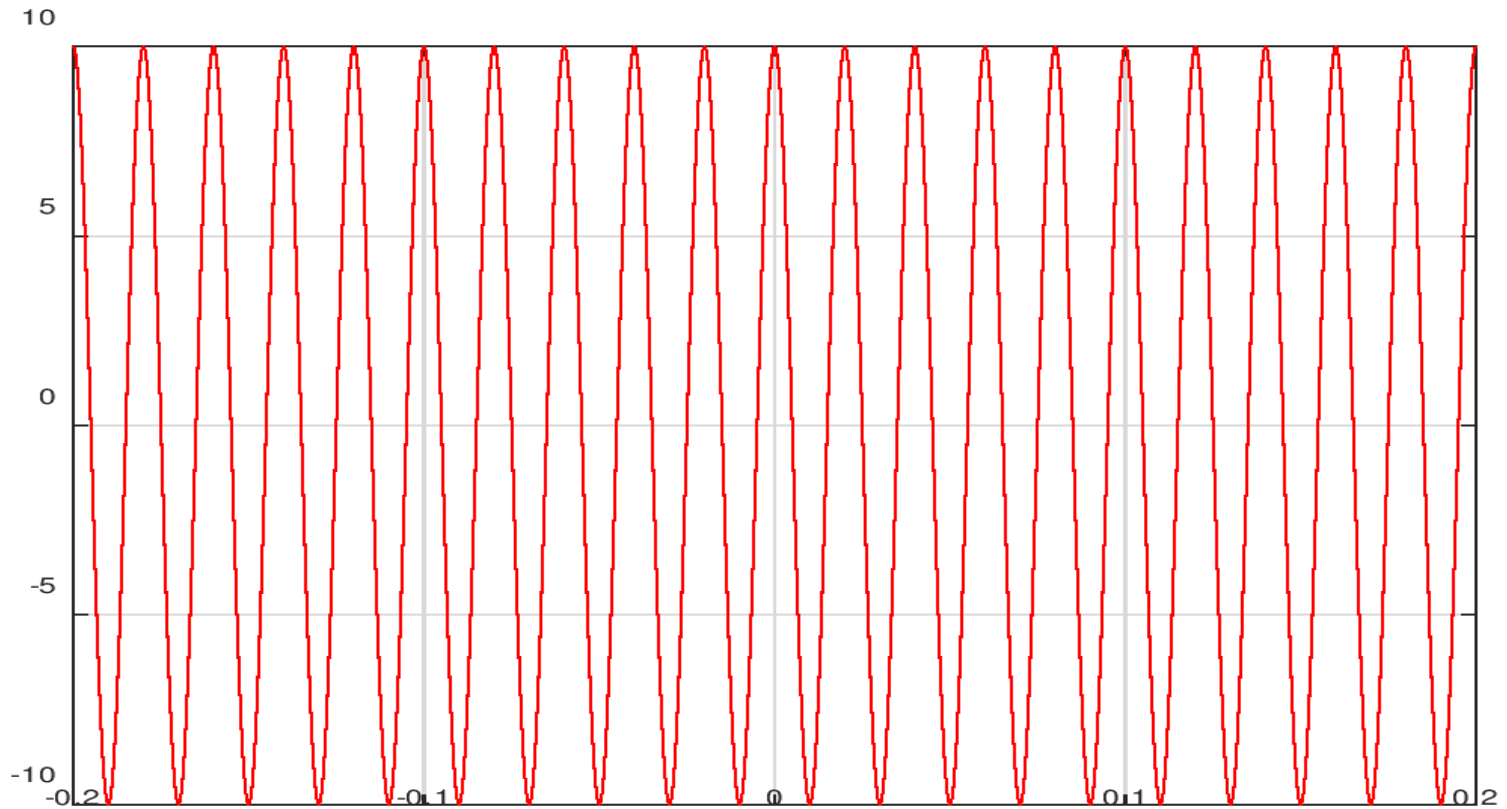
Αναζητείται θετικό $T \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιο ώστε $\forall t \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x(t+T) = x(t) \Leftrightarrow A \cdot \cos(2\pi f(t+T) + \theta) = A \cdot \cos(2\pi f t + \theta) \Leftrightarrow$$

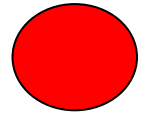
$$\Leftrightarrow \cos(2\pi f t + 2\pi f T + \theta) = \cos(2\pi f t + \theta) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ισχύει ότι αν } \cos(x) = \cos(y), \\ \text{τότε } x = 2k\pi + y, k = 1, 2, \dots \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi f t + 2\pi f T + \theta = 2\pi f t + \theta + 2k\pi, k = 1, 2, \dots$$

$$x(t) = 10 \cos(2\pi 50t)$$



Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων



Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν :

$\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q} \text{ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει}$$

όλες οι δυνατές απλοποιήσεις)

Δηλαδή θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2$$

Γενίκευση:

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2, \dots, T_N θα είναι περιοδικό εάν :

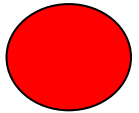
$\exists m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N$$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N$$

Παράδειγμα



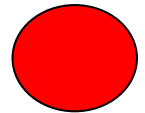
Βασικά Ζητήματα ΠΛΗ22

8/31

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.



$$\text{Είναι } s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

$$\text{Για το } \cos(5\pi t) \text{ η περίοδος είναι } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} \text{ sec}$$

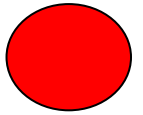
$$\text{Για το } \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ η περίοδος είναι } T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \text{ sec}$$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha=1, \beta=10$ φυσικούς, άρα ρητός οπότε

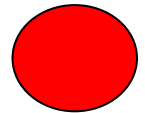
το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \beta T_1 = \alpha T_2 = 4 \text{ sec}$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25 \text{ Hz}$

Γραφική απεικόνιση της προηγούμενης άσκησης στο OCTAVE

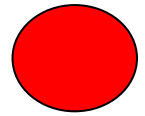


- *Παραπομπή: Για την εισαγωγή στο OCTAVE δείτε τις διαφάνειες `octave_matlab_tutorial_v1.0.ppt`*

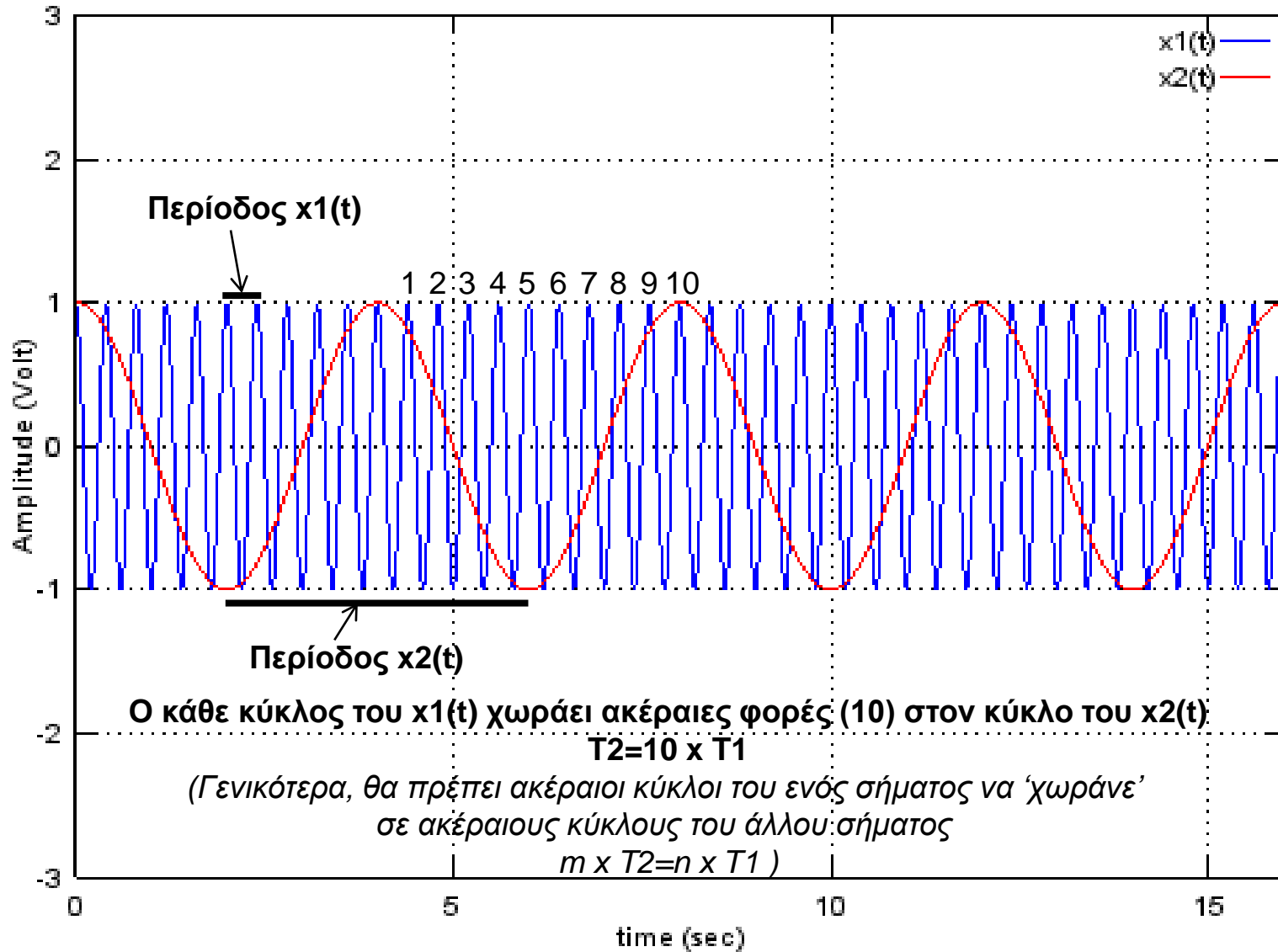


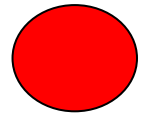
Example 1a

- `figure;` % figure creation
- `Ts=1./50;` % sample duration (sampling frequency=50Hz)
- `t=0:Ts:10000.*Ts;` %create 10000 time samples
- `x1=cos(5.*pi.*t);` % 1st signal with frequency 2.5Hz
- `x2=cos(pi.*t./2);` % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- `plot(t,x1,'b');` %plot 1st signal 'b' is for blue line
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- `hold;` %hold the first plot
- `plot(t,x2,'r');` % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- `legend('x1(t)','x2(t)');` % show which plot corresponds to which signal
- `grid;` % show a rectangular grid
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- `figure;` % figure creation
- `plot(t,x1+x2,'k');` %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- `legend('x1(t)+x2(t)');` % show to which signal the plot corresponds
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- 25 ▪ `grid` % show a rectangular grid

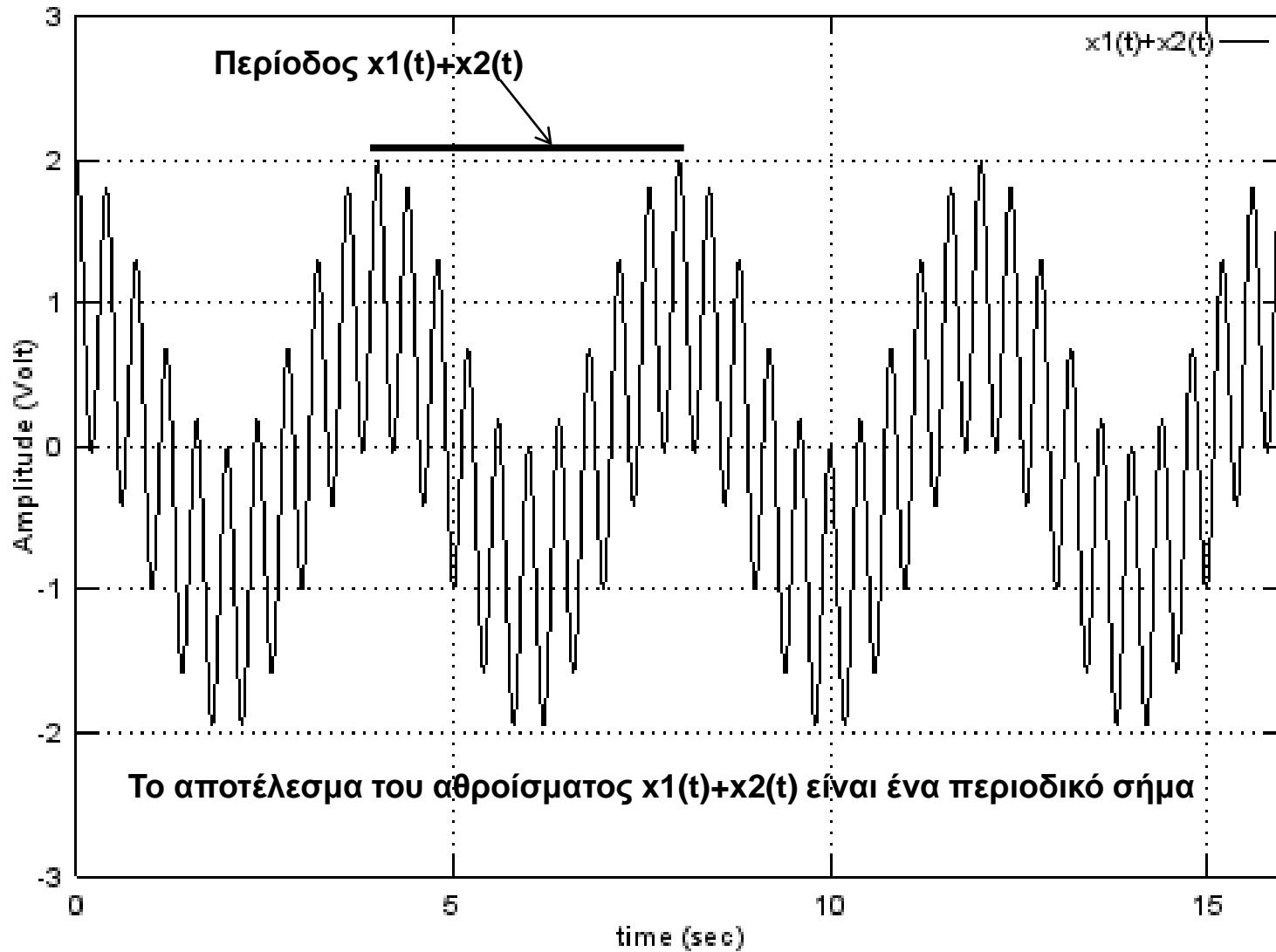


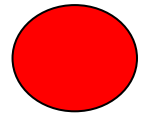
Example 1a





Example 1a





Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

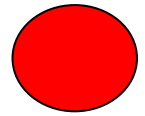
$$\text{Είναι } s_1(t) = \overset{\downarrow}{f(5t/\pi)+} f\left(\frac{t}{2}\right) = \overset{\downarrow}{\cos(5t)} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

$$\text{Για το } \cos(5t) \text{ η περίοδος είναι } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5} \text{ sec}$$

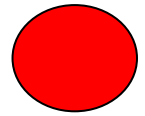
$$\text{Για το } \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ η περίοδος είναι } T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \text{ sec}$$

Ο λόγος των περιόδων είναι, $T_1/T_2 = \pi/10$ Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

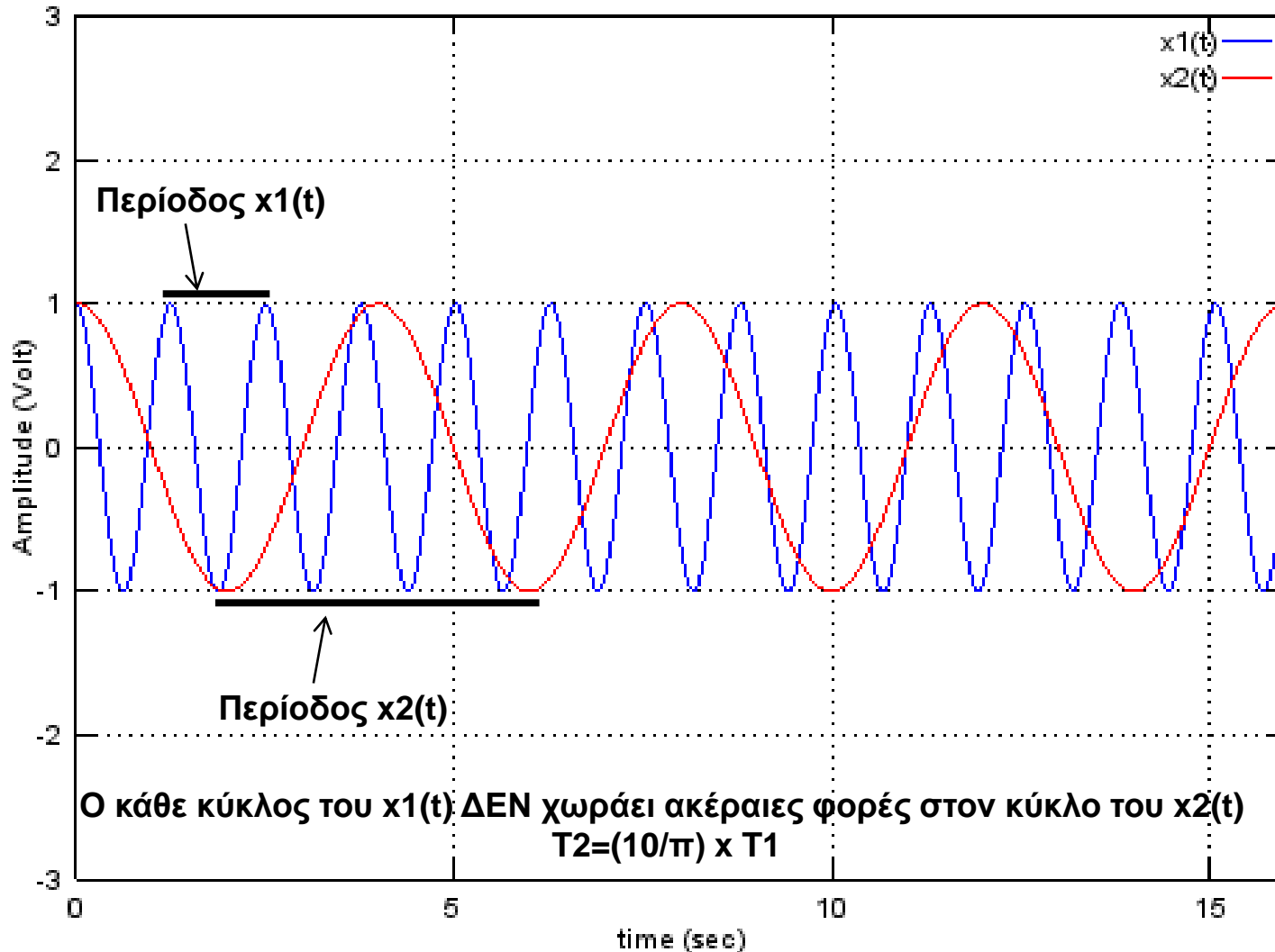


Example 1b

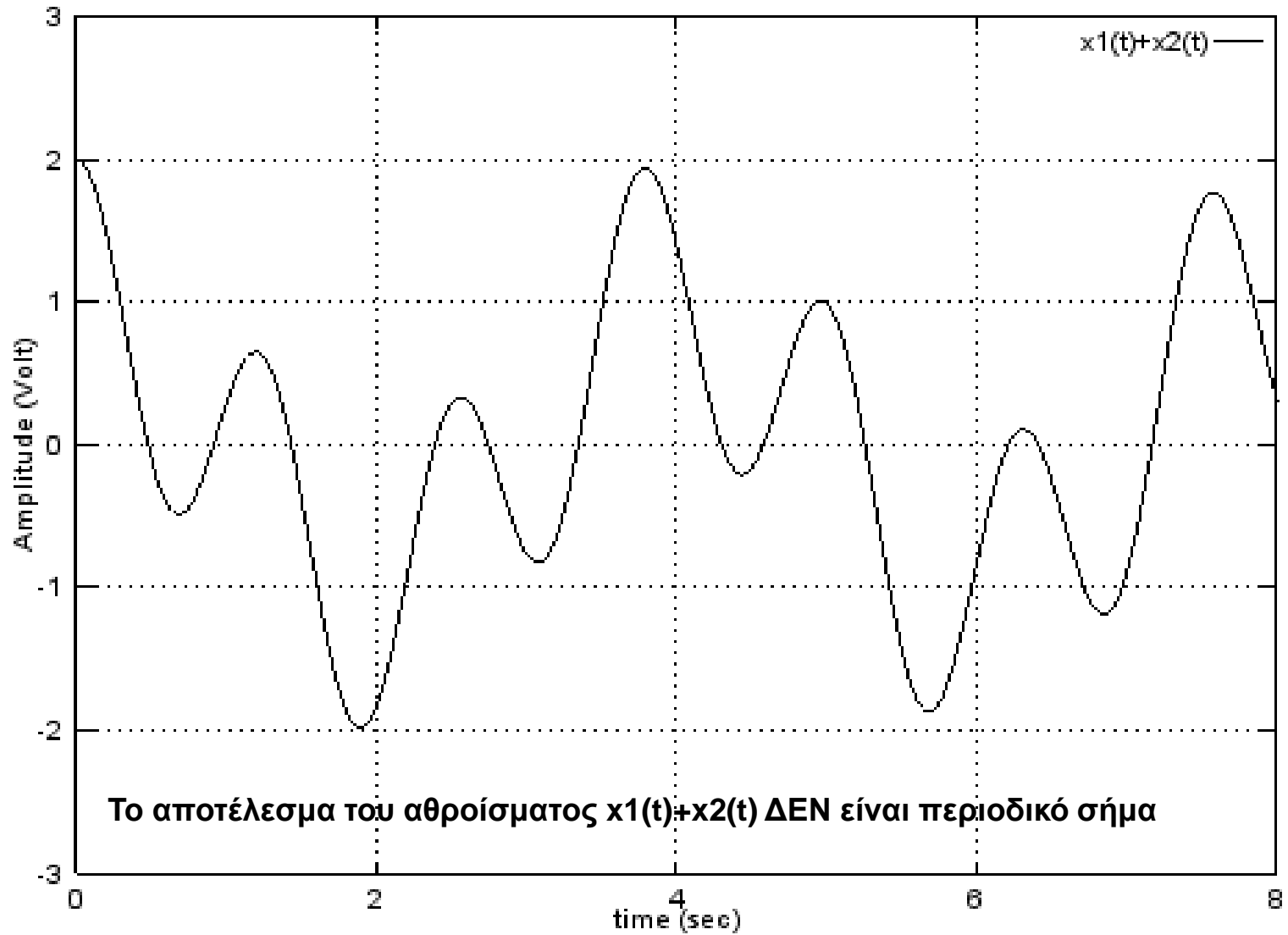
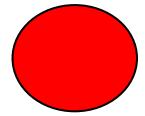
- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- `x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz` ← Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a
- `x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz`
- `plot(t,x1,'b');` %plot 1st signal 'b' is for blue line
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- `plot(t,x2,'r');` % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- `legend('x1(t)','x2(t)');` % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- `plot(t,x1+x2,'k');` plot the sum of x1(t) and x2(t)
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- `legend('x1(t)+x2(t)');` % show to which signal the plot corresponds
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid



Example 1b



Example 1b

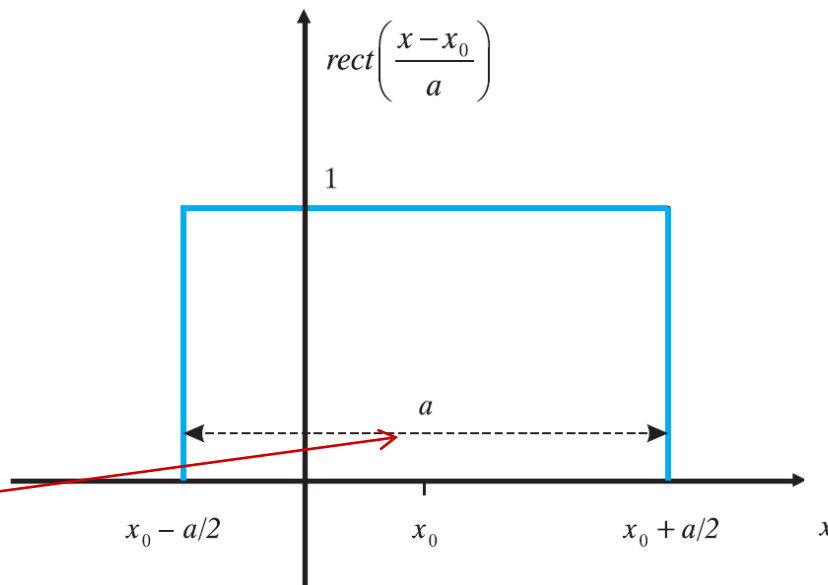


Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } |x-x_0| < \frac{a}{2}, \text{ δηλ. } x_0 - \frac{a}{2} < x < x_0 + \frac{a}{2} \\ 0, & \text{όταν } |x-x_0| > \frac{a}{2}, \text{ δηλ. } \begin{cases} x < x_0 - \frac{a}{2} \\ \text{ή} \\ x > x_0 + \frac{a}{2} \end{cases} \end{cases}$$

όπου $a > 0$



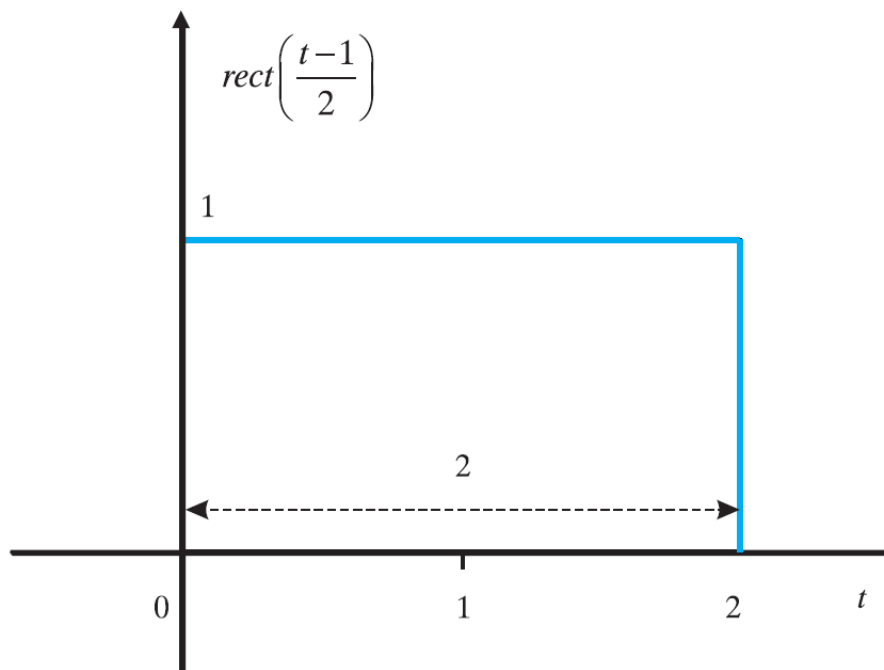
Σχεδιαστικό Εύρος

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (2)

■ Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0, 2)$.

- $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

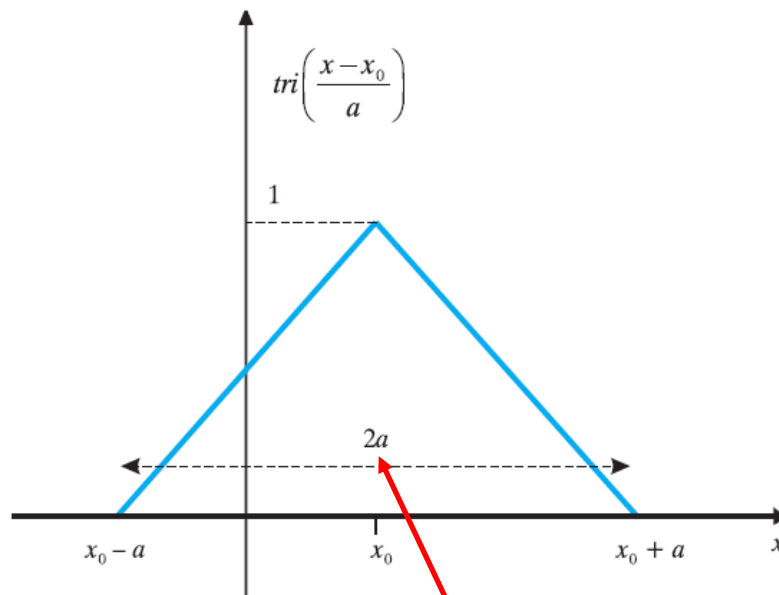


Σήμα Τριγωνικός Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \text{tri}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_0|}{a}, & \text{όταν } |x-x_0| < a, \text{ δηλ. } x_0 - a < x < x_0 + a \\ 0, & \text{όταν } |x-x_0| > a, \text{ δηλ. } \begin{cases} x < x_0 - a \\ \text{ή} \\ x > x_0 + a \end{cases} \end{cases}$$

όπου $a > 0$



Προσοχή στην αναλυτική έκφραση για τα ολοκληρώματα

Σχεδιαστικό Εύρος

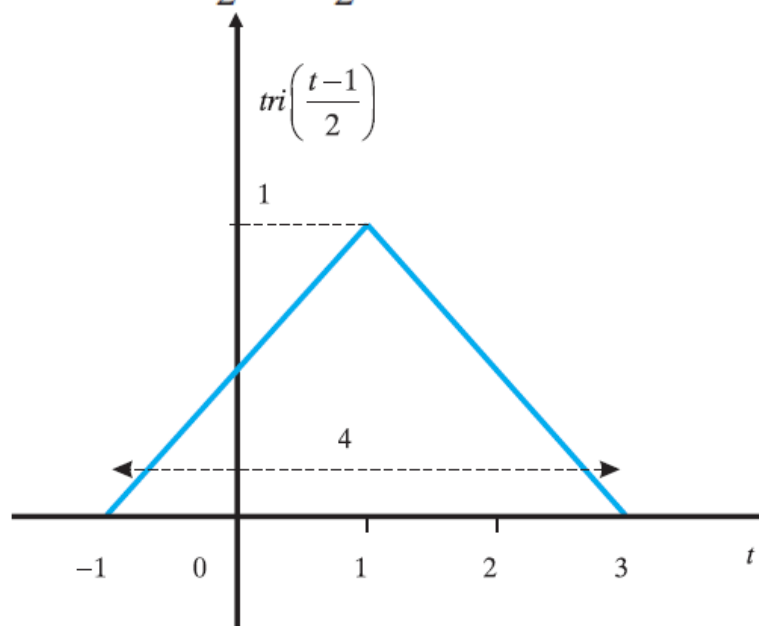
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (2)

■ Παραδείγματα

- $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2}, t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$.



Σήμα Τριγωνικός Παλμός (3)

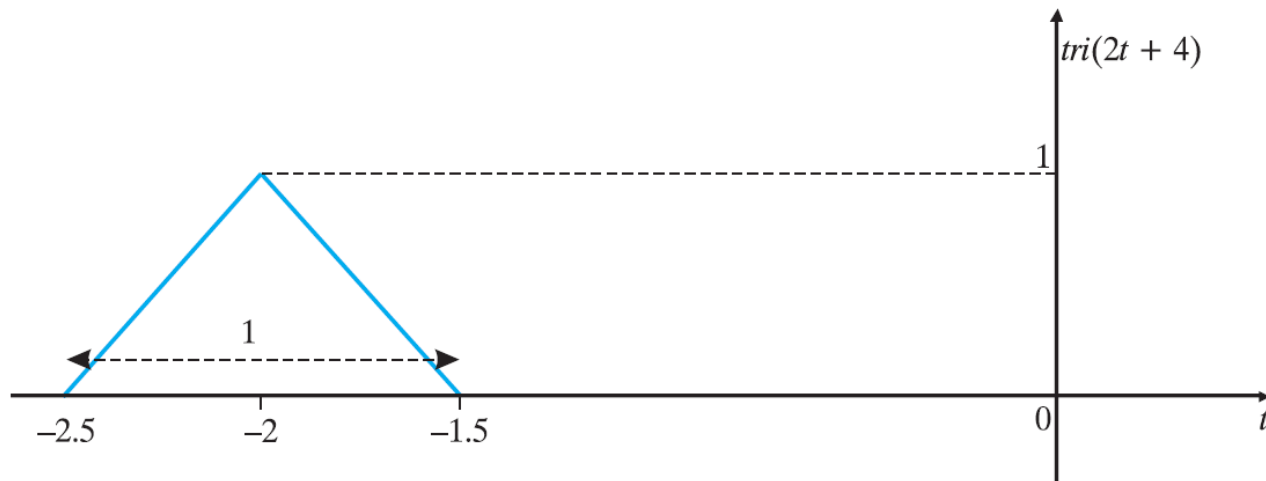
- $x(t) = \text{tri}(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $\text{tri}\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι: $x(t) = \text{tri}(2t+4) = \text{tri}(2(t+2)) = \text{tri}\left(\frac{t+2}{1/2}\right) = \text{tri}\left(\frac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \frac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα

$$\left(t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right) = (-2.5, -1.5).$$



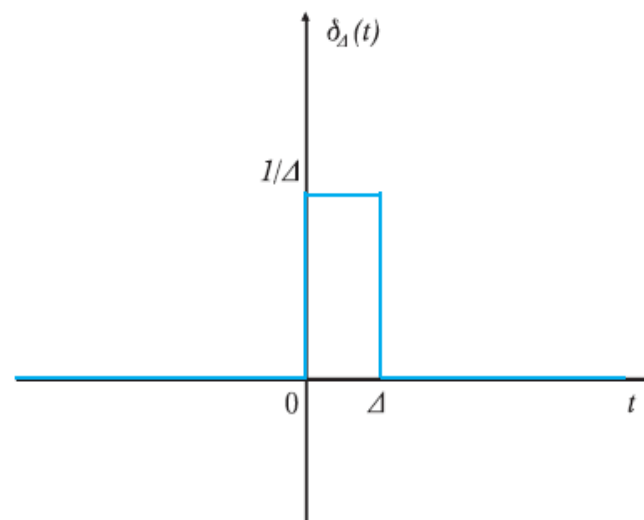
Λαμβάνεται ένας ορθογωνικός παλμός (μοναδιαίου εμβαδού) της εξής μορφής:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{οταν } t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & \text{οταν } 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{οταν } t > \Delta \end{cases}$$

όπου $\Delta > 0$.

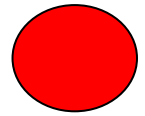
Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \text{rect} \left(\frac{t - \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \right)$$

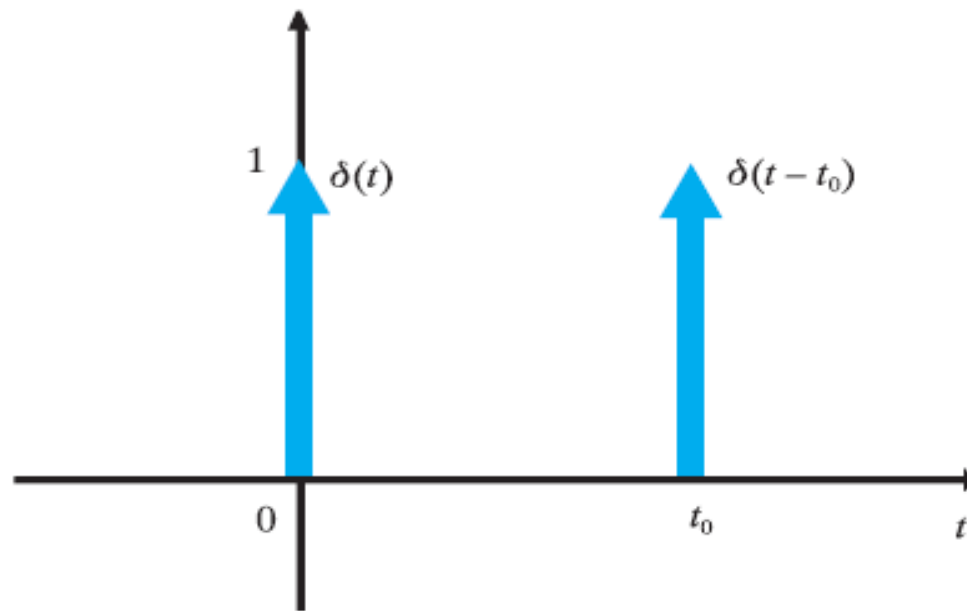


Σχήμα 2.19

Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού



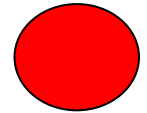
- Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \rightarrow 0$), η χρονική διάρκεια του παλμικού σήματος μηδενίζεται και το πλάτος του απειρίζεται, ενώ το εμβαδό του παραμένει ίσο με 1. Η κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [\delta_{\Delta}(t)]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες



- $\delta(t) = 0$, οταν $t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0$, οταν $t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- $f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$ αντιμεταθετική

$[f(x) * g(x)] * h(x) = f(x) * [g(x) * h(x)]$ προσεταιριστική

$f(x) * [g(x) + h(x)] = f(x) * g(x) + f(x) * h(x)$ επιμεριστική

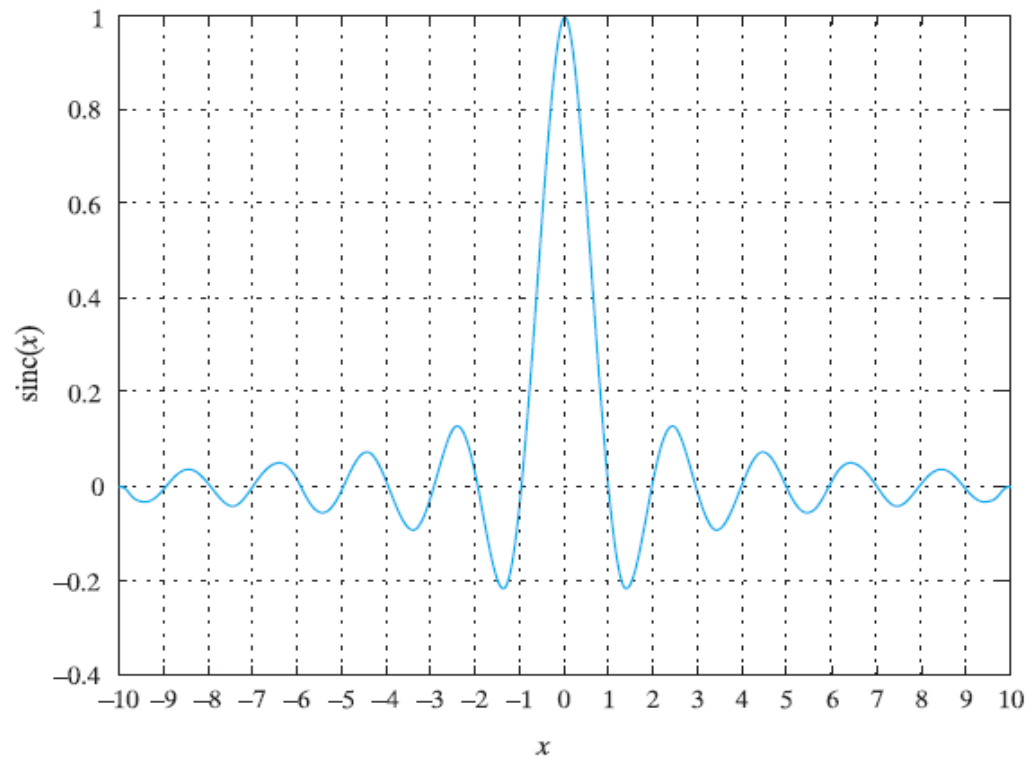
2.2.7.3 Συνάρτηση sinc

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

Σήμα Βήματος (1)

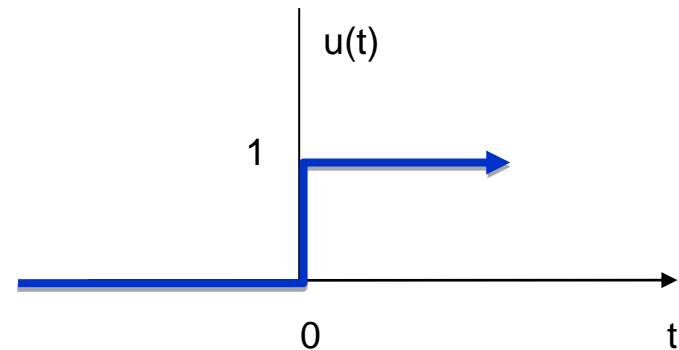
■ Αναλογικό Σήμα

– Ορισμός
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ N/A & t = 0 \end{cases}$$

– Ιδιότητες

• Παραγωγήσιση
$$\frac{d}{dt}[u(t)] = \delta(t)$$

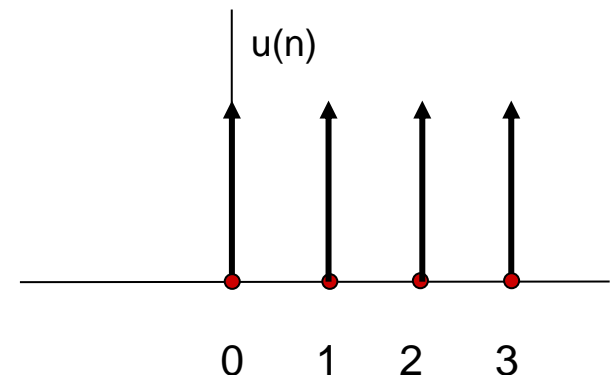
• Ολοκλήρωση
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$



■ Διακριτό Σήμα

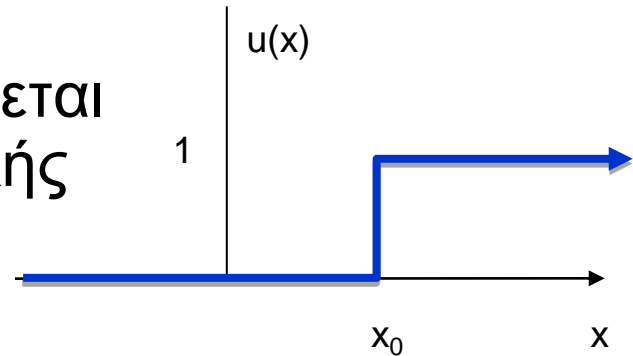
– Ορισμός

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

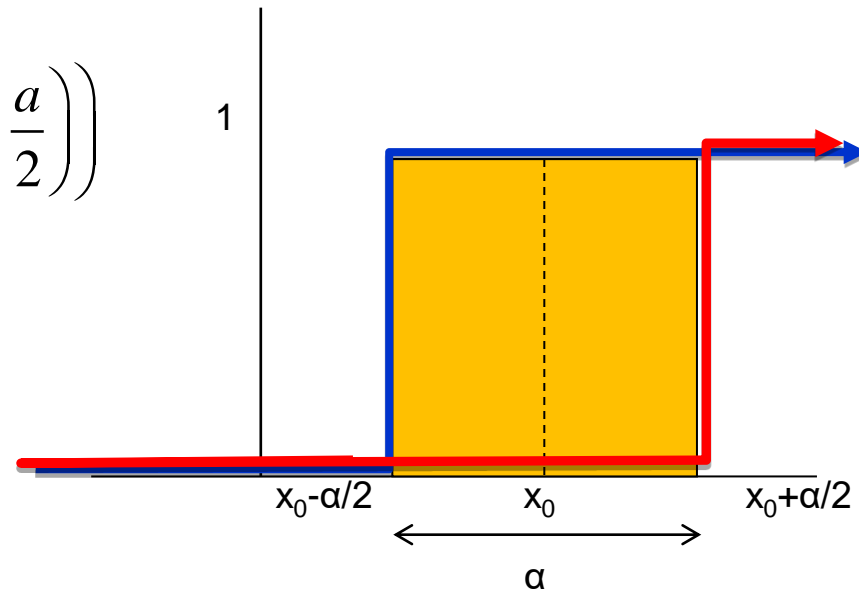


Σήμα Βήματος (2)

- Ο ορθογώνιος παλμός περιγράφεται και μέσω της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης

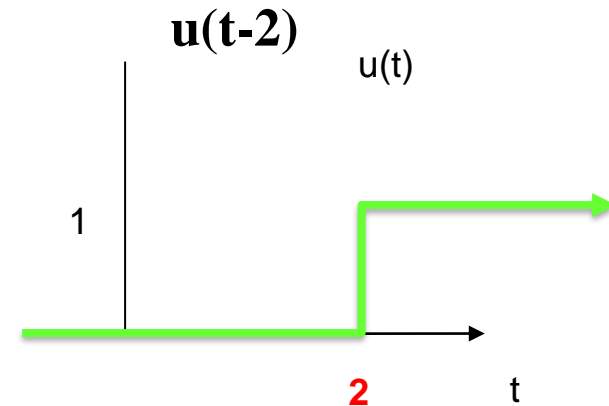
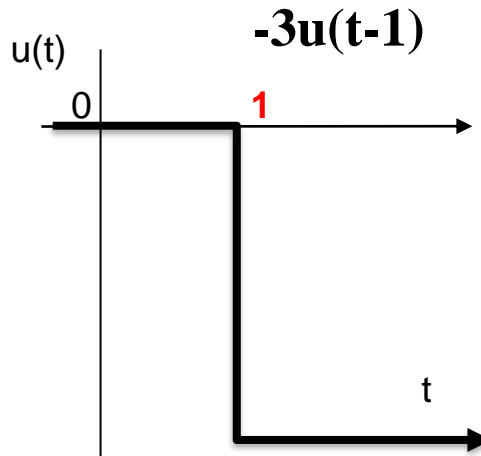
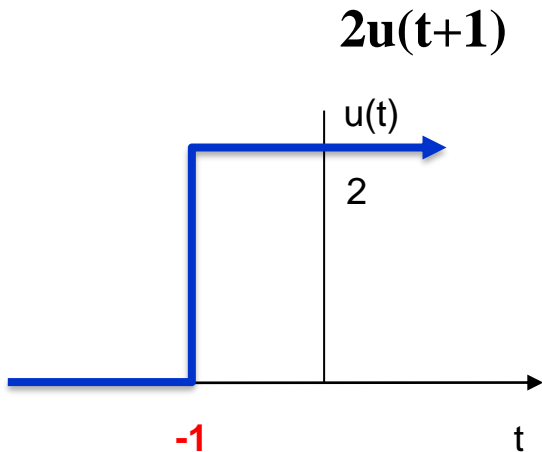


$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = u\left(x - \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\right) - u\left(x - \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)\right)$$



Σήμα Βήματος (3)


- Παραδείγματα
 - Να σχεδιαστεί το σήμα $x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)$
- Μέθοδος
- Βήμα 1: Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους



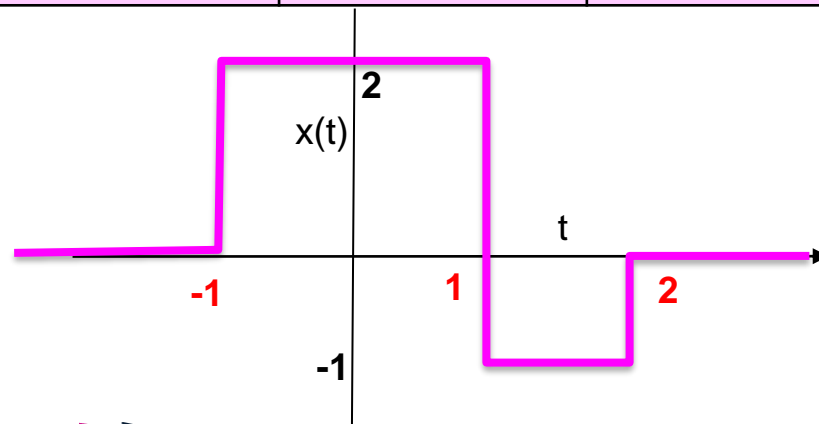
- Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1 και 2**

Σήμα Βήματος (4)

- Βήμα 3: Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



$2u(t+1)$	0	2	2	2
$-3u(t-1)$	0	0	-3	-3
$u(t-2)$	0	0	0	1
$x(t)$	0	2	-1	0



- Βήμα 4:
- Γραφική Παράσταση

Υπέρθεση Σημάτων (7)

- Από Εργασία 1^η, (2009), Θέμα 6(β)

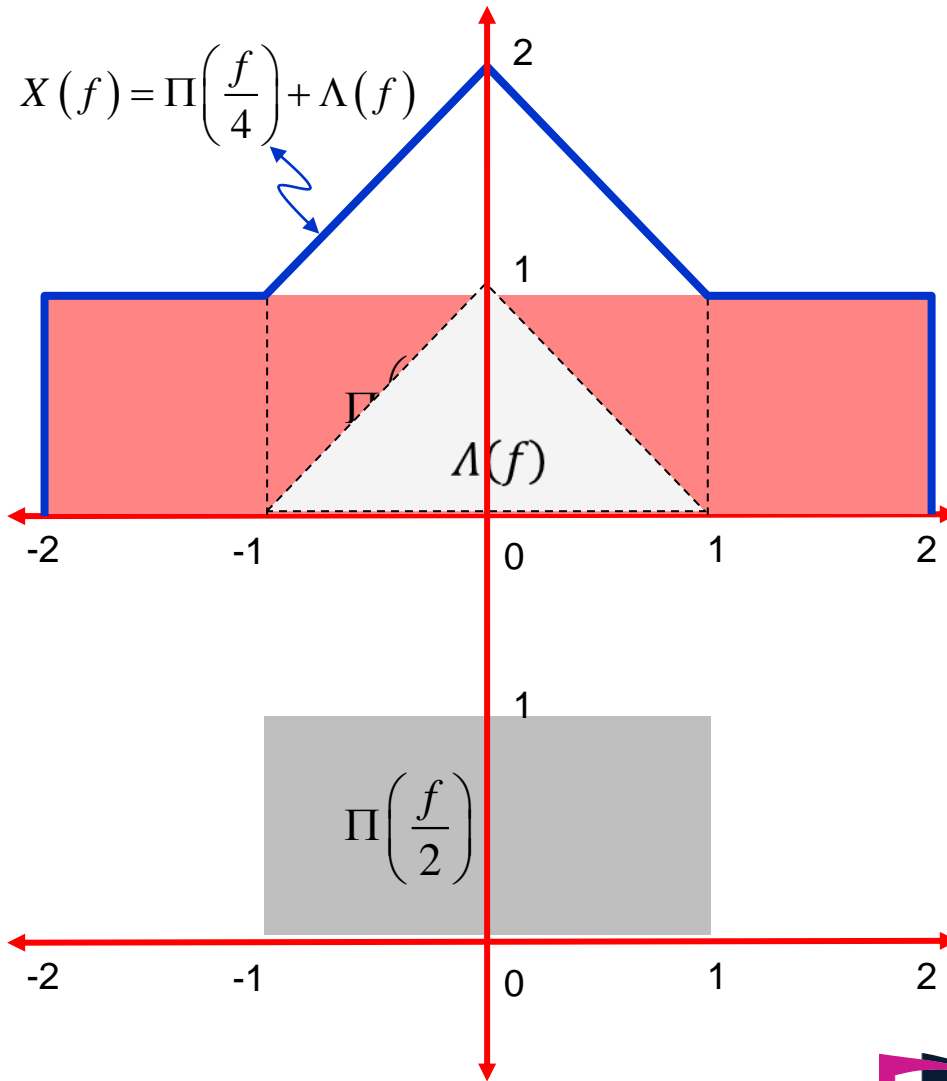
- Δίνεται το $X(f)$ και $H(f)$ που είναι

- $$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f) \quad \text{και} \quad H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

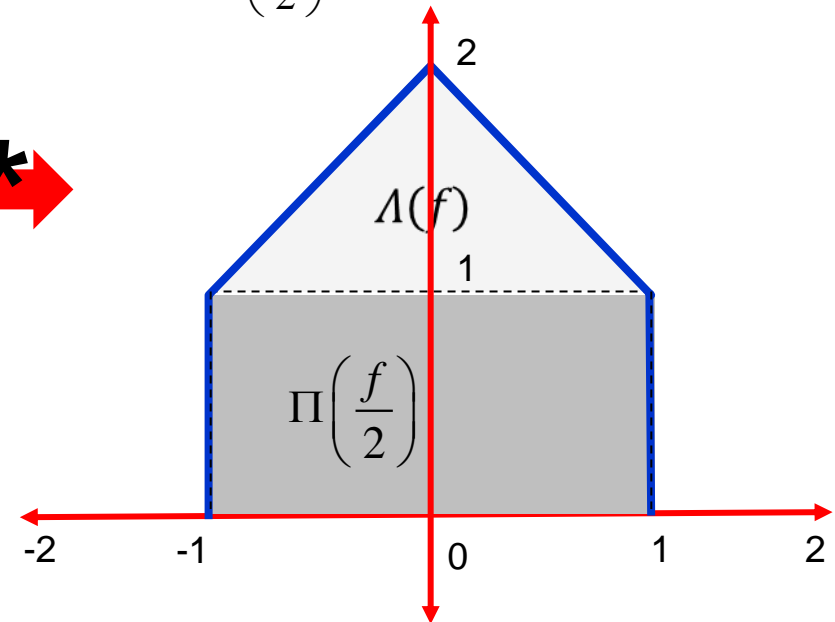
- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Υπέρθωση Σημάτων (8)



$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \left[\Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f)
 \end{aligned}$$



Υπέρθεση Σημάτων (1)

- Εργασία 1^η, (2009), Θέμα 4

- Δίνεται το σήμα

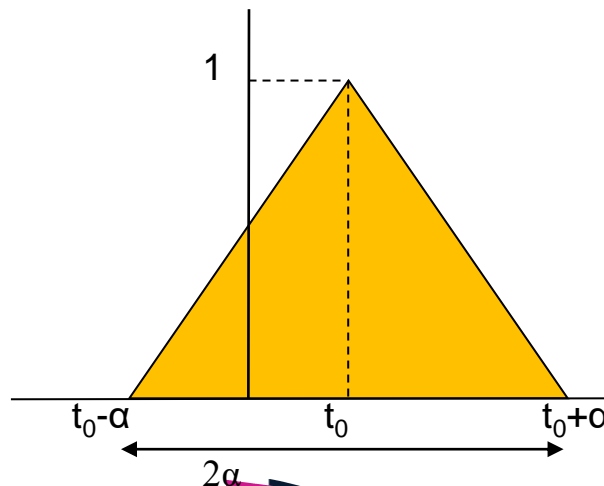
$$x(t) = -2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) + 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - 2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα $x(t)$.

Υπέρθωση Σημάτων (2)

- Βήμα 1^ο: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

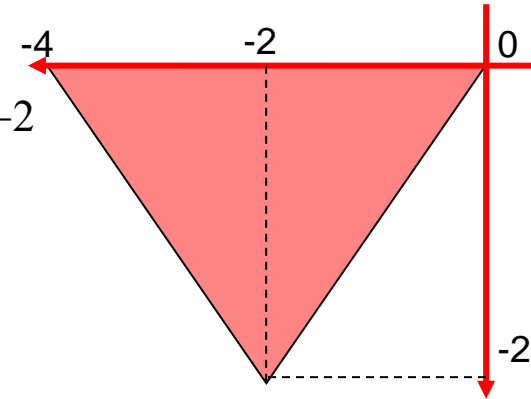
$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \text{tri}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{t-t_0}{a}, & \text{όταν } t_0 < t < a+t_0 \\ 1 - \frac{-(t-t_0)}{a} = 1 + \frac{t-t_0}{a}, & \text{όταν } -a+t_0 < t < t_0 \\ 0, & \text{όταν } |t-t_0| > a \text{ ή } -a+t_0 > t \text{ \& } t > t_0+a \end{cases}$$



Υπέρθωση Σημάτων (3)

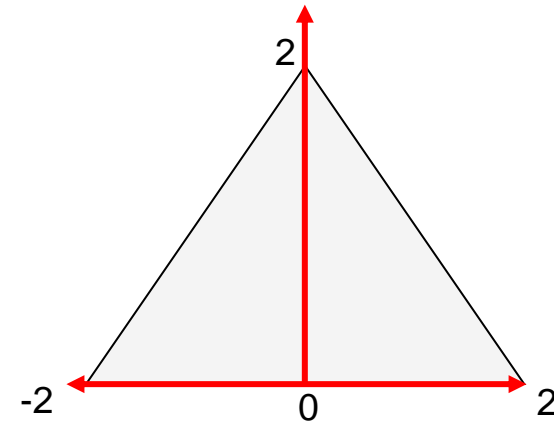
■ Αρα 1^ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) = \begin{cases} -2\left[1 - \frac{-(t+2)}{2}\right] = -4 - t, \text{ όταν } -2 < t+2 < 0 \Rightarrow -4 < t < -2 \\ -2\left[1 - \frac{(t+2)}{2}\right] = t, \text{ όταν } 0 < t+2 < 2 \Rightarrow -2 < t < 0 \\ 0, \text{ όταν } t < -4 \text{ ή } t > 0 \end{cases}$$



2^ο σήμα

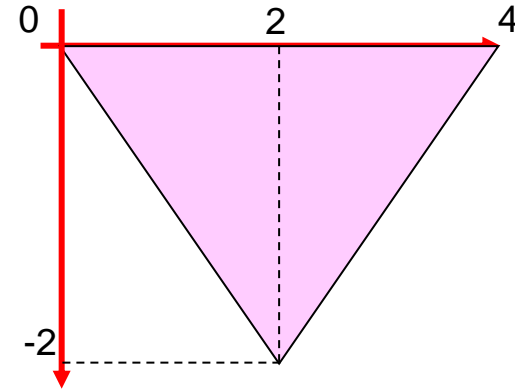
$$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 2\left[1 - \frac{-(t)}{2}\right] = 2 + t, \text{ όταν } -2 < t < 0 \\ 2\left[1 - \frac{(t)}{2}\right] = 2 - t, \text{ όταν } 0 < t < 2 \\ 0, \text{ όταν } t < -2 \text{ ή } t > 2 \end{cases}$$



Υπέρθυση Σημάτων (4)


■ 3^ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) = \begin{cases} -2\left[1 - \frac{-(t-2)}{2}\right] = -t, & \text{όταν } -2 < t-2 < 0 \Rightarrow 0 < t < 2 \\ -2\left[1 - \frac{(t-2)}{2}\right] = t-4, & \text{όταν } 0 < t-2 < 2 \Rightarrow 2 < t < 4 \\ 0, & \text{όταν } t < -4 \text{ ή } t > 0 \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (5)

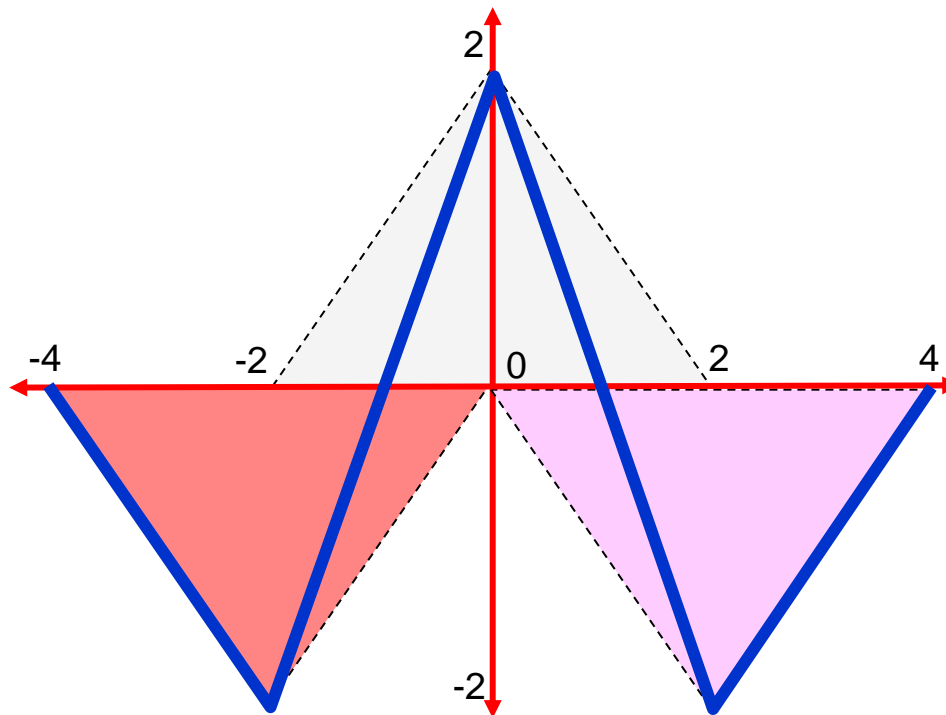
- Βήμα 2^ο: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα



$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right)$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$	0	0	0	-t	t-4
$x(t)$	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

Υπέρθυση Σημάτων (6)

- Βήμα 3^ο: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα

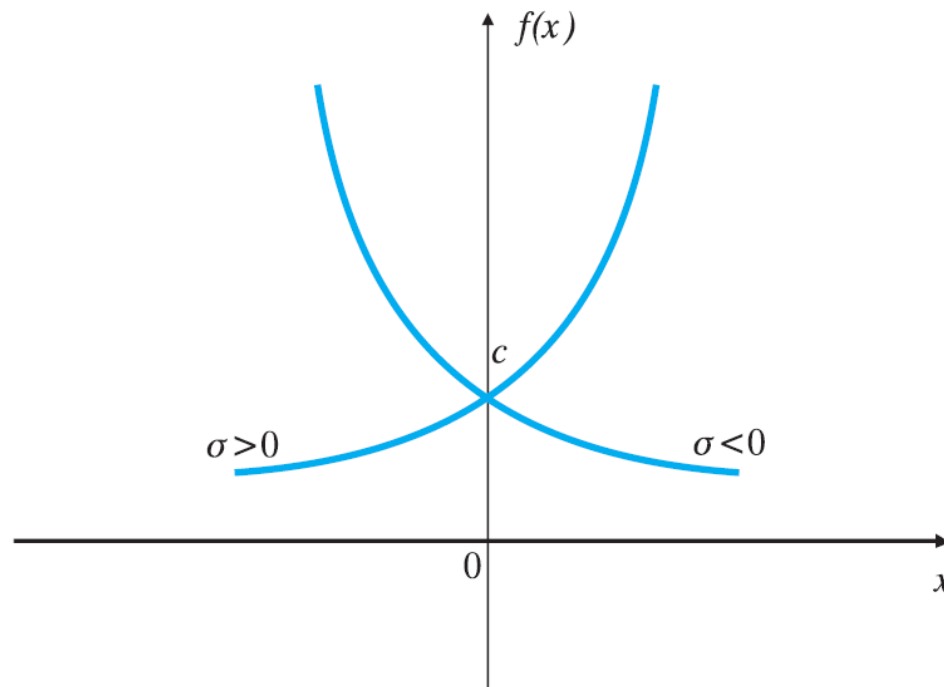


Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (1)

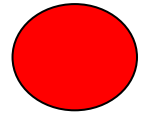
Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\sigma x}, \text{ όπου } c, \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



Φάσμα πλάτους Σημάτων – Μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων



Παράδειγμα.

Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$

$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

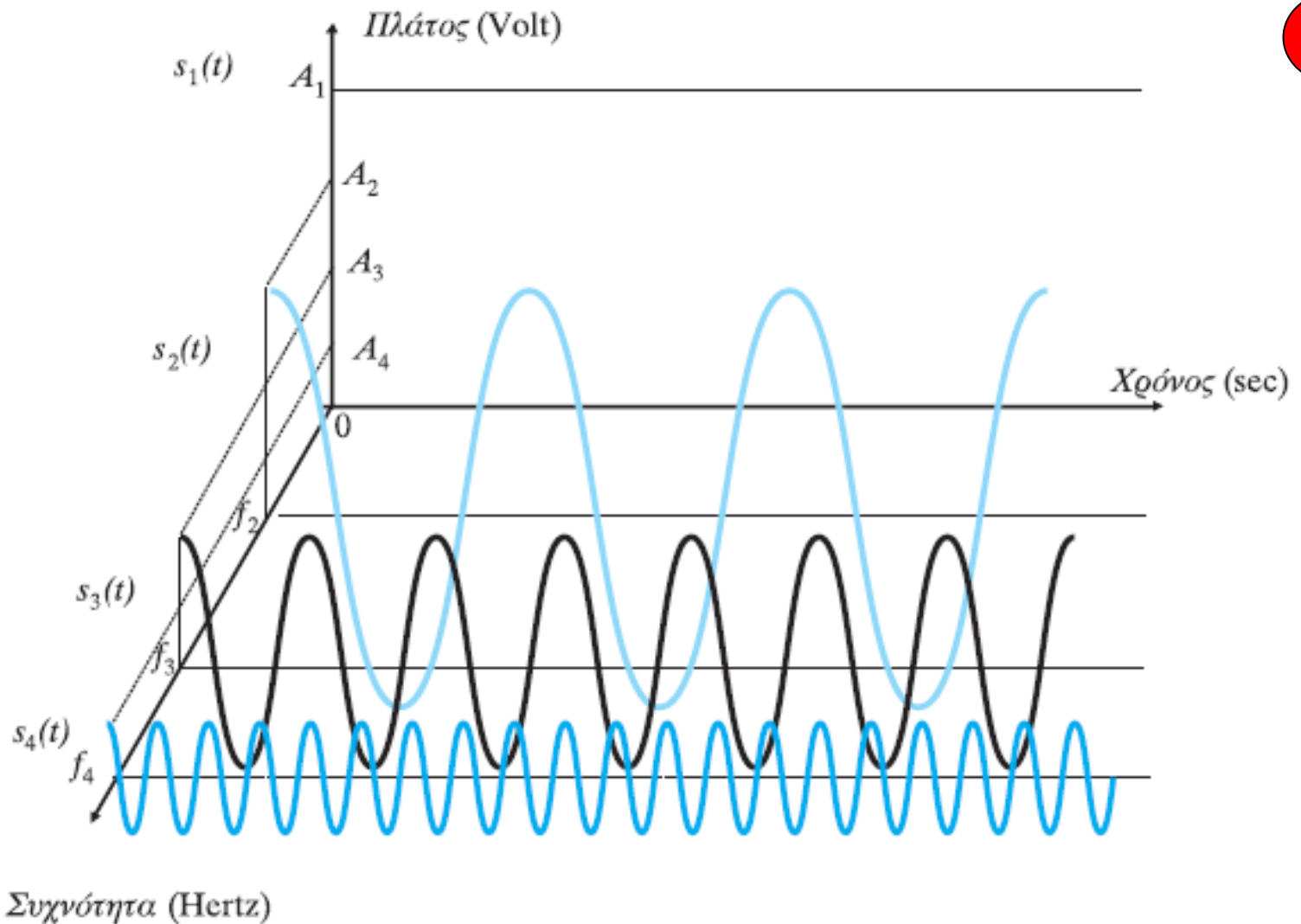
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$

$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$

$$f_2 < f_3 < f_4$$

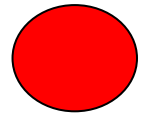
$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:

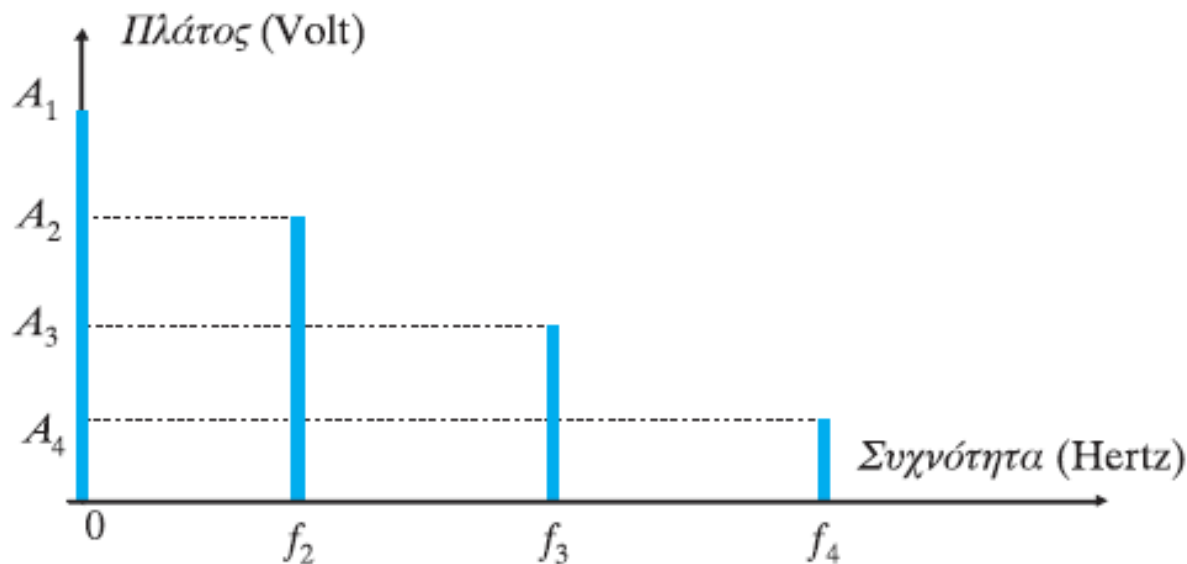


Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων



Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

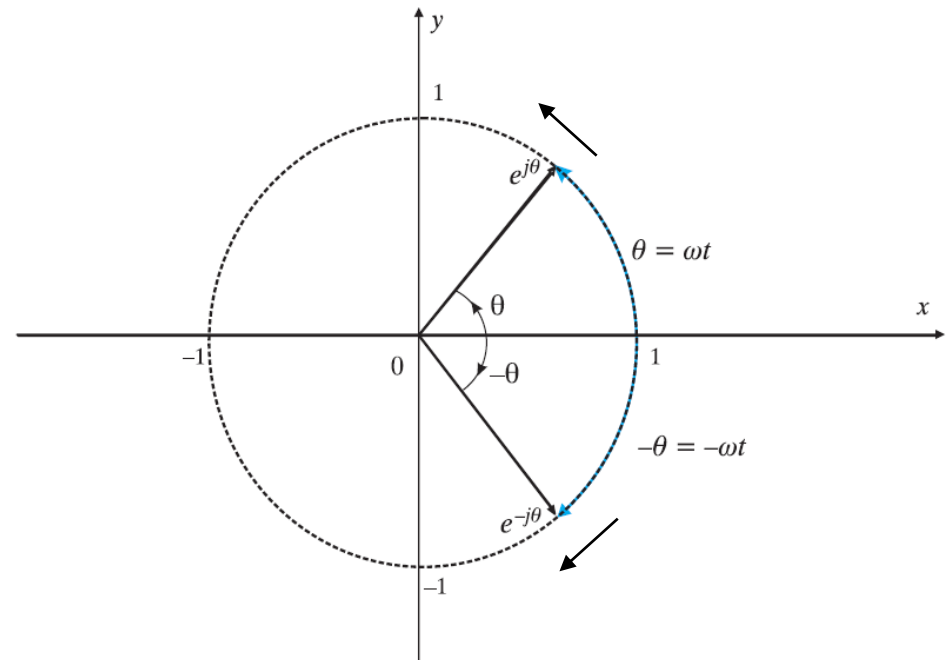
Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (2)

- Έκφραση περιοδικών σημάτων με τη χρήση εκθετικών
- Με χρήση σχέσεων Euler

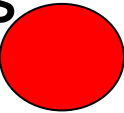
$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



Από το μονόπλευρο στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους – εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς (iii)



Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) + \cos(\theta) - j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) - \cos(\theta) + j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

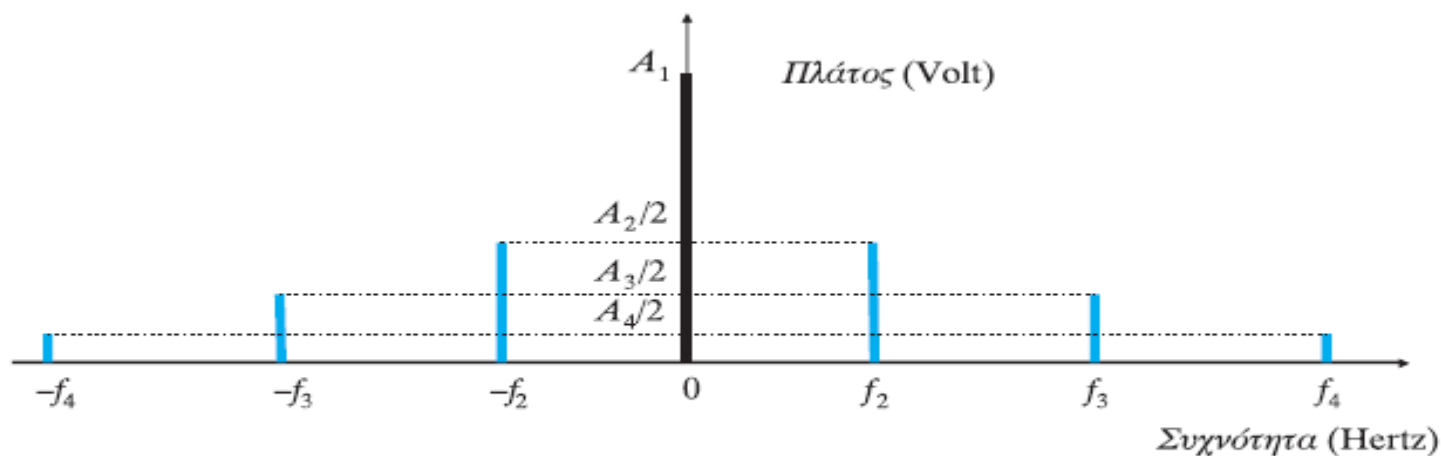
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να

γραφεί διαδοχικά:

(συνέχεια από τη διαφάνεια 50)

$$\begin{aligned} s(t) &= A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} = \\ &= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t} \end{aligned}$$

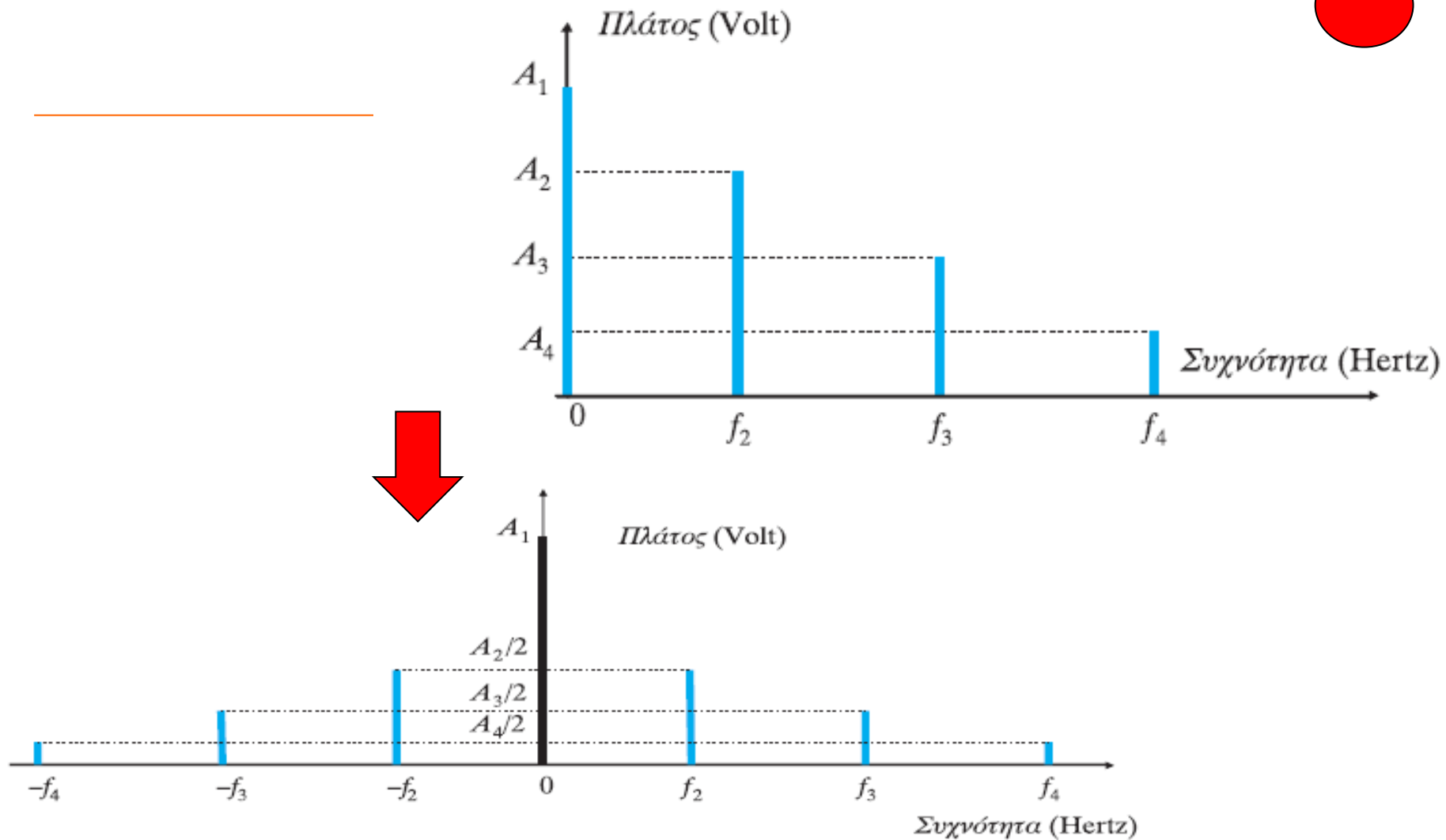
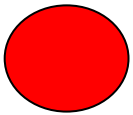
Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.



Σχήμα 2.23

Αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

■ Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου- συχνοτήτων:

- Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}_+^*, \text{ τέτοιο ώστε } x(t+kT) = x(t) \text{ για } k = 1, 2, \dots$$

- Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N \quad m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

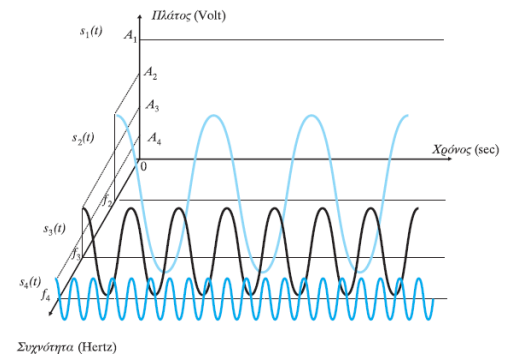
- Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από άθροισμα διακριτών παλμών $A_i \delta(f-f_i)$ σε συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση

$$f = f_1/m_1 = f_2/m_2 = \dots = f_N/m_N, \quad m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

Μετασχηματισμός Fourier

Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας εργαλείο με το οποίο βλέπουμε ένα σήμα από μια άλλη οπτική γωνία:
 - Κοιτάξτε πόσο διαφορετική μπορεί να φανεί μια καρεκλα στα την βλέπουμε από διαφορες γωνιες



Συχνότητα (Hertz)

Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σήματος:

- Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολές συναρτήσει του χρόνου
- Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

Ορισμός – Επέκταση ανάλυσης Fourier για μη περιοδικά σήματα

Όπως αναφέρθηκε στην υποενότητα 2.3.1, το πλάτος και η φάση ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k = kf$ προσδιορίζονται με τον υπολογισμό του αντίστοιχου συντελεστή Fourier

$$V_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi nft} dt = |V_k| e^{j\varphi_k}. \text{ Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η}$$

περίοδος μπορεί να υποτεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \rightarrow +\infty$), και το φάσμα του σήματος θα είναι συνεχές και όχι διακριτό ($nf \rightarrow f$). Συνεπώς, με τη γενίκευση των εκφράσεων για τις σειρές Fourier προκύπτει η έκφραση του φάσματος μη περιοδικών σημάτων, δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \text{ [το μέτρο της } G(f) \text{ έχει μονάδες Volt/Hz]}$$

Αντίστοιχα, η σχέση που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του φάσματος ενός σήματος δίνεται παρακάτω:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

Μετασχηματισμός Fourier (1)

- Ο μετασχηματισμος (Μ/Σ) Fourier του σηματος $x(t)$ είναι ο:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

- Ο αντιστροφος Μ/Σ Fourier δίδεται απο την σχέση:

$$F^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

- Συμβολίζουμε ένα ζεύγος Μ/Σ Fourier ως εξής: $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

Άλλη Μορφή Μ/Σ Fourier

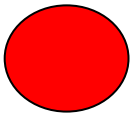
- Ισοδύναμες αναφορές με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Η κυκλική συχνότητα $\omega=2\pi f$ μετριέται σε radians/sec και $d\omega=2\pi df$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

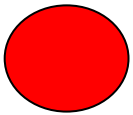


Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

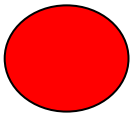
$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1
$x(t) = 1$	$\delta(f)$



Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0} X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t} x(t) = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(f) \delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(f) H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$[X(f) * Y(f)]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xrightarrow{F} X(\Omega)$ ή $x(t) \xrightarrow{F} X(f)$	$y(t) = X(t)$	$Y(f) = x(-f)$



Παραδείγματα

$$\sin c^2(t) \leftrightarrow tri(f)$$

Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας

$$4 \sin c^2(4t) \leftrightarrow tri\left(\frac{f}{4}\right)$$

$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect(t-10) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f \cdot 10} \text{sinc}(f)$$

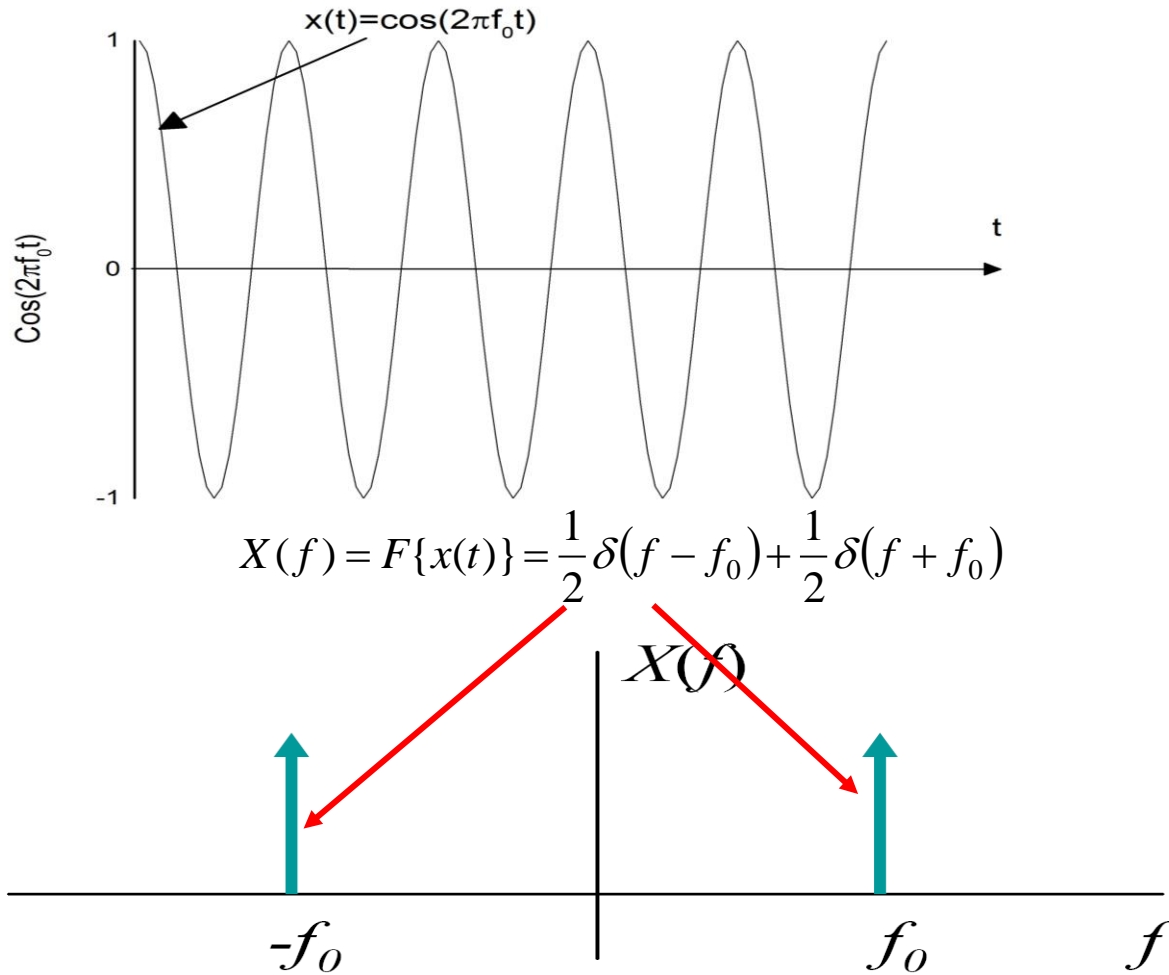
Ιδιότητα χρονικής μετατόπισης

$$\cos(2\pi 10t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f-10) + \delta(f+10)] \Leftrightarrow$$

Ιδιότητα διΐσμού

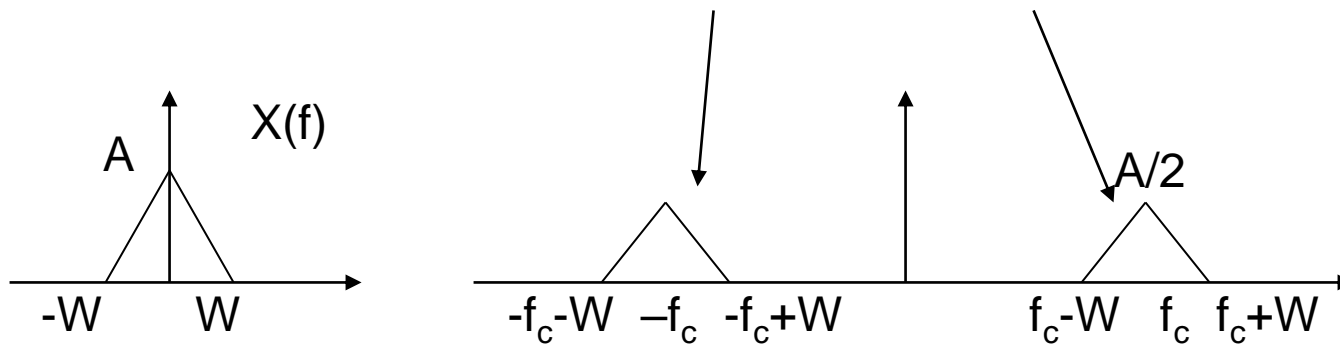
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(t-10) + \delta(t+10)] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi 10(-f)) = \cos(2\pi 10f)$$

Παραδείγματα (4)



Παραδείγματα (5)

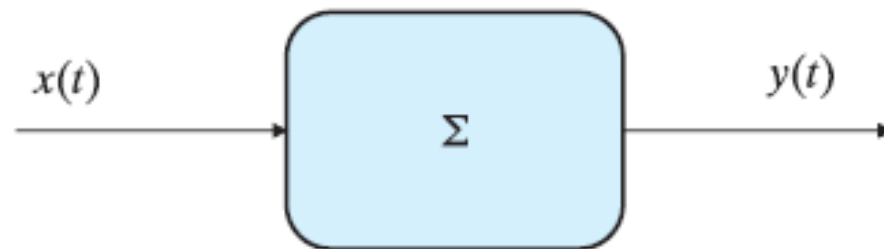
■ $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$



Η έννοια της συνέλιξης σχετίζεται με τη χαρακτηριστική σχέση εισόδου-εξόδου σε γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα $y(t)$.



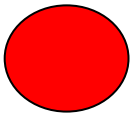
Σχήμα 2.24

Απεικόνιση εισόδου – συστήματος – εξόδου

Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S(x(t))$$

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:



Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t))$$

και

$$y_2(t) = S(x_2(t))$$

τότε:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))$$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t)), y_2(t) = S(x_2(t)), \dots, y_k(t) = S(x_k(t))$$

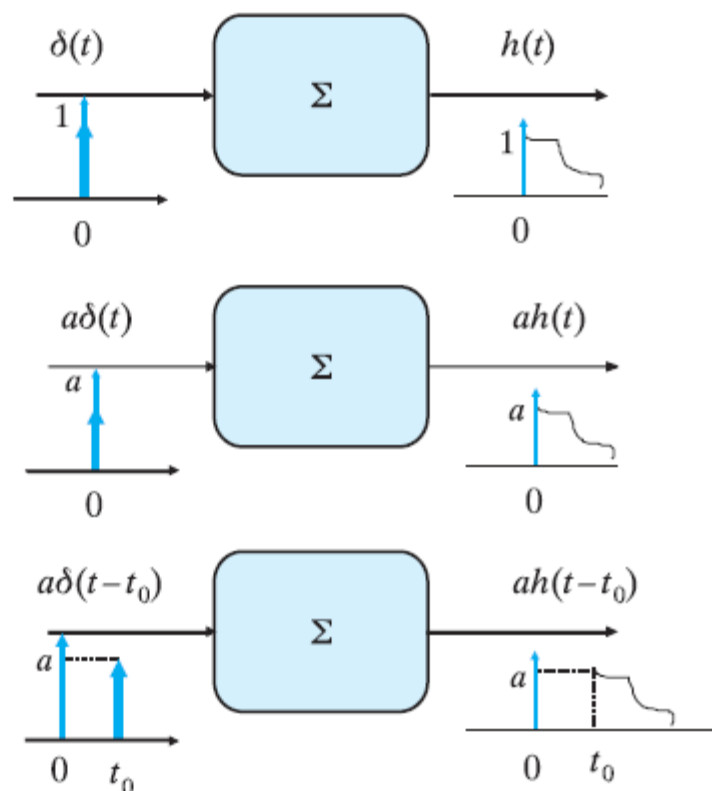
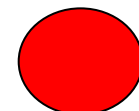
τότε:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_k y_k(t) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i(t) = \\ &= S(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_k x_k(t)) = S\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i(t)\right) \end{aligned}$$

Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, εάν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0 , το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0 .

Δηλαδή, αν $y(t) = S[x(t)]$ τότε $y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$.

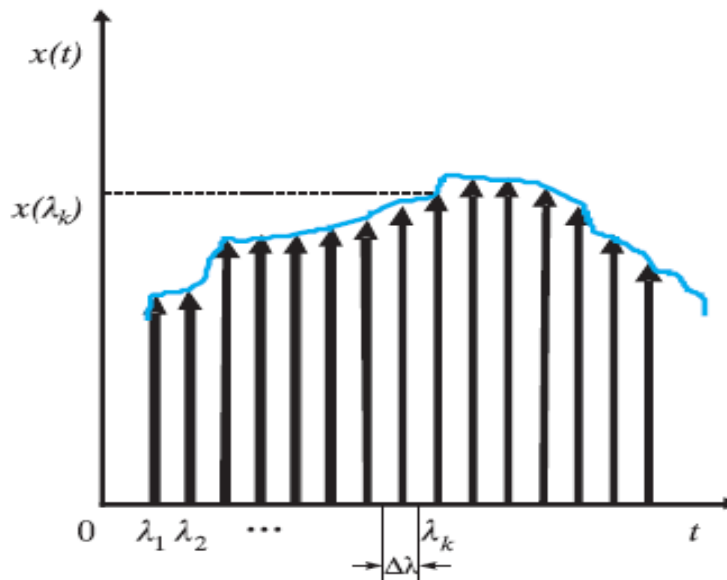
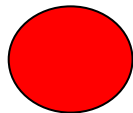
Η **κρουστική απόκριση** ενός συστήματος $h(t)$ είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



Σχήμα 2.25

Κρουστική απόκριση γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



Σχήμα 2.26

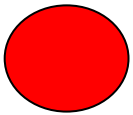
Αναπαράσταση σήματος εισόδου ως αθροίσματος παλμών

οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i) \delta(t - \lambda_i)$$

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i) h(t - \lambda_i) \xrightarrow{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = x(t) * h(t)$$



Η πράξη $x(t) * h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t), h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$$

αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος
οπότε ισχύει:

$$\begin{array}{ccc} y(t) = & x(t) * & h(t) \\ \updownarrow F & \updownarrow F & \updownarrow F \\ Y(f) = & X(f) \cdot & H(f) \end{array}$$

Φίλτρα

Φίλτρα

Το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας $H(f)$ παίρνει σημαντικές τιμές μόνο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων

- Βαθυπερατά
 - Χαμηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Υψιπερατό
 - Υψηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Ζωνοπερατό
 - Συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζωνοφρακτικό
 - Φράση συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζώνες διέλευσης και αποκοπής

Τύποι Φίλτρων

- Ιδανικό Βαθυπερατό (Low Pass)

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

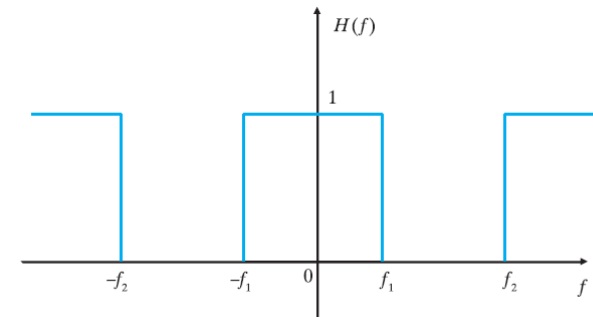
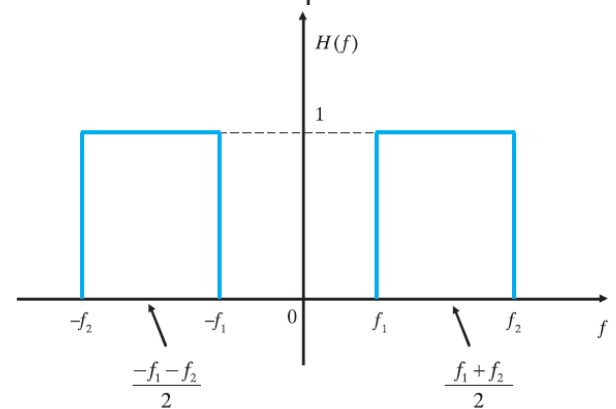
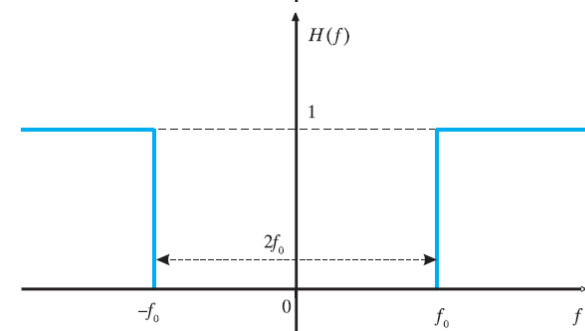
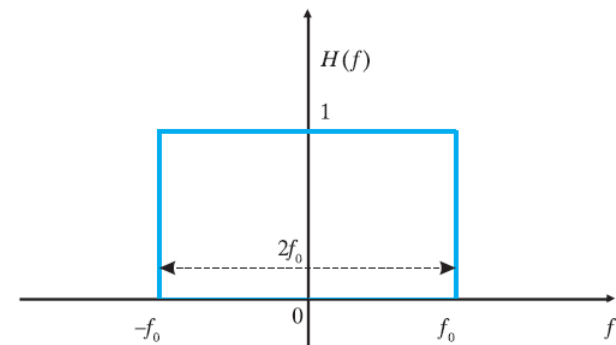
$$H(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_0 \\ 1, & |f| > f_0 \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

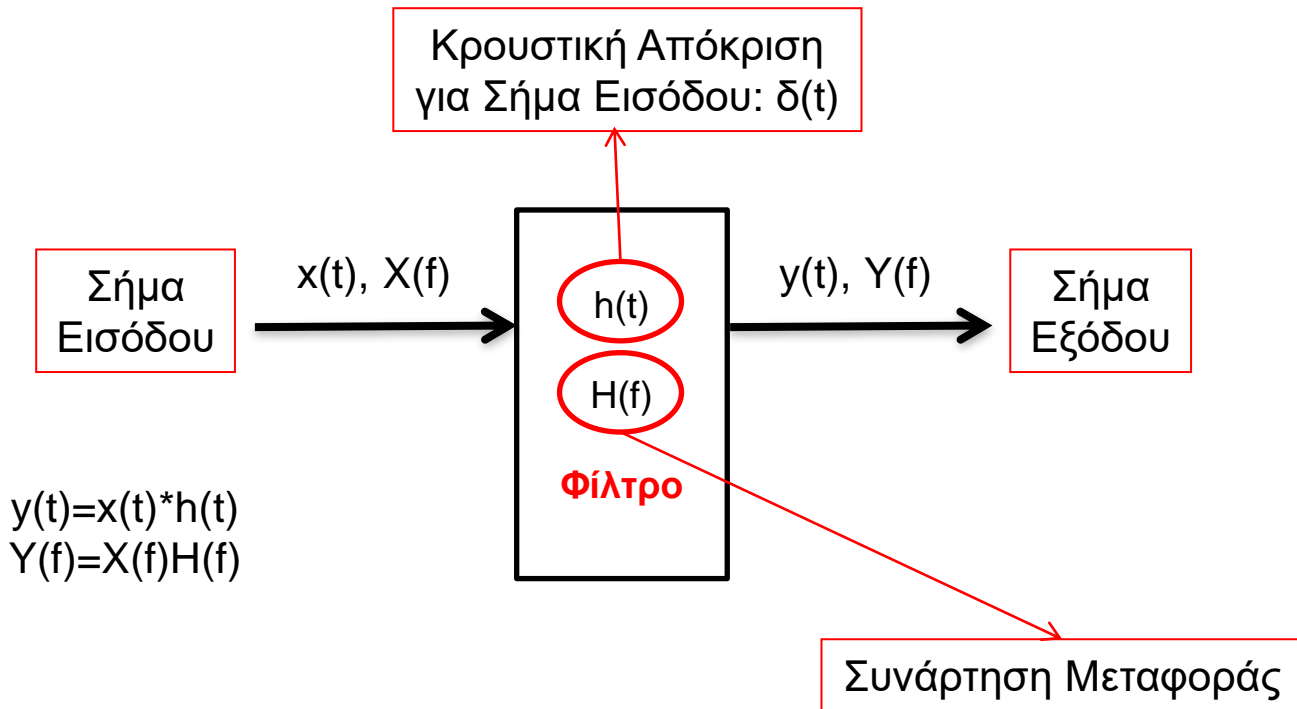
$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

$$H(f) = \begin{cases} 0, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Ορολογία Φίλτρων



Ερωτήσεις



Παραδείγματα – Λυμένες Ασκήσεις

ΘΕΜΑ 1 (20 Μονάδες)

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(2\pi 100t)$. Να υπολογιστεί η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (αν υπάρχουν) για τα παρακάτω σήματα:

Ερώτηση 1^η (5 Μονάδες): $y_a(t) = x(t) + x(2t)$

Ερώτηση 2^η (5 Μονάδες): $y_\beta(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right) \right]^2$

Ερώτηση 3^η (5 Μονάδες): $y_\gamma(t) = [x(t) \cdot x(5t)] * \text{sinc}(1000t) + 1$, όπου ο τελεστής ‘*’ αντιστοιχεί στη συνέλιξη

Ερώτηση 4^η (5 Μονάδες): $y_\delta(t) = [x(t) \cdot 10\text{sinc}^2(10t)] + \delta(t)$

Ερώτηση 1^η:

$$y_a(t) = x(t) + x(2t) = \cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 200t)$$

Οι περίοδοι των 2 όρων είναι αντίστοιχα

$$T_1 = \frac{1}{100} \text{ sec}, T_2 = \frac{1}{200} \text{ sec}.$$

Ο λόγος τους είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{200}} = 2, \text{ ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο}$$

$$T = T_1 = 2T_2 = \frac{1}{100} \text{ sec}$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 200Hz άρα το σήμα έχει συχνότητα δειγματοληψίας ίση με 400Hz

Ερώτηση 2^η:

$$y_{\beta}(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right) \right]^2 = \cos^2(200t) = \frac{1 + \cos(400t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{400}{2\pi} t\right)$$

Έχουμε έναν σταθερό και έναν περιοδικό όρο με συχνότητα $\frac{200}{\pi} \text{ Hz}$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{\pi}{200} \text{ sec}$ και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $\frac{400}{\pi} \text{ Hz}$

Ερώτηση 3^η:

$$y_{\gamma}(t) = [x(t) \cdot x(5t)] * \text{sinc}(1000t) + 1$$

$$x(t) \cdot x(5t) = \cos(2\pi 100t) \cdot \cos(2\pi 500t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 400t)$$

Άρα

$$y_{\gamma}(t) = \left[\frac{1}{2} \cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 400t) \right] * \text{sinc}(1000t) + 1 \stackrel{F}{\leftrightarrow} \\ \stackrel{F}{\leftrightarrow} F \left\{ \frac{1}{2} \cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 400t) \right\} \cdot \frac{1}{1000} \text{rect} \left(\frac{f}{1000} \right) + \delta(f)$$

Στην ανωτέρω έκφραση ο τετραγωνικός παλμός αποκόπτει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από 500Hz οπότε τελικά έχουμε το σήμα :

$$y_{\gamma}(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{1000} \cos(2\pi 400t) + 1$$

που είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{400}$ sec και συχνότητα 400Hz .

Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 800Hz

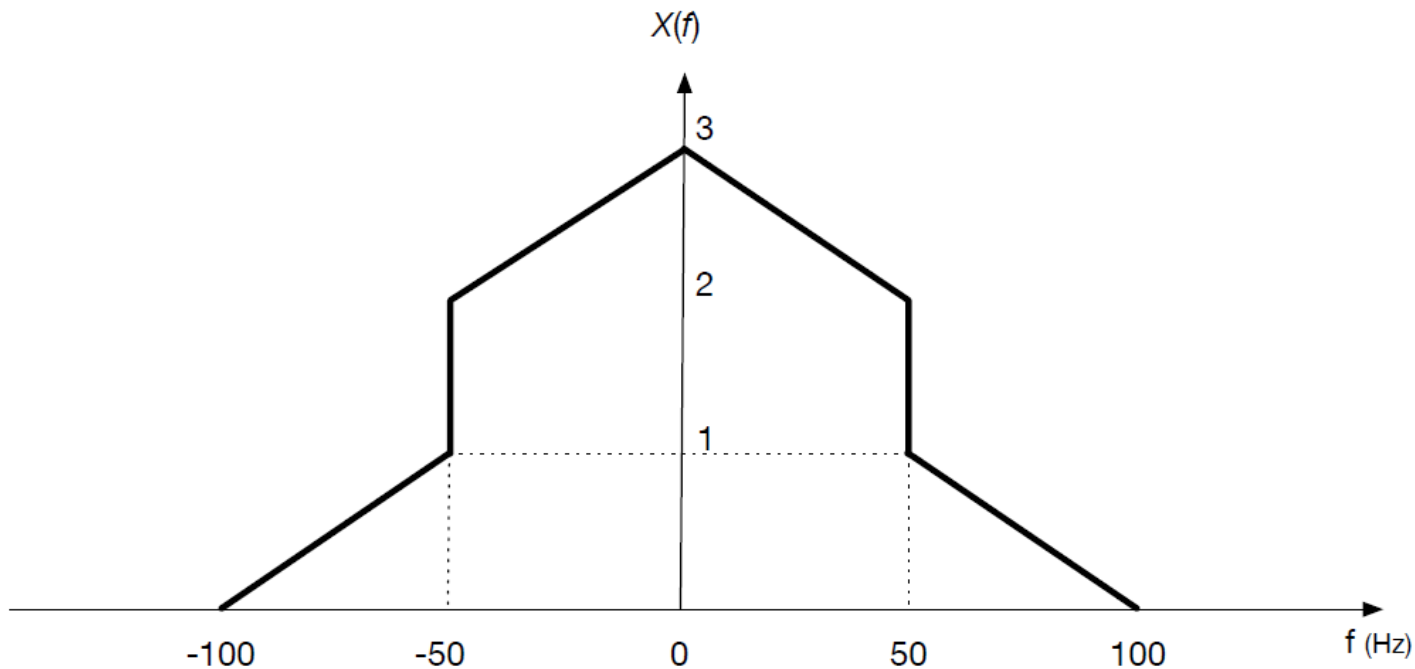
Ερώτηση 4^η:

$$\begin{aligned}y_{\delta}(t) &= [x(t) \cdot 10\text{sinc}^2(10t)] + \delta(t) \\&= \cos(2\pi 100t) \cdot 10\text{sinc}^2(10t) + \delta(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} \\&\stackrel{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2} \left\{ \text{tri} \left(\frac{f - 100}{10} \right) + \text{tri} \left(\frac{f + 100}{10} \right) \right\} + 1\end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Επίσης, το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης άρα δεν δειγματίζεται με το κριτήριο Nyquist.

ΘΕΜΑ 2 (20 Μονάδες)

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



Ερώτηση 1^η (5 Μονάδες): Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

Ερώτηση 1^η: Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 2 \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$a \text{sinc}(at) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$a \text{sinc}^2(at) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{tri}\left(\frac{f}{a}\right)$$

.....

$$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100 \text{sinc}(100t) + 2 \cdot 100 \text{sinc}^2(100t)$$

ΘΕΜΑ 2

ΓΕ2/ 2019-20

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων.

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ2/17-18/Θ7, ΓΕ2/18-19/Θ1.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους $X(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω σημάτων: $x(t) = u(t - 3) - u(t - 7) + \text{tri}(t - 5)$ (όπου u η μοναδιαία βηματική συνάρτηση και όπου tri η συνάρτηση τριγωνικού παλμού).

Με μία προσεκτική απεικόνιση του σήματος προκύπτει ότι οι δύο βηματικοί παλμοί σχηματίζουν ένα τετραγωνικό παλμό:

$$x(t) = u(t-3) - u(t-7) + \text{tri}(t-5) = \text{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) + \text{tri}(t-5)$$

Ισχύουν τα παρακάτω σύμφωνα με την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier για αλλαγή κλίμακας & χρονικής ολίσθησης:

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f)$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \xleftrightarrow{F} 4\text{sinc}(4f)$$

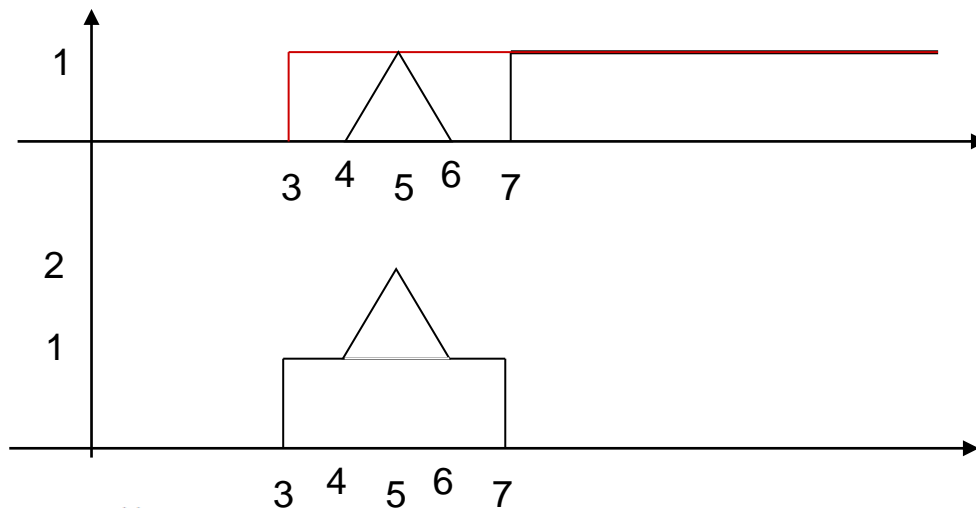
$$\text{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f5} 4\text{sinc}(4f)$$

$$\text{tri}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}^2(f)$$

$$\text{tri}(t-5) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f5} \text{sinc}^2(f)$$

Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι:

$$X(f) = e^{-j2\pi f5} 4\text{sinc}(4f) + e^{-j2\pi f5} \text{sinc}^2(f)$$



ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = 4 \cos(800\pi t)$ και $X_2(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$.

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

- (α). Να υπολογιστεί η έκφραση $x_3(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[x_1\left(\frac{3t}{2}\right) + x_1(t)x_2(t)\right]$
- (β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $x_3(t)$.

1/

(α), (β)

$$x_1\left(\frac{t}{2}\right) = 4 \cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{t}{2}\right) = 4 \cos(2\pi 200t) \leftrightarrow 2[\delta(f - 200) + \delta(f + 200)] \quad (\text{A})$$

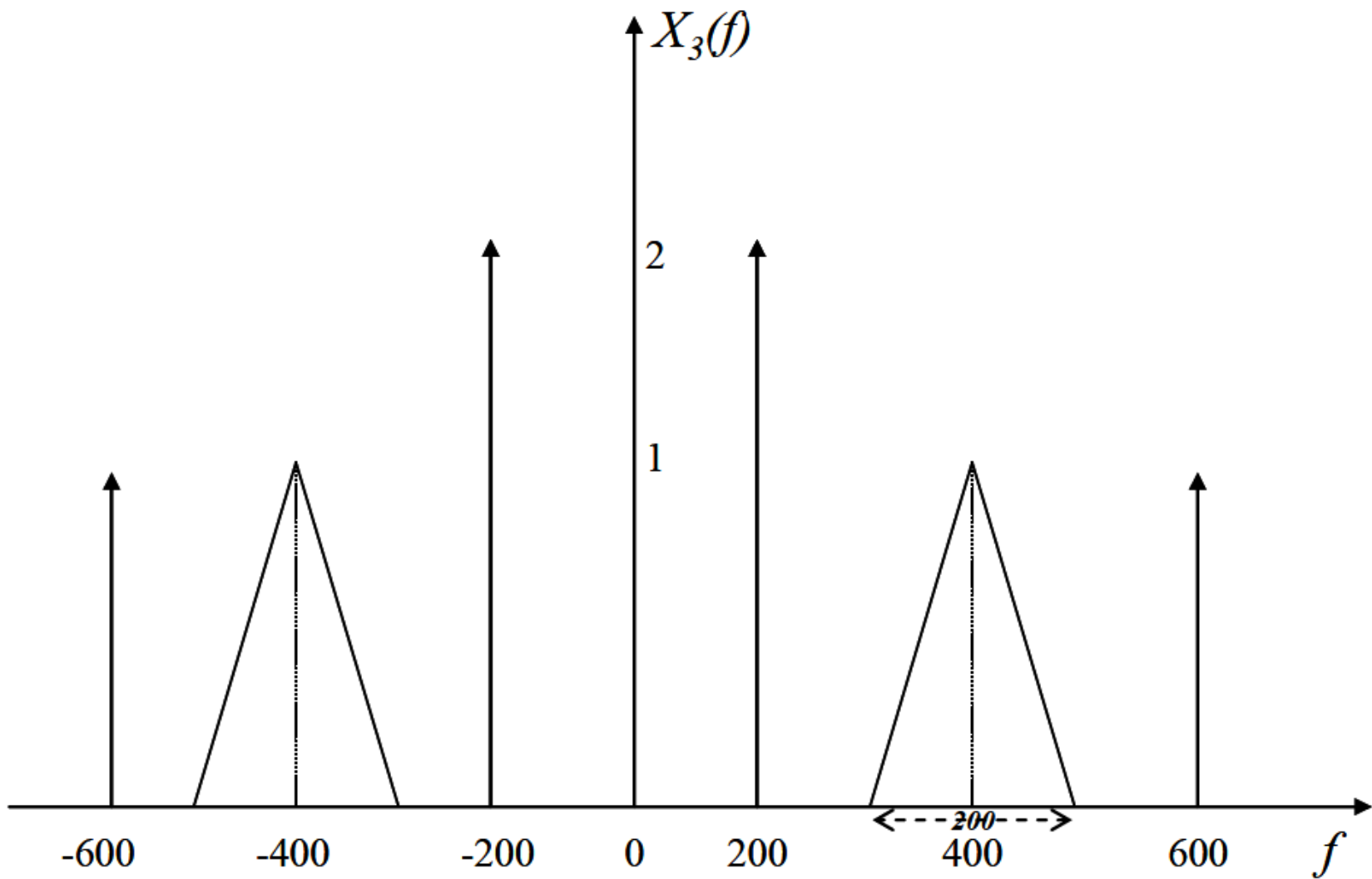
$$\frac{1}{2}x_1\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{1}{2}4 \cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{3t}{2}\right) = 2 \cos(2\pi 600t) \leftrightarrow \delta(f - 600) + \delta(f + 600) \quad (\text{B})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) &= 2 \cos(2\pi 400t)100 \sin c^2(100t) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \{\delta(f - 400) + \delta(f + 400)\} * \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) = \text{tri}\left(\frac{f - 400}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + 400}{100}\right) \end{aligned} \quad (\text{Γ})$$

Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[x_1\left(\frac{3t}{2}\right) + x_1(t)x_2(t) \right] = 4 \cos(2\pi 200t) + 2 \cos(2\pi 600t) + 200 \cos(2\pi 400t) \sin^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2 \left[\delta(f - 200) + \delta(f + 200) \right] + \left[\delta(f - 600) + \delta(f + 600) \right] + \left[\text{tri}\left(\frac{f - 400}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + 400}{100}\right) \right]$$



ΘΕΜΑ 1 ΓΕ2/1819

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών *Fourier* και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων. Επίσης, μόνο στο ερώτημα (ε) απαιτείται χρήση *OCTAVE MATLAB*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/2010-11/Θ6, ΓΕ1/2011-12/Θ5,6, ΓΕ1/2012-13/Θ1,3

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους $X(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω μοναδιαίων βηματικών σημάτων: $x(t) = u(t+4) - u(t+2) + u(t-2) - u(t-4)$

(β) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $Y(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση $y(t) = 8\text{sinc}(8t) - 4\text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους $Z(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση

$$z(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \right].$$
 Επίσης να διερευνηθεί η περιοδικότητα του σήματος και να υπολογιστεί η

περίοδός του (αν υπάρχει).

(δ) Να προσδιοριστούν και να σχεδιαστούν πρόχειρα τα φάσματα που προκύπτουν από τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των φασμάτων που υπολογίστηκαν στα ερωτήματα (β), (γ):

(i) $W(f) = Y(f)Z(f)$

(ii) $V(f) = Y(f) * Y(f)$ (το σύμβολο * αντιστοιχεί στην πράξη της συνέλιξης)

(α)

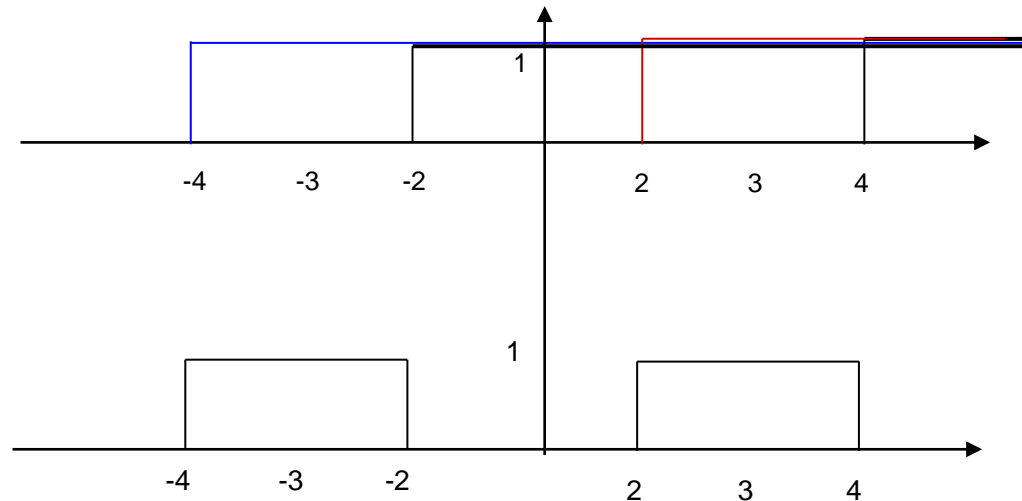
Έχουμε διαδοχικά:

$$x(t) = u(t+4) - u(t+2) + u(t-2) - u(t-4) = \text{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\text{sinc}(2f) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) \\ \text{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(f) = e^{j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) + e^{-j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) = 2\text{sinc}(2f) [e^{j2\pi f3} + e^{-j2\pi f3}] = 2\text{sinc}(2f) 2\cos(6\pi f)$$



(β)

Εφόσον στο προηγούμενο ερώτημα προέκυψε ότι $rect\left(\frac{t+3}{2}\right) + rect\left(\frac{t-3}{2}\right) \xrightarrow{F} 2\text{sinc}(2f) 2\cos(6\pi f)$

με βάση την ιδιότητα του δυϊσμού θα ισχύει:

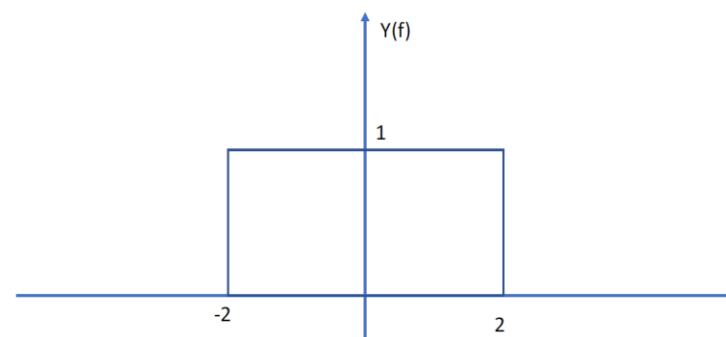
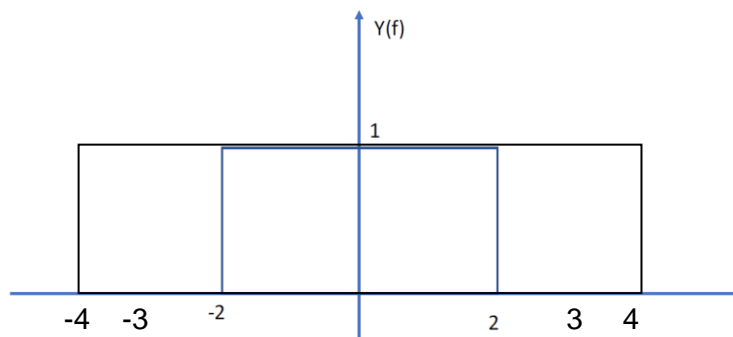
$$4\text{sinc}(2t) \cos(6\pi t) \xrightarrow{F} rect\left(\frac{-f+3}{2}\right) + rect\left(\frac{-f-3}{2}\right) = rect\left(\frac{f-3}{2}\right) + rect\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} 4\text{sinc}(2t) \cos(6\pi t) &= 2\text{sinc}(2t) 2\cos(6\pi t) \xrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2}\right) * [\delta(f-3) + \delta(f+3)] = \\ &= rect\left(\frac{f-3}{2}\right) + rect\left(\frac{f+3}{2}\right) \end{aligned}$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} y(t) &= 8\text{sinc}(8t) - 4\text{sinc}(2t) \cos(6\pi t) \xrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{8}\right) - rect\left(\frac{f-3}{2}\right) - rect\left(\frac{f+3}{2}\right) = \\ &= rect\left(\frac{f}{4}\right) \end{aligned}$$



Εφόσον ισχύει $\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$,

με την ιδιότητα του δυΐσμού θα έχουμε

$$\frac{1}{2} [\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi t_0 f)$$

Συνεπώς

$$z(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \right] \xleftrightarrow{F} \cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$$

Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Εναλλακτικά

$$\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f/8}$$

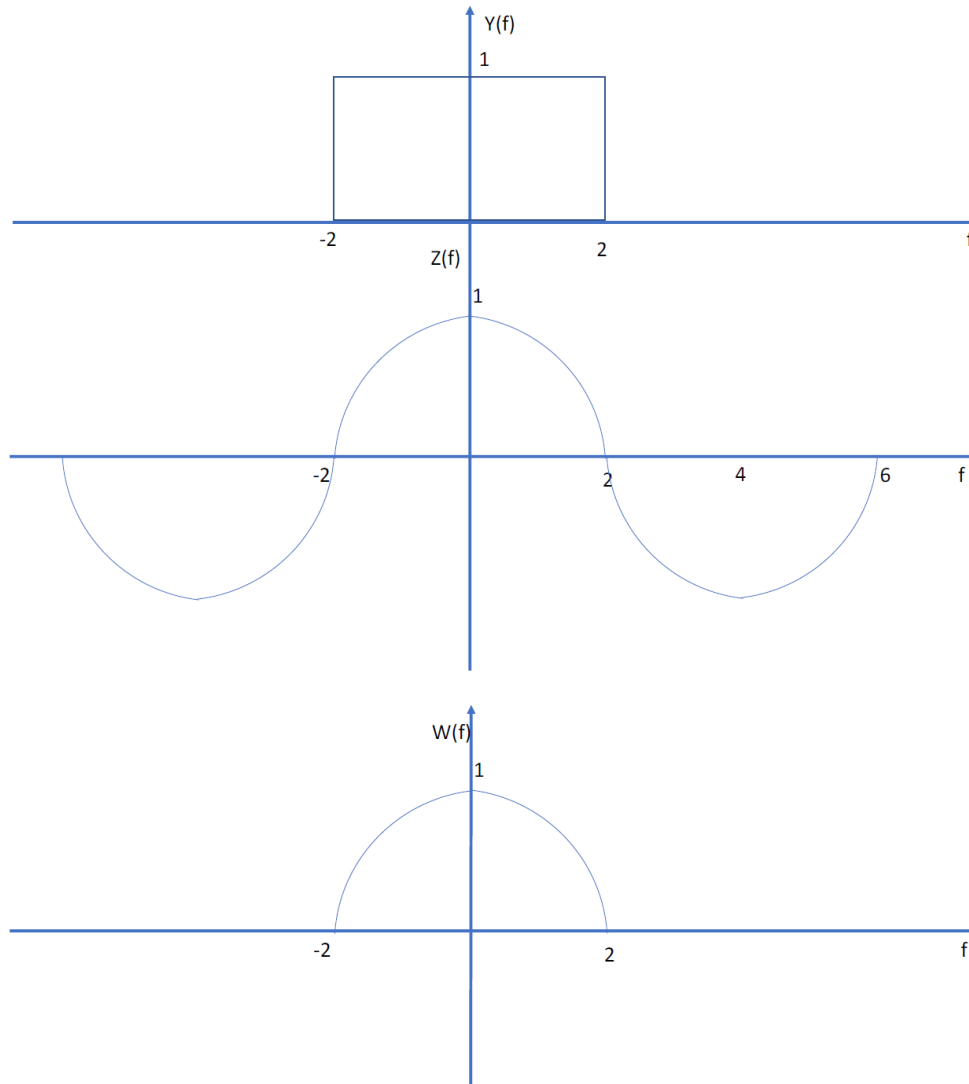
$$\delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f/8}$$

Και με χρήση του κανόνα του Euler

$$z(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \right] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} \left[e^{-j2\pi f/8} + e^{j2\pi f/8} \right] = \cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$$

(δ)

$$(i) W(f) = Y(f)Z(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) \cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$$



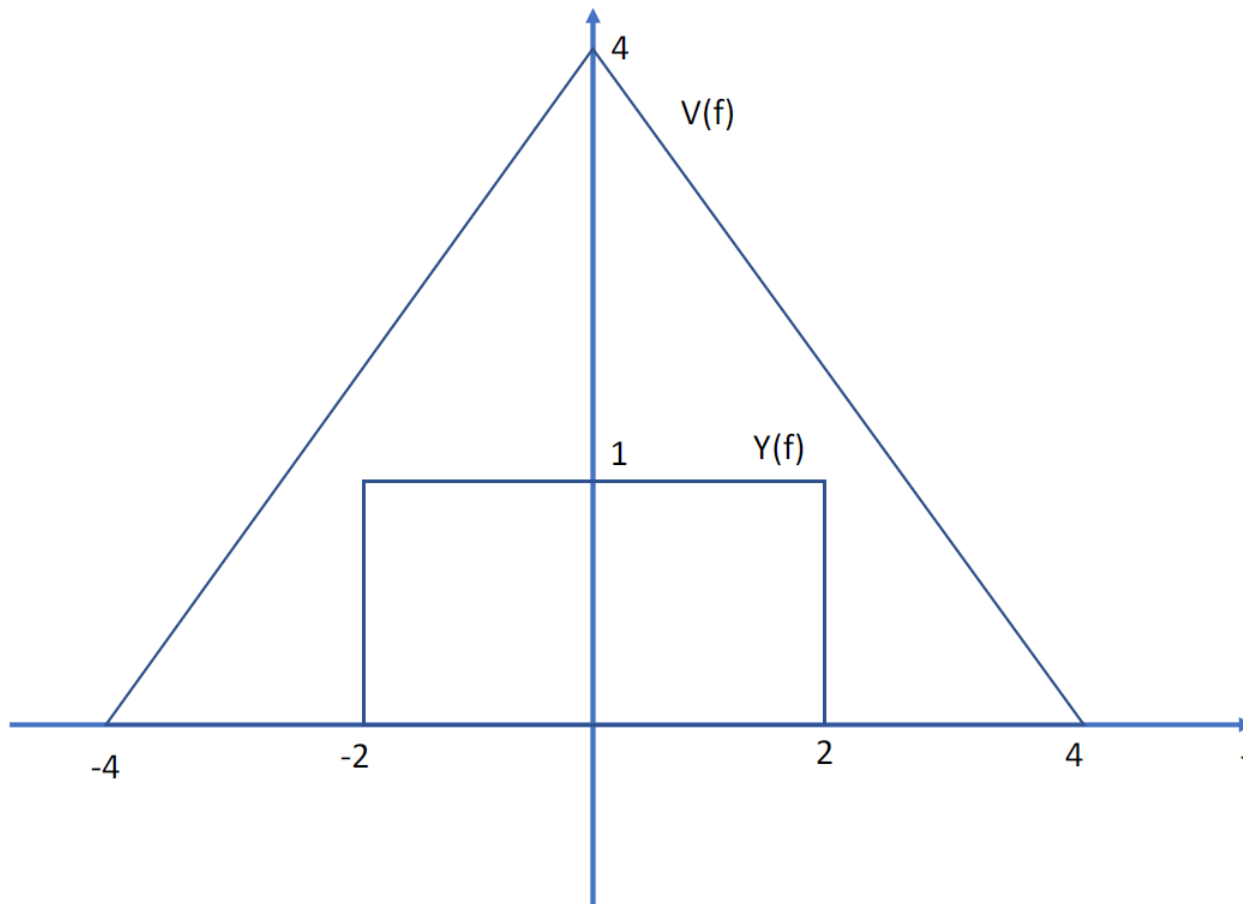
$$(ii) V(f) = Y(f) * Y(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) * \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right)$$

Στο πεδίο του χρόνου έχουμε:

$$v(t) = 4 \sin c(4t) \cdot 4 \sin c(4t) = 16 \sin^2(4t)$$

Επιστρέφοντας στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε:

$$v(t) = 16 \sin^2(4t) \xrightarrow{F} 16 \frac{1}{4} \text{tri}\left(\frac{f}{4}\right) = 4 \text{tri}\left(\frac{f}{4}\right)$$



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)]$, όπου $a > f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

$$(ε) x_6(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)], \text{ όπου } a > f_0$$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \mathfrak{F}[2a \cdot \text{sinc}(2at)]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

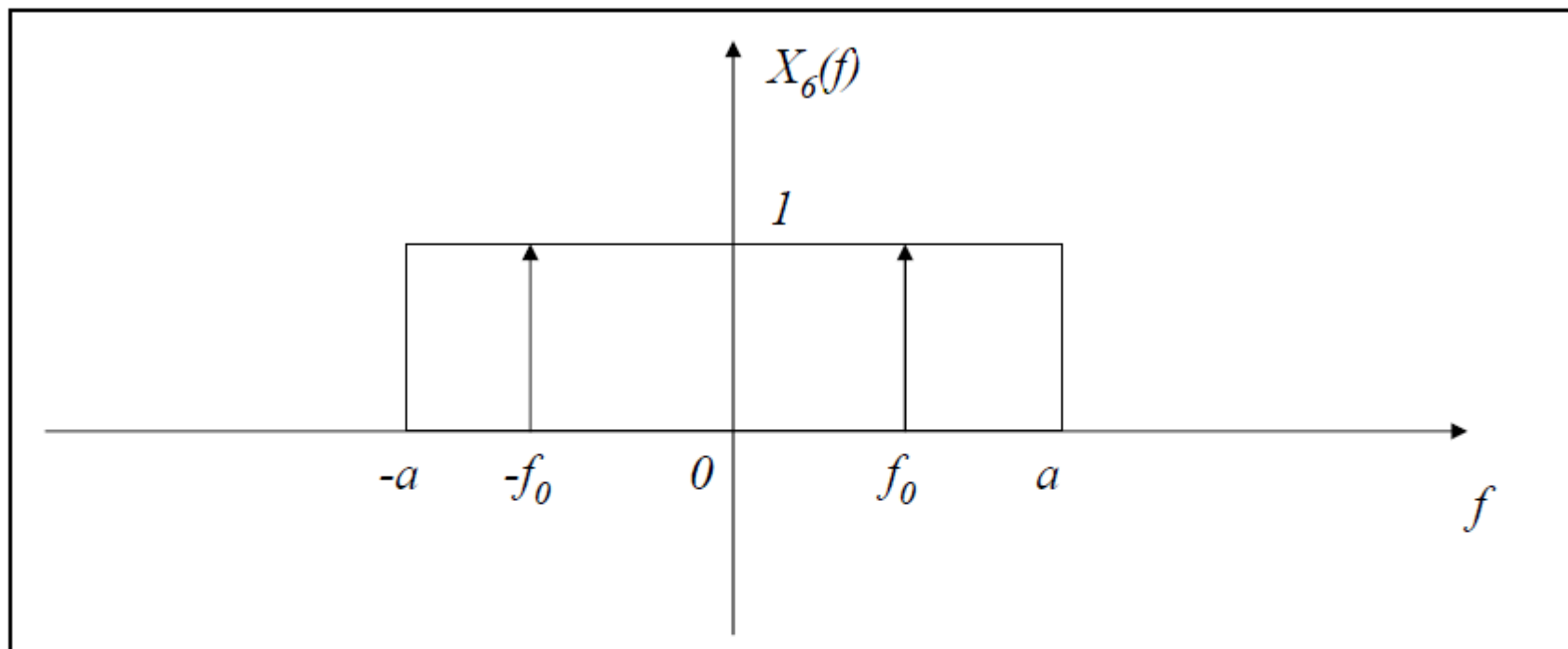
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = X(f)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f) \Leftrightarrow$$

$$\text{και } \Leftrightarrow \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $[2a \cdot \text{sinc}(2at)]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \frac{1}{f_0}$

ΘΕΜΑ 6

ΕΞ2016Α

Δίνεται το σήμα $x(t) = \sin(100t)$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και η ικανότητα δειγματοληψίας (με το κριτήριο Nyquist) των παρακάτω σημάτων. Επίσης για κάθε σήμα να υπολογίσετε –αν υπάρχουν- την περίοδο και την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

(α) $y(t) = [x(t)]^2$

(β) $z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]$

(γ) $w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]^2$

(δ) $r(t) = x(5.5 \cdot t) \cdot x(2.5 \cdot t)$

(α)

$$y(t) = [x(t)]^2 = \sin^2(100t) = \frac{1 - \cos(200t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(2\pi \frac{200}{2\pi} t\right)}{2}$$

Το σήμα έχει έναν συνημιτονικό όρο άρα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_y = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$,
με περίοδο $T_y = \frac{\pi}{100} \text{ sec}$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,y} = \frac{200}{\pi} \text{ Hz}$

(β)

$$z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right] = \sin(100t) * \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi t} = \sin(100t) * \operatorname{sinc}(100t) = \\ = \sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) * \operatorname{sinc}(100t)$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$Z(f) = \frac{1}{2j} \left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right) \right] \cdot \frac{1}{100} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το τελικό σήμα περιλαμβάνει τους 2 παλμούς δ στις συχνότητες $\pm \frac{100}{2\pi} \text{ Hz} = \pm \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$ (εφόσον στην ανωτέρω πράξη ο τετραγωνικός παλμός δρα ως βαθυπερατό φίλτρο με μεγαλύτερη συχνότητα αποκοπής, ίση με 50 Hz).

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_z = \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$,

με περίοδο $T_z = \frac{\pi}{50} \text{ sec}$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,z} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$

$$\begin{aligned}(\gamma) w(t) &= x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]^2 = \sin(100t) + \left[\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi t} \right]^2 = \sin(100t) + \text{sinc}^2(100t) = \\ &= \sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) + \text{sinc}^2(100t)\end{aligned}$$

Το σήμα έχει φάσμα πλάτους :

$$W(f) = \frac{1}{2j} \left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right) \right] + \frac{1}{100} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100Hz, άρα η ελάχιστη συχνότητα Nyquist είναι $f_{s,w} = 200\text{Hz}$.

$$\begin{aligned}
 (\delta) r(t) &= x(5.5t) \cdot x(2.5t) = \sin(550t) \cdot \sin(250t) = \frac{1}{2} [\cos(550t - 250t) - \cos(550t + 250t)] = \\
 &= \frac{1}{2} [\cos(300t) - \cos(800t)]
 \end{aligned}$$

Οι περίοδοι των 2 συνημιτονικών όρων είναι οι εξής:

$$T_1 = \frac{2\pi}{300} \text{ sec}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{800} \text{ sec}$$

και ο λόγος τους είναι

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{300}}{\frac{2\pi}{800}} = \frac{8}{3}, \text{ ρητός, } \text{οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο } T_r = 3T_1 = 8T_2 = \frac{\pi}{50} \text{ sec}$$

, έχει συχνότητα $f_r = \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$,

και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,r} = 2 \frac{400}{\pi} \text{ Hz} = \frac{800}{\pi} \text{ Hz}$

Στόχος της άσκησης Η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας σημάτων τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως επίσης και η εφαρμογή του κριτηρίου Nyquist για την εύρεση της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.

Σχετικές ασκήσεις: Άσκηση 1 (σελ.1), Άσκηση 5 (σελ.8) - Επεξεργασία Σημάτων και Φάσμα και Άσκηση 4 (σελ.27)-Διαμόρφωση από το plh22_oss1-final.pdf

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = \cos(10\pi t)$, $x_2(t) = \sin(t)$.

Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περίοδοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(α) $y_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$

(β) $y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(\pi t)$

Δίνονται τα σήματα $x_3(t) = \delta(t-100) + \delta(t+100)$, $x_4(t) = \frac{1}{200} \sin c\left(\frac{t}{200}\right)$

Να βρεθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(γ) $y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$

(δ) $y_4(t) = x_3(t) * x_4(t)$

(α)

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \cos(10\pi t) - \sin(t)$$

$\cos(10\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{1}{5} \text{ sec}$

$\sin(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = 2\pi \text{ sec}$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{1}{5}}{2\pi} = \frac{1}{10\pi}$ άρρητος, άρα το $y_1(t)$ απεριοδικό

(β)

$$y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(\pi t) = \cos(10\pi t) \cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2} [\sin(\pi t + 10\pi t) + \sin(\pi t - 10\pi t)] = \\ = \frac{1}{2} [\sin(11\pi t) - \sin(9\pi t)]$$

$\sin(11\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{2}{11} \text{sec}$

$\sin(9\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = \frac{2}{9} \text{sec}$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$ ρητός, άρα το $y_2(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_2 = 11T_A = 9T_B = 2 \text{sec}$

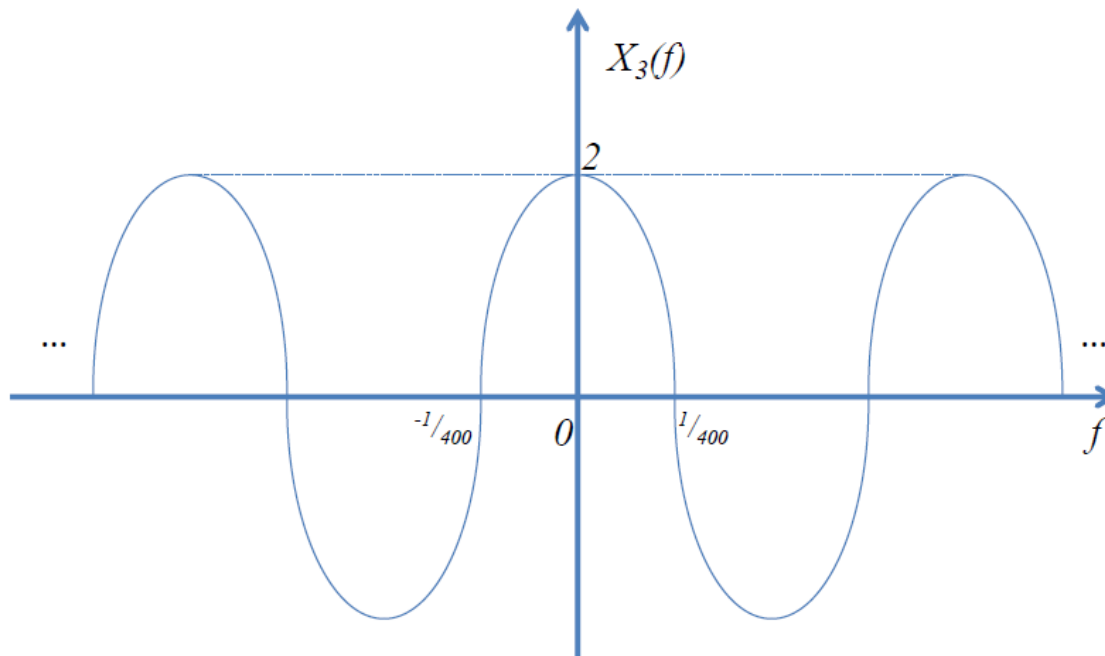
(γ)

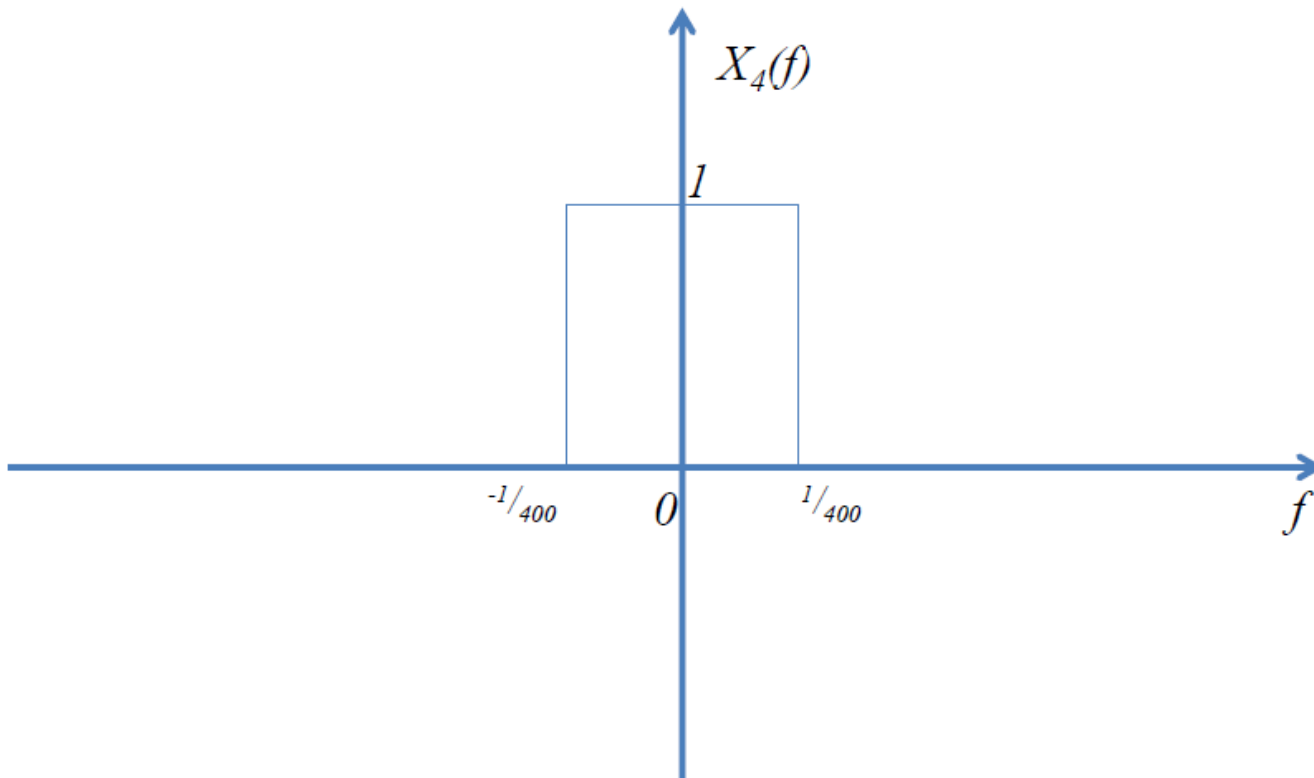
$$y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3(t) \xrightarrow{F} 2 \cos(2\pi f 100) = X_3(f)$$

$$x_4(t) \xrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{1/200}\right) = X_4(f)$$

Τα φάσματα πλάτους των ανωτέρω σημάτων απεικονίζονται παρακάτω

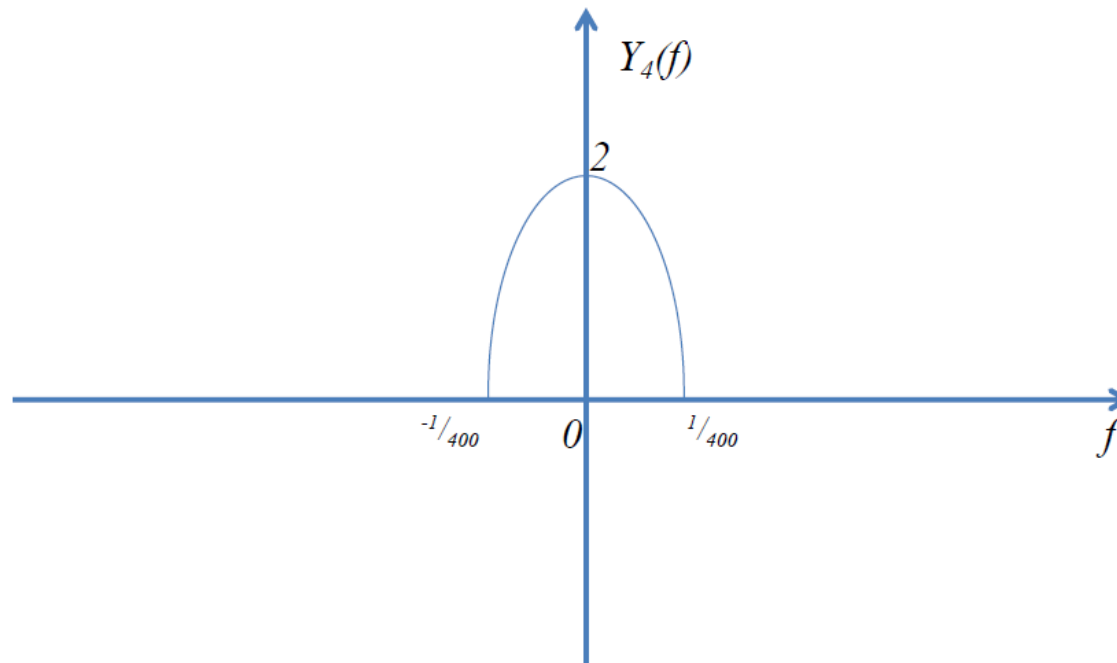




Το φάσμα $Y_3(f) = X_3(f) + X_4(f)$ είναι συνεχές συνεπώς το σήμα $y_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

$$(\delta) \ y_4(t) = x_3(t) * x_4(t) \xrightarrow{F} X_3(f) \cdot X_4(f) = 2 \cos(2\pi f 100) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{1/200}\right)$$

Το φάσμα $Y_4(f)$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Το φάσμα είναι συνεχές, συνεπώς το σήμα $y_4(t)$ δεν είναι περιοδικό.

Παραδείγματα

ΘΕΜΑ 1 2018B

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(2\pi 200t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα
ακόλουθα σήματα:

για τα

(α) $a(t) = [x(t\sqrt{2})]^2$

(β) $b(t) = x(t) + \text{sinc}(400t)$

(γ) $c(t) = [x(4t) + \text{sinc}^2(100t)] * [\delta(t) - 300\text{sinc}(300t)]$ (όπου το ‘*’ υποδηλώνει τη συνέλιξη).

(δ) $e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot \text{sinc}(400t)$

$$(α) a(t) = x^2(t\sqrt{2}) = \frac{1 + \cos(2\pi 400\sqrt{2} \cdot t)}{2} \text{ με τη βοήθεια της ιδιότητας } \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2})$$

$$\text{Περιοδικό με περίοδο } T = \frac{1}{400\sqrt{2}} \text{ sec} = \frac{\sqrt{2}}{800} \text{ sec}$$

$$\text{Συχνότητα } f = 400\sqrt{2} \text{ Hz}$$

(β)

$$b(t) = x(t) + \sin c(400t) = \cos(2\pi 200t) + \sin c(400t) \xrightarrow{F} c(f) = \frac{1}{2} \{ \delta(f - 200) + \delta(f + 200) \} + \frac{1}{400} \operatorname{rect} \left(\frac{f}{400} \right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα μη περιοδικό

(γ)

$$\begin{aligned}c(t) &= [x(4t) + \sin c^2(100t)] * [\delta(t) - 300 \sin c(300t)] = \\&= [\cos(2\pi 800t) + \sin c^2(100t)] * [\delta(t) - 300 \sin c(300t)] \xrightarrow{F} \\&\xrightarrow{F} \left\{ \frac{1}{2} \{ \delta(f - 800) + \delta(f + 800) \} + \frac{1}{100} \text{tri} \left(\frac{f}{100} \right) \right\} \cdot \left\{ 1 - \text{rect} \left(\frac{f}{300} \right) \right\}\end{aligned}$$

Εδώ έχουμε υψιπερατό φίλτρο που αφήνει να περάσουν οι παλμοί δ στα $\pm 800\text{Hz}$

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $T = \frac{1}{800} \text{sec}$

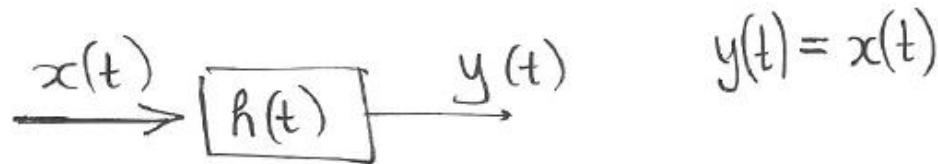
(δ)

$$e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot \sin c(400t) = 1 + \cos(2\pi 200t) \cdot t \cdot \frac{\sin(400\pi t)}{400\pi t} = 1 + \frac{1}{800\pi} \sin(2\pi 400t) \quad (\text{με βάση την ιδιότητα } \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta))$$

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $T = \frac{1}{400} \text{ sec}$

Παράδειγμα με φίλτρα.

Ποιά η σχέση των a, b ώστε $(a, b > 0)$
να ισχύει $a \operatorname{sinc}(at) * b \operatorname{sinc}^2(bt) = b \operatorname{sinc}^2(bt)$?



$$x(t) = b \operatorname{sinc}^2(bt)$$

$$h(t) = a \operatorname{sinc}(at) \quad a, b > 0$$

Υπολογισμός $X(f)$

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}(f)$

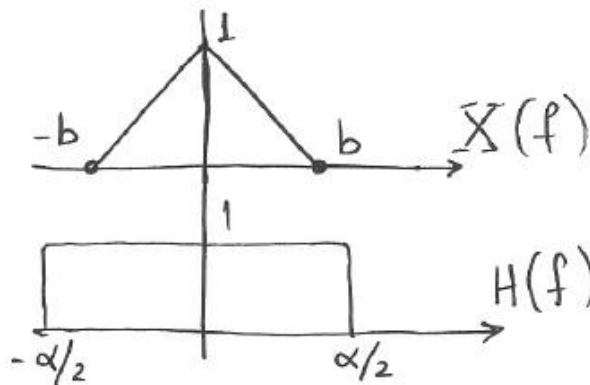
αλλ. υψήθουας $\text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{b} \text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$
 $\Rightarrow b \text{sinc}^2(bt) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{b}\right)$

Υπολογισμός $H(f)$.

Γνωρίζουμε ότι $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f)$

αλλ. υψήθουας $\text{sinc}(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\alpha} \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow \alpha \text{sinc}(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

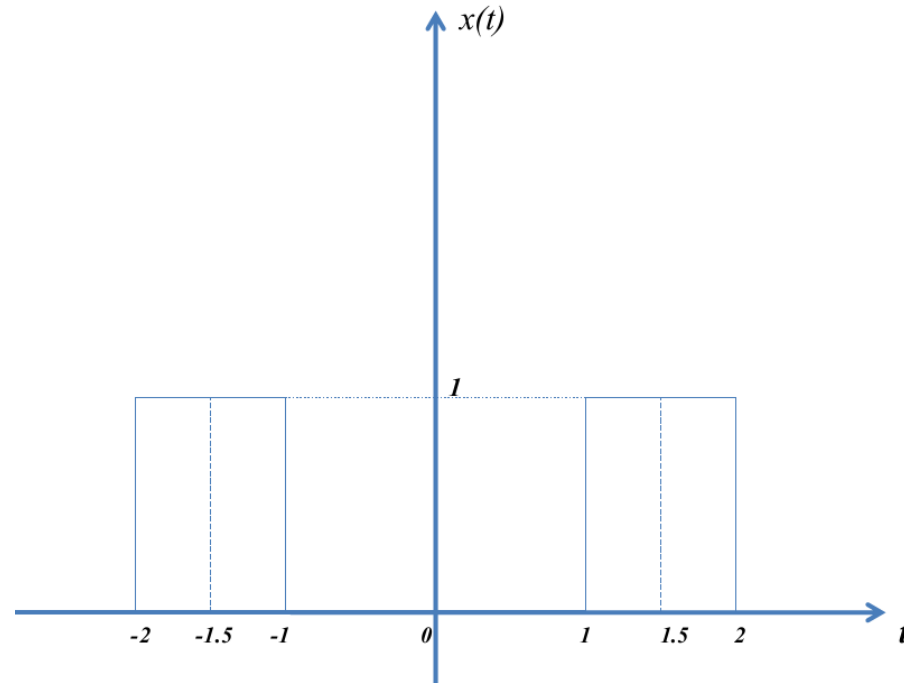


Εφείς θέλουμε $X(f) \cdot H(f) = X(f)$

οπότε $b \leq \frac{\alpha}{2}$

ΘΕΜΑ 4 / ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής

$$\text{συνέλιξη: } y(t) = \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} * \text{rect}(t) .$$

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση
123 με $H(f) = \cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = \text{rect}(t - 1.5) + \text{rect}(t + 1.5) .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5} \text{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5} \text{sinc}(f) = 2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f) .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} * \text{rect}(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$Y(f) = \mathfrak{F} \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} \cdot \mathfrak{F} [\text{rect}(t)] =$$
$$= [1 + \cos(6\pi f)] \cdot \text{sinc}(f) = \text{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \text{sinc}(f)$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{[1 + \cos(6\pi f)] \cdot \text{sinc}(f)}{2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

$$1 + \cos(6\pi f) = 2 \cos^2(3\pi f)$$

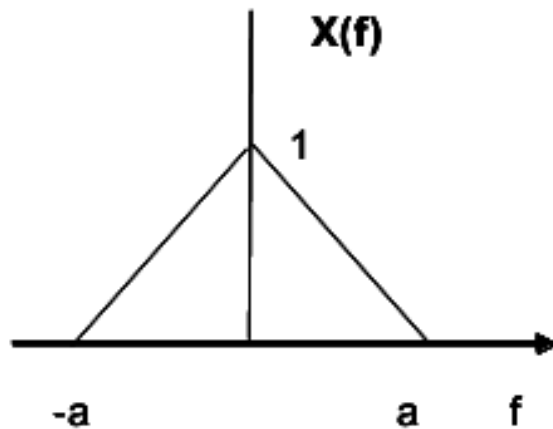
τελικά έχουμε:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2 \cos^2(3\pi f) \cdot \text{sinc}(f)}{2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f)} = \cos(3\pi f)$$

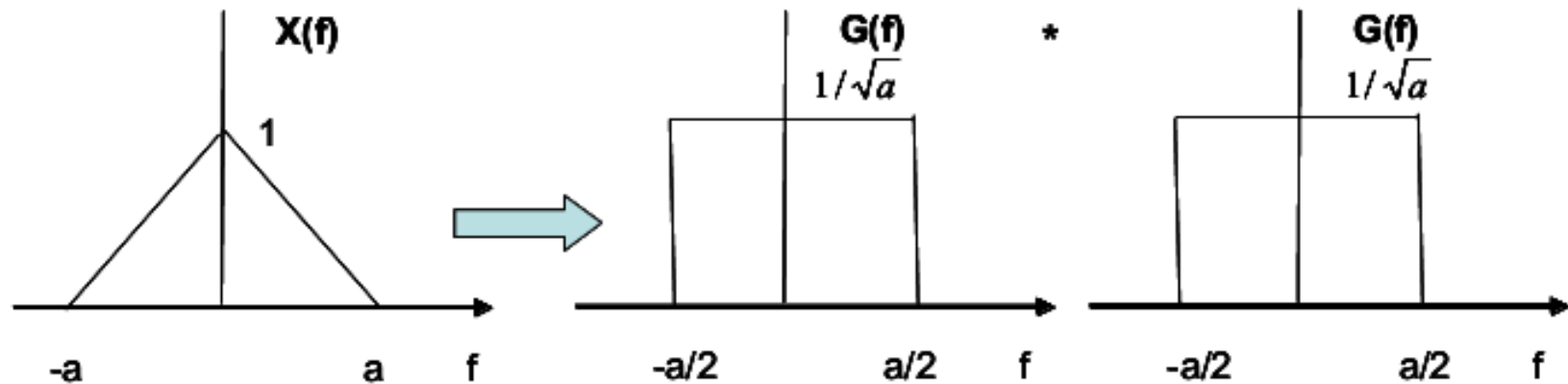
Θέμα 5

ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ $[X(f)]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα $x(t)$ προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος $G(f)$ όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση $g(t)$ με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a} \sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \text{sinc}^2(at)$$