ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ-41

4^{η} ΟΣΣ

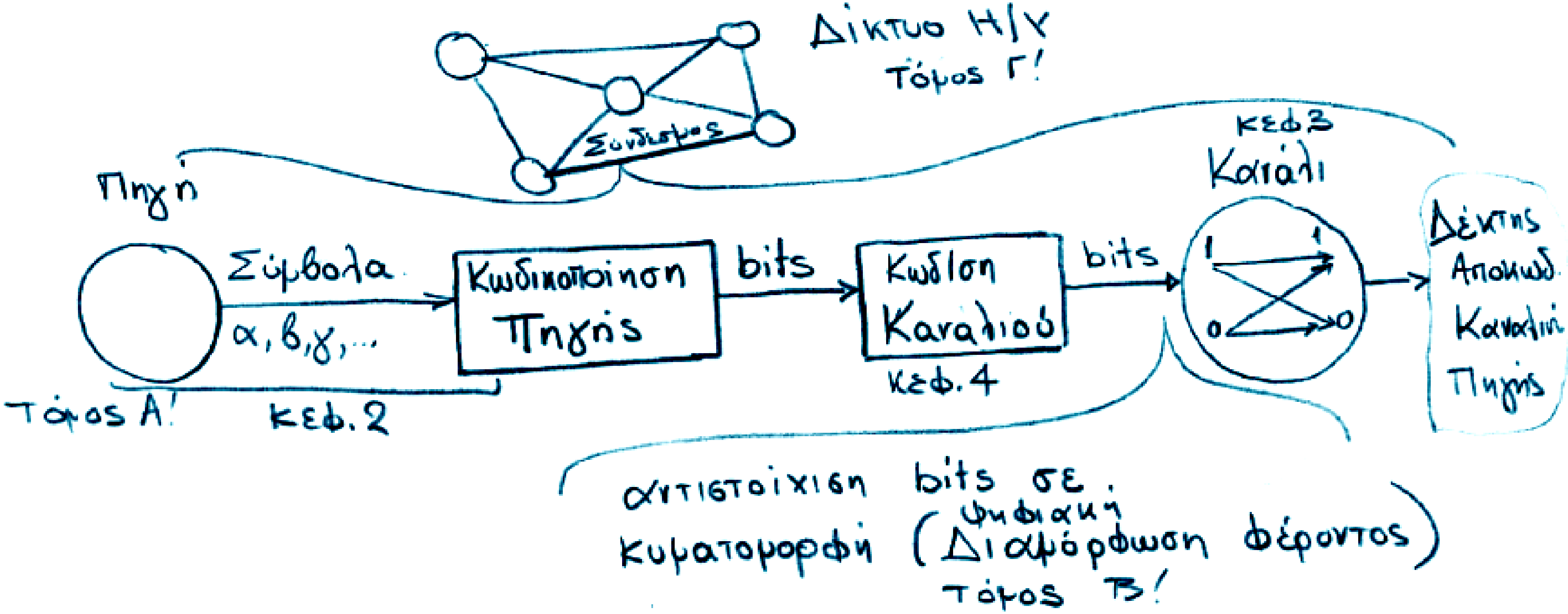
20.03.2021

Ν.Δημητρίου

Θεωρία Πληροφορίας

Επικοινωνιακό Μοντέλο

Επικοινωνία: Μεταβίβαση Πληροφορίας



Ειδικά θέματα:

1) Πιθανότητες- Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

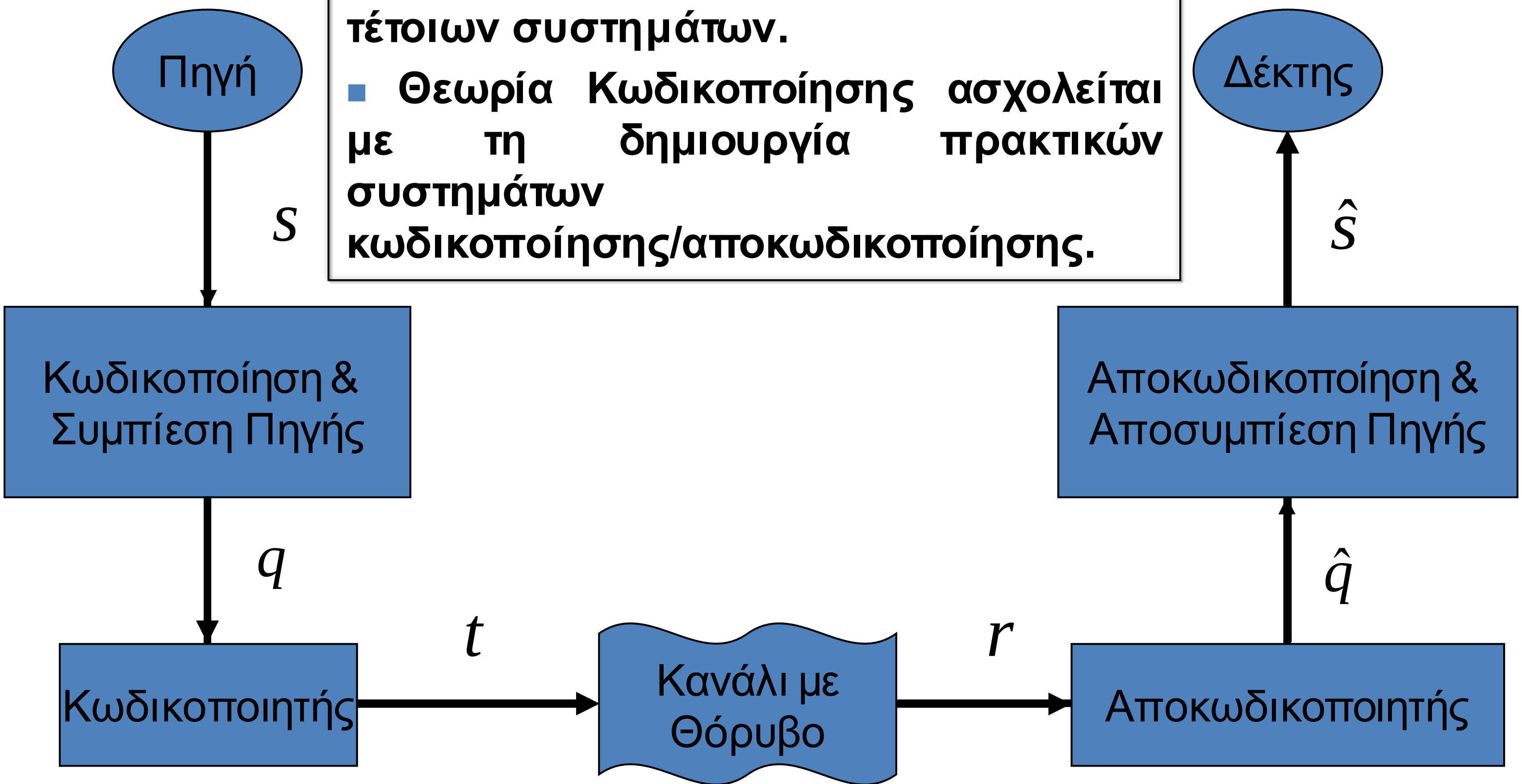
2) Ποσότητα Πληροφορίας

3) Πηγές Συμβόλων με/χωρίς μνήμη

4) Κωδικοποίηση πηγής

Προεπισκόπηση ΘΠ (3)

- **Η Θεωρία Πληροφορίας μελετά τα θεωρητικά όρια και τις δυνατότητες τέτοιων συστημάτων.**
- **Θεωρία Κωδικοποίησης ασχολείται με τη δημιουργία πρακτικών συστημάτων κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.**



- Το μοντέλο του Επικοινωνιακού Συστήματος

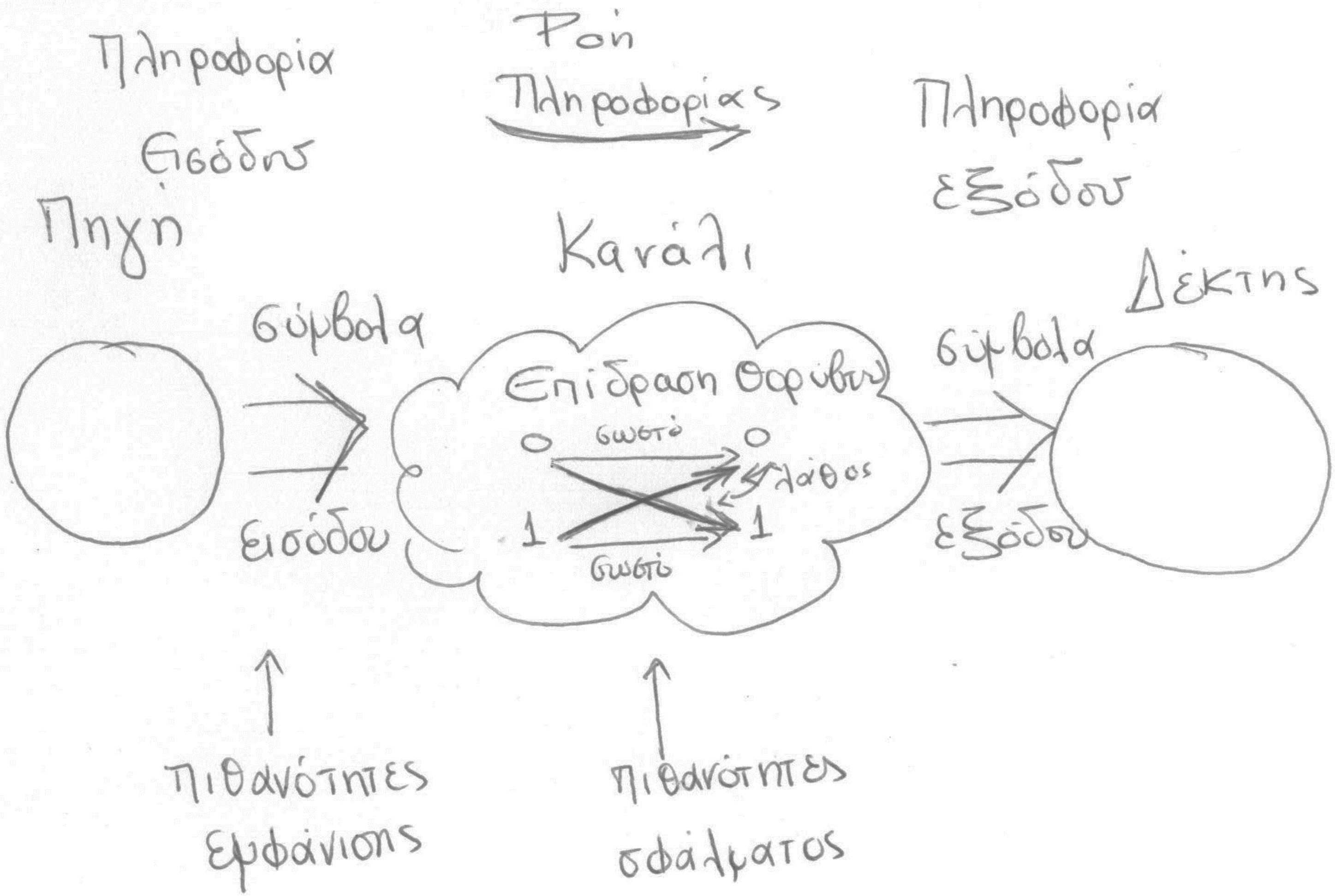
- Σύμβολα Πηγής $\longrightarrow$ Δομικές μονάδες σήματος πληροφορίας

  $\hookrightarrow$ τυχαία η διαδοχή τους (τυχαία μεταβλητή)
- Σφάλματα λόγω θορύβου στο κανάλι $\longrightarrow$ τυχαία μεταβλητή

  $\Rightarrow$ Χρήση Πιθανοτήτων

  για την περιγραφή της ροής πληροφορίας

  από την πηγή διαμέσου του καναλιού στο δέκτη


Πληροφορία
Εισόδου
Ροή
Πληροφορίας
Πληροφορία
εξόδου
Πηγή
Κανάλι
Δέκτης
σύμβολα
Επίδραση Θορύβου
σύμβολα
0
σωστό
0
λάθος
1
1
σωστό
εισόδου
εξόδου
πιθανότητες
εμφάνισης
πιθανότητες
σφάλματος

Πιθανότητες

Πιθανότητες. Εισαγωγή

Τυχαίο Πείραμα (Το αποτέλεσμά του δεν είναι εκ των προτέρων βέβαιο)

Π.χ. ρίψη νομίσματος, ζάρια, ορθή αποστολή πακέτου από κόμβο A στον κόμβο B.

$$\text{Πείραμα} \rightarrow \left.\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{matrix}\right\}$$

Ατομικά Αδιαίρετα Αποτελέσματα ή Ενδεχόμενα, Δειγματικά Σημεία

Διαφάνειες 3-14
Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_2020_2021

Ο δειγματικός χώρος ορίζεται ως το σύνολο των ενδεχομένων $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

και αντιστοιχίζεται σε μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ με τη σχέση $\underbrace{P(S_i) = P(X = x_i)}_{} = P(x_i)$

"πιθανότητα ενδεχομένου S_i"

"η τ.μ. X να ισούται με x_i"

Ιδιότητες Πιθανοτήτων

- Το άθροισμα των πιθανοτήτων <u>όλων</u> των ενδεχομένων ισούται με 1 $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$.

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου <u>Πάντα</u> ανήκει στο διάστημα $[0,1]$ $\underset{\uparrow\ \text{απίθανο}}{0} \leq P(x_i) \leq \underset{\uparrow\ \text{βέβαιο}}{1}$

Συνάρτηση Συνδυασμένης Πιθανότητας δύο ενδεχομένων x_i, y_j δύο τ.μ. X, Y

$P(x_i, y_j)$: πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$ ταυτόχρονα

$\overset{\shortparallel}{P(y_j, x_i)}$

Υπο συνθήκη πιθανότητα : πιθανότητα $X = x_i$ με δεδομένο ότι $Y = y_j$

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

x_i: ενδεχόμενο εμφάνισης

y_j: δεδομένο

ισχύει επίσης ότι:

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)} = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

· Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i/y_j)\,P(y_j) = P(y_j/x_i)\,P(x_i)$

· Όταν τα x_i, y_j είναι μεταξύ τους <u>ανεξάρτητα</u>
(δηλ το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του άλλου)

Έχουμε :

$$P(x_i/y_j) = P(x_i)$$

$$P(y_j/x_i) = P(y_j)$$

· Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$

Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής X

Αν $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με $\{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\}$

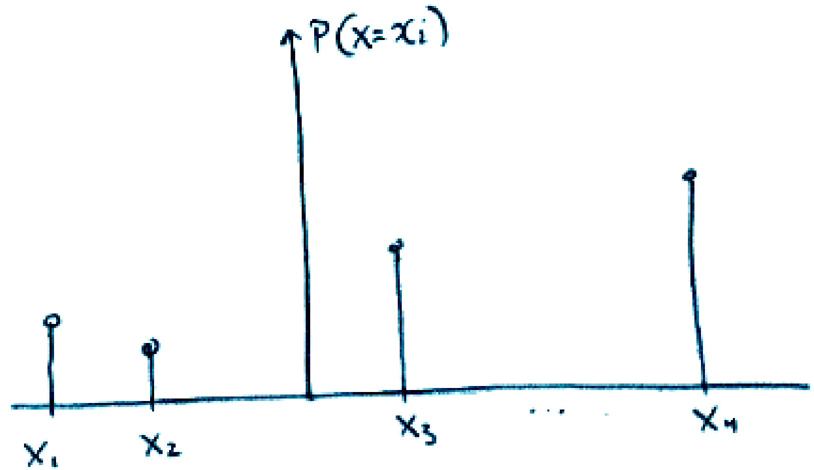
ισχύει ότι

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i).$$

Για 1 τυχαία μεταβλητή διακριτή

X με διακριτά ενδεχόμενα $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

το σύνολο των πιθανοτήτων $P(X=x_i) = p(x_i) = \{P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)\}$ ορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας μάζας. (σελ. 23)



ιστόγραμμα τ.μ. X

Ιδιότητες:
- $0 \leq p(x_i) \leq 1$
- $\sum^{n} p(x_i) = 1$

Συνάρτηση κατανομής αθροιστικής πιθανότητας τ.μ. X

$$F(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i) \qquad 0 \leq F(X \leq x) \leq 1$$

Για 2 διακριτές τ.μ.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

η συνδυασμένη πιθανότητα μάζας ορίζεται

ως: $P(X=x_i, Y=y_j)$ → ισοδυναμεί με πίνακα $n \times m$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς X:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \qquad i = 1, \dots, n$$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς Y

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) \qquad j = 1, \dots, m$$

Πιθανότητες.

Τυχαία μεταβλητή $X = \{\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{\text{ενδεχόμενες τιμές}}\}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1. \quad 0 \leq P(x_i) \leq 1$

Πιθανότητα μάζας $\{p(x_1), p(x_2) \dots, p(x_n)\}$

Μέση τιμή $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$

Συνδυασμένη Πιθανότητα 2 τυχαίων μεταβλητών X, Y: $P(x_i, y_j)$ = πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$ ταυτόχρονα

Υπό συνθήκη πιθανότητα 2 τυχαίων μεταβλητών X, Y

$$P(\underset{\text{ενδεχόμενο}}{x_i} / \underset{\text{δεδομένο}}{y_j}) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

Ισχύει επίσης $P(y_j / x_i) = \dfrac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)} = \dfrac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$

Άρα $p(x_i, y_j) = p(y_j / x_i) \cdot p(x_i) = p(x_i / y_j) \, p(y_j)$

Για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $P(x_i / y_j) = p(x_i)$ και $P(y_j / x_i) = p(y_j)$

άρα $p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j)$

Δεδομένης της $P(x_i, y_j)$: $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

ορίζονται: Ακραία πιθανότητα μάζας $P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i / y_j) \cdot p(y_j)$

Ακραία πιθανότητα μάζας $p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(y_j / x_i) \cdot p(x_i)$

Θεώρημα Bayes: $P(x_i / y_j) = \dfrac{p(y_j / x_i) \cdot p(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(y_j / x_i) \cdot p(x_i)}$

Παράδειγμα

- **<u>Παράδειγμα 1</u>**: Έστω (X,Y) έχουν την παρακάτω πιθανότητα μάζας

Περιθωριακές Πιθανότητες

Y \ X	1	2	3	4	P(y)
1	1/8	1/16	1/32	1/32	1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
4	1/4	0	0	0	1/4
P(x)	1/2	1/4	1/8	1/8	

Περιθωριακές Πιθανότητες

$P(X/Y=y) = P(X,y)/P(Y=y)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1/8}{1/4} & \frac{1/16}{1/4} & \frac{1/32}{1/4} & \frac{1/32}{1/4} \end{bmatrix} \quad P(X/Y=1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad P(X/Y=2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad P(X/Y=3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P(X/Y=4)$$

$P(Y/X=x) = P(x,Y)/P(X=x)$

$$\underset{P(Y/X=1)}{\begin{bmatrix} \frac{1/8}{1/2} \\ \frac{1/16}{1/2} \\ \frac{1/16}{1/2} \\ \frac{1/4}{1/2} \end{bmatrix}} \quad \underset{P(Y/X=2)}{\begin{bmatrix} \frac{1/16}{1/4} \\ \frac{1/8}{1/4} \\ \frac{1/16}{1/4} \\ \frac{0}{1/4} \end{bmatrix}} \quad \underset{P(Y/X=3)}{\begin{bmatrix} \frac{1/32}{1/8} \\ \frac{1/32}{1/8} \\ \frac{1/16}{1/8} \\ \frac{0}{1/8} \end{bmatrix}} \quad \underset{P(Y/X=4)}{\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Εξαρτημένες Πιθανότητες

p(x/y)=p(x,y)/p(y)

p(y/x)=p(x,y)/p(x)

Παράδειγμα

- **Παράδειγμα 1**: Έστω (X,Y) έχουν την παρακάτω πιθανότητα μάζας

Περιθωριακές Πιθανότητες

Y \ X	1	2	3	4	P(y)
1	$\boxed{1/8}$	1/16	1/32	1/32	→ 1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	→ 1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	→ 1/4
4	1/4	0	0	0	→ 1/4
P(x)	1/2	1/4	1/8	1/8	

Περιθωριακές Πιθανότητες

P(X/Y) ενδεχόμενα

δεδομένα	X1	X2	X3	X4
Y1	1/2	1/4	1/8	1/8
Y2	1/4	1/2	1/8	1/8
Y3	1/4	1/4	1/4	1/4
Y4	1	0	0	0

$P(Y/X=x) = P(x,Y)/P(X=x)$

P(Y/X) ενδεχόμενα

δεδομένα	Y1	Y2	Y3	Y4
X1	1/4	1/8	1/8	1/2
X2	1/4	1/2	1/4	0
X3	1/4	1/4	1/2	0
X4	1/4	1/4	1/2	0

Εξαρτημένες Πιθανότητες

p(x/y)=p(x,y)/p(y)

p(y/x)=p(x,y)/p(x)

Μέτρα Πληροφορίας

Είδηση/Πληροφορία 1

Χιόνισε στη Σαχάρα ύστερα από σχεδόν 40 χρόνια

Είδηση/Πληροφορία 2

Στα λευκά ο Παρνασσός -Γέμισε κόσμο

Ποσότητα Πληροφορίας 1 > Ποσότητα Πληροφορίας 2

{Ποσότητα Πληροφορίας} = f (1/{Πιθανότητα Εμφάνισης})

→ Ποσότητα Πληροφορίας ή Πληροφοριακό Περιεχόμενο $H(x_i)$ γεγονότος x_i τυχαίας μεταβλητής X (σελ. 28)

Αν πιθανότητα εμφάνισης του x_i η $P(x_i)$

τότε $H(x_i) = -\log_2[P(x_i)]$ bits

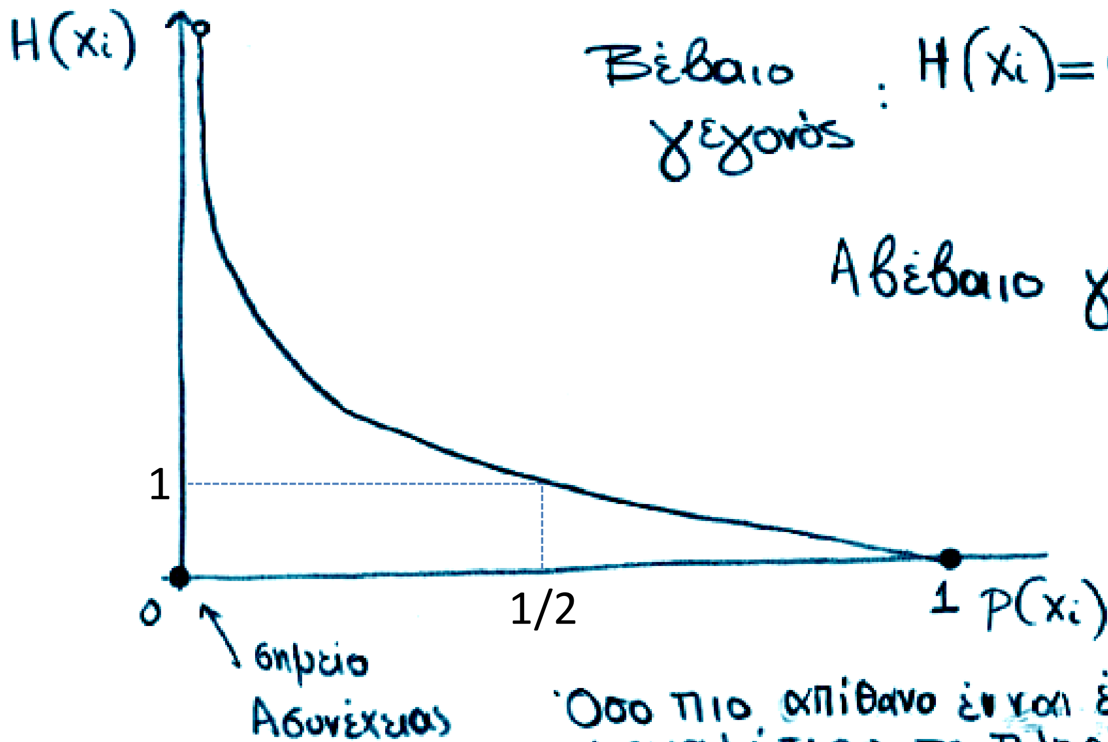
* Παρακάτω όπου $\log(x)$ θα εννοείται ο δυαδικός λογάριθμος

$H(x_i) = 1$ bit όταν

$P(x_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow H(x_i) = -\log\frac{1}{2} = -\cancel{\log 1}^{0} + \log 2 = 1$ bit

→ ποσότητα πληροφορίας για αβεβαιότητα μεταξύ 2 ισοπίθανων γεγονότων

Διαφάνειες 22-63
Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_2020_2021



Βέβαιο γεγονός : $H(x_i)=0$ όταν $P(x_i)=0$
$P(x_i)=1$

Αβέβαιο γεγονός

$H(x_i)$ αντιστρόφως ανάλογο του $p(x_i)$

Όσο πιο απίθανο είναι ένα γεγονός τόσο μεγαλύτερο το πληροφοριακό περιεχόμενό του.

Σημείωση για $\log_\alpha x$:

Συνήθως $\alpha = 2, 10, e$

Σύμβαση $\log_e \to \ln$

Αν $a^y = x$ τότε $y = \log_\alpha x$ (όπου $x > 0$)

Ιδιότητες: $\log_\alpha(x \cdot y) = \log_\alpha(x) + \log_\alpha(y)$

$$\log_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \log_\alpha(x) - \log_\alpha(y)$$

$$\log_\alpha(x^b) = b \cdot \log_\alpha(x)$$

$$\log_\alpha(1) = 0 \quad , \quad \log_\alpha \alpha = 1$$

Calculator

$$\log_\alpha x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} \alpha}$$

→ Μέση Ποσότητα Πληροφορίας ή μέση πληροφορία ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ή εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log\left[P(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\, H(x_i)$$

μέση τιμή, άθροισμα $H(x_i)$ με συντελεστές βαρύτητας τις πιθ. εμφάνισης $P(x_i)$

→ Για κάθε τ. μ. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ισχύει ότι

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(n)$$

* $H(X) = 0$ όταν έχουμε βέβαιο γεγονός $P(x_i) = 1$, $P(x_j) = 0 \;\; \forall j \neq i$

* H(X)=log(n) όταν έχουμε μέγιστη αβεβαιότητα

⇒ ομοιόμορφη κατανομή τ. μ.

δηλ. $P(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

π.χ. τ.μ. με 2 πιθανά γεγονότα

σελ. 28 σχ. 1.4

$X = \{x_1, x_2\}$

Έστω $p(x_1) = \rho$

$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1-\rho$

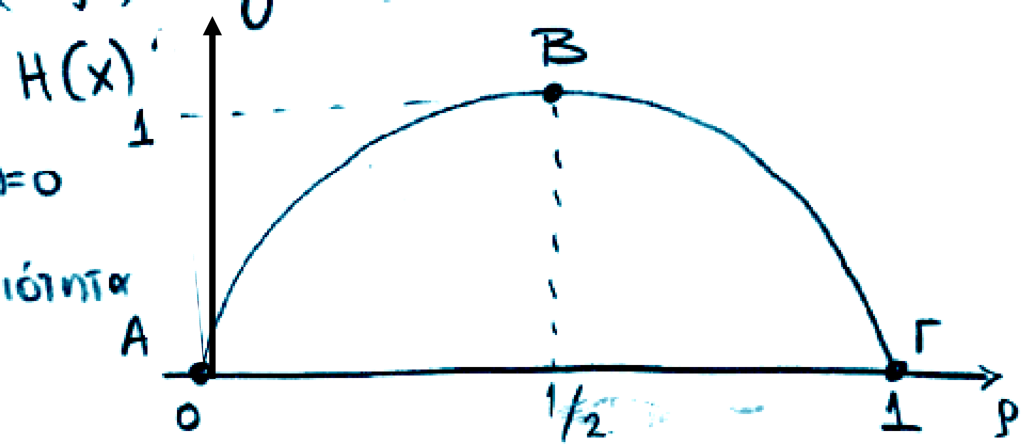
$$H(X) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) =$$

$$= -\rho\log\rho - (1-\rho)\log(1-\rho)$$

Σημεία Α, Γ βέβαιο γεγονός $H(X)=0$

Σημείο Β: μέγιστη αβεβαιότητα

$H(X) = \log 2 = 1$



Σχέσεις για 2 τ.μ. X, Y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log[p(x_i, y_j)]$$

Υπο συνθήκη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X/Y) = +\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, H(X/y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p(y_j) \left[-\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j)\right] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{p(y_j)\, p(x_i/y_j)}_{p(x_i,y_j)} \log p(x_i/y_j)$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) \cdot \log p(x_i/y_j)$$

Βασική σχέση: $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

Αμοιβαία Ποσότητα Πληροφορίας

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

$H(X)$: αβεβαιότητα της τ.μ. X

$H(X/Y)$: αβεβαιότητα της X δεδομένης της Y

⇓

διαφορά μεταξύ των X, Y

⇑

$H(Y/X)$: αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

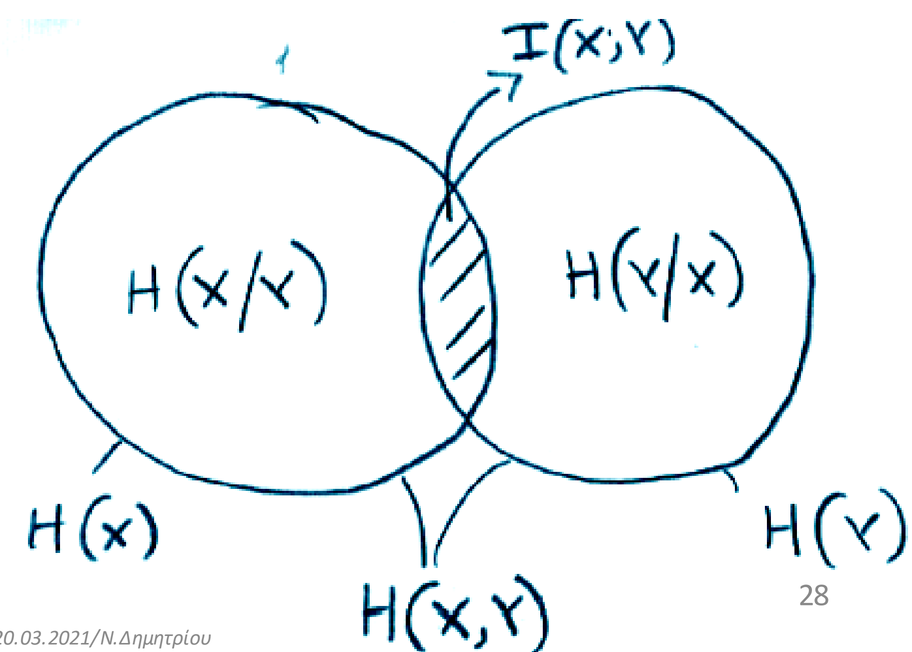
$I(X;Y)$: μέτρο εξάρτησης μεταξύ X, Y

Αν X και Y ανεξάρτητες

$H(X/Y) = H(X)$ $\quad$ $H(Y/X) = H(Y)$

$I(X;Y) = 0$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$



Παραδείγματα / Ποσότητα πληροφορίας-Εντροπία

Αμοιβαία Πληροφορία (4)

- **Παράδειγμα 6**: Έστω (X,Y) έχουν την παρακάτω πιθανότητα μάζας

Y \ X	1	2	3	4	P(y)
1	1/8	1/16	1/32	1/32	1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
4	1/4	0	0	0	1/4
P(x)	1/2	1/4	1/8	1/8	

- H(X)=7/4 bits και H(Y)=2 bits
- H(X/Y)=11/8 bits και H(Y/X)=13/8 bits
- H(X,Y)=27/8 bits
- I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)=3/8 bits

Παράδειγμα 1 (43)

υπολογισμός μέτρων πληροφορίας

Σημ: $\log\left(\frac{1}{2}\right)^n = -n\log 2 =$
$= -n$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} P(x_i)\log\left[P(x_i)\right] = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}2\log 2 + 2\,\frac{1}{8}\cdot 3\log 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}\text{ bits}$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} P(y_j)\log\left[P(y_j)\right] = -4\,\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = 2\log 2 = 2\text{ bits}$$

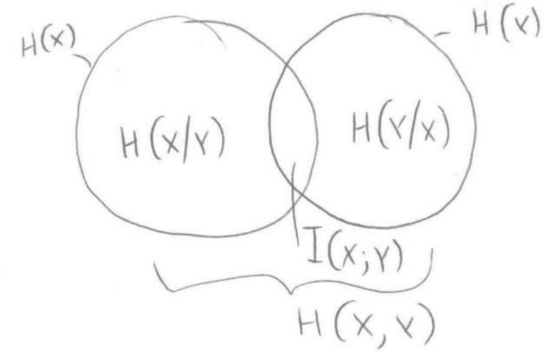
$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P(x_i,y_j)\log P(x_i,y_j) = -2\,\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - 6\,\frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - 4\,\frac{1}{32}\log\frac{1}{32} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}3\log 2 + \frac{3}{8}4\log 2 + \frac{1}{8}5\log 2 + \frac{1}{4}2\log 2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{27}{8}\text{ bits}$$

$$H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = \frac{27}{8} - 2 = \frac{11}{8}\text{ bits}$$

$$H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = \frac{27}{8} - \frac{7}{4} = \frac{13}{8}\text{ bits}$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = \frac{7}{4} - \frac{11}{8} = \frac{3}{8}\text{ bits}$$



Ανισότητες Εντροπίας (2)

- **Άσκηση**
  - Έστω ότι η τ.μ. (X,Y) έχει την παρακάτω συνδυασμένη μάζα πιθανότητας

Y \ X	1	2	P(y)
1	0	3/4	3/4
2	1/8	1/8	1/4
P(x)	1/8	7/8	

  - H(X)=H(1/8,7/8)=0.544 bits
  - H(X/Y=1)=H(0,1)=0 bits και H(X/Y=2)=H(1/2,1/2)=1 bit
  - H(X/Y)=3/4 H(X/Y=1)+1/4 H(X/Y=2)=0.25 bits
  - Παρατηρείστε ότι η αβεβαιότητα της X αυξάνεται στην περίπτωση που γνωρίζουμε το γεγονός Y=2 και ελαττώνεται όταν γνωρίζουμε το γεγονός Y=1. Παρόλα αυτά η μέση πληροφορία ή η αβεβαιότητα ελαττώνεται για την X/Y

Παράδειγμα 2 (ΣΣ)

$$H(X) = \sum p(x_i)\log p(x_i) = -\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{7}{8}\log\frac{7}{8} = H\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right) = 0,544 \text{ bits}$$

Δίνεται ο πίνακας συνδυασμένης πιθανότητας $P(x_i, y_j)$

Για τους υπολογισμούς των υπό συνθήκη μέτρων πληροφορίας πρέπει να υπολογιστούν οι υπό συνθήκη πιθανότητες $P(x_i/y_j)$

$$H(X/Y=1) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i/y_1)\log p(x_i/y_1)$$

$$p(x_1/y_1) = \frac{P(x_1,y_1)}{P(y_1)} = 0 \qquad p(x_2/y_1) = \frac{P(x_2,y_1)}{P(y_1)} = \frac{3/4}{3/4} = 1.$$

Άρα $H(X/Y=1) = -0\log 0 - 1\log 1 = H(0,1) = 0$

$$p(x_1/y_2) = \frac{P(x_1,y_2)}{P(y_2)} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2 \qquad p(x_2/y_2) = \frac{P(x_2,y_2)}{P(y_2)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

άρα $H(X/Y=2) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1$ bit

$$H(X/Y) = p(y_1)\cdot H(X/y_1) + p(y_2)\,H(X/y_2) = \frac{3}{4}\,0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4} \text{ bits}$$

=

ΘΕΜΑ 5

ΓΕ3 1718

Στόχος της άσκησης είναι *η εξοικείωση με βασικά γνωρίσματα των τυχαίων μεταβλητών, με τις συνδυασμένες και υπό συνθήκη πιθανότητες καθώς και με σχετικά μέτρα πληροφορίας.*

Σχετικές ασκήσεις: *Θ4/ΓΕ3/1617, Θ4/ΓΕ3/1516, Θ1/ΓΕ4/1213*

Δίνονται 2 τυχαίες μεταβλητές X, Y με συναρτήσεις ακραίας πιθανότητας μάζας $p(x_i)$, $p(y_j)$, (όπου $i=1,..,3$, $j=1,..,3$). Επίσης δίνονται οι τιμές της $p(x_i)=\{1/8\ ,1/2\ ,\ 3/8\}$ καθώς και ο πίνακας των υπό συνθήκη πιθανοτήτων $p(y_j/x_i)$:

$p(y_j/x_i)$	y_1	y_2	y_3
x_1	$1/4$	$1/4$	$1/2$
x_2	$6/16$	$3/16$	$7/16$
x_3	$3/8$	$1/8$	$4/8$

Ζητούνται τα εξής:

(α) Ο πίνακας *συνδυασμένης πιθανότητας* $p(x_i, y_j)$,*ο πίνακας υπό συνθήκη πιθανότητας* $p(x_i/ y_j)$ καθώς και η συνάρτηση ακραίας πιθανότητας μάζας της τ.μ. Y, $p(y_j)$.

(β) Τα μέτρα πληροφορίας $H(X)$, $H(Y)$,

(γ) Τα μέτρα πληροφορίας $H(Y/X)$, $H(X,Y))$ και $H(X/Y)$ καθώς και η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας $I(X;Y)$

(δ) Να υποθέσετε και τρίτη τ.μ. Z με συνάρτηση ακραίας πιθανότητας μάζας $p(z_k)$, (όπου $k = 1,..,3$) και να υποθέσετε ότι ισχύει $H(Z)=1.5786$ *και* $H(X,Z)=2.8846$. Ποιά από τις τ.μ Y, Z έχει τη μεγαλύτερη εξάρτηση από τη X; Επίσης, ποιά από τις 3 τυχαίες μεταβλητές έχει τη μικρότερη αβεβαιότητα; Να αιτιολογήσετε περιληπτικά τις απαντήσεις σας.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να εφαρμόσετε τις σχέσεις που συνδέουν τις υπό συνθήκη με τις συνδυασμένες πιθανότητες. Επίσης, να εφαρμόσετε τις σχέσεις υπολογισμού των διαφόρων μέτρων πληροφορίας, λαμβάνοντας υπόψη (όπου είναι δυνατό) τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μέτρων για απλοποίηση των υπολογισμών.*

(α)

Είναι:

$$p\left(x_i, y_j\right) = p\left(x_i\right) \cdot p\left(y_j / x_i\right)$$

Χρησιμοποιώντας τον δεδομένο πίνακα υπό συνθήκη πιθανότητας *p(y*$p(y_j/x_i)$ *και τις τιμές* $p(x_i)$ προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας

Συνδυασμένη πιθανότητα $p(x_i,y_j)$

$p(x_i,y_j)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.03125 (2/64)	0.03125 (2/64)	0.0625 (4/64)
x_2	0.1875 (12/64)	0.09375 (6/64)	0.21875 (14/64)
x_3	0.140625 (9/64)	0.046875 (3/64)	0.1875 (12/64)

Αθροίζοντας τις επιμέρους στήλες του ανωτέρω πίνακα προκύπτουν οι τιμές της συνάρτησης ακραίας πιθανότητας μάζας της Y:

$$p\left(y_j\right) = \sum_{i=1}^{3} p\left(x_i, y_j\right)$$

Άρα

$p(y_j)$=*{ 0.359375 (23/64) , 0.1718752 (11/64) , 0.46875 (30/64)}*

Επίσης ισχύει ότι

$$p\left(x_i / y_j\right) = \frac{p\left(x_i, y_j\right)}{p\left(y_j\right)} = \frac{p\left(x_i\right) \cdot p\left(y_j / x_i\right)}{\sum_{i=1}^{3} p\left(x_i, y_j\right)} = \frac{p\left(x_i\right) \cdot p\left(y_j / x_i\right)}{\sum_{i=1}^{3} p\left(x_i\right) \cdot p\left(y_j / x_i\right)}$$

Οπότε προκύπτει και ο παρακάτω πίνακας:

Υπό συνθήκη πιθανότητα $p(x_i/y_j)$

$p(x_i/y_j)$	x_1	x_2	x_3
y_1	0.086957 (2/23)	0.521739 (12/23)	0.391304 (9/23)
y_2	0.181818 (2/11)	0.545455 (6/11)	0.272727 (3/11)
y_3	0.133333 (4/30)	0.466667 (14/30)	0.400000 (12/30)

(β)

Με βάση τις σχετικές εκφράσεις για την εντροπία μιας τ.μ έχουμε:

$$H\left(X\right)=-\sum_{i=1}^{3}p\left(x_i\right)\cdot\log\left[p\left(x_i\right)\right]=1.4056\text{ bits/symbol}$$

$$H\left(Y\right)=-\sum_{j=1}^{3}p\left(y_j\right)\cdot\log\left[p\left(y_j\right)\right]=1.4797\text{ bits/symbol}$$

(γ)

Χρησιμοποιώντας τις υπο συνθήκη πιθανότητες $p(y_j/x_i)$ και τις συνδυασμένες πιθανότητες $p(x_i,y_j)$ μπορεί να υπολογιστεί η H(Y/X)

$$H\left(Y/X\right)=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}p\left(x_i,y_j\right)\cdot\log\left[p\left(y_j/x_i\right)\right]=1.4672\text{ bits/symbol}$$

Επίσης, έχουμε:

$$H(X,Y)=H(X)+H\left(Y/X\right)=2.879\text{ bits/symbol}$$

και

$$H(X/Y)=H(X,Y)-H\left(Y\right)=2.879-1.4797=1.3993\text{ bits/symbol}$$

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας είναι

$$I(X;Y)=H(X)-H\left(X/Y\right)=1.4797-1.4672=0.01241\text{ bits/symbol}$$

(δ)

Δίνεται ότι $H(Z)=1.5786$ *και* $H(X,Z)=2.8846$ bits/symbol

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας των X, Z είναι

$I(X;Z)=H(X)+H(Z)-H(X,Z)=1.4056+1.5786-2.8846=0.0996>I(X;Y)$ άρα η Z έχει μεγαλύτερη εξάρτηση από τη X σε σχέση με την Y.

Επίσης, τη μικρότερη αβεβαιότητα έχει η τ.μ. X διότι H(X)<H(Y)<H(Z)

Θέμα 2/ΓΕ 2003.04

Δίνονται 2 τ.μ. X, Y και ο πίνακας συνδυασμένων πιθανοτήτων τους

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	4	2	1	1
y_2	2	4	1	1
y_3	2	2	2	2
y_4	8	0	0	0

×32

÷32

$P(x_i, y_j)$

Y \ X	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$
$y_1=1$	1/8	1/16	1/32	1/32
$y_2=2$	1/16	1/8	1/32	1/32
$y_3=3$	1/16	1/16	1/16	1/16
$y_4=4$	1/4	0	0	0

Ζητούμενα:

1) $H(X)$, $H(Y)$
2) $H(X/Y)$, $H(Y/X)$
3) $H(X,Y)$
4.) $I(X;Y)$

Εντροπια $H(x) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \log[p(x_i)]$

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας

ως προς x_i: $p(x_1) = \sum_{j=1}^{4} p(x_1, y_j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(αθροίζουμε τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα)

$$p(x_2) = \sum_{j=1}^{4} p(x_2, y_j) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$p(x_3) = \sum_{j=1}^{4} p(x_3, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

$$p(x_4) = \sum_{j=1}^{4} p(x_4, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

Άρα, $H(x) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) -$

$- p(x_3)\log(p(x_3)) - p(x_4)\log(p(x_4)) =$

$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) = 1{,}75$ bits

Ομοίως για το Υ:

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας ως προς y_j

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_2) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_3) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_4) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_4) = \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{4}$$

Άρα, $H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log(p(y_j)) = \left[-\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right)\right] \cdot 4 = 2$ bits

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P(x_i, y_j)\left[\log P(x_i/y_j)\right] \quad (1)$$

$$= -\sum_{j=1}^{4} P(y_j) \cdot \sum_{i=1}^{4}\left[P(x_i/y_j)\log\left(P(x_i/y_j)\right)\right]$$

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

Υπολογίζοντας τις υπο συνθήκη πιθανότητες και εφαρμόζοντας τη σχέση (1) μπορεί να υπολογισθεί η H(X/Y)

Εναλλακτική Λύση: (αποφεύγοντας υπολογισμούς $P(x_i/y_j)$)

Ισχύει ότι $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

$$\Rightarrow H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

από τον πίνακα υπολογίζεται η $H(X,Y)$ και με την παραπάνω σχέση υπολογίζεται το ζητούμενο

$$H(X,X) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(x_i,y_j)\log\left[p(x_i,y_j)\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \quad \Rightarrow 1\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) - \quad \Rightarrow 2\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - 0\log(0) - \quad \Rightarrow 3\eta \text{ στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) \quad \Rightarrow 4\eta \text{ στήλη}$$

$$\log\left(\frac{1}{4}\right) = \log(4^{-1}) = \log(2^{-2}) = -2\log 2 = 2$$

Είναι: $\log\left(\frac{1}{8}\right) = \log\left(8^{-1}\right) = \log\left[\left(2^{3}\right)^{-1}\right] = \log\left(2^{-3}\right) =$

$= -3\log(2) = -3$

$$\log\left(\frac{1}{16}\right) = \log\left(16^{-1}\right) = \log\left(2^{-4}\right) = -4\log 2 = -4$$

$$\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log\left(32^{-1}\right) = \log\left(2^{-5}\right) = -5\log 2 = -5$$

Εξήγηση για το $\log(0)$

Κανονικά, $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$

Όμως στην περίπτωση μας, όπου υπολογίζουμε την ποσότητα πληροφορίας $H(x_i) = -\log(p(x_i))$, ισχύει ότι $H(x_i) = 0$ όταν ισχύει $\begin{cases} p(x_i) = 1 \\ \text{ή} \\ p(x_i) = 0 \end{cases}$

Άρα, θέτουμε $\log(0) = 0$ (μόνο στην περίπτωση υπολογισμών ποσότητας πληροφορίας)

$\cdot$ Άρα, $H(X,Y) = -\frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{4}(-2) -$

$- \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$

$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$

$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 =$

$= \frac{2 \cdot 3}{8} + \frac{6 \cdot 4}{16} + \frac{4 \cdot 5}{32} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{6+12+5+4}{8} = \frac{27}{8} = 3,375$ bits

$\cdot$ Άρα, $H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = 3,375 - 2 = 1,375$ bits

και $H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = 3,375 - 1,75 = 1,625$ bits

και $I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 1,75 - 1,375 = 0,375$ bits

ΘΕΜΑ 4

Στόχος της άσκησης *είναι η διερεύνηση και κατανόηση των μεγίστων και ελαχίστων τιμών της εντροπίας και του πληροφοριακού περιεχομένου το οποίο αντιστοιχεί σε μία τυχαία μεταβλητή.*
Σχετικές ασκήσεις: *η άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.4 του βιβλίου σας θα μπορούσε να σας βοηθήσει να απαντήσετε τα ερωτήματα, κυρίως το (α)*

Επιστήμονες που μελετούν ένα σπάνιο ερπετό έχουν προσδιορίσει ότι η επώαση του κάθε αβγού του διαρκεί τουλάχιστον 41 ημέρες και δεν υπερβαίνει τις 104 ημέρες. Κατά τα άλλα, τίποτα δεν είναι γνωστό για την κατανομή πιθανοτήτων της διάρκειας επώασης των αβγών.

(α) Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά τη διάρκεια επώασης ενός αβγού του ερπετού. Υπολογίστε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα για την εντροπία της(δηλ. τιμές ελαχίστου και μεγίστου της εντροπίας), καθώς και τις κατανομές πιθανοτήτων που αντιστοιχούν στο άνω και στο κάτω φράγμα. Υποθέτουμε ότι η επώαση μετράται σε ακέραιο αριθμό ημερών ($X \in \mathbb{N} \cap [41, 104]$), δηλαδή δεν μπορεί για παράδειγμα να διαρκέσει 65.3 ημέρες).

Απάντηση

α). Η ελάχιστη εντροπία της X ισούται με 0 και αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο χρόνος επώασης είναι ίδιος για όλα τα αβγά, δηλαδή $p(i) = 1$ για κάποιο i, $40 < i \leq 104$ και $p(j) = 0$ για όλα τα $j \neq i$.

Η $H(X)$ μεγιστοποιείται όταν όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, όταν, δηλαδή, $p(i) = 1/64$, $40 < i \leq 104$ και $H(X) = \log_2 64 = 6$ bits. Επομένως, $0 \leq H(X) \leq 6$ bits.

Πηγές Συμβόλων – Κωδικοποίηση πηγής

→ Πηγές Συμβόλων

* Ισοπίθανα & Ανεξάρτητα Διαδοχικά Σύμβολα

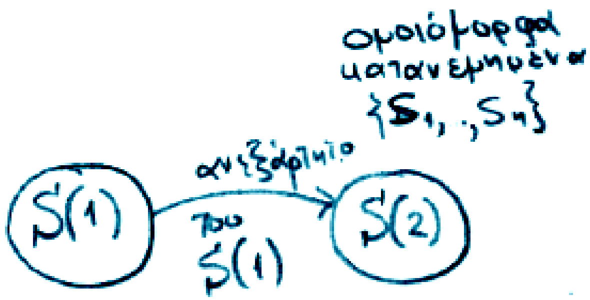
$$\text{τ.μ. } S = \{\overbrace{s_1, s_2, \ldots, s_n}^{n \text{ πιθανά σύμβολα}}\}$$

$$\bigcirc \longrightarrow \ldots S(i), S(i-1) \ldots \; S(3), S(2), S(1)$$

$$P(S(i)=s_1) = p(s_1) = p(s_2) = \ldots = p(s_n) = \frac{1}{n}$$

⇒ Εντροπία Πηγής $H_0(S) = \log(n)$ (μέγιστη)

⇒ Ομοιόμορφη Κωδικοποίηση συμβόλων · τέλεια εντροπία $H_0(S)$.



Διαφάνειες 64-105
Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_2020_2021

* Όχι ισοπίθανα αλλά διαδοχικά ανεξάρτητα (πηγή χωρίς μνήμη)

π.χ. αλφάβητο
$p('\alpha') = 11,7\%$
$p('\psi') = 0,1\%$

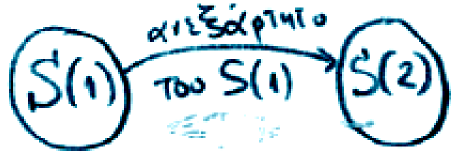
σύμβολα $p(S_i) \neq p(S_j)$ $\quad p(S(n+1)/S(n)) = p(S(n+1))$

$\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ ώστε

Εντροπία πηγής $H_1(S) < H_0(S)$

$\Rightarrow$ Με χρήση ανομοιόμορφης κωδικοποίησης (βασισμένης στις $p(S_i)$) επιτυγχάνεται η συμπίεση της εντροπίας των τελικών συμβόλων της πηγής

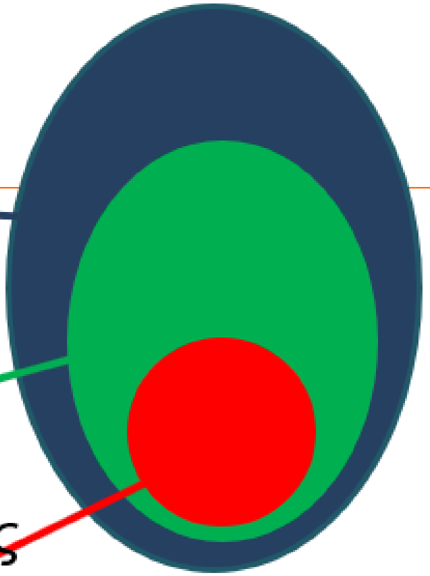
ανομοιόμορφα κατανεμημένα $\{s_1, \dots, s_n\}$



Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Ορισμοί**
  - **Μη ιδιάζων κώδικας**
    - Όταν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές
  - **Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος**
    - Όταν και οι ακολουθίες των κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές
  - **Άμεσος ή Μη Προθεματικός κώδικας**
    - Κάθε μοναδικά αποκωδικοποίησιμος κώδικας που επιτρέπει την άμεση αποκωδικοποίηση της κωδικής λέξης χωρίς να χρειάζεται να λάβει υπόψη του τις επόμενες κωδικές λέξεις.
    - Ο άμεσος κώδικας αποτελείται από κωδικές λέξεις οι οποίες δεν αποτελούν μέρος (προθέματα άλλων)

Ορισμοί



- **Μη ιδιάζων (nonsingular) κώδικας**
  – Όταν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές.
- **Μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμος (uniquely decodable) κώδικας**
  – Όταν τόσο οι κωδικές λέξεις όσο και όλες οι πιθανές ακολουθίες των κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές.
- **Άμεσος ή Προθεματικός κώδικας (instantaneous/prefix code)**
  – Ο κώδικας του οποίου καμια κωδική λέξη δεν αποτελεί πρόθεμα κάποιας άλλης.
  – Κάθε προθεματικός κώδικας επιτρέπει την *άμεση* αποκωδικοποίηση της κωδικής λέξης χωρίς να χρειάζεται να ληφθούν υπόψη οι επόμενες κωδικές λέξεις.
- Άμεσος⇒Μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμος⇒Μη Ιδιάζων

Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής ...

- **Παράδειγμα**
  - Μη ιδιάζων, I,II,III,IV
  - Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος, II,III,IV. Ο I δεν είναι αφού ΦΦΦΦ, ΦΦΨ, ΨΨ όλα έχουν κωδική λέξη την ίδια, 0000
  - Άμεσοι κώδικες, II και III
  - Ο κώδικας IV δεν είναι άμεσος αφού χρειάζεται να γνωρίζουμε ψηφία που ανήκουν στην επόμενη κωδική λέξη, π.χ. 011011100?

	I	II	III	IV
Φ	0	00	0	0
Χ	11	01	10	01
Ψ	00	10	110	011
Ω	01	11	1110	0111

Παραδείγματα κωδίκων (άμεσων και μη)

- $C1$={0,101} — Άμεσος
- $C2$={1,101} — Μη άμεσος
- $C3$={0,10,110,111} — Άμεσος
- $C4$={00,01,10,11} — Άμεσος
- $C5$={0,01,011,111} — Μη άμεσος

Κωδικοποίηση Πηγής (11)

- **Θεώρημα 12:** Ανισότητα του Kraft
  - Για κάθε άμεσο κώδικα με πλήθος κωδικών συμβόλων q του κωδικού αλφαβήτου Q και μήκη των κωδικών λέξεων l_i, όπου i=1,2,…,n και n το πλήθος των συμβόλων της πηγής ισχύει,

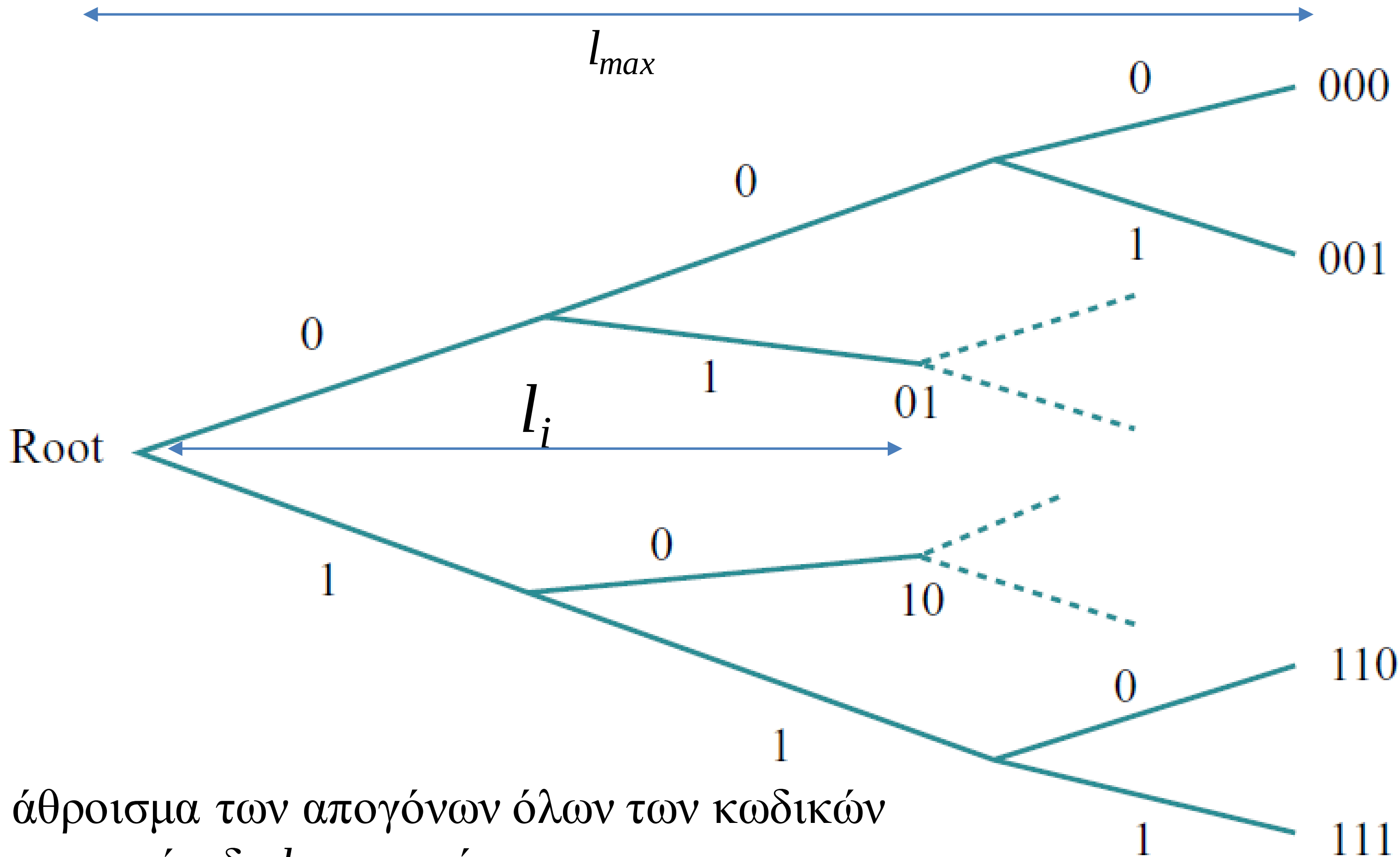
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} q^{-l_i} \leq 1}$$

με δυαδικό αλφάβητο q=2

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1}$$

  - Αντίστροφα, αν για ένα σύνολο μηκών κωδικών λέξεων ισχύει η ανισότητα Kraft τότε υπάρχει ένας άμεσος κώδικας του οποίου οι κωδικές λέξεις έχουν αυτά τα μήκη.

Απόδειξη



Για το άθροισμα των απογόνων όλων των κωδικών λέξεων στο επίπεδο l_{max} *ισχύει*

$$\sum_{\iota} q^{l_{max}-l_i} \leq \sum_{\iota} q^{l_{max}} \Leftrightarrow \sum_{\iota} q^{l_{max}} q^{-l_i}$$

$$\leq \sum_{\iota} q^{l_{max}} \Leftrightarrow \sum_{\iota} q^{-l_i} \leq 1, \text{όπου } q = 2 \text{ για κωδικοποιηση με δυαδικα σύμβολα}$$

ΘΣ / ΓΕ 0203

Πηγή 8 συμβόλων

S_i	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ
$p(s_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Τ.μ.

$$\sum_{i=1}^{8} P(S_i) = 1$$

Σύμβολα με χαμηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο

↓

Σύμβολα με υψηλότερη πιθανότητα εμφάνισης E, B

$$H(S_i) = -\log[p(s_i)] \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}} = -\log\frac{1}{4} = -(\log 1 - \log 4) =$$

$$= -(0 - \log 2^2) = -(-2\log 2) = 2 \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}.$$

Σύμβολα με υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο

↓

Σύμβολα με χαμηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Δ, Z

$$H(S_i) = -\log\left(\frac{1}{32}\right) = -(\log 1 - \log 32) = -(0 - \log 2^5) =$$

$$= 5\log 2 = 5 \ \text{bits/symbol}$$

Μέσο Πληροφοριακό Περιεχόμενο Πηγής

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} p(s_i)\log[p(s_i)] = -p(A)\log[p(A)] - p(B)\log(p(B)) -$$

$$-p(\Gamma)\log(p(\Gamma)) - p(\Delta)\log(p(\Delta)) - p(E)\log(p(E)) - p(Z)\log(p(Z)) -$$

$$-p(H)\log(p(H)) - p(\Theta)\log(p(\Theta)) = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} -$$

$$-\frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\log 8 + \frac{2}{4}\log 4 + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{2}{32}\log 32 = \frac{3}{8}\cdot 3 + \frac{2}{4}\cdot 2 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{2}{32}\cdot 5 =$$

$$= \frac{36}{32} + \frac{32}{32} + \frac{8}{32} + \frac{10}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875 \text{ bits/symbol}$$

Αν τα σύμβολα ήταν ισοπίθανα (πιθανότητες εμφάνισης ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή)

$$p(S_i) = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{8}$$

$$H(S_i) = \log(\eta) = \log 8 = 3\ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = -\eta\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = \log\eta = \log 8 = 3\,\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

Τρόποι Κωδικοποίησης

(A) Ομοιόμορφη (Θεωρώντας ίδιο αριθμό bits ανά σύμβολο)

A 000 ⟵ 3 bits/symbol ⟶ Μέσο μήκος κώδικα

Β	001
Γ	010
Δ	011
Ε	100
Ζ	101
Η	110
Θ	111

(B) Ανομοιόμορφη (βασισμένη στην εντροπία της πηγής)

Σκοπός: Κατασκευή κατάλληλου κώδικα του οποίου το μέσο μήκος να προσεγγίζει την εντροπία των συμβόλων της πηγής $H(S) < \bar{L} < \log n$

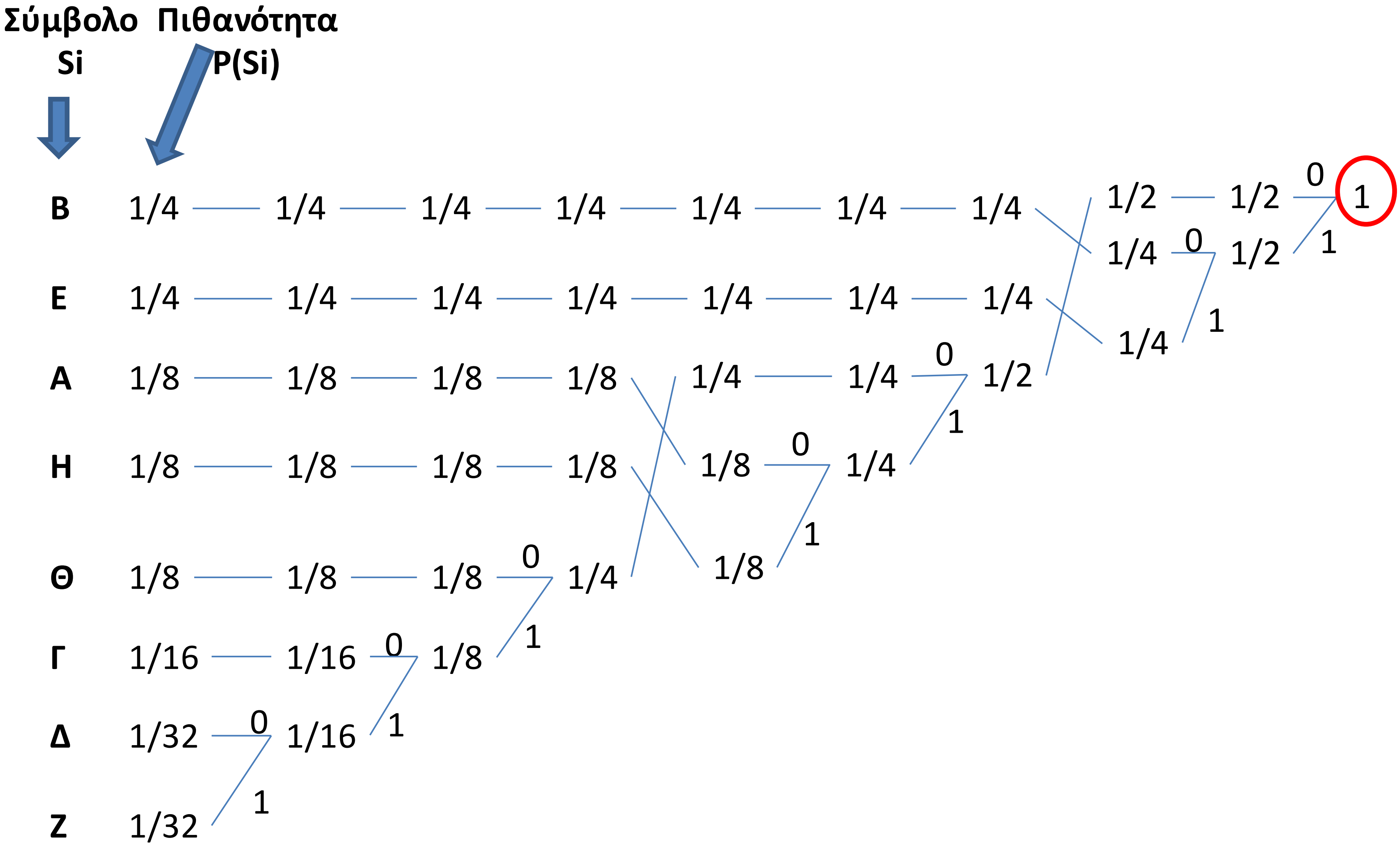
3 bits/symbol

2.6875 bits/symbol

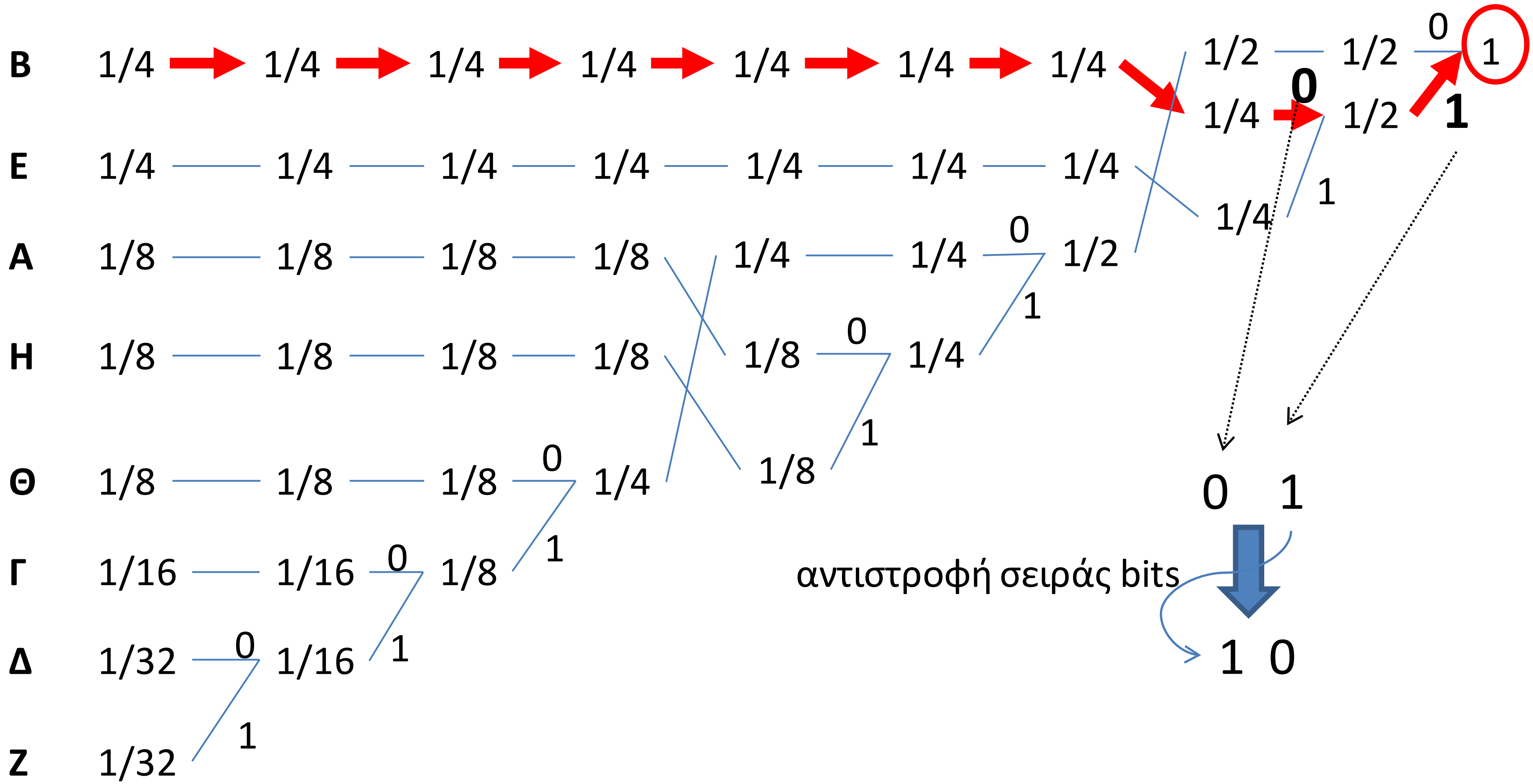
Άριστος κώδικας: max επίδοση

Κωδικοποίηση Huffman (JPEG, MPEG)

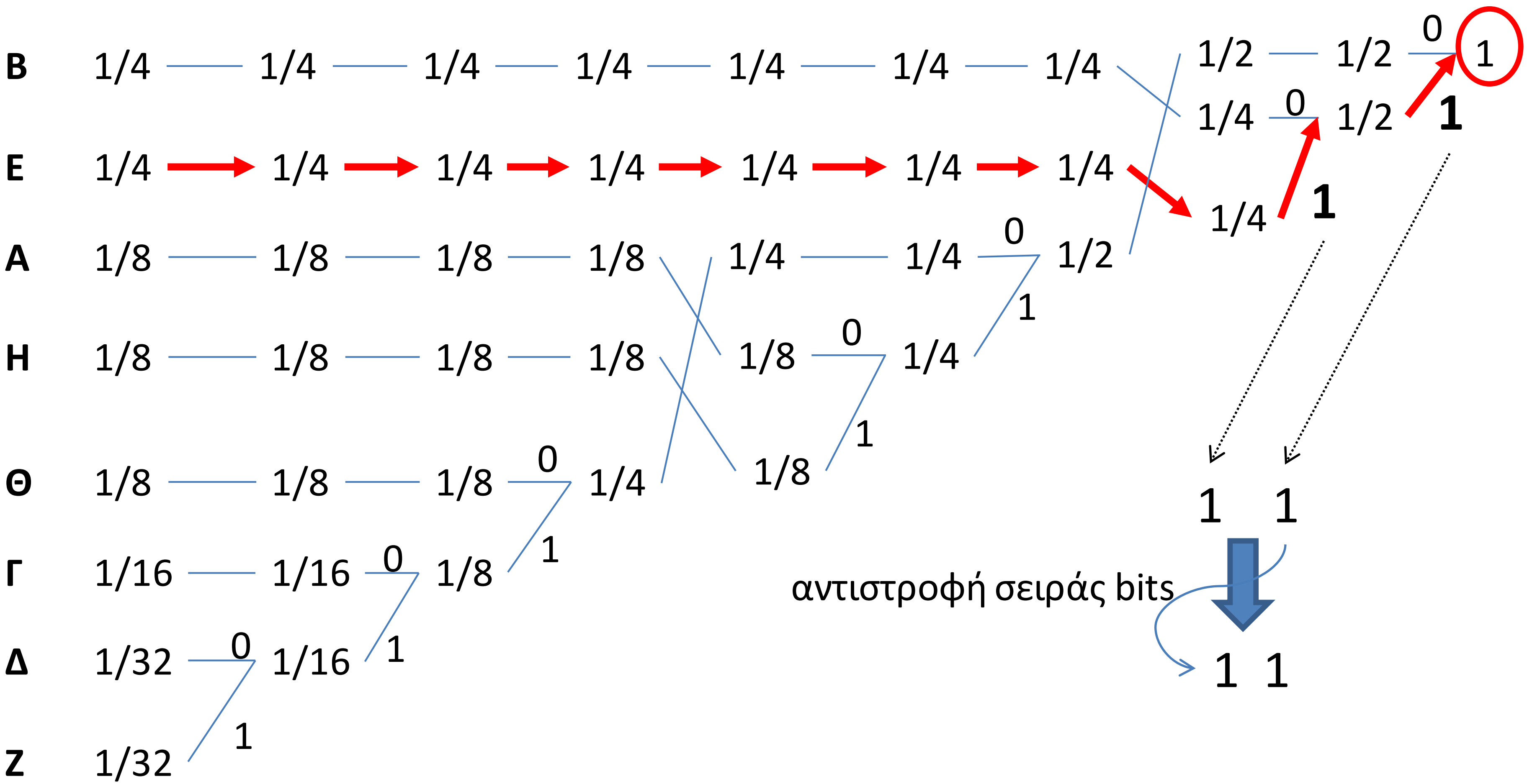
1. Διάταξη κατά φθίνουσα $P(S_i)$
2. Τα 2 τελευταία σύμβολα ενώνονται σε 1 με P(αθροιστική) $P(S_i)P(S_j)$
3. Αναδιάταξη Συμβόλων.
4. Επανάληψη του ② μέχρι να καταλήξουμε σε 2 σύμβολα.
5. Από το τέλος στην αρχή σχηματίζουμε τον κώδικα για κάθε σύμβολο.


Σύμβολο Si
Πιθανότητα P(Si)
B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 1
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2
A 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2 1/4
H 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Z 1/32
0
1

Σύμβολο Β

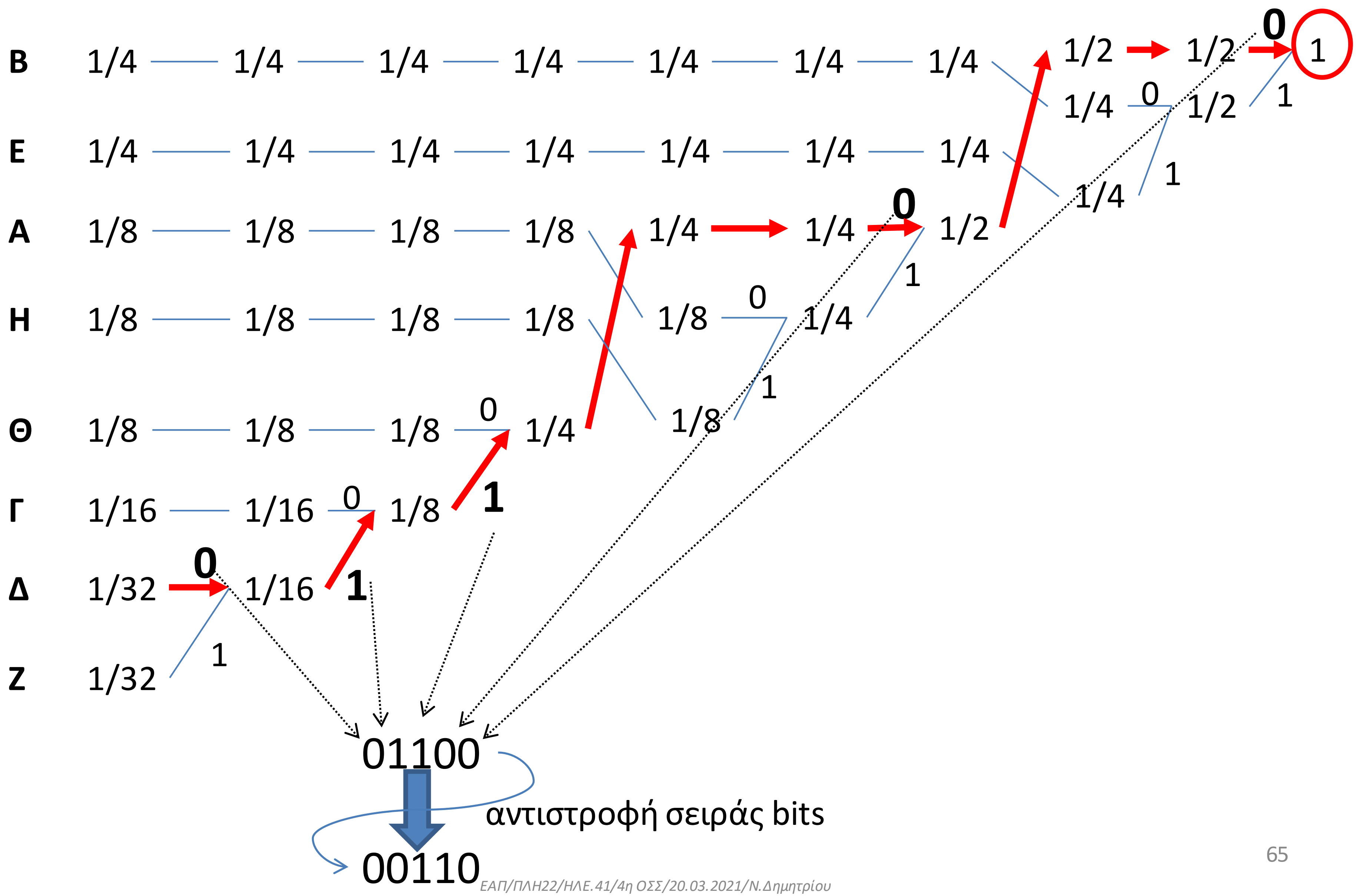

Β 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 0 1
1/4 0 1/2 1
Ε 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1
Α 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 0 1/2
1
Η 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 0 1/4
1
Θ 1/8 1/8 1/8 0 1/4 1/8
1
Γ 1/16 1/16 0 1/8
Δ 1/32 0 1/16 1
Ζ 1/32 1
0 1
αντιστροφή σειράς bits
1 0

Σύμβολο Ε



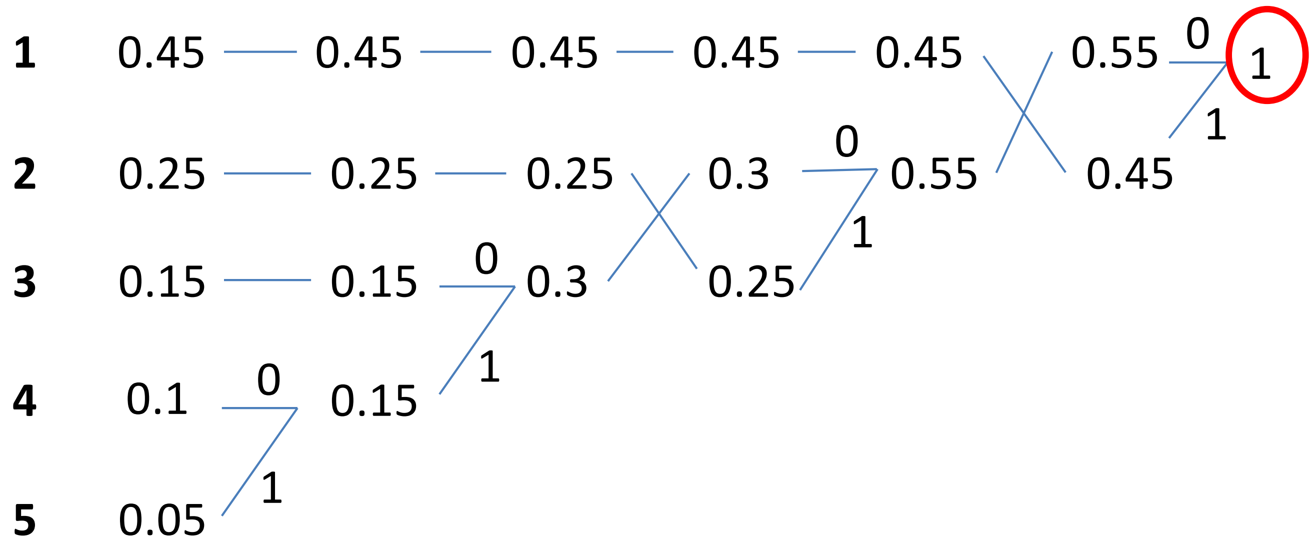
B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
A 1/8 1/8 1/8 1/8
H 1/8 1/8 1/8 1/8
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Z 1/32
1/4 1/4 1/2
1/8 1/4
1/8
1/2 1/2 1
1/4 1/2
1/4
0 1
1 1
αντιστροφή σειράς bits
1 1

Σύμβολο Δ

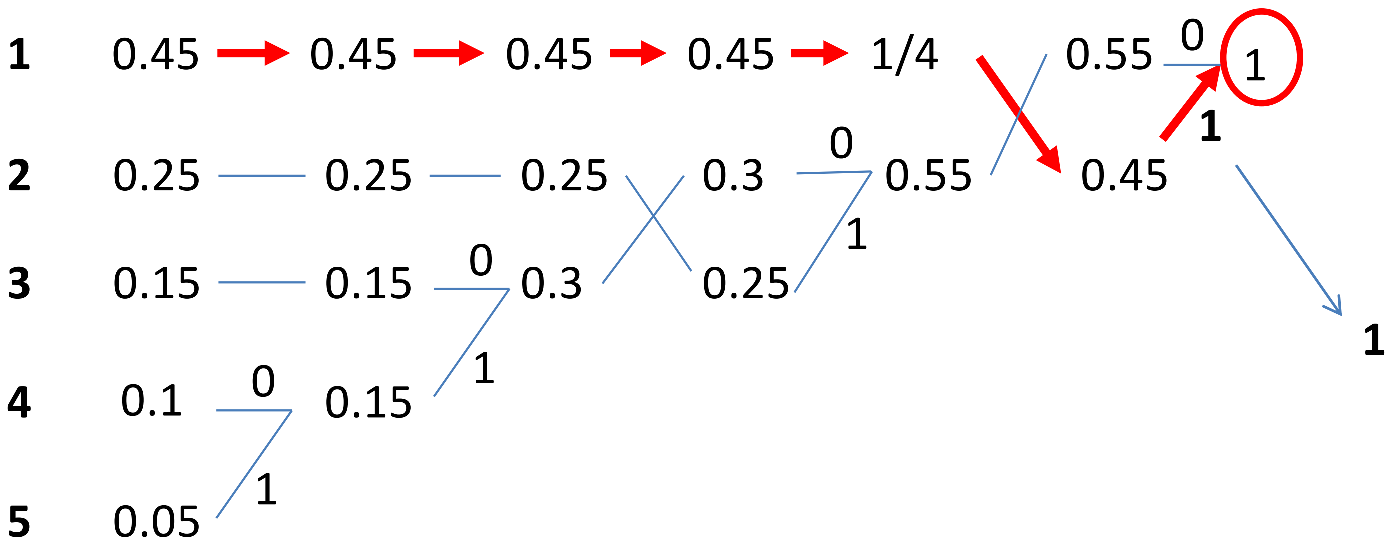

B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 1
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/4
A 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2
H 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Z 1/32
0
1
01100
αντιστροφή σειράς bits
00110

Πρόσθετο Παράδειγμα κωδικοποίησης Huffman

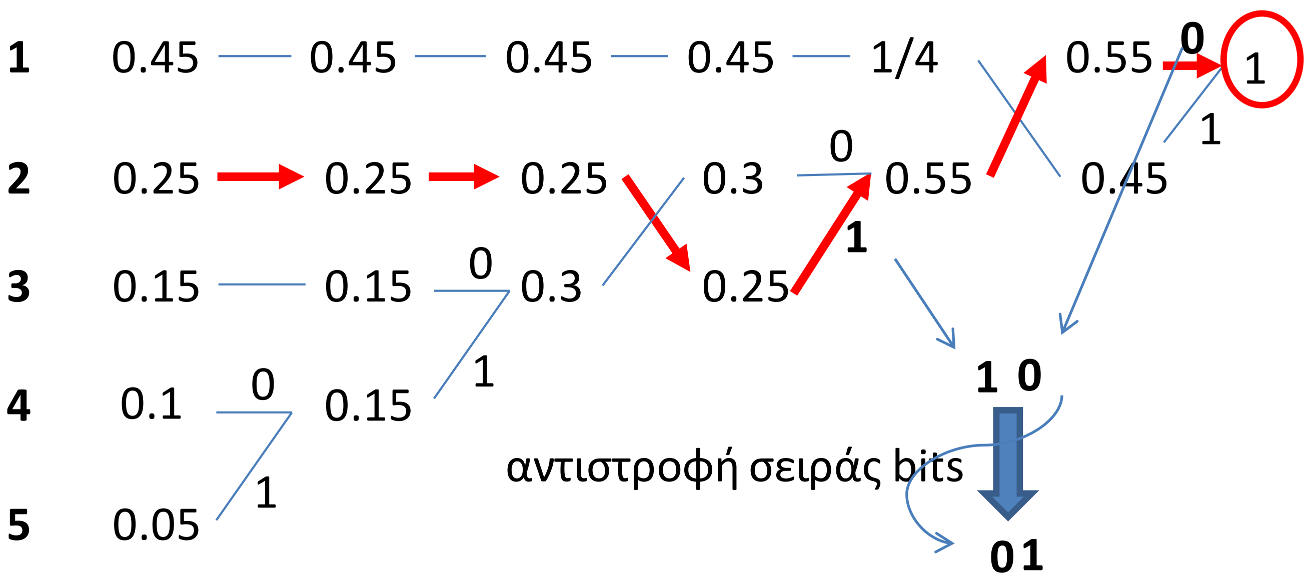
Σύμβολα



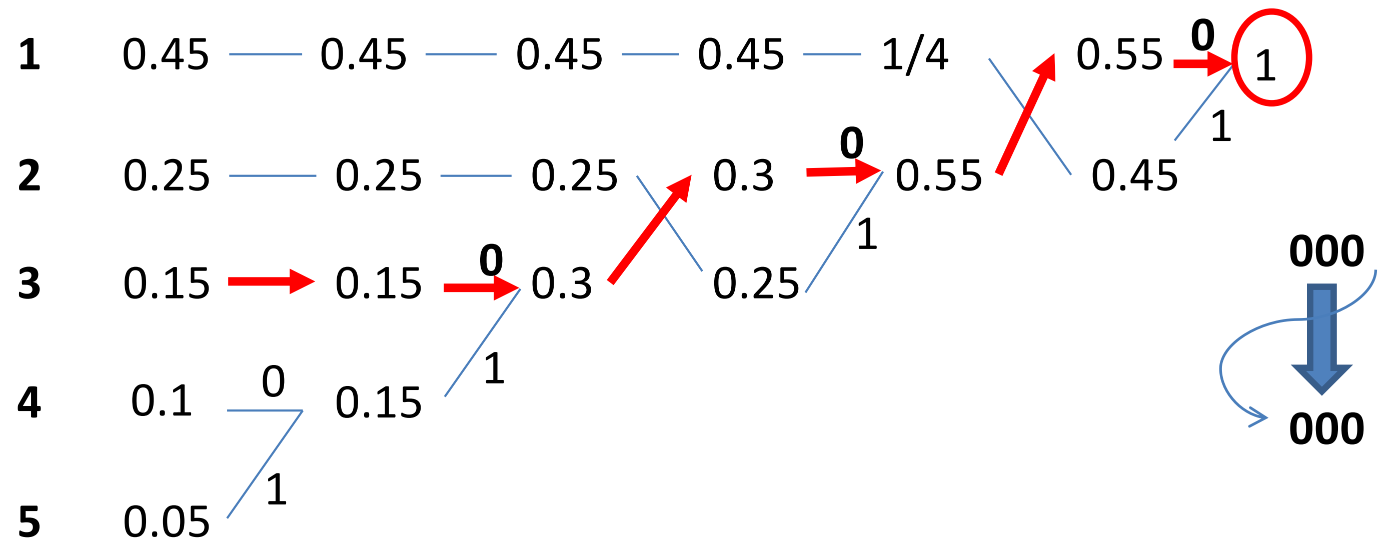
Σύμβολο 1



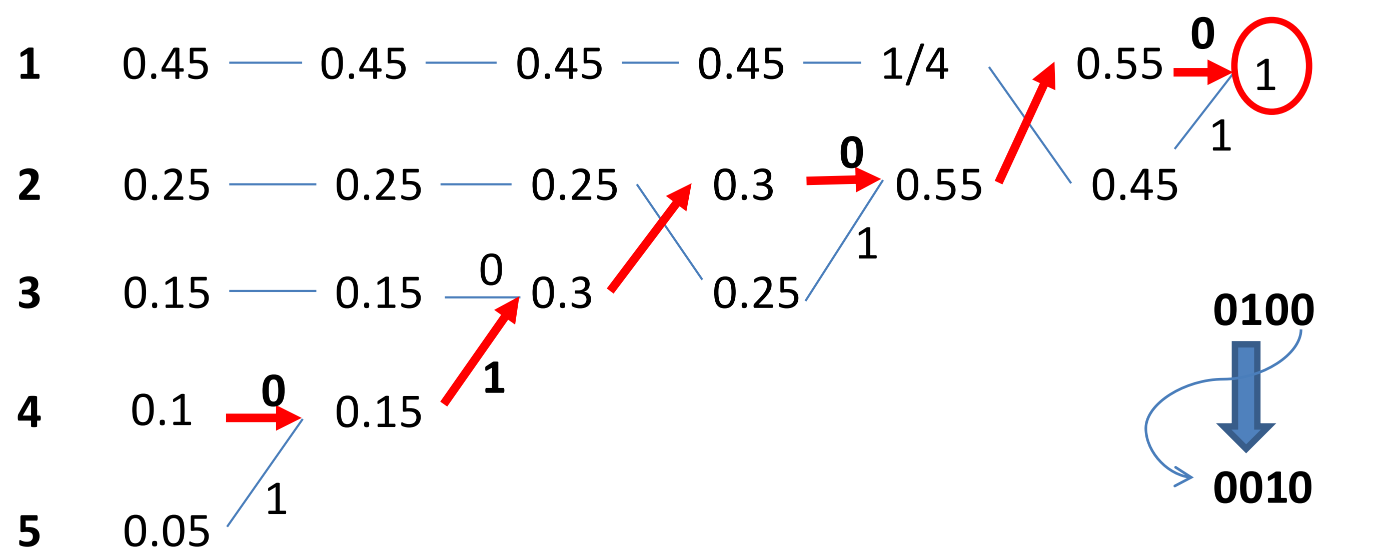
Σύμβολο 2



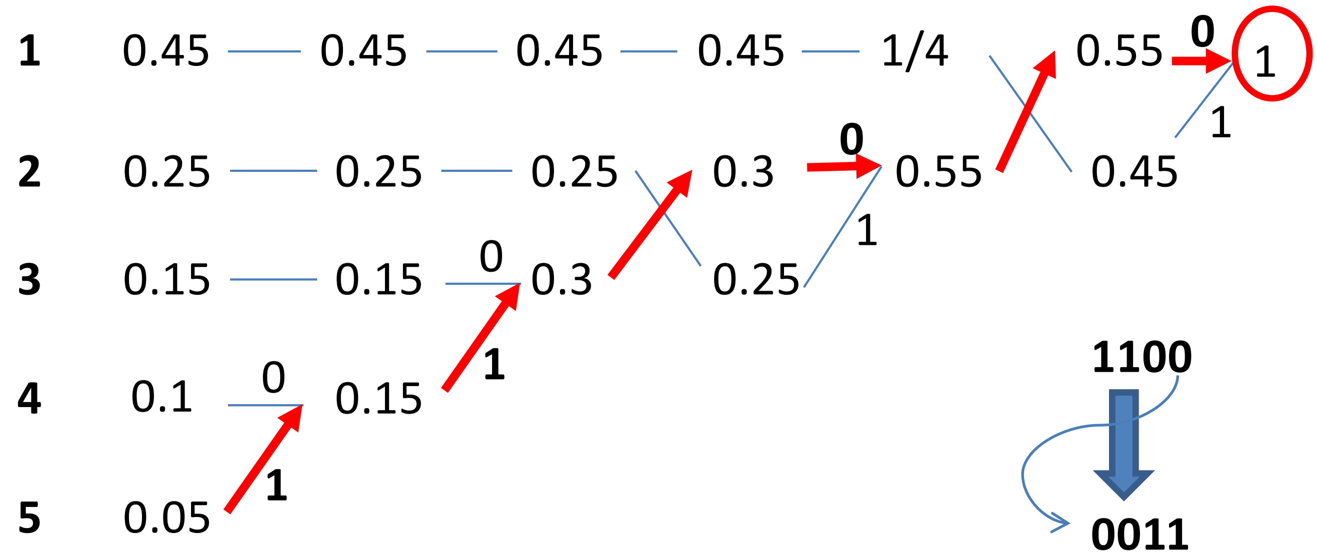
Σύμβολο 3



Σύμβολο 4



Σύμβολο 5



1 0.45 0.45 0.45 0.45 1/4 0.55 0 1 1
2 0.25 0.25 0.25 0.3 0 0.55 0.45
3 0.15 0.15 0 0.3 0.25 1
4 0.1 0 0.15 1
5 0.05 1
1100
0011

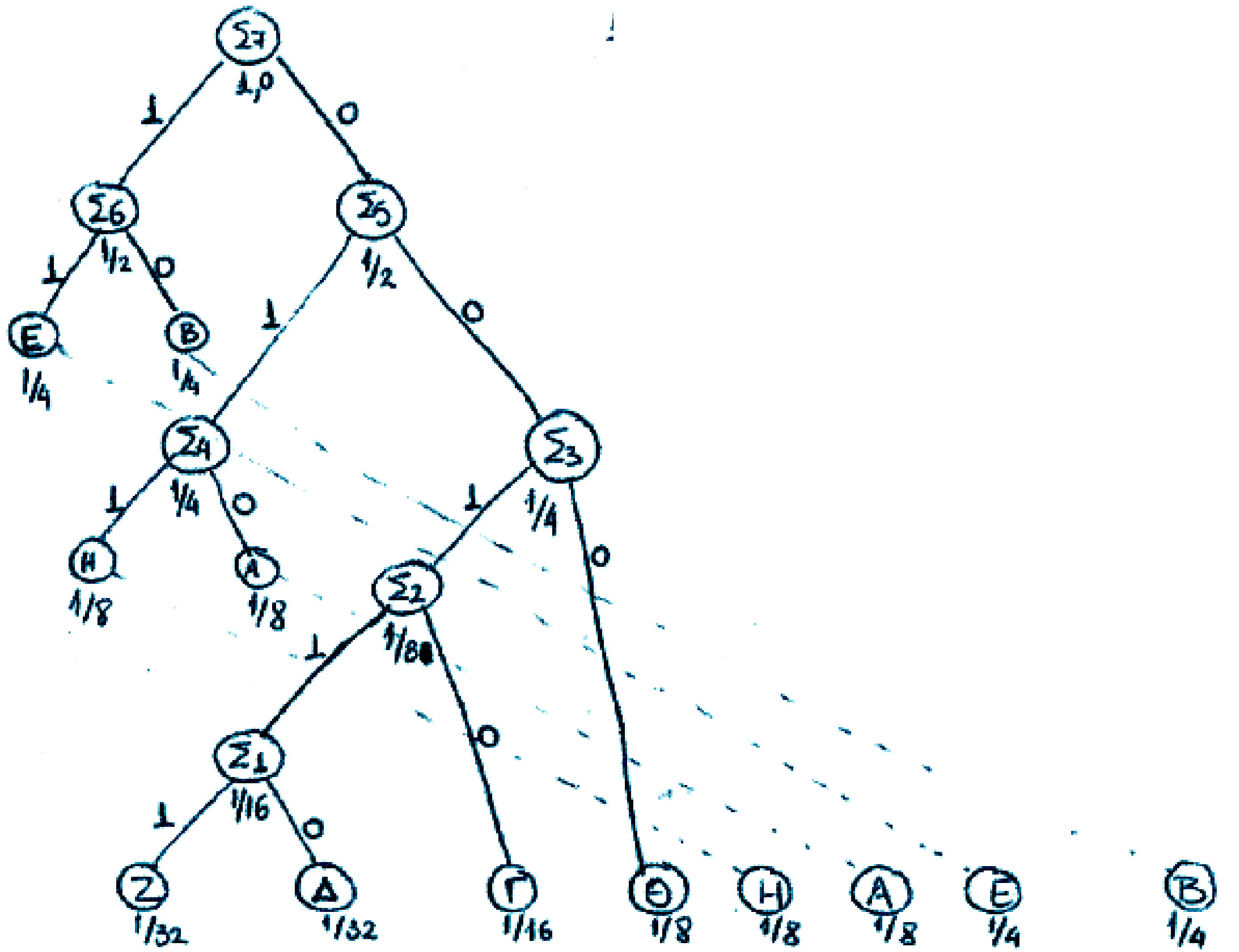
Κωδ. Huffmann με Χρήση δυαδικού δένδρου

1. Τοποθέτηση συμβόλων με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων: ΖΔΓΘΗΑΕΒ
2. Ομαδοποίηση Ζ, Δ στο Σ_1 $P_{\Sigma_1} = 1/32 + 1/32 = 1/16$
3. Σ_1ΓΘΗΑΕΒ σε αύξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση Σ_1, Γ στο Σ_2 $P_{\Sigma_2} = 1/16 + 1/16 = 1/8$
4. Σ_2ΘΗΑΕΒ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα ομαδοποίηση Σ_2, Θ στο Σ_3 $P_{\Sigma_3} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
5. Σ_3ΗΑΕΒ ΟΧΙ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων: Η Α Σ_3 Ε Β ομαδοποίηση Η, Α στο Σ_4 $P_{\Sigma_4} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
6. Σ_4 Σ_3ΕΒ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση Σ_4, Σ_3 στο Σ_5 $P_{\Sigma_5} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
7. Σ_5ΕΒ ΟΧΙ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων: Ε Β Σ_5 ομαδοποίηση Ε, Β στο Σ_6 $P_{\Sigma_6} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
8. Ομαδοποίηση Σ_6, Σ_5 στο Σ_7 $P_{\Sigma_7} = 1{,}0$
9. Ανάθεση '1' στα αριστερά παιδιά και '0' στα δεξιά παιδιά κάθε κόμβου.
10. Αντιστοίχιση κωδ. λέξεων ανά σύμβολο

Σε κάθε βήμα διατάσσουμε τα σύμβολα με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων και ομαδοποιούμε τα 2 αριστερότερα

Β: Διαδρομή $\Sigma_7 \to \Sigma_6 \to B$: 10
Ε: Διαδρομή $\Sigma_7 \to \Sigma_6 \to E$ 11
Α: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_4 \to A$: 010
Η: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_4 \to H$: 011
Θ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Theta$ 000
Γ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Gamma$: 0010
Δ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Sigma_1 \to \Delta$ 00110
Ζ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Sigma_1 \to Z$ 00111

Στην επόμενη σελίδα παρατίθεται η κωδ/ση Huffman με τη χρήση δυαδικού δένδρου.


Σ7
1,0
1
0
Σ6
1/2
Σ5
1/2
E
1/4
B
1/4
Σ4
1/4
Σ3
1/4
H
1/8
A
1/8
Σ2
1/8
Σ1
1/16
Z
1/32
Δ
1/32
Γ
1/16
Θ
1/8
H
1/8
A
1/8
E
1/4
B
1/4

Πλεονασμός πηγής

$$r_{ed} = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log N} = 1 - \frac{2{,}6875}{3} = 10{,}4\%$$

Επίδοση Κώδικα

$$\alpha = \frac{H(C)}{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i \log q}$$ σελ. 57

$$H(C) = 2{,}6875 \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$\log q = \log 2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \frac{1}{4} 2 + \frac{1}{4} 2 + \frac{1}{8} 3 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} 3 + \frac{1}{16} 4 + \frac{1}{32} \cdot 5 + \frac{1}{32} 5 =$$

$$= 1 + \frac{9}{8} + \frac{18}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875$$

Άρα $\alpha = 100\%$

$\alpha < 100\%$ όταν $l_i^* = -\log(p_i) \notin \mathbb{N}$

Κωδικοποίηση Αλγ. Fano.

(1) Διάταξη με φθίνουσα $P(S_i)$ — q κωδικά σύμβολα

(2) Διαχωρισμός σε q υποομάδες (για δυαδικό $q=2$) με όσο το δυνατόν ίσες αθροιστικές πιθανότητες

(3) Αντιστοίχιση σε κάθε υποομάδα ενός κωδ. συμβόλου

(4) Ξανά το (2) για κάθε υποομάδα.

	P	l_i	
B	1/4	0 0	(11)
E	1/4	0 1	(10)
A	1/8	1 0 0	(011)
H	1/8	1 0 1	(010)
Θ	1/8	1 1 0	(001)
Γ	1/16	1 1 1 0	(0001)
Δ	1/32	1 1 1 1 0	(00001)
Z	1/32	1 1 1 1 1	(00000
	1		

με ανάθεση πρώτα του 1 και μετά τι 0.

ΟΜΑΔΟΠΟΙΟΥΜΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΣΥΝΒΟΛΑ!

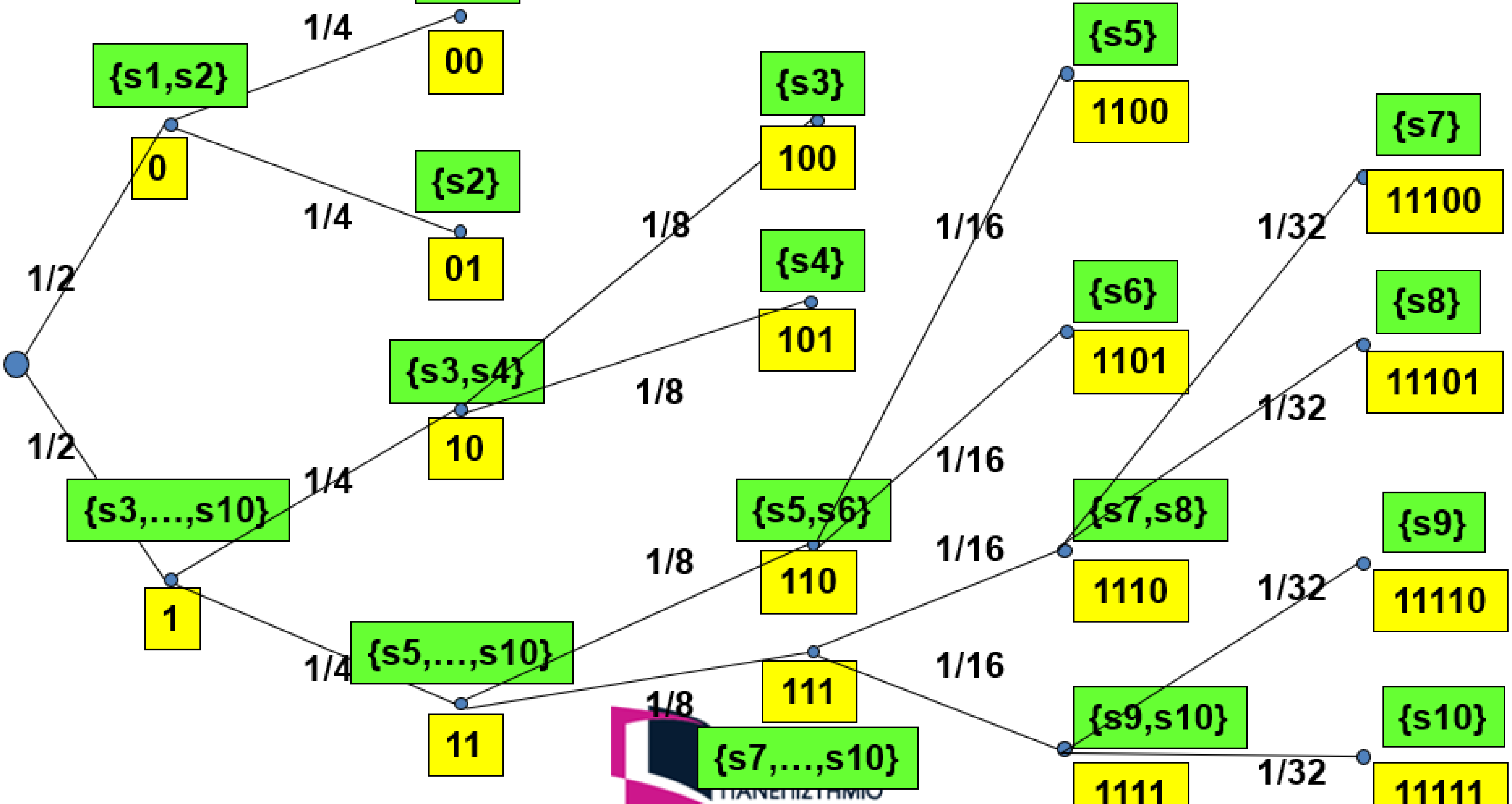
Αλγόριθμος Κωδικοποίησης FANO

Παράδειγμα

S={s1,s2,…,s10}

{p1,p2,…,p10}={1/4,1/4,1/8,1/8,1/16,1/16,1/32,1/32,1/32,1/32}

Ποιες είναι οι κωδικές λέξεις χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο FANO



Κωδικοποίηση Shannon

1. Διάταξη συμβόλων με φθίνουσα $p(s_i)$

2. Υπολογισμός Αθροιστικής πιθανότητας $\Pi_i = \sum_{k=1}^{i-1} p(s_k)$, $\Pi_1 = 0$

3. Υπολογισμός πλήθους κωδικών συμβόλων (μήκους κωδικής λέξης) για κάθε σύμβολο $l_i = \lceil -\log(p(s_i)) \rceil$

4. Εύρεση Δυαδικού Αναπτύγματος για κάθε Π_i

Αλγόριθμος:

for $k = 1 : l_i$

$\Pi(i) \leftarrow \Pi(i) \cdot 2$

if $\Pi(i) \geq 1$

$\psi_k = 1$

$\Pi(i) \leftarrow \Pi(i) - 1$

else

$\psi_k = 0$

end

end

S_i	$P(S_i)$	Π_i	$l_i = -\log P(S_i)$	κωδικολέξεις
B	1/4 = 0,25	0	2	00
E	1/4 = 0,25	0,25+0 = 0,25	2	01
A	1/8 = 0,125	0,25+0,25 = 0,5	3	100
H	1/8 = 0,125	0,125+0,5 = 0,625	3	101
Θ	1/8 = 0,125	0,125+0,625 = 0,75	3	110
Γ	1/16 = 0,0625	0,125+0,75 = 0,875	4	1110
Δ	1/32 = 0,03125	0,0625+0,875 = 0,9375	5	11110
Z	1/32 = 0,03125	0,03125+0,9375 = 0,96875	5	11111

π.χ για το Δ

$k = 1:5$, $\Pi_\Delta = 0{,}9375$

$k=1$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0{,}9375 \times 2 = 1{,}875 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1{,}875 - 1 = 0{,}875 \end{cases}$

$k=2$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0{,}875 \times 2 = 1{,}75 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_2 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1{,}75 - 1 = 0{,}75 \end{cases}$

$k=3$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0{,}75 \times 2 = 1{,}5 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_3 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1{,}5 - 1 = 0{,}5 \end{cases}$

$k=4$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0{,}5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_4 = 1 \\ \Pi_\Delta \leftarrow 1 - 1 = 0 \end{cases}$

$k=5$

$\Pi_\Delta \leftarrow 0 \times 2 = 0 < 1 \Rightarrow \begin{cases} \psi_5 = 0 \\ \text{END} \end{cases}$

Αλγόριθμος κωδικοποίησης SHANNON

- Παράδειγμα μετατροπής δεκαδικού κλάσματος σε δυαδικό
  - F=0.375
    - $2F=2*0.375=0.75 < 1 \Rightarrow \alpha_1=0$
    - $2(2F-\alpha_1)=2*0.75=1.5 \geq 1 \Rightarrow \alpha_2=1$
    - $2(2(2F-\alpha_1)-\alpha 2)=2(1.5-1)=1 \geq 1 \Rightarrow \alpha_3=1$
    - Άρα το δυαδικό ανάπτυγμα του 0.375 είναι 0.011
  - F=0.327
    - $2*0.327=0.654 < 1 \Rightarrow \alpha_1=0$
    - $2*0.654=1.308 \geq 1 \Rightarrow \alpha_2=1$
    - $2*(1.308-1)=0.616 < 1 \Rightarrow \alpha_3=0$
    - $2*0.616=1.232 \geq 1 \Rightarrow \alpha_4=1$
    - $2*(1.232-1)=0.464 < 1 \Rightarrow \alpha_5=0$
    - $2*0.464=0.928 < 1 \Rightarrow \alpha_6=0$
    - $2*0.928=1.956 \geq 1 \Rightarrow \alpha_7=1$
    - $2*(1.956-1)=1.912 \geq 1 \Rightarrow \alpha_8=1$
    - $2*(1.912-1)=1.824 \geq 1 \Rightarrow \alpha_9=1$
    - Άρα το δυαδικό ανάπτυγμα του 0.327 είναι 0.010100111…
    - Παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν το δυαδικό ανάπτυγμα ενός κλάσματος να αποτελείται από άπειρα δυαδικά ψηφία

Αλγόριθμος κωδικοποίησης SHANNON

Παράδειγμα

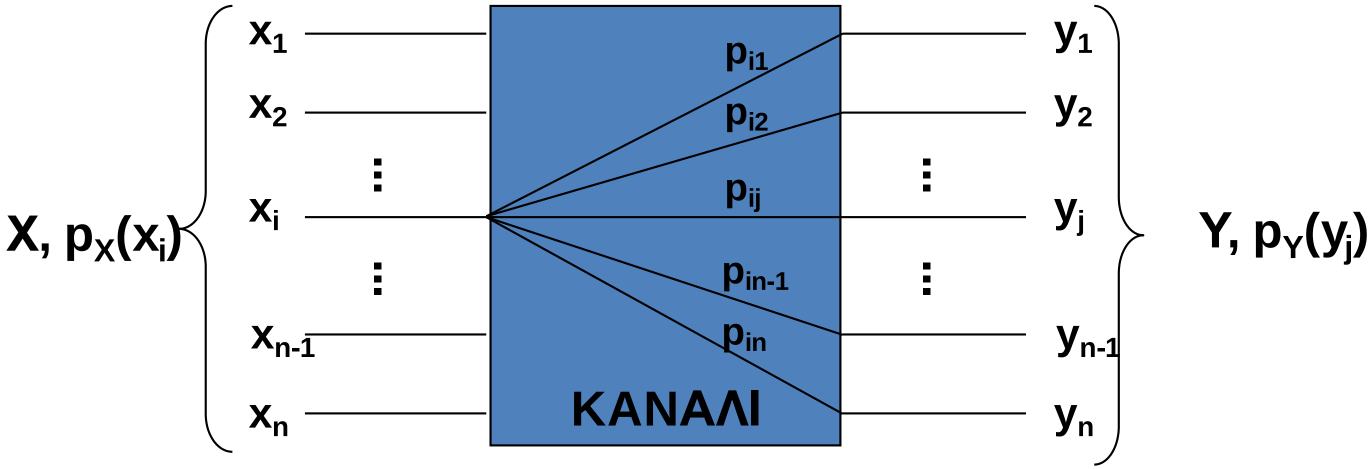
...

Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων Ps_i	P_i	Μήκος l_i $-\log(Ps_i)$	Ανάπτυγμα του P_i	Κωδικές Λέξεις
S_1	1/4	$P_1 = 0$	$l_1 = 2$	.00000	00
S_2	1/4	$P_2 = 1/4$	$l_2 = 2$	.01000	01
S_3	1/8	$P_3 = 1/2$	$l_3 = 3$	.10000	100
S_4	1/8	$P_4 = 5/8$	$l_4 = 3$	.10100	101
S_5	1/16	$P_5 = 3/4$	$l_5 = 4$	.11010	1100
S_6	1/16	$P_6 = 13/16$	$l_6 = 4$	.11010	1101
S_7	1/32	$P_7 = 7/8$	$l_7 = 5$	.11100	11100
S_8	1/32	$P_8 = 29/32$	$l_8 = 5$	.11101	11101
S_9	1/32	$P_9 = 15/16$	$l_9 = 5$	.11110	11110
S_{10}	1/32	$P_{10} = 31/32$	$l_{10} = 5$	.11111	11111

Σημείωση: Εάν ο παρονομαστής των αθροιστικών πιθανοτήτων μπορεί να γραφεί σε μορφή 2^n (εδώ είναι 2^5=32) τότε γράφουμε όλες τις αθροιστικές πιθανότητες με τον παρονομαστή αυτόν και το δυαδικό ανάπτυγμα αντιστοιχεί στη δυαδική μορφή του αριθμητή(με n bits). Π.χ. για το S6 Π6=13/16=26/32 άρα το ανάπτυγμα είναι [26]=11010

Κανάλια Επικοινωνίας

Κανάλια Επικοινωνίας (3)



$$[p_{Y/X}(y_j/x_i)]=[p_{ij}]=[P_{Y/X}]$$

$$[P_Y]=[P_X]\,[P_{Y/X}]$$

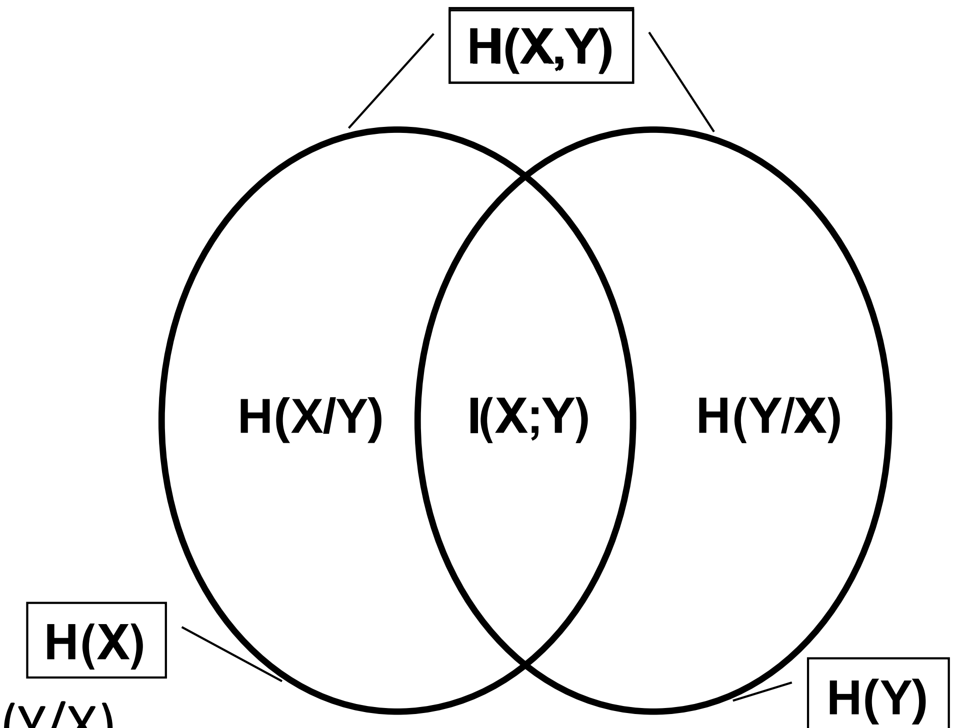
$$[P_X]=[p_X(x_1)\ p_X(x_2)\ \dots\ p_X(x_N)\ ]$$

$$[P_Y]=[p_Y(y_1)\ p_Y(y_2)\ \dots\ p_Y(y_N)\ ]$$

$$p_Y\left(y_j\right)=\sum_{i=1}^{N} p_X\left(x_i\right)p_{ij},\ j=1,\ldots,N$$

Διαφάνειες 112-153
Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_2020_2021

Κανάλια Επικοινωνίας (4)



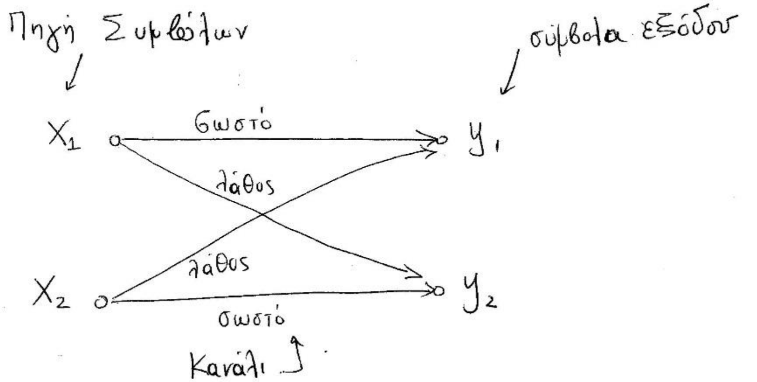
- **<u>Υπενθύμιση</u>**
  - Συνδυασμένη Εντροπία
    - $\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = -\sum_x \sum_y p(x,y) \log\, p(x,y)$
    - H(X,Y)=H(X)+H(Y/X)
  - Δεσμευμένη Εντροπία
    - $\mathrm{H}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) = -\sum_x \sum_y p(x,y) \log\, p(x/y)$
  - Αμοιβαία Πληροφορία
    - I(X;Y)= H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)
    - Είναι το μέγεθος εκείνο που μετράει το ποσό της μείωσης της αβεβαιότητας της X όταν γίνει γνωστό το Y.
    - Τη μέση πληροφορία της X που μεταφέρεται στη Y.

Σκοπός: Μεταφορά συμβόλων διαμέσου του καναλιού διατηρώντας την κατανομή των μεταξύ τους πιθανοτήτων $p(x_i)$

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 113-152

1)

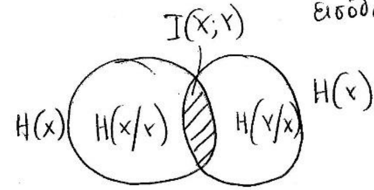
Κανάλια Επικοινωνίας



Πίνακας Μετάβασης Καναλιού

$$P=[p_{ij}]=P(y_j/x_i)=\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & \qquad\qquad y_2 \end{matrix}}^{\text{σύμβολα εξόδου}} \\ \begin{matrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) \\ \\ P(y_1/x_2) & P(y_2/x_2) \end{bmatrix} \end{array}$$

σύμβολα εισόδου



$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρει το κανάλι.

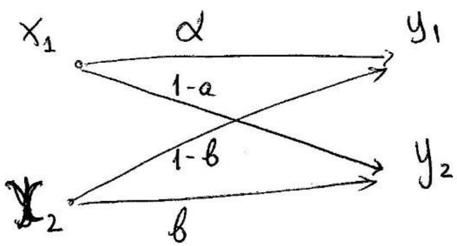
αβεβαιότητα της Y

αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

Χωρητικότητα καναλιού

$$C=\max(I(X;Y))$$

Παράδειγμα. Ενθόρυβο κανάλι. 3)



$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-b & b \end{bmatrix} \end{array}$$

$$H(Y/X) = -p(y_1/x_1)\log\left[p(y_1/x_1)\right]\cdot p(x_1) -$$

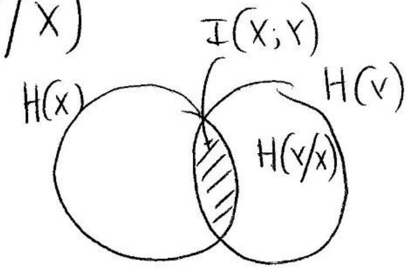
$$- p(y_1/x_2)\log\left[p(y_1/x_2)\right]p(x_2) - p(y_2/x_1)\log\left[p(y_2/x_1)\right]p(x_1) -$$

$$- p(y_2/x_2)\log\left[p(y_2/x_2)\right]\ p(x_2) =$$

$$= -\alpha\log(\alpha)\,p(x_1) - (1-b)\log(1-b)\,p(x_2) - (1-a)\log(1-a)\,p(x_1) -$$

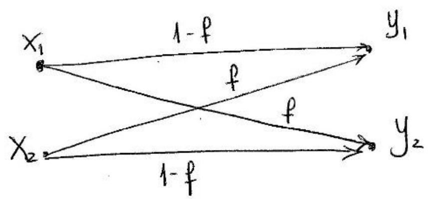
$$- b\log(1-b)\,p(x_2) \neq 0$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



$$C = \max_{p(x_i)}\left\{I(X;Y)\right\}$$

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι



$$P(y_1) = (1-f)\,p(x_1) + f\,p(x_2)$$

$$p(y_2) = f\,p(x_1) + (1-f)\,p(x_2)$$

Αμοιβαία Πληροφορία.

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{2} p(y_j)\log p(y_j)$$

$$H(Y/X) = -(1-f)\log(1-f)\,p(x_1) - f\log(f)\,p(x_2) -$$

$$-(1-f)\log(1-f)\,p(x_2) - f\log(f)\,p(x_1) =$$

$$= p(x_1)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] + p(x_2)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] =$$

$$= \left[p(x_1) + p(x_2)\right]\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] = -(1-f)\log(1-f) - f\log f =$$

$= H(f)$ ανεξάρτητη των πιθανοτήτων των εισόδων.

Άρα $I(X;Y) = H(Y) - H(f)$

$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)}\left\{H(Y) - H(f)\right\} = \max_{p(x_i)}\left\{H(Y)\right\} - H(f)$$

Μέγιστη $H(Y) \Rightarrow$ ομοιόμορφα κατανεμημένες $p(y_j) = \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$ 6

<u>Έλεγχος:</u> Υπάρχουν κατάλληλες $p(x_i)$ που να δίνουν ομοιόμορφες $p(y_j)$?

<u>Ναι</u> εφόσον σε συμμετρικά κανάλια ομοιόμορφα κατανεμημένης είσοδοι οδηγούν σε ομοιόμορφα κατανεμημένες εξόδους

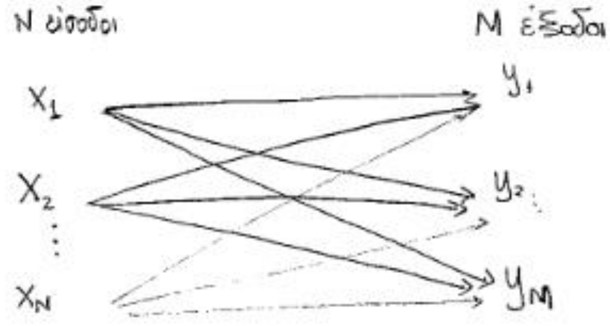
Αν $p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} p(y_1) = (1-f)\cdot\frac{1}{2} + f\,\frac{1}{2} = \frac{1-f+f}{2} = \frac{1}{2} \\ p(y_2) = f\,\frac{1}{2} + (1-f)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα $C = \max_{p(x_i)} H(Y) - H(f) = 1 - H(f)$

<u>Παρατηρήσεις:</u> *Η έξοδος μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη εάν ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

- *Η είσοδος είναι ομοιόμορφά κατανεμημένη και το κανάλι είναι συμμετρικό ή αθόρυβο*
- *Η είσοδος δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα κατανεμημένη αλλά το κανάλι είναι συμμετρικό με f=1/2*
- *Το κανάλι είναι ενθόρυβο γενικής μορφής και με κατάλληλους συνδυασμούς των πιθανοτήτων $p(y_j/x_i)$ και $p(x_i)$ προκύπτουν ομοιόμορφές $p(y_j)$*

Κανάλια Επικοινωνίας



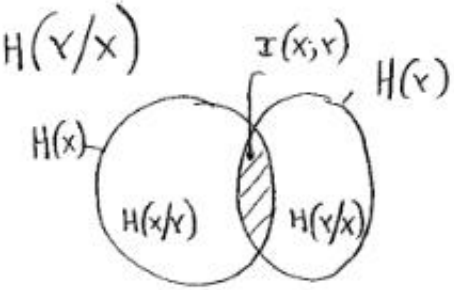
Πίνακας Μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{array} \\ \begin{bmatrix} P(y_1/x_1) & P(y_2/x_1) & \cdots & P(y_M/x_1) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ P(y_1/x_N) & & \cdots & P(y_M/x_N) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{M} P(y_j/x_i) = 1$ (Το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα)

Αμοιβαία Πληροφορία:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$



βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 20-29

Χωρητικότητα:

$$C = \max\left[I(X;Y)\right]$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j)\cdot \log\left[p(y_j)\right]$$

στήλη j του πίνακα $P(Y/X)$

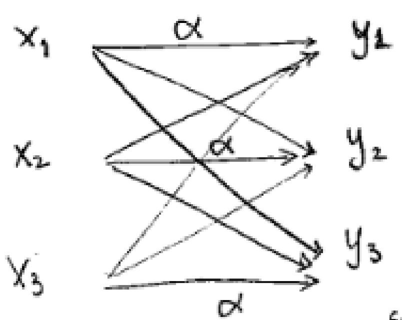
$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(y_j/x_i)\cdot p(x_i)$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left\{p(y_j/x_i)\cdot \log\left[p(y_j/x_i)\right]\cdot p(x_i)\right\}$$

Ειδικές Περιπτώσεις

Συμμετρικό Κανάλι → $N=M$

→ $p(y_j/x_i) = \alpha \quad \forall i$



$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

συμμετρικό κανάλι 3 εισόδων - εξόδων

Μερικώς Συμμετρικό Κανάλι

Οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών.

π.χ. $P(Y/X) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \end{bmatrix}$

Ιδιότητα Συμμετρικών / Μερικώς Συμμετρικών Καναλιών:

$$H(Y/X) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

Εξήγηση:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\{p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)]\,p(x_i)\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\left\{p(x_i)\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)]\right\}}\right\}$$

Το ίδιο άθροισμα δίνουν όλες οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αφού αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών

$$= -\underbrace{\sum_{i=1}^{N}[p(x_i)]}_{=1}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)]\right\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log[p(y_j/x_i)] \quad \forall i$$

Παράδειγμα διαφάνειας 30

9

παρατήρηση: μερικώς συμμετρικό κανάλι.

$$P(Y/X) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \end{array}$$

$$P(Y/X) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ x_2 & 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{array}$$

$p(x_1) = a$

$p(x_2) = 1-a$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log p(y_j)$$

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(y_j/x_i) \cdot p(x_i)$$

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) =$$

$$= p(y_1/x_1) \cdot p(x_1) + p(y_1/x_2) \cdot p(x_2) =$$

$$= 0,8 \cdot a + 0(1-a) = 0,8a$$

όμοια

$$p(y_2) = 0,8(1-a)$$

$$p(y_3) = 0,1$$

$$p(y_4) = 0,1$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log p(y_j) = 0,66 - 0,8a \log(0,8a) - 0,8(1-a) \log[0,8(1-a)]$$

βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 30-34

Υπολογισμός $H(Y/X)$

στοιχεία πίνακα $P(Y/X)$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i) \log\left[P(y_j/x_i)\right] \cdot P(x_i) =$$

δεδομένο

$$= -\sum_{j=1}^{4} P(y_j/x_i) \log P(y_j/x_i)$$

$i=1$ ή 2
επειδή το κανάλι
είναι μερικώς
συμμετρικό

$$= -\left[0,8 \log(0,8) + 0,1 \log 0,1 + 0,1 \log 0,1\right] = 0,9219$$

Χωρητικότητα

$$C = \max\left[I(X;Y)\right] = \max\left[H(Y) - H(Y/X)\right]$$

- γ) Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή *α*.
- Είναι

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}[H(Y) - H(Y/X)] \\
&= \max_{p(x)}\left[0{,}66 - 0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575 - 0{,}66)\right] \\
&= \max_{p(x)}\left[-0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575\right].
\end{aligned}
$$

- Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του a που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο.

- Επομένως,

$$\frac{dI(X;Y)}{da} = \left[-0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a) - 0{,}2575\right]'$$

$$= -0{,}8\left[(a)'\log(0{,}8a) + a(\log(0{,}8a))'\right]$$

$$-0{,}8\left[(1-a)'\log(0{,}8(1-a)) + (1-a)(\log(1-a))'\right]$$

$$= -0{,}8\left[\log(0{,}8a) + a\frac{\log e}{a}\right] - 0{,}8\left[(-1)\log(0{,}8(1-a)) + (1-a)(-1)\frac{1}{1-a}\log e\right]$$

$$= -0{,}8\log(0{,}8a) - 0{,}8\log e + 0{,}8\log(0{,}8(1-a)) + 0{,}8\log e$$

$$= -0{,}8\left[\log(0{,}8a) - \log(0{,}8(1-a))\right] = -0{,}8\log\frac{0{,}8a}{0{,}8(1-a)} = 0 \Rightarrow$$

$$\log\frac{a}{1-a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{1-a}\right) = 2^0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Σημείωση: Εφόσον έχουμε μερικώς συμμετρικό κανάλι μπορούσαμε να πούμε ότι η μέγιστη H(Y) που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφα κατανεμημένες εξόδους προκύπτει από ομοιόμορφα κατανεμημένες εισόδους άρα α=1/2 χωρίς να γίνει παραγώγιση

- Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του *a*, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού
- *C=0,8 bits/symbol.*

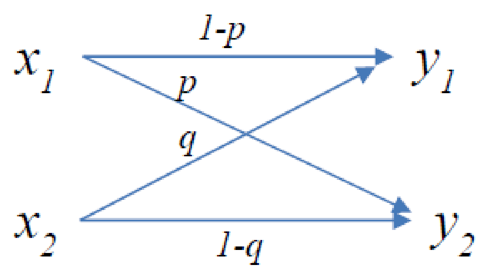
ΓΕ41718

ΘΕΜΑ 4	

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές που σχετίζονται με τα κανάλια επικοινωνίας και τον υπολογισμό της αμοιβαίας πληροφορίας και της χωρητικότητας

Σχετικές ασκήσεις: ΕΞ2015Β/Θ5, ΓΕ4/1415/Θ2

(α) Δίνεται το παρακάτω κανάλι:



Ζητούνται οι τιμές των *p*, *q* (αν υπάρχουν) για να έχει το ανωτέρω κανάλι χωρητικότητα (i) μέγιστη (ii) ελάχιστη και (iii) ίση με *C*=1.5 bits/symbol

(β) Εάν ισχύει *p*=*q*=0.6 να αναγνωριστεί ο τύπος του καναλιού και να υπολογιστεί η χωρητικότητά του.

(γ) Εάν ισχύει *p*=0 και *q*=0.3 και $p(x_1)=0.1$ να αναγνωριστεί ο τύπος του καναλιού και να υπολογιστεί η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας *I(X;Y)* μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού.

(δ) Δίνεται το κανάλι με 3 εισόδους $\{x_1,x_2,x_3\}$ και 3 εξόδους $\{y_1,y_2,y_3\}$ με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης

$$P=\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}$$, όπου για το κάθε στοιχείο του ισχύει $p_{i.} = p(y_j/x_i)$

(i) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της εξόδου δεδομένης της εισόδου *H(Y/X)* για *p*=0.3

(ii) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού για *p*=0.5

α) i) Μέγιστη χωρητικότητα έχουμε όταν υπάρχει διακριτή αντιστοίχιση '1-1' μεταξύ εισόδου και εξόδου, δηλαδή όταν ισχύει $p=q=0$ *ή* $p=q=1$ και η χωρητικότητα θα ισούται με $\max\{H(X)\}=\max\{H(Y)\}=\log(2)=1$ bit/symbol, για την περίπτωση δυαδικού καναλιού.

ii) Η ελάχιστη χωρητικότητα αντιστοιχεί στην περίπτωση που υπάρχει πλήρης αβεβαιότητα μεταξύ συμβόλων εισόδου κι εξόδου, δηλ. όταν έχουμε $p=q=0.5$. Η χωρητικότητα τότε είναι ίση με 0.

iii) Εφόσον η μέγιστη χωρητικότητα είναι ίση με 1, δεν υπάρχουν p, q με τα οποία να επιτυγχάνεται χωρητικότητα ίση με 1.5 bit/symbol.

(β) Εάν ισχύει *p*=*q*=0.6 το κανάλι θα είναι δυαδικό συμμετρικό και η χωρητικότητά του θα ισούται με:

$$C = 1 - H(0.6) = 1 + 0.6 \cdot \log_2(0.6) + 0.4 \cdot \log_2(0.4) = 0.029$$

(γ) Εάν ισχύει p=0 *και* q=0.3 έχουμε κανάλι τύπου Z.

Επίσης, έχουμε ότι $p(x_1)=0.1$, άρα $p(x_2)=0.9$

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας ισούται με:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$H(Y) = -p(y_1)\log(p(y_1)) - p(y_2)\log(p(y_2))$$

$p(y_2) = p(x_2) \cdot p(y_2/x_2) = 0.9 \cdot 0.7 = 0.63$

$p(y_1) = p(x_1) \cdot p(y_1/x_1) + p(x_2) \cdot p(y_1/x_2) = 0.1 \cdot 1 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.37$

Συνεπώς,
$H(Y) = -0.63l\!\!\!\quad (0.63) - 0.37l\!\!\!\quad (0.37) = 0.95 bits/symbol$

Επίσης,

$H(Y/X) = -p(x_1)p(y_1/x_1)\log(p(y_1/x_1)) - p(x_2)p(y_1/x_2)\log(p(y_1/x_2)) - p(x_2)p(y_2/x_2)\log(p(y_2/x_2)) = 0 + 0.469 + 0.324 = 0.793\ bits/symbol$

Οπότε τελικά έχουμε:

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = 0.95 - 0.793 = 0.157\ bits/symbol$

(δ) (i) Δίνεται το κανάλι με 3 εισόδους $\{x_1,x_2,x_3\}$ και 3 εξόδους $\{y_1,y_2,y_3\}$ με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης

$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}$, όπου για το κάθε στοιχείο του ισχύει $p_{i,} = p(y_j/x_i)$

Το κανάλι είναι συμμετρικό οπότε αρκεί ο υπολογισμός με βάση μία από τις γραμμές του πίνακα μετάβασης.

Η αβεβαιότητα της εξόδου δεδομένης της εισόδου H(Y/X) για p=0.3 θα ισούται με:

$$H(Y/X) = -p(y_1/x_1)\log(p(y_1/x_1)) - p(y_2/x_1)\log(p(y_2/x_1)) =$$

$= -p\log(p) - (1-p)\log(1-p) = 0.88\ bits/symbol$

(ii) Αν έχουμε p=0.5 το κανάλι αντιστοιχεί στον τύπο ενθόρυβης (γραφο)μηχανής οπότε η χωρητικότητά του ισούται με:

$C = \log(3) - 1 = 0.585\ bits/symbol$

Παραδείγματα

<u>**ΘΕΜΑ 4**</u> ΕΞ2018Α

Μία διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη παράγει τα σύμβολα V, W, X, Y, Z, με πιθανότητες 0.3125, P_1, 0.25, 0.125, P_2, αντίστοιχα, όπου $P_1>P_2$. Εάν η ποσότητα πληροφορίας του συμβόλου με το υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο είναι ίση με 4 bits, να υπολογιστούν:

1) Οι τιμές των P_1 και P_2.
2) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής.
3) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο από τα παραπάνω σύμβολα.

1) Η ποσότητα πληροφορίας ενός συμβόλου υπολογίζεται από τον αρνητικό λογάριθμο της πιθανότητας παραγωγής του. Συνεπώς:

$$-\log_2\left(P_i\right)=4 \Leftrightarrow \log_2\left(P_i\right)=-4 \Leftrightarrow$$
$$2^{\log_2\left(P_i\right)}=2^{-4} \Leftrightarrow P_i=1/16.$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι το υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο έχει το σύμβολο με τη μικρότερη πιθανότητα παραγωγής και $P_1 > P_2 \rightarrow P_2=1/16$. Τέλος, με βάση τον νόμο των πιθανοτήτων (πρέπει να αθροίζουν σε 1), είναι:

$$\sum_{i=1}^{5} P_i=1 \Leftrightarrow \frac{5}{16}+P_1+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=1 \Leftrightarrow P_1=\frac{4}{16}.$$

2) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής υπολογίζεται με βάση την παρακάτω σχέση

$$H(s) = -\sum_{i=1}^{5} P_i \log_2 P_i = -\frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16}$$

$$= 0.524 + 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.25 = 2.149 bits / symbol.$$

3) Για τον υπολογισμό του μέσου πληροφορικού περιεχομένου των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η πηγή είναι χωρίς μνήμη δηλαδή η επιλογή ενός συμβόλου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τις επιλογές των προηγούμενων συμβόλων. Συνεπώς οι από κοινού (συνδυασμένες) πιθανότητες δημιουργίας των μηνυμάτων μπορούν να υπολογιστούν από τον πολλαπλασιασμό των πιθανοτήτων παραγωγής των συμβόλων από τα οποία αποτελούνται. Συνολικά θα έχουμε 5^2=25 διαφορετικά μηνύματα, των οποίων οι πιθανότητες εμφάνισης δίνονται παρακάτω

$$P_{VV}=P_VP_V=\frac{25}{256},P_{VW}=P_VP_W=\frac{5}{16}\frac{1}{4}=\frac{5}{64},P_{VX}=\frac{5}{64},P_{VY}=\frac{5}{128},P_{VZ}=\frac{5}{256},$$

$$P_{WV}=\frac{5}{64},P_{WW}=\frac{1}{16},P_{WX}=\frac{1}{16},P_{WY}=\frac{1}{32},P_{WZ}=\frac{1}{64},$$

$$P_{XV}=\frac{5}{64},P_{XW}=\frac{1}{16},P_{XX}=\frac{1}{16},P_{XY}=\frac{1}{32},P_{XZ}=\frac{1}{64},$$

$$P_{YV}=\frac{5}{128},P_{YW}=\frac{1}{32},P_{YX}=\frac{1}{32},P_{YY}=\frac{1}{64},P_{YZ}=\frac{1}{128},$$

$$P_{ZV}=\frac{5}{256},P_{ZW}=\frac{1}{64},P_{ZX}=\frac{1}{64},P_{ZY}=\frac{1}{128},P_{ZZ}=\frac{1}{256}.$$

Για τα 25 μηνύματα που έχουν δημιουργηθεί, θα υπολογιστεί το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο με βάση την παρακάτω σχέση:

$$H(s) = -\sum_{i=1}^{25} P_i \log_2(P_i) =$$

$$-\frac{25}{256}\log_2\left(\frac{25}{256}\right)-\frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right)-\frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right)-\frac{5}{128}\log_2\left(\frac{5}{128}\right)-\frac{5}{256}\log_2\left(\frac{5}{256}\right)$$

$$-\frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right)-\frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$$

$$-\frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right)-\frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$$

$$-\frac{5}{128}\log_2\left(\frac{5}{128}\right)-\frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{128}\log_2\left(\frac{1}{128}\right)$$

$$-\frac{5}{256}\log_2\left(\frac{5}{256}\right)-\frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{128}\log_2\left(\frac{1}{128}\right)-\frac{1}{256}\log_2\left(\frac{1}{256}\right)$$

= 1.196+1.037+1.037+0.644+ 0.384= 4.298 bits/message.

ΘΕΜΑ 3 ΕΞ2018Β

Μια διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη παράγει τα σύμβολα α, β, γ, δ, ε, ζ με πιθανότητες 5/16, 4/16, 3/16, 2/16, 1/16, 1/16, αντίστοιχα. Ζητούνται:

(α) Η εντροπία της πηγής.

(β) Να δημιουργηθεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Huffman.

(γ) Να υπολογιστεί η επίδοση του κώδικα Huffman που δημιουργήθηκε.

1. Η εντροπία της πηγής υπολογίζεται με βάση την ακόλουθη σχέση

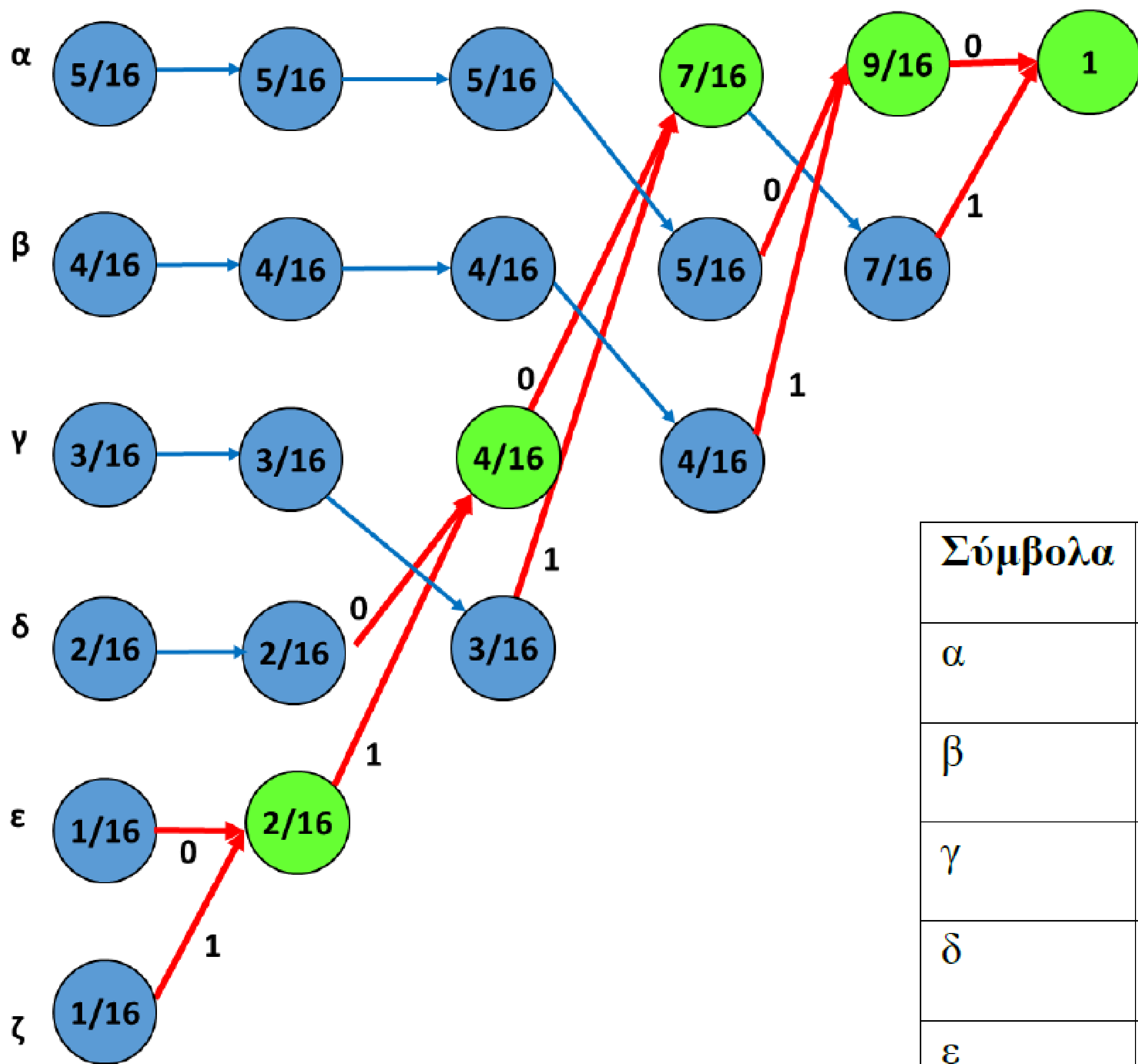
$$H(s) = -\sum_{i=1}^{6} P_i \log_2 P_i = -\frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16} - \frac{4}{16}\log_2\frac{4}{16} - \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{2}{16}\log_2\frac{2}{16}$$

$$-\frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} = 0.524 + 0.5 + 0.453 + 0.375 + 0.25 + 0.25$$

$$= 2.352 bits / symbol.$$

2. Τα βήματα για την υλοποίηση του αλγορίθμου Huffman είναι τα ακόλουθα
a) Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται κατά φθίνουσα πιθανότητα εκπομπής.
b) Τα δύο τελευταία σύμβολα της πηγής με τη μικρότερη πιθανότητα παραγωγής ενώνονται σε ένα, πιθανότητας ίσης με το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο αυτών συμβόλων, με αποτέλεσμα τη μείωση κατά ένα του πλήθους των συμβόλων του αλφάβητου της πηγής.
c) Τα βήματα 1 και 2 επαναλαμβάνονται έως ότου το αλφάβητο της πηγής αποτελείται μόνο από δύο σύμβολα. Σ' αυτά τα δύο σύμβολα αποδίδονται τα «0» και «1» του δυαδικού κώδικα.
d) Ένα «0» και ένα «1» αποδίδονται στη θέση του ενός και του άλλου συμβόλου, αντίστοιχα, τα οποία στο βήμα 2 συγχωνεύτηκαν σε ένα. Το βήμα αυτό αφορά σε όλες τις συγχωνεύσεις.
e) Οι κωδικές λέξεις των συμβόλων σχηματίζονται από όλα τα ψηφία «0» και «1» που σχετίζονται με αυτά τα σύμβολα (από το τέλος προς την αρχή), δηλαδή από τα ψηφία που έχουν αποδοθεί απευθείας σε αυτά ή στα συγχωνευμένα σύμβολα που συμμετέχουν.

Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα, οδηγούμαστε στον ακόλουθο κώδικα



Σύμβολα	Κώδικας
α	00
β	01
γ	11
δ	100
ε	1010
ζ	1011

3. Το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων του Huffman μας δίνεται από

$$\sum_{i=1}^{6} l_i P_i = 2\frac{5}{16} + 2\frac{4}{16} + 2\frac{3}{16} + 3\frac{2}{16} + 4\frac{1}{16} + 4\frac{1}{16}$$

$$= \frac{10+8+6+6+4+4}{16} = \frac{38}{16} = 2.375 bits\,/\,symbol$$

Η απόδοση είναι

$$\alpha = \frac{H(s)}{\sum_{i=1}^{6} l_i P_i} = \frac{2.352}{2.375} = 0.99$$

<u>**ΘΕΜΑ 4**</u> ΕΞ2018Β

Θεωρούμε μια πηγή εισόδου με σύμβολα A={a,b,c,d} και πιθανότητες εμφάνισης 1/2,1/4, 1/8 και p, αντίστοιχα. Τα σύμβολα μεταδίδονται μέσα από ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη και στην έξοδό του λαμβάνουμε τα σύμβολα B={x,y,z} ενώ ο πίνακας μετάβασης του καναλιού είναι

$$p(B|A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Υπολογίστε το πληροφοριακό περιεχόμενο του συμβόλου d και την εντροπία της πηγής A.
(β) Για ποιες πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων θα είχαμε τη μέγιστη εντροπία στην πηγή A και ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή; Πότε η εντροπία της πηγής γίνεται 0;
(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων του καναλιού.
(δ) Υπολογίστε τις πιθανότητες: i) να λάβουμε στην έξοδο το σύμβολο y ii) να λάβουμε το y δεδομένου ότι εστάλη το c iii) να σταλεί το c και να λάβουμε y.

1. Εφόσον η πιθανότητα εμφάνισης του d είναι p=1-(1/2+1/4+1/8) =1/8, το ζητούμενο πληροφοριακό περιεχόμενο είναι I(d) = log8 = 3 bits, ενώ η εντροπία της πηγής A είναι

H(A) = 1/2log2+1/4log4+2x1/8log8 = 1+2x3/8 = 1.75 bits/σύμβολο.

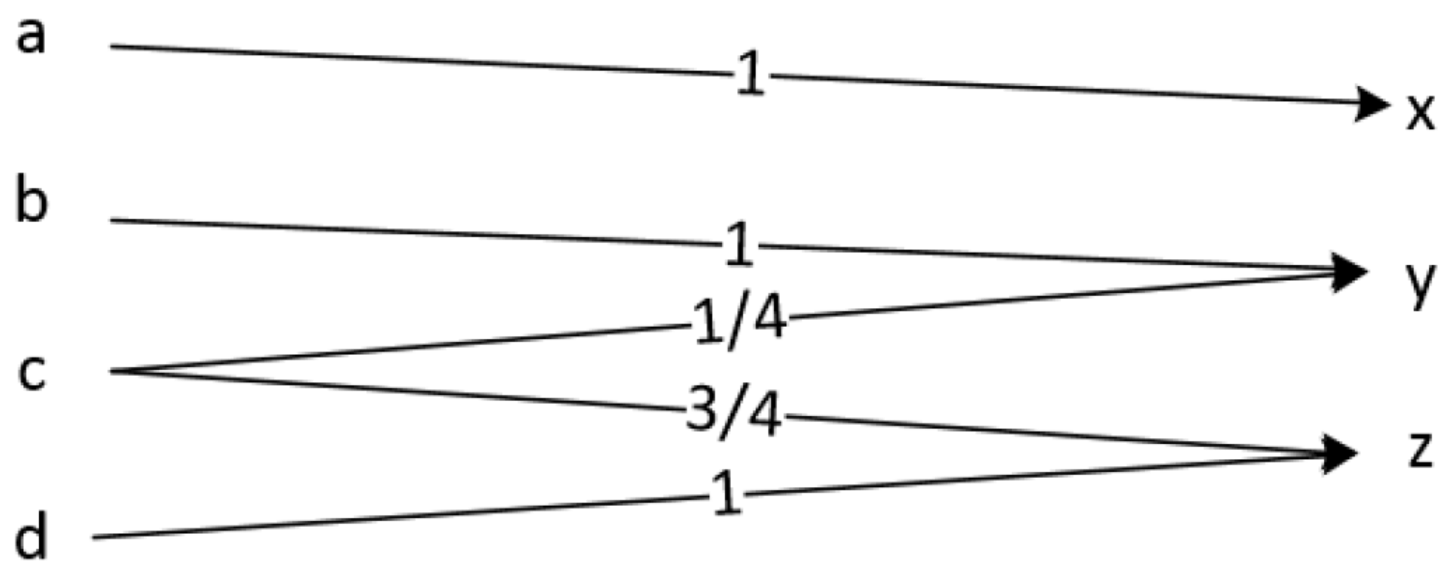
2. Η εντροπία θα ήταν μέγιστη εάν τα 4 σύμβολα ήταν ισοπίθανα με πιθανότητα εμφάνισης 1/4 το καθένα. Η μέγιστη τιμή της θα ήταν

H_{max}= 4x(1/4log4) = 2 bits/σύμβολο.

Η εντροπία της πηγής γίνεται 0, όταν υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα για το σύμβολο που παράχθηκε, δηλαδή όταν κάποιο από τα 4 σύμβολα έχει πιθανότητα εμφάνισης 1 ενώ όλα τα υπόλοιπα 0.

3.

$$p(B|A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4. Υπολογίζουμε αρχικά τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην έξοδο του καναλιού

$$P(B) = [1/2 \quad 1/4 \quad 1/8 \quad 1/8]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1/2 \quad 9/32 \quad 7/32]$$

$$P(A,B) = \text{diag}\{P(A)\}P(B|A) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/32 & 3/32 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι ζητούμενες πιθανότητες είναι

- να λάβουμε y στην έξοδο p(y) = 9/32 (προκύπτει από το P(B))
- να λάβουμε το y δεδομένου ότι εστάλει το c: p(y|c) = 1/4 (προκύπτει από το p(B|A))
- να σταλεί το c και να λάβουμε y P(c,y) = 1/32 (προκύπτει από το P(A,B))

Πρόσθετα Παραδείγματα

ΘΕΜΑ 4

ΓΕ4/1112

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μέτρων ποσότητας πληροφορίας και την εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης. Σχετικά θέματα μπορείτε να βρείτε σε ΓΕ4 περασμένων ετών, όπως ΓΕ4/2010-11/Θ3, ΓΕ4/2009-10/Θ2, ΓΕ4/2008-09/Θ3, ΓΕ4/2006-7/Θ4 και* Θ3/ΓΕ/2004-5.

Θεωρούμε την πηγή που εκπέμπει τα στατιστικά ανεξάρτητα σύμβολα Α, Β, Γ, Δ, Ε, το πληροφορικό περιεχόμενο των οποίων περιέχεται στον ακόλουθο πίνακα:

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)
Α	1.81
Β	1.38
Γ	2.42
Δ	3.14
Ε	4.96

Ζητούνται τα εξής:

1. Η εντροπία της πηγής.
2. Κώδικας Shannon για τα σύμβολα της πηγής και η επίδοσή του.
3. Κώδικας καλύτερος αυτού που προέκυψε στο ερώτημα 2 και η επίδοσή του.

1). Γνωρίζω ότι το πληροφορικό περιεχόμενο της πηγής εκφράζεται από το $-log_2(p(x_i))$. Οπότε θα έχουμε π.χ. <u>Σύμβολο "Α":</u> $-log_2(p(x_1)) = 1.81 \rightarrow p(x_1) = 0.285$

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Οπότε η εντροπία της πηγής θα δίνεται από

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{6} p(x_i) \cdot log_2(p(x_i))$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα θα έχουμε

$$H(X) = -\begin{bmatrix} 0.285 \cdot log_2(0.285) + 0.384 \cdot log_2(0.384) + 0.186 \cdot log_2(0.186) \\ +0.113 \cdot log_2(0.113) + 0.032 \cdot log_2(0.032) \end{bmatrix}$$
$$= 0.516 + 0.530 + 0.451 + 0.355 + 0.158 = 2.01$$

2). Για τη μέθοδο Shannon θα χρησιμοποιήσουμε τη φθίνουσα σειρά των συμβόλων

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
B	1.38	0.384
A	1.81	0.285
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
E	4.96	0.032

Και μετά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Shannon

Προκειμένου να βρεθεί η απόδοση της πηγής, θα πρέπει να υπολογισθεί το μέσο μήκος του κώδικα

				Ανάπτυγμα Pi					
Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Μήκος li	Αθροιστικές πιθανότητες	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	Κωδική Λέξη
Β	0.384	2	0	0	0	0	0	0	00
Α	0.285	2	0.384	0	1	1	0	0	01
Γ	0.186	3	0.669	1	0	1	0	1	101
Δ	0.113	4	0.855	1	1	0	1	1	1101
Ε	0.032	5	0.968	1	1	1	1	0	11110

$$L = \sum_{i=1}^{5} p(x_i) \cdot l_i$$

$$L = 0.384 \cdot 2 + 0.285 \cdot 2 + 0.186 \cdot 3 + 0.113 \cdot 4 + 0.032 \cdot 5 = 2.508$$

Οπότε η απόδοση της πηγής ορίζεται ως

$$n = \frac{H(S)}{L} = 80.14\%$$

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol) $(H(x_i))$_	Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων $2^{(-H(xi))}$
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Shannon

$H(xi)=-\log(p(xi)=>p(xi)=2^{(-H(xi))}$

ΓΕ4/1112/Θ4

p(xi)	-log(p(xi))	Li	Πi	Code
0,384	1,380821784	2	0	00
0,285	1,810966176	2	0,384	01
0,186	2,426625474	3	0,669	101
0,113	3,145605322	3	0,855	1101
0,032	4,965784285	5	0,968	11111

2x0,855 → 1,71 ⇒ 1

2x0,71 → 1,42 ⇒ 1

2x0,42 → 0,84 ⇒ 0

2x0,84 → 1,68 ⇒ 1

Shannon

$H(xi)=-\log(p(xi)=>p(xi)=2^{(-H(xi))}$

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol) $(H(x_i))$_	Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων $2^{(-H(xi))}$
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

ΓΕ4/1112/Θ4

p(xi)	-log(p(xi))	Li	Πi	Code
0,384	1,380821784	2	0	00
0,285	1,810966176	2	0,384	01
0,186	2,426625474	3	0,669	101
0,113	3,145605322	3	0,855	1101
0,032	4,965784285	5	0,968	11110

	x 2	
0,968	1,936	1
0,936	1,872	1
0,872	1,744	1
0,744	1,488	1
0,488	0,976	0

ΘΕΜΑ 6

ΓΕ3 2014-15

Στόχος της άσκησης *είναι η εξάσκηση στην εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης πηγής.*
Σχετικές ασκήσεις: *Θ7/ΓΕ4/2004-5, Θ4/ΓΕ4/2006-7, Θ3/ΓΕ4/2007-8, Θ3 κ Θ4/ΓΕ4/2008—9, Θ4/ΓΕ4/2009-10, Θ3/ΓΕ4/2010-11, Θ4/ΓΕ4/2011-12, Θ4/ΓΕ4/2012-3.*

Θεωρούμε διακριτή πηγή που εκπέμπει τα σύμβολα *Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η*. Οι αντίστοιχες πιθανότητες εκπομπής έχουν ως εξής: {0.15, 0.12, 0.10, 0.05, 0.48, 0.05, 0.05}.

Ζητείται:

(α) Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Fano.

(β) Να σχηματισθεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Shannon.

(γ) Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Huffman.

(δ) Ποια είναι η βέλτιστη από τις κωδικοποιήσεις που προκύπτουν στα ερωτήματα α-γ? Τεκμηριώστε την απάντηση σας υπολογίζοντας την απόδοση του κάθε κώδικα.
Είναι ο βέλτιστος κώδικας που υπολογίσατε και άριστος;

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να ακολουθηθούν τα προβλεπόμενα σε κάθε αλγόριθμο κωδικοποίησης βήματα. Για τον υπολογισμό της επίδοσης των κωδίκων που σχηματίσατε να εφαρμόσετε τον αντίστοιχο τύπο.*

(α) Κώδικας Fano

Σύμβολα	Πιθανότητες εκπομπής	Κωδική λέξη
Ε	0.48	0
Α	0.15	100
Β	0.12	101
Γ	0.10	1100
Δ	0.05	1101
Ζ	0.05	1110
Η	0.05	1111

(β) Κώδικας Shannon

ΣΥΜΒΟΛΑ	Πιθανότητες	P_i	$<=l_i$	$l_i>$	l_i	Ανάπτυγμα	Κώδικας
Ε	0.48	0	1,05889	2,05889	2	.00000000	00
Α	0.15	0.48	2.7369	3.7369	3	.01111010	011
Β	0.12	0.63	3,05889	4,05889	4	.10100001	1010
Γ	0.1	0.75	3.32	4.32	4	.11000000	1100
Δ	0.05	0.85	4.32	5.32	5	.11011001	11011
Ζ	0.05	0.90	4.32	5.32	5	.11100110	11100
Η	0.05	0.95	4.32	5.32	5	.11110011	11110

(γ) Κώδικας Huffman

Σύμβολα							Κώδικας
Ε	0.48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,52 (0)	1
Α	0.15	0,15	0,15	0,22	0,3 (0)	0,48 (1)	000
Β	0.12	0,12	0,15	0,15 (0)	0,22 (1)		010
Γ	0.1	0,10	0,12 (0)	0,15 (1)			011
Δ	0.05	0,1 (0)	0,10 (1)				0010
Ζ	0.05 (0)	0,05 (1)					00110
Η	0.05 (1)						00111

Δυαδικός κώδικας Fano

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 1 + (0{,}15 + 0{,}12) \times 3 + (0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05) \times 4 = 2{,}29$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i)\log_2 2} = \frac{2{,}2658}{2{,}29} = 0{,}989457$$

Δυαδικός κώδικας Shannon

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 2 + 0{,}15 \times 3 + (0{,}12 + 0{,}10) \times 4 + (0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05) \times 5 = 3{,}04$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i)} = \frac{2,2658}{3,04} = 0,7453$$

Δυαδικός κώδικας Huffman

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 1 + (0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}10) \times 3 + 0{,}05 \times 4 + (0{,}05 + 0{,}05) \times 5 = 2{,}29$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i)\log_2 2} = \frac{2{,}2658}{2{,}29} = 0{,}989457$$

ΓΕ4/
1112/Θ1

Δίδεται η τυχαία μεταβλητή X, η οποία αναπαριστά το επίπεδο χοληστερίνης ενός ατόμου, με δύο δυνατά αποτελέσματα, x_1= «χοληστερίνη εντός επιτρεπτών ορίων» και x_2= «υψηλή χοληστερίνη». Επίσης, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή W, η οποία αναπαριστά το αν το άτομο ασκείται σωματικά, με w_1= «επιδίδεται σε σωματική άσκηση» και w_2= «δεν ασκείται σωματικά», την Y για το είδος της εργασίας του με y_1= «δεν κάνει δουλειά γραφείου» και y_2= «κάνει δουλειά γραφείου» και, τέλος, τη Z για το είδος διατροφής που ακολουθεί, με z_1= «μεσογειακή διατροφή» και z_2= «διατροφή πλούσια σε ζωϊκά λίπη». Οι πιθανότητες $p(x_i, w_j, y_k)$ του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών (X, (W, Y)) και $p(x_i, y_k, z_l)$ του (X, (Y, Z)) περιέχονται στους κατωτέρω πίνακες.

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

Ζητείται να υπολογίσετε

1. Τις $H(X)$, $H(W)$, $H(Y)$ και $H(Z)$,
2. Τις συνδυασμένες ποσότητες πληροφορίας $H(X, Y)$, $H(X, Z)$, $H(X,W)$, $H(X, W, Z)$ και $H(X,Y, Z)$,
3. Τις υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας $H(X/W)$, $H(X/Y)$, $H(X/Z)$, $H(X/(W,Y))$, και $H(X/(Y,Z))$.

Επίσης, ζητείται

4. να επιλέξετε εκείνη την τυχαία μεταβλητή εκ των W, Y, Z, ή εκείνον τον συνδυασμό δύο τυχαίων μεταβλητών εκ των (W, Y) και (Y, Z) που επιτρέπει την καλύτερη πρόβλεψη της X, όταν γίνεται γνωστή η τιμή της τυχαίας αυτής μεταβλητής ή οι τιμές του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών. Αιτιολογήστε

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

p(w1,y1)=1/4+1/16=5/16

p(w1,y2)=1/16+1/8=3/16

p(w2,y1)=1/8+1/16=3/16

p(w2,y2)=0+5/16=5/16

p(w1)=5/16+3/16=8/16

p(y1)=5/16+3/16=8/16

p(w2)=3/16+5/16=8/16

p(y2)=5/16+3/16=8/16

p(x2)=1/16+1/8+1/16+5/16=9/16

p(x1)=1/4+1/16+1/8=7/16

p(x1,w1)=1/4+1/16=5/16

p(x1,w2)=1/8+0=1/8

p(x2,w1)=1/16+1/8=3/16

p(x2,w2)=1/16+5/16=6/16

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

p(y1,z1)=1/4+1/16=5/16

p(y1,z2)=1/8+1/16=3/16

p(y2,z1)=1/16+3/16=4/16

p(y2,z2)=0+1/4=1/4

p(z1)=5/16+4/16=9/16

p(z2)=3/16+1/4=7/16

ΓΕ4/1112/Θ1

Οι υπό συνθήκη πιθανότητες περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα (υπενθυμίζουμε ότι $p(\phi/\chi)=\dfrac{p(\phi,\chi)}{p(\chi)}$, σελίδες 25-26 του βιβλίου):

X/W	x_1	x_2
w_1	5/8	3/8
w_2	2/8	6/8

X/Y	x_1	x_2
y_1	6/8	2/8
y_2	1/8	7/8

X/Z	x_1	x_2
z_1	5/9	4/9
z_2	2/7	5/7

(X/(W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	4/5	1/5
(w_1, y_2)	1/3	2/3
(w_2, y_1)	2/3	1/3
(w_2, y_2)	0	1

(X/(Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	4/5	1/5
(y_1, z_2)	2/3	1/3
(y_2, z_1)	1/4	3/4
(y_2, z_2)	0	1

1. Με τον τύπο της σελίδας 28 του βιβλίου υπολογίζουμε τις εντροπίες *H(X)*, *H(W)*, *H(Y)* και *H(Z)*.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log\, p(x_i, w_j) = -\frac{7}{16}\log\frac{7}{16} - \frac{9}{16}\log\frac{9}{16} = 0{,}9879 \text{ bits.}$$

H(W)=H(Y)=1 bit και H(Z)=H(X)=0,9879 bits.

2. Για τον υπολογισμό της συνδυασμένης ποσότητας πληροφορίας *H(X, W)*, *H(X, Y)*, *H(X,Z)*, *H(X, W, Z)* και *H(X,Y, Z)* δείτε το σχετικό τύπο στη σελίδα 34 του βιβλίου:

$$H(X,W) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, w_j)\log\, p(x_i, w_j)$$

$$= -\frac{5}{16}\log\frac{5}{16} - \frac{2}{16}\log\frac{2}{16} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{16} - \frac{6}{16}\log\frac{6}{16} = 1{,}882719 \text{ bits.}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε *H(X, Y)=1,67738 bits* και *H(X, Z)=1,92318 bits.*

$$H(X,(W,Y)) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p(x_i, w_j, y_k)\log\, p(x_i, w_j, y_k)$$

$$= -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - 0 - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{5}{16}\log\frac{5}{16} = 2{,}52439 \text{ bits.}$$

Αντίστοιχα, $H(X,(Y,Z)) = 2{,}5778$ bits.

3. Για τον υπολογισμό των υπό συνθήκη ποσοτήτων πληροφορίας $H(X/W)$, $H(X/Y)$, $H(X/Z)$, $H(X/(W,Y))$, και $H(X/(Y,Z))$ μπορούμε να κάνουμε χρήση του τύπου της σελίδας 36 του βιβλίου ή της πρότασης 1.3 που περιέχεται στη σελίδα 37 του βιβλίου.

$$H(X/W) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, w_j)\log p(x_i / w_j)$$

$$= -\frac{5}{16}\log\frac{5}{8} - \frac{2}{16}\log\frac{2}{8} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{8} - \frac{6}{16}\log\frac{6}{8} = 0{,}882 bits.$$

Εφαρμόζοντας την πρόταση 1.3, έχουμε $H(X/W)=H(X,W)-H(W)=1{,}882719-1=0{,}882719$ *bits.*

Παρόμοια, υπολογίζουμε $H(X/Y)=0{,}6774$ *bits*, $H(X/Z)=0{,}93419$, $H(X/(W,Y))=0{,}57$ *bits*, και $H(X/(Y,Z))= 0{,}60$ *bits.*

4. Για την επιλογή της καταλληλότερης εκ των δεδομένων τυχαίων μεταβλητών W, Y και Z ή του καταλληλότερο εκ των συνδυασμών (W, Y) και (Y,Z), πρέπει να λάβουμε υπόψη είτε τις σχετικές αμοιβαίες πληροφορίες μεταξύ της X και εκάστης ή εκάστου εξ΄ αυτών είτε τις αντίστοιχες υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας. Συγκεκριμένα, η υψηλότερη αμοιβαία πληροφορία αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή ή τον συνδυασμό των τυχαίων μεταβλητών που περιέχει περισσότερη πληροφορία για την X και είναι επομένως η ζητούμενη λύση, ενώ η χαμηλότερη υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή ή τον συνδυασμό τυχαίων μεταβλητών που αφήνει τη μικρότερη αβεβαιότητα ως προς την έκβαση της X και είναι επομένως η καταλληλότερη λύση για την πρόβλεψη της X. Από τα αποτελέσματα του ερωτήματος 3, η καλύτερη πρόβλεψη της X επιτυγχάνεται με προηγούμενη γνώση του συνδυασμού (W,Y).

Αυτό μπορεί επίσης να δειχθεί και με τις αμοιβαίες πληροφορίες, οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

$I(X;W) = H(X) - H(X/W) = 0{,}9879 - 0{,}882 = 0{,}1059$ bits,

$I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 0{,}9879 - 0{,}6774 = 0{,}3105$ bits,

$I(X;Z) = H(X) - H(X/Z) = 0{,}9879 - 0{,}93419 = 0{,}\ 0537$ bits,

$I(X;(W,Y)) = 0{,}9879 - 0{,}57 = 0{,}4179$ bits,

$I(X;(Y,Z)) = 0{,}9879 - 0{,}60 = 0{,}\ 3879$ bits.

ΘΕΜΑ 5 ΕΞ2016Α

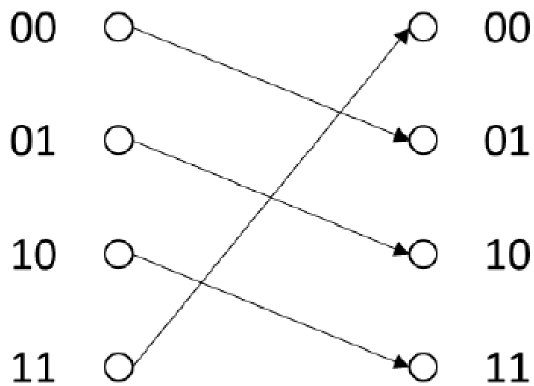
Ένα κανάλι χωρίς μνήμη, C1, μεταδίδει ζευγάρια δυαδικών ψηφίων όπου το κάθε διακριτό ζευγάρι μεταδίδεται από διαφορετική είσοδο ενώ αντίστοιχα τα ζευγάρια αυτά εμφανίζονται σε διακριτές εξόδους του σύμφωνα με την παρακάτω αντιστοίχιση (είσοδος → έξοδος): 00→01, 01→10, 10→11, 11→00.

α) Να σχεδιάσετε το κανάλι και να βρείτε τον πίνακα μετάβασης του καναλιού και το είδος του καναλιού.

β) Αν κάθε ψηφίο {0,1} παράγεται ανεξάρτητα από το προηγούμενο και σύμφωνα με τις πιθανότητες p(0)=1/3 και p(1)=2/3, να βρείτε την αμοιβαία πληροφορία του καναλιού.

γ) Ποια η χωρητικότητα του καναλιού και για ποιες τιμές των p(0) και p(1) επιτυγχάνεται;

α) Εφόσον το κανάλι μεταδίδει ζευγάρια δυαδικών ψηφίων οι πιθανές είσοδοι του καναλιού είναι 4 δηλαδή {00, 01,10,11} και αντίστοιχα 4 είναι και οι έξοδοι του καναλιού. Με δεδομένο ότι το κανάλι συμπεριφέρεται σύμφωνα με την αντιστοίχιση της εκφώνησης το κανάλι αλλά και ο πίνακας μετάβασης είναι όπως παρακάτω



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το κανάλι είναι χωρίς θόρυβο.

β) Με δεδομένο ότι η παραγωγή των δυαδικών ψηφίων είναι ανεξάρτητη μεταξύ του αυτό σημαίνει ότι οι πιθανότητες για κάθε ζεύγος δυαδικών ψηφίων είναι

P[00]=p(0)*p(0)=1/3*1/3=1/9
P[01]=p(0)*p(1)=1/3*2/3=2/9
P[10]=p(1)*p(0)=2/3*1/3=2/9
P[11]=p(1)*p(1)=2/3*2/3=4/9

Άρα η αμοιβαία πληροφορία του αθόρυβου καναλιού είναι

$$I(X) = H(X) = H\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right) = 1.837\ bits$$

γ) Συνεπώς η χωρητικότητα του καναλιού επιτυγχάνεται όταν μεγιστοποιείται η εντροπία H(X) όταν δηλαδή έχουμε 4 ισοπίθανες εισόδους, P(X=i)=1/4 για κάθε i={00, 01, 10, 11} και άρα όταν p(0)=p(1)=1/2. Άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι C=maxH(X)=2 bits

ΘΕΜΑ 4 ΕΞ2012Β

Μια ψηφιακή πηγή **3** συμβόλων $\{x_1, x_2, x_3\}$ εκπέμπει τα σύμβολα της γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα να εκπεμφθεί το σύμβολο x_1 από την πηγή είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι πιθανότητες εκπομπής των άλλων δύο συμβόλων είναι ίσες. Να απαντηθούν τα ερωτήματα σε κάθε μία από τις παρακάτω 2 περιπτώσεις

α) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε κανάλι χωρίς θόρυβο. Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η χωρητικότητα του καναλιού **C** και η εντροπία της πηγής **H(X)**
- **ii)** Η εντροπία **H(X/Y)**

β) Η πηγή μεταδίδει τα σύμβολα σε ενθόρυβο κανάλι με πίνακα μετάβασης,

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθούν:

- **i)** Η εντροπία της πηγής **H(X)** και η **H(Y/X)**
- **ii)** Η αμοιβαία πληροφορία του ενθόρυβου καναλιού.

Για επιπλέον παραδείγματα βλ. αρχείο PLH22_OSS4_slides διαφάνειες 35-43

α). Κανάλι χωρίς θόρυβο

i) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων είναι $p(x_1) = 0.4$ ενώ οι υπόλοιπες είναι $p(x_2) = p(x_3) = 0.3$
Άρα η εντροπία της πηγής είναι:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2(p(x_i)) = -\left[0.4\cdot\log_2(0.4) + 0.3\cdot\log_2(0.3) + 0.3\cdot\log_2(0.3)\right] \approx 1.57\ bits$$

Γνωρίζω ότι η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς θόρυβο ισούται με τη μέγιστη τιμή του **H(X)** («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 89) η οποία προκύπτει για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου. Οπότε $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{3}$
Η χωρητικότητα δίνεται από

$$C = \max(H(X)) = \log_2 q\big|_{q=3} = \log_2(3) = 1.58\ \text{bits/symbol}$$

όπου q είναι ο αριθμός συμβόλων εισόδου

ii) Επιπλέον, η εντροπία H(X/Y) ισούται με 0 αφού X=Y κι όπως αποδεικνύεται και στο βιβλίο σελ. 90.

β) Ενθόρυβο Κανάλι

i) Αν στο κανάλι εισαγάγουμε θόρυβο δεν αναμένεται να αλλάξει η εντροπία της πηγής αλλά μόνο η χωρητικότητα του καναλιού η οποία αναμένεται να είναι μικρότερη από αυτή του ερωτήματος (α)
Επομένως η εντροπία της πηγής H(X) είναι ίδια με αυτή του ερωτήματος (α).

Δεδομένου ότι το κανάλι έχει πίνακα μετάβασης

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & p(y_3/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & p(y_3/x_2) \\ p(y_1/x_3) & p(y_2/x_3) & p(y_3/x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Η εντροπία H(Y/X) δίνεται από τον τύπο

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i) H(Y/X = x_i) \qquad (1)$$

Άρα για κάθε i=1,2,3 έχουμε

$$H(Y/X = x_i) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις πιθανότητες κάθε γραμμής του πίνακα μετάβασης έχουμε:

$$H(Y/X = x_1) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_1) \log p(y_j/x_1) = -0.5\log 0.5 - 0.5\log 0.5 - 0\log 0 = 1\,bits$$

$$H(Y/X = x_2) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_2) \log p(y_j/x_2) = -0\log 0 - 0.25\log 0.25 - 0.75\log 0.75 = 0,811\,bits$$

$$H(Y/X = x_3) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j/x_3) \log p(y_j/x_3) = -0.5\log 0.5 - 0\log 0 - 0.5\log 0.5 = 1\,bits$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω τιμές στην εξίσωση (1) έχουμε

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i) H(Y/X = x_i) = 0.4\cdot 1 + 0.3\cdot 0.811 + 0.3\cdot 1 \approx 0,943\,bits \qquad (2)$$

ii).

Για να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y) θα κάνουμε χρήση του τύπου $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$

Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εξόδου $P(Y)=\{p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)\}$ οι οποίες υπολογίζονται ως περιθωριακές πιθανότητες σύμφωνα με το παρακάτω

$$P[Y]=[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3,x_i)\right]$$

Γνωρίζω ότι ισχύει $p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)$ («Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 25) και επομένως θα έχουμε

$$P(Y,X)=\begin{bmatrix} p(y_1,x_1) & p(y_2,x_1) & p(y_3,x_1) \\ p(y_1,x_2) & p(y_2,x_2) & p(y_3,x_2) \\ p(y_1,x_3) & p(y_2,x_3) & p(y_3,x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} p(x_1)\cdot p(y_1/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_2/x_1) & p(x_1)\cdot p(y_3/x_1) \\ p(x_2)\cdot p(y_1/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_2/x_2) & p(x_2)\cdot p(y_3/x_2) \\ p(x_3)\cdot p(y_1/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_2/x_3) & p(x_3)\cdot p(y_3/x_3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.4\cdot 0.5 & 0.4\cdot 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3\cdot 0.25 & 0.3\cdot 0.75 \\ 0.3\cdot 0.5 & 0 & 0.3\cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.075 & 0.225 \\ 0.15 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Οπότε το ζητούμενο δίνεται από

$$P[Y]=[p(y_1) \quad p(y_2) \quad p(y_3)]=\left[\sum_{i=1}^{3} p(y_1,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_2,x_i) \quad \sum_{i=1}^{3} p(y_3,x_i)\right]=$$

$$=[0.35 \quad 0.275 \quad 0.375]$$

$$p(y_1)=0.35$$

$$p(y_2)=0.275$$

$$p(y_3)=0.375$$

Συνεπώς

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{3} p(y_i)\log_2(p(y_i))=-\left[0,35\cdot\log_2(0,35)+0,275\cdot\log_2(0,275)+0,375\cdot\log_2(0,375)\right]=1.573\,bits$$

Από την παραπάνω εξίσωση και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2) έχουμε ότι η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού είναι:

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=1.573-0.943\approx 0.63\,bits$$

Σημείωση: Εάν η άσκηση ζητούσε τη χωρητικότητα θα έπρεπε να γίνει διερεύνηση της μεγιστοποίησης της I(X;Y) με παραγώγιση υποθέτοντας παραμετρικές πιθανότητες εισόδων Το κανάλι δεν έχει κάποια συμμετρία οπότε δεν συνεπάγεται ότι ομοιόμορφα καταμενημένες είσοδοι δίνουν ομοιόμορφα καταμενημένες εξόδους.

ΘΕΜΑ 4 ΕΞ2011Α

Έστω η πηγή χωρίς μνήμη S1 που παράγει τα σύμβολα {α,β,γ,δ,ε} βάσει της κατανομής {0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2} και η πηγή με μνήμη S2, η οποία χαρακτηρίζεται από τον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

ενώ οι στατικές πιθανότητες π_i, i=1,2,3,4,5 που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος $\boldsymbol{\pi P = \pi}$ είναι όπως στην περίπτωση της πηγής χωρίς μνήμη δηλαδή π_i=0.2, i=1,2,3,4,5.

α) Να βρείτε ποια από τις δύο πηγές έχει την μικρότερη εντροπία.

β) Αν θεωρήσουμε τον παραπάνω πίνακα μετάβασης ως τον πίνακα μετάβασης ενός καναλιού και ότι η S1 είναι η πηγή συμβόλων που αποστέλλονται με την κατανομή του ερωτήματος (α) πάνω από αυτό το κανάλι βρείτε τα παρακάτω:

(i) Τι είδους *χαρακτηριστικό* κανάλι αντιπροσωπεύει ο πίνακας μετάβασης P;

(ii) Βρείτε την χωρητικότητα του καναλιού αυτού. Είναι δυνατόν το πληροφορικό περιεχόμενο που μετάδωσε η πηγή S1 πάνω από το κανάλι να είναι ίσο με την χωρητικότητα του καναλιού; Εξηγείστε την απάντησή σας.

α) Η πηγή με μνήμη έχει μικρότερη εντροπία από την αντίστοιχη χωρίς μνήμη λόγω του ότι η εξάρτηση μειώνει την εντροπία της πηγής. Άρα H(S1)>H(S2).

Εναλλακτικά για να υπολογίσουμε την εντροπία της πηγής S1 η οποία είναι χωρίς μνήμη και άρα τα σύμβολα παράγονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο εφαρμόζουμε τον τύπο της εντροπίας

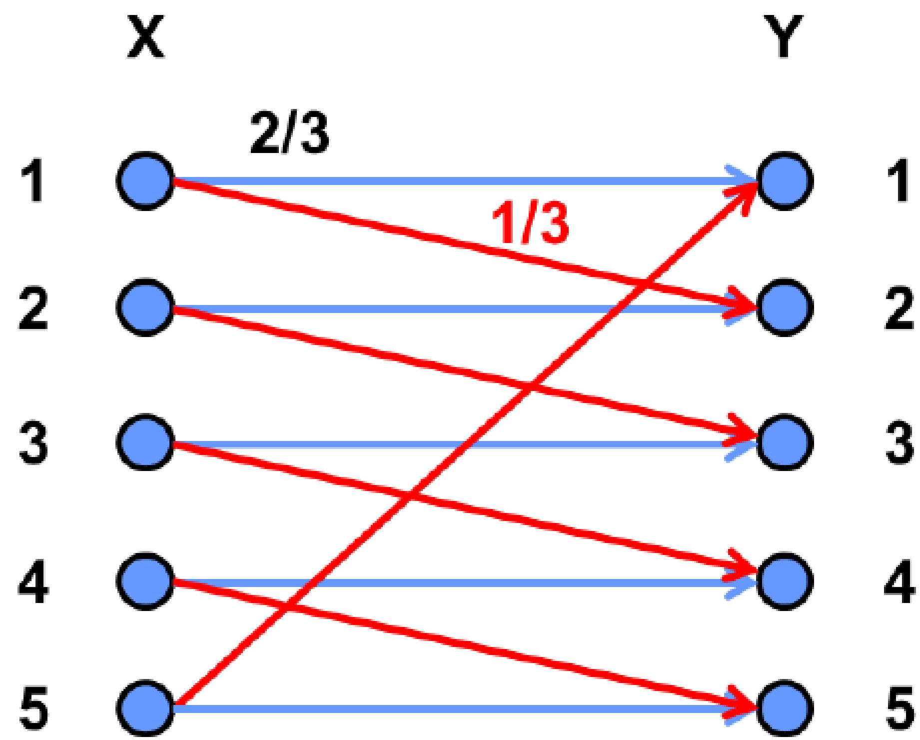
$$H(S1) = -\sum_{i=1}^{5} p_i \log(p_i) = -\sum_{i=1}^{5} 0.2 \log(0.2) = 2.322 \; bits$$

Στην περίπτωση της πηγής με μνήμη S2 η εντροπία της πηγής είναι

$$\begin{aligned} H(S2) &= -\sum_{i=1}^{5} \pi_i \sum_{j=1}^{5} p_{ij} \log(p_{ij}) = -\sum_{i=1}^{5} 0.2 \left(\frac{2}{3} \log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{1}{3}\right) \right) \\ &= -\left(\frac{2}{3}(\log 2 - \log 3) + \frac{1}{3}(\log 1 - \log 3) \right) = \frac{2}{3} 0.585 + \frac{1}{3} 1.585 \\ &= 0.918 \; bits \end{aligned}$$

Οπότε H(S1)>H(S2).

β) Ο πίνακας μετάβασης αντιπροσωπεύει κανάλι το οποίο συμπεριφέρεται ως ενθόρυβη γραφομηχανή.



Για να βρούμε τη χωρητικότητα του καναλιού πρέπει πρώτα να βρούμε την αμοιβαία πληροφορία I(X;Y)

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

Άρα

$$H(Y/X) = -\left[\sum_{j=1}^{5} P(X=j) \sum_{i=1}^{5} P(Y=i/X=j)\log\left(P(Y=i/X=j)\right)\right]$$

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\left[\sum_{j=1}^{5} P(X=j)\left\{\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right\}\right] \\ &= -\left[\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right] \\ &= H\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$I(X;Y) = H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right)$$

Αφού βρήκαμε την αμοιβαία πληροφορία, προχωρούμε να βρούμε την χωρητικότητα του καναλιού που προκύπτει από αυτή μέσω της μεγιστοποίησή της

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\left(H(Y) - H\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Άρα το πρόβλημα μεγιστοποίησης μεταφέρεται στην μεγιστοποίηση της H(Y) η οποία παίρνει την μέγιστη τιμή όταν οι έξοδοι είναι ισοπίθανοι, δηλαδή όταν

H(0,2)=log5

Άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \log 5 - H\left(\frac{1}{3}\right) bits$$

Επειδή η μεγιστοποίηση της H(Y) είναι συναρτήσει των πιθανοτήτων εισόδου θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει κατάλληλη κατανομή πιθανοτήτων εισόδου η οποία όντως μεγιστοποιεί την εντροπία εξόδου. Πράγματι παρατηρούμε ότι η πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της πηγής εισόδου μεγιστοποιούν την εντροπία της εξόδου.

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{5} P(Y=j/X=i)P(X=i)$$

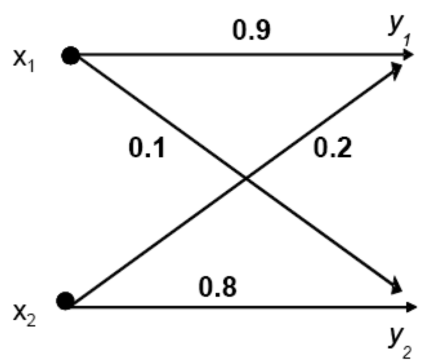
$$= P(Y=i/X=i)P(X=i) + P(Y=i/X=i-1)P(X=i-1) \quad , \text{ για κάθε i,j=1,2,3,4,5}$$

$$= \frac{2}{3}0.2 + \frac{1}{3}0.2 = 0.2$$

Άρα στην περίπτωσή μας το πληροφορικό περιεχόμενο ισούται με την μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού.

ΕΞ2008Α/Θ5 **ΘΕΜΑ 5**

Έστω ένα διακριτό κανάλι C_1 χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή $X=\{x_1,x_2\}$ με πιθανότητες εμφάνισης
$P(X=x_1)=P(X=x_2)=0.5$, ενώ ο πίνακας μετάβασης του καναλιού απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



(α) Ζητούνται τα εξής:

(α-i) Οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων $Y= \{y_1,y_2\}$ στην έξοδο του καναλιού καθώς και η $H(Y)$.

(α-ii) Να βρεθεί η $H(Y/X=x_1)$ και στη συνέχεια υπολογίστε την $H(Y/X)$ αν γνωρίζετε ότι η $H(Y/X=x_2)=0,722$ *bits*.

(α-iii) Η χωρητικότητα του καναλιού C_1.
(β) Στο προηγούμενο κανάλι C_1 συνδέουμε σε σειρά ένα δεύτερο όμοιο κανάλι C_2, έτσι ώστε οι έξοδοι $Y=\{y_1,y_2\}$του πρώτου να αποτελούν τις εισόδους του δευτέρου. Οι έξοδοι του καναλιού C_2 είναι οι $Z=\{ z_1,z_2\}$. Ζητούνται τα εξής:

(β-i) Θεωρώντας τη σύνδεση των καναλιών C_1 και C_2 ως το σύνθετο κανάλι C_{1+2}, το οποίο επομένως έχει εισόδους τις $X=\{x_1,x_2\}$. και εξόδους τις $Z=\{ z_1,z_2\}$, να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης του C_{1+2}.

(β-ii) Να προσδιοριστούν οι πιθανότητες των συμβόλων εξόδου $p(z_1)$ και $p(z_2)$.

(α-i) Γνωρίζω ότι ισχύει

$$P(Y) = P(X)P(Y/X)$$

όπου

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

και επομένως (Ασκηση Αυτοαξιολόγησης 3.2) θα έχουμε

$$P(Y) = P(X)P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(Y) = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \end{bmatrix}$$

Ώστε

$$P(Y_1) = 0.55$$

$$P(Y_2) = 0.45$$

Η εντροπία H(Y) δίνεται

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p(y_i)\log_2(p(y_i))$$

Οπότε εφαρμόζοντας τις τιμές θα έχω

$$H(Y) = -0.55\log_2(0.55) - 0.45\log_2(0.45) = 0.47 + 0.51 = 0.98\,\text{bits}$$

(α-ii) Η εντροπία H(Y/X=x1) δίνεται από

$$H(Y/X=1) = -\sum_{j=1}^{2} p\left(y_j / X=1\right)\log\left[p\left(y_j / X=1\right)\right] =$$

$$= -P\left(Y=1/X=1\right)\log\left[P\left(Y=1/X=1\right)\right] - P\left(Y=2/X=1\right)\log\left[P\left(Y=2/X=1\right)\right]$$

$$= -0.9\times\log 0.9 - 0.1\times\log 0.1 =$$

$$= 0.469\ bits$$

Γνωρίζουμε ότι H(Y/X=x2)=0,722 bits και ότι

$$H\left(Y/X\right) = H\left(Y/X=1\right)P\left(X=1\right) + H\left(Y/X=2\right)P\left(X=2\right) =$$

$$= 0.469\times\frac{1}{2} + 0.722\times\frac{1}{2} = 0.595\ bits$$

(α-iii) Η χωρητικότητα δίνεται από

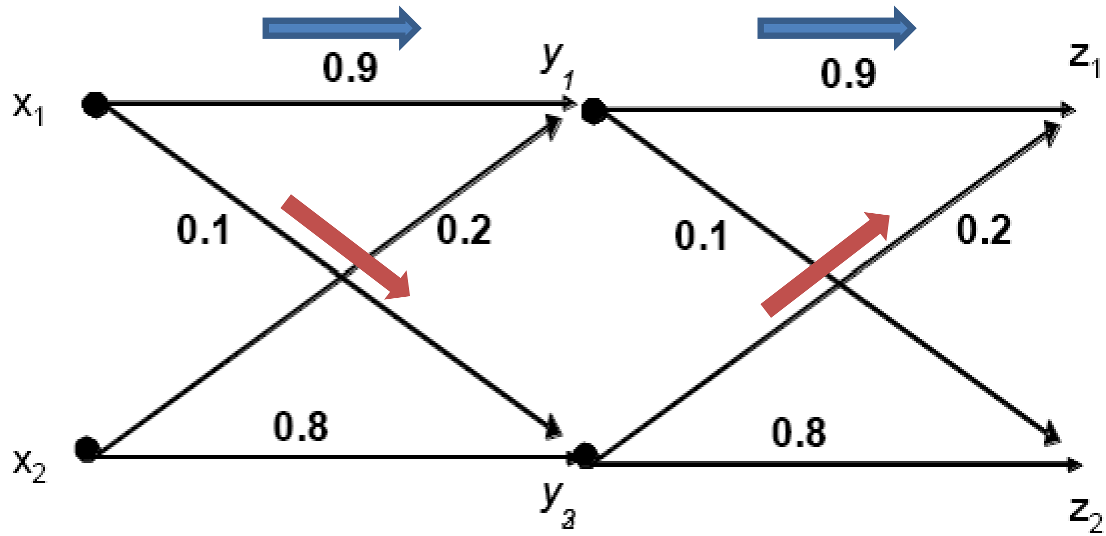
$$C = H(Y) - H(Y/X) = 0.98 - 0.595 = 0.385$$

Εναλλακτικά, θα έπρεπε να υποτεθεί παραμετρικά η κατανομή των πιθανοτήτων των συμβόλων εισόδου , $p(x_1)=a$, $p(x_2)=1-a$ και να υπολογιστεί για ποια τιμή του a θα ισχύει η μεγιστοποίηση της ροής πληροφορίας μέσα από το δεδομένο κανάλι:

$$\max_{P(X)} I\left(X;Y\right) = \max_{P(X)}\left(H\left(Y\right) - H\left(Y/X\right)\right),$$

Όπου οι H(Y) και H(Y/X) θα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει του a.

(β) Το σύστημα τώρα μετατρέπεται στο εξής



$$p\left(z_1/x_1\right) = p\left[\left(y_1/x_1 \; AND \; z_1/y_1\right) OR \left(y_2/x_1 \; AND \; z_1/y_2\right)\right] =$$

$$= p\left(y_1/x_1\right) p\left(z_1/y_1\right) + p\left(y_2/x_1\right) p\left(z_1/y_2\right)$$

(β-i). Ο συνολικός πίνακας μετάβασης $P(Z/X)$ βρίσκεται ως εξής:

Οι περιπτώσεις βάσει των οποίων η τιμή στην έξοδο του καναλιού C_{1+2} είναι δυνατόν να είναι Z=z1 με δεδομένο ότι το σύμβολο στην είσοδο ήταν το X=x1 είναι ότι το (Y=y1/X=x1 και στη συνέχεια Z=z1/Y=y1) είτε (Y=y2/X=x1 και Z=z1/Y=y2). Οπότε η πιθανότητα

P(Y=y1/X=x1 και στη συνέχεια Z=z1/Y=y1)=0.9*0.9=0.81

Ενώ η πιθανότητα

P(Y=y2/X=x1 και Z=z1/Y=y2)=0.1*0.2=0.03

Άρα

P(Z=z1/X=x1)=0.81+0.03=0.83

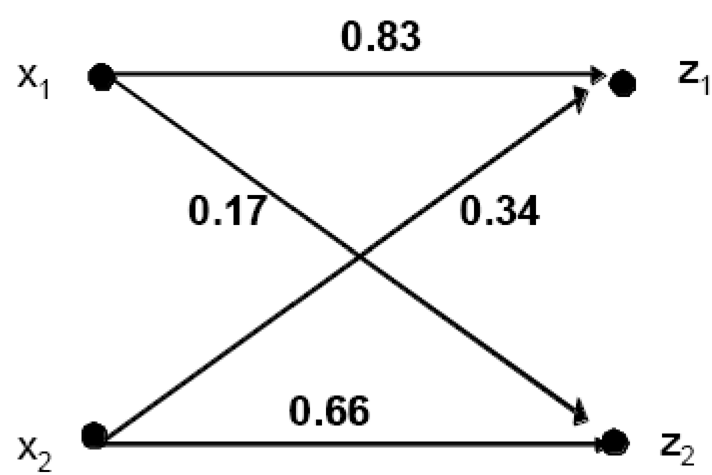
Ομοίως και για τις υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης έχουμε

P(Z=z1/X=x2)=P(Y=y1/X=x2)*P(Z=z1/Y=y1)+P(Y=y2/X=x2)*P(Z=z1/Y=y2)=0.2*0.9+0.8*0.2=0.34
P(Z=z2/X=x1)=0.17
P(Z=z2/X=x2)=0.66

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι ο πίνακας μετάβασης του συνδυασμένου καναλιού ισούται με το γινόμενο των δύο επιμέρους πινάκων.

$$P(Z/X) = P(Y/X)P(Z/Y) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}$$

και το ισοδύναμο διάγραμμα είναι



(β-ii). Η έξοδος P(Z) είτε μπορεί να δοθεί ως συνάρτηση του P(Y) και P(Z/Y) είτε ώς συνάρτηση του ισοδύναμου πίνακα μετάβασης P(Z/X) και P(X)

<u>1η προσέγγιση</u>

Ως έκφραση του P(Y) και P(Z/Y) και

$$P(Z) = P(Y)P(Z/Y) = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$P(Z) = \begin{bmatrix} 0.585 & 0.415 \end{bmatrix}$$

<u>2η προσέγγιση</u>

Ως έκφραση του P(X) και P(Z/X)

$$P(Z) = P(X)P(Z/X) \Leftrightarrow$$

$$P(Z) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.585 & 0.415 \end{bmatrix}$$

Ετσι

$P(z_1)=0.585$

$P(z_2)=0.415$

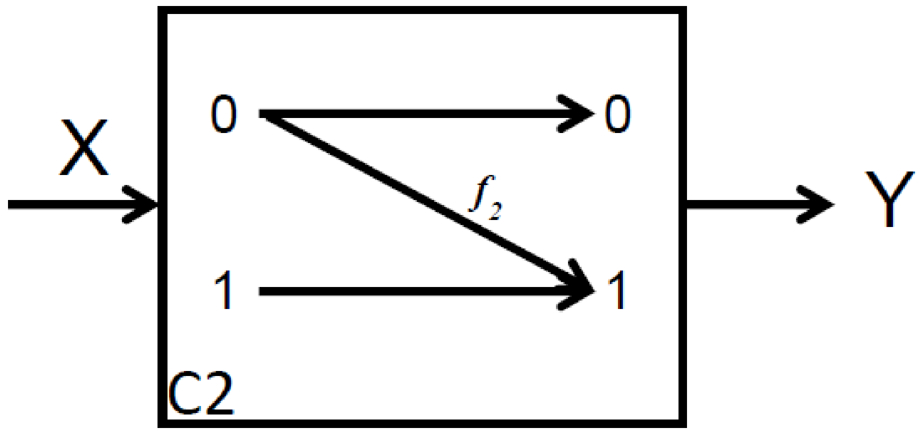
ΘΕΜΑ 7

ΓΕ4/1213

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με θέματα διακριτών καναλιών επικοινωνίας και ιδίως με τις έννοιες του πίνακα μετάβασης, της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ εισόδου και εξόδου και της χωρητικότητας ενθόρυβου καναλιού επικοινωνίας.*

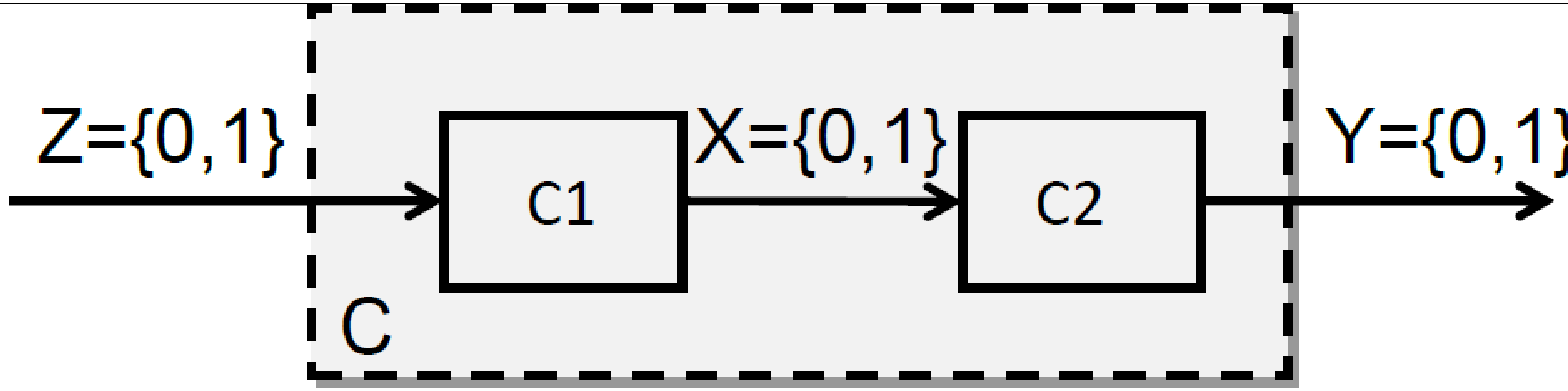
Σχετικές ασκήσεις*: Α.Α. 3.2, ΓΕ4/2005-06/Θ4, ΓΕ4/2010-11/Θ7, ΓΕ4/2011-12/Θ7,* ΕΞ2008Α/Θ5.

1. Δίνεται το κανάλι **C2** το οποίο απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα όπου f_2=1/4.



   Ζητείται τι είδους κανάλι είναι το κανάλι **C2** και στη συνέχεια να βρείτε την χωρητικότητά του καθώς και τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων στην είσοδο του καναλιού για τις οποίες επιτυγχάνεται η χωρητικότητα αυτή.

2. Ακολούθως, το κανάλι **C2** συνδέεται με τις εξόδους ενός καναλιού **C1** που είναι ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα ορθής μετάδοσης 3/4 και προκύπτει το κανάλι **C** το οποίο είναι συνδυασμός των δύο καναλιών **C1** και **C2** όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν υποθέσουμε ότι οι πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εξόδου του καναλιού C1 είναι ίδιες με αυτές των πιθανοτήτων εισόδου του καναλιού **C2** που δίνονται στο προηγούμενο ερώτημα, να απαντηθούν τα κάτωθι:

a. Να σχεδιαστεί το κανάλι **C** συναρτήσει των δύο επιμέρους καναλιών και να βρεθεί ο πίνακας μετάβασής του P;
b. Να υπολογίσετε την αμοιβαία πληροφορία I(Z;Y) του καναλιού **C**.

1. Το κανάλι C2 είναι ένα κανάλι Z για το οποίο γνωρίζουμε από την άσκηση αυτοαξιολόγησης 3.2 (σελ. 92 και 218-220, Τόμος Α) οπότε θέτοντας , όπου α=π και f_2=p μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας τη χωρητικότητα του καναλιού. Παρακάτω παραθέτουμε αναλυτικά τη λύση η οποία είναι ίδια με αυτή της αα 3.2:

$$C2 = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left[H(Y) - H(Y/X) \right]$$

Επειδή υπάρχουν δύο είσοδοι αυτό σημαίνει ότι αν θέσουμε $p(X=0)=\pi$ και

$p(X=1)=1-\pi$, τότε

$$H(Y) = H((1-f_2)\pi) = -(1-f_2)\pi \log((1-f_2)\pi) - (1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi)$$

(βλ. επίσης αα. 3.2, σελ 218 του βιβλ. Τόμος Α, όπου α=π και f_2=p)

Ομοίως

$$H(Y/X) = \pi H(f_2) = -\pi f_2 \log f_2 - \pi(1-f_2)\log(1-f_2)$$

(βλ. επίσης αα. 3.2, σελ 219 του βιβλ. Τόμος Α, όπου α=π και f_2=p)

Άρα

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)=$$
$$-(1-f_2)\pi\log((1-f_2)\pi)-(1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi)+\pi f_2\log f_2+\pi(1-f_2)\log(1-f_2)$$
$$-(1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi)-(1-f_2)\pi\left[\log((1-f_2)\pi)-\log(1-f_2)\right]+\pi f_2\log f_2=$$
$$-(1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi)-(1-f_2)\pi\left[\log\left(\frac{(1-f_2)\pi}{(1-f_2)}\right)\right]+\pi f_2\log f_2=$$
$$-(1-(1-f_2)\pi)\log(1-(1-f_2)\pi)-(1-f_2)\pi\log\pi+\pi f_2\log f_2$$

Για να βρούμε την μέγιστη χωρητικότητα θα πρέπει να βρούμε για ποια τιμή του π η παραπάνω έκφραση μεγιστοποιείται.
Άρα μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο

$$I'(X;Y)=(1-f_2)\log(1-(1-f_2)\pi)+(1-(1-f_2)\pi)(1-f_2)\frac{1}{1-(1-f_2)\pi}\log e$$
$$-(1-f_2)\log\pi-(1-f_2)\pi\frac{1}{\pi}\log e+f_2\log f_2=$$
$$(1-f_2)\log(1-(1-f_2)\pi)-(1-f_2)\log\pi+f_2\log f_2=0$$

Βρίσκουμε

$$(1-f_2)\log(1-(1-f_2)\pi)-(1-f_2)\log\pi+f_2\log f_2=0\Leftrightarrow$$
$$(1-f_2)\log\left(\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi}\right)=-f_2\log f_2\Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi}\right)=-\frac{f_2}{1-f_2}\log f_2\Leftrightarrow$$
$$\log\left(\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi}\right)=\log f_2^{-\frac{f_2}{1-f_2}}\Leftrightarrow$$
$$\frac{1-(1-f_2)\pi}{\pi}=f_2^{-\frac{f_2}{1-f_2}}\Leftrightarrow$$
$$\pi=\frac{1}{1-f_2+f_2^{-\frac{f_2}{1-f_2}}}$$

(βλ. επίσης αα. 3.2, σελ 219 του βιβλ. Τόμος Α, όπου α=π και f_2=p)
Οπότε για f_2=1/4 βρίσκουμε ότι **π=0,4278**
Άρα

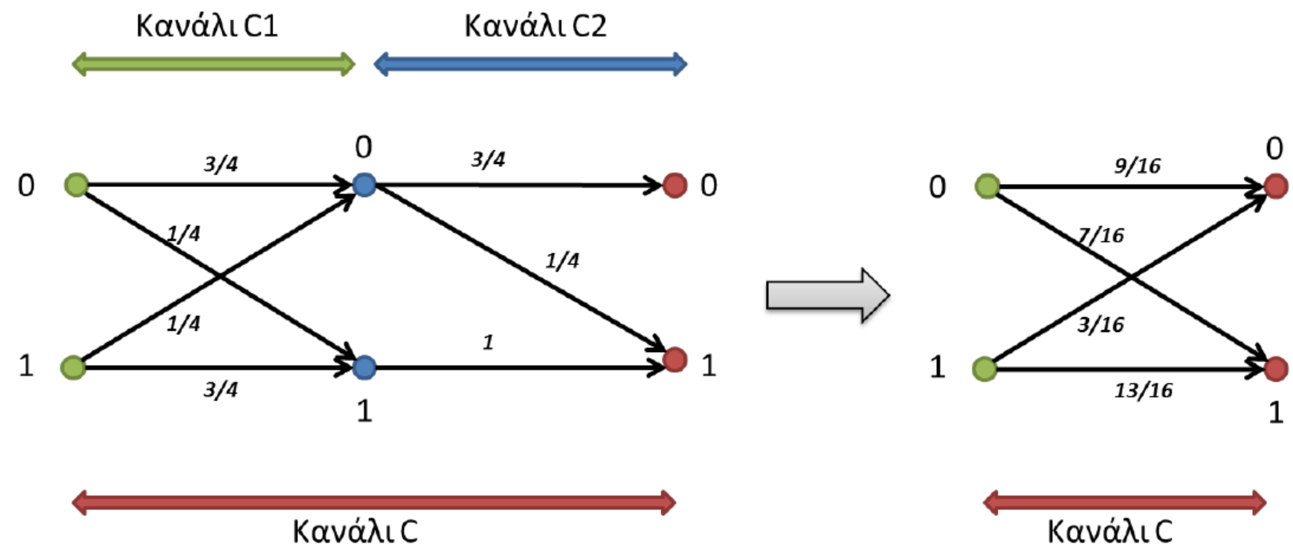
H(Y)=0,905324 bits και **H(Y/X)=0,3470855 bits**

Η χωρητικότητα του καναλιού **C2** θα είναι

C2=0.558 bits

2.

α)



Το κανάλι **C** το οποίο είναι ο συνδυασμός των 2 καναλιών είναι ένα δυαδικό μη συμμετρικό κανάλι όπου οι πιθανότητες αλλαγής του συμβόλου εισόδου διαφέρουν μεταξύ τους σε αντίθεση με ένα συμμετρικό κανάλι.

Ο πίνακας μετάβασης P του καναλιού C προκύπτει από το γινόμενο των πινάκων μετάβασης των επιμέρους καναλιών δηλαδή

[P]=[P1][P2]

$$[P]=[P1]\cdot[P2]=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+0\cdot\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$[P]=\begin{bmatrix}\frac{9}{16} & \frac{7}{16}\\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16}\end{bmatrix}$$

β) Για να υπολογίσουμε την αμοιβαία πληροφορία I(Z;Y) χρειάζεται να υπολογίσουμε πρώτα τις πιθανότητες εμφάνισης στην είσοδο του καναλιού **C** οι οποίες συμπίπτουν με αυτές του καναλιού **C1** και στη συνέχεια τις εντροπίες H(Y) και H(Y/Z).

Επειδή το κανάλι μας είναι δυαδικό συμμετρικό με πιθανότητα λάθους f_1=1/4 τότε ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi & 1-\pi \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}z_0 + \frac{1}{4}z_1 = \pi \\ \frac{1}{4}z_0 + \frac{3}{4}z_1 = 1-\pi \end{cases}$$

Κάνοντας χρήση και της σχέσης $z_0 + z_1 = 1$, βρίσκουμε ότι

z_0=0.3556 και z_1=0.6444

$$[z_0 \quad z_1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} = [y_0 \quad y_1] \Leftrightarrow$$

$$[0.3556 \quad 0.6444] \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16} \end{bmatrix} = [y_0 \quad y_1] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{9}{16}0.3556 + \frac{3}{16}0.6444 = y_0 \\ \frac{7}{16}0.3556 + \frac{13}{16}0.6444 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0.32 = y_0 \\ 0.68 = y_1 \end{cases}$$

Συνεπώς

$$H(Y) = 0.905\ bits$$

$$H(Y/Z) = z_0 H\left(\frac{7}{16}\right) + z_1 H\left(\frac{3}{16}\right) \approx 0.8\ bits$$

Άρα

I(Z;Y)=0,105 bits