

ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

Εισαγωγή στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

2^η ΟΣΣ /13.12.2021

Τμήμα ΗΛΕ.41 / Νίκος Δημητρίου

2021-2022

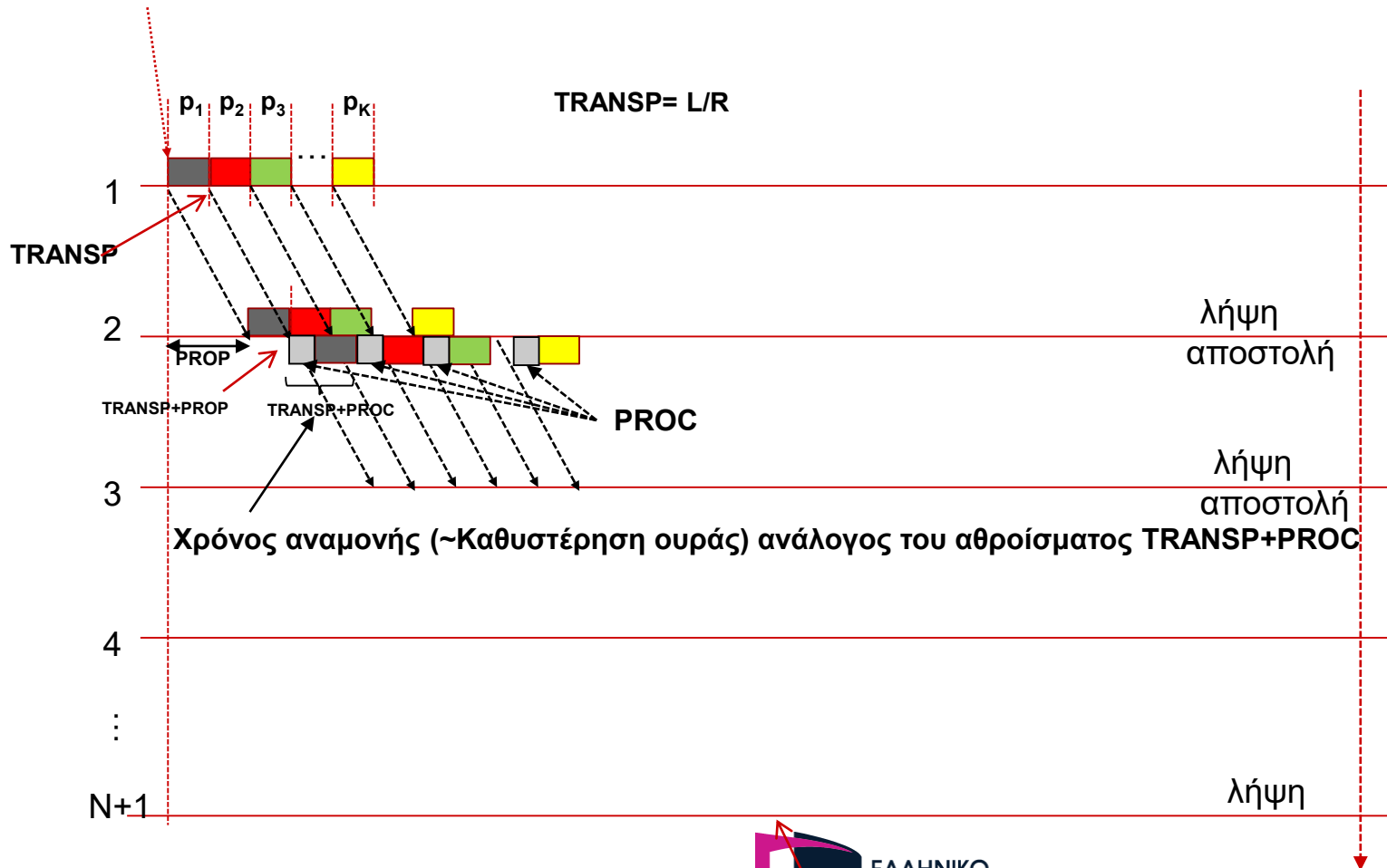
Διόρθωση ΓΕ1 / σχόλιο για το ερώτημα 1ζ

(ζ) Υποθέστε ότι μεταξύ ενός κόμβου-αποστολέα πακέτων A και ενός κόμβου-παραλήπτη B παρεμβάλλεται ένας μεταγωγέας πακέτων S. Αν το δίκτυο Ethernet ταχύτητας 10Mbps που συνδέει τον A και τον B με τον S αναβαθμιστεί σε δίκτυο Ethernet ταχύτητας 100Mbps, ποιες από τις τέσσερις καθυστερήσεις που υπεισέρχονται στην διατερματική (end-to-end) καθυστέρηση μετάδοσης ενός πακέτου από τον κόμβο A στον κόμβο B (εκπομπής, διάδοσης, αναμονής στην ουρά, επεξεργασίας) θα επηρεαστούν και πώς; (οι σωστές απαντήσεις μπορεί να είναι περισσότερες της μιας)

- A. εκπομπής -αυξάνεται B. ουράς -αυξάνεται Γ. διάδοσης -αυξάνεται Δ. επεξεργασίας - αυξάνεται
- E. εκπομπής -μειώνεται ΣΤ. ουράς -μειώνεται Ζ. διάδοσης -μειώνεται Η. επεξεργασίας - μειώνεται

Σχετικά με το (B) : Κάθε πακέτο που λαμβάνεται στον ενδιάμεσο κόμβο αναμένει στην ουρά μέχρι να ολοκληρωθεί η επεξεργασία (σε χρόνο PROC) και η μετάδοση (σε χρόνο TRANSP) των πακέτων που έχουν προηγηθεί, οπότε ο χρόνος αναμονής είναι ανάλογος του αθροίσματος PROC+TRANSP. Συνεπώς, αν μειωθεί ο χρόνος μετάδοσης TRANSP μειώνεται και ο χρόνος αναμονής (απάντηση ΣΤ).

N σύνδεσμοι

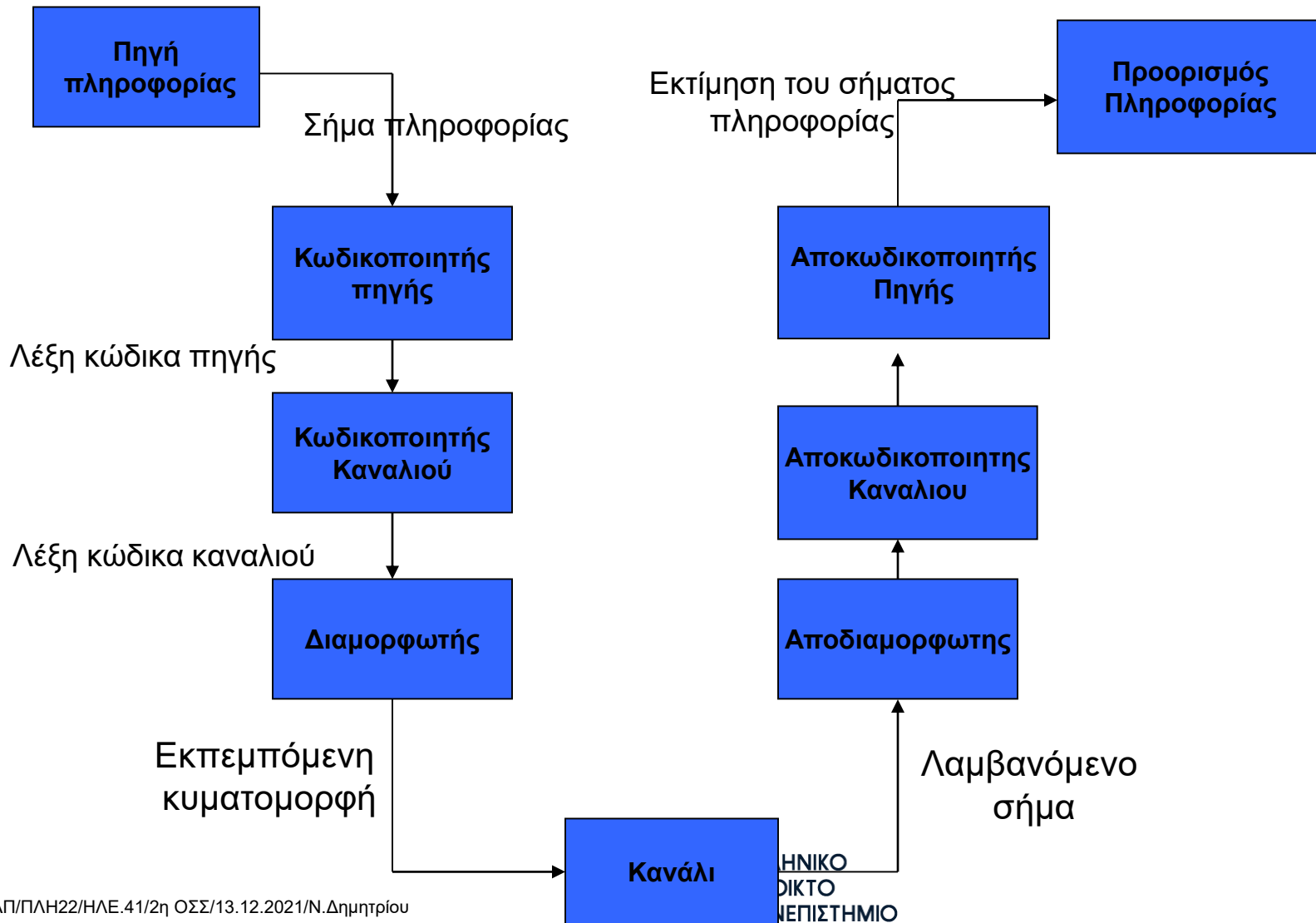


Στόχοι Μελέτης

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
 - Μαθηματική Εισαγωγή
 - Τύποι Σημάτων
 - Εκφράσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου
 - Περιοδικότητα Σημάτων
 - Εκφράσεις σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων
 - Μετασχηματισμός Fourier
 - Χαρακτηριστικά Συστημάτων
 - Ιδανικά Φίλτρα

Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



Μαθηματική Εισαγωγή

Διακριτά σύνολα αριθμών

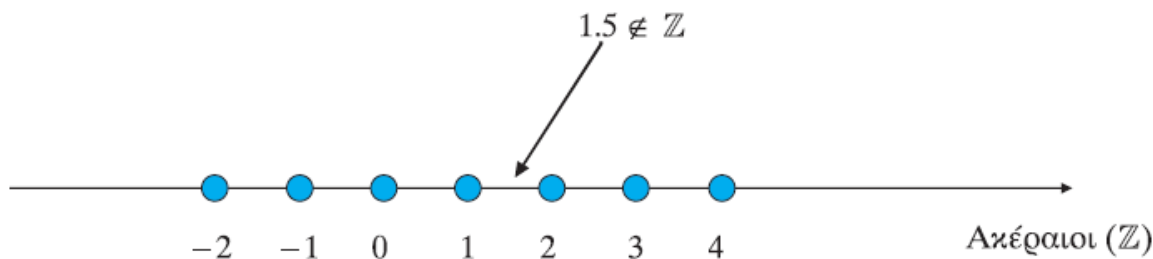
- Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Ρητοί αριθμοί, που ορίζονται ως το πηλίκο ακεραίων:

$$z \in \mathbb{Q} \text{ όταν } \exists x, y \in \mathbb{Z} (y \neq 0) \text{ ώστε } z = \frac{x}{y}$$

- Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή πηλίκου ακεραίων. Είναι οι δεκαδικοί με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία.

Παραδείγματα άρρητων: $\pi = 3.1415927\dots$, οι ρίζες μη τελείων τετραγώνων $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ κ.λπ.

Τα παραπάνω σύνολα είναι διακριτά, δηλαδή αποτελούνται από διακριτές τιμές και είναι δυνατό μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών τους να υπάρχει αριθμός που να μην ανήκει στο σύνολο.

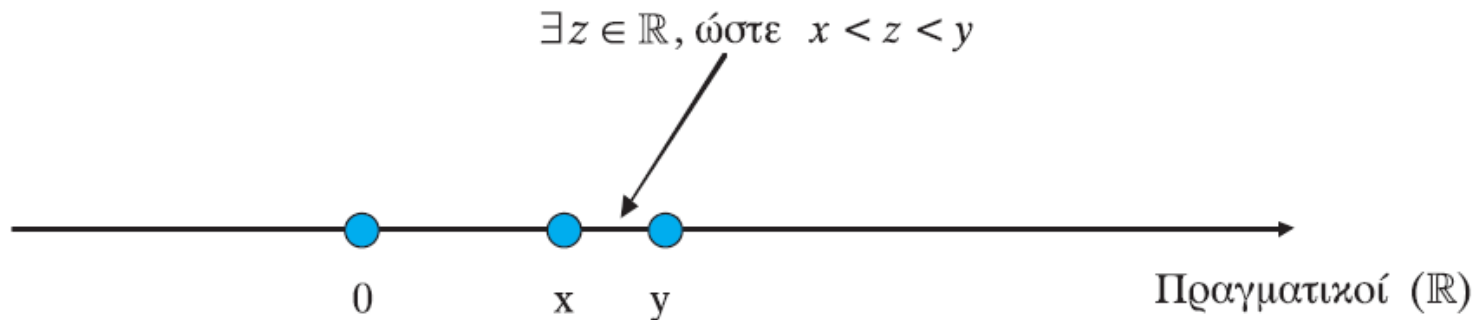


Συνεχή σύνολα αριθμών

- Οι πραγματικοί αριθμοί (\mathbb{R}) συμπεριλαμβάνουν ρητούς και άρρητους.

Αποτελούν ένα συνεχές σύνολο αριθμών, δηλαδή για κάθε ζεύγος πραγματικών υπάρχει πραγματικός που να βρίσκεται ανάμεσά τους:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ με } x < y, \exists z \in \mathbb{R}, \text{ ώστε } x < z < y$$



Σχήμα 2.2

Παράδειγμα συνεχούς συνόλου

Εισαγωγή στα Σήματα

Σήμα

- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
 - Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα

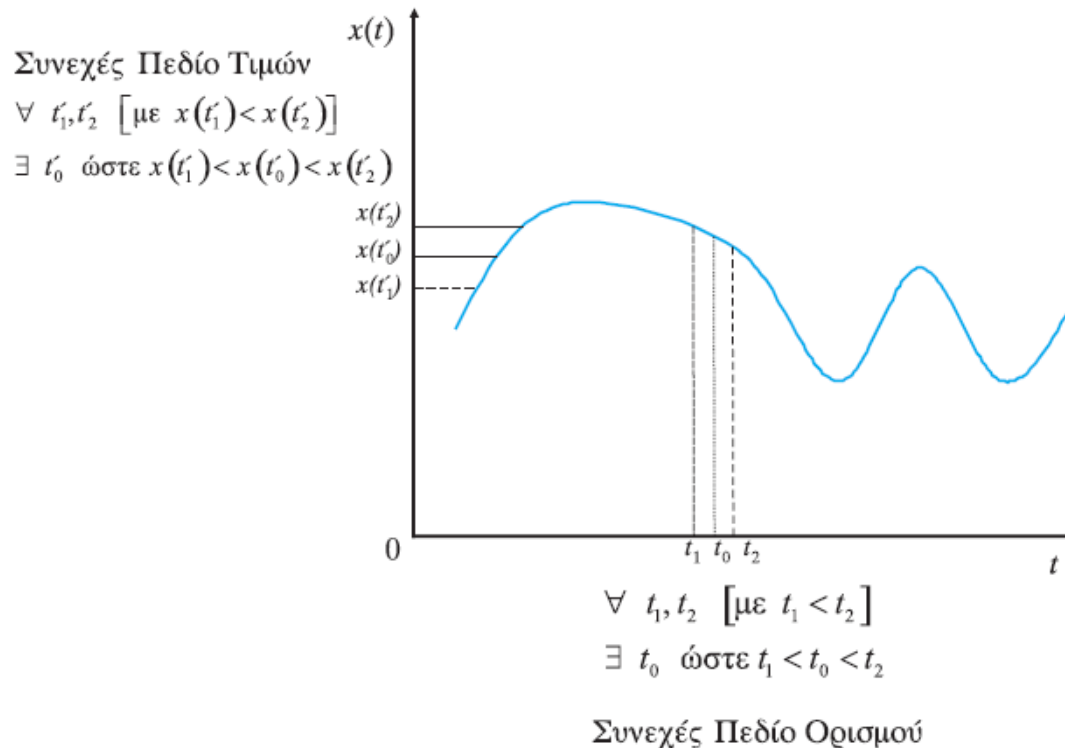
Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

2.2	Είδη σημάτων	17
2.2.1	Αιτιατά σήματα.....	17
2.2.2	Πραγματικά – μιγαδικά σήματα	17
2.2.3	Σήματα συνεχούς χρόνου – αναλογικά.....	17
2.2.4	Σήματα διακριτού χρόνου	18
2.2.5	Ψηφιακά σήματα.....	18
2.2.6	Περιοδικά – μη περιοδικά.....	19

Κατηγορίες Σημάτων

- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
 - Περιοδικά Σήματα
 - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
 - Ημιτονοειδή Σήματα
 - Ορθογώνιος Παλμός
 - Τριγωνικός Παλμός
 - Κρουστικά Σήματα
 - Σήμα Βήματος

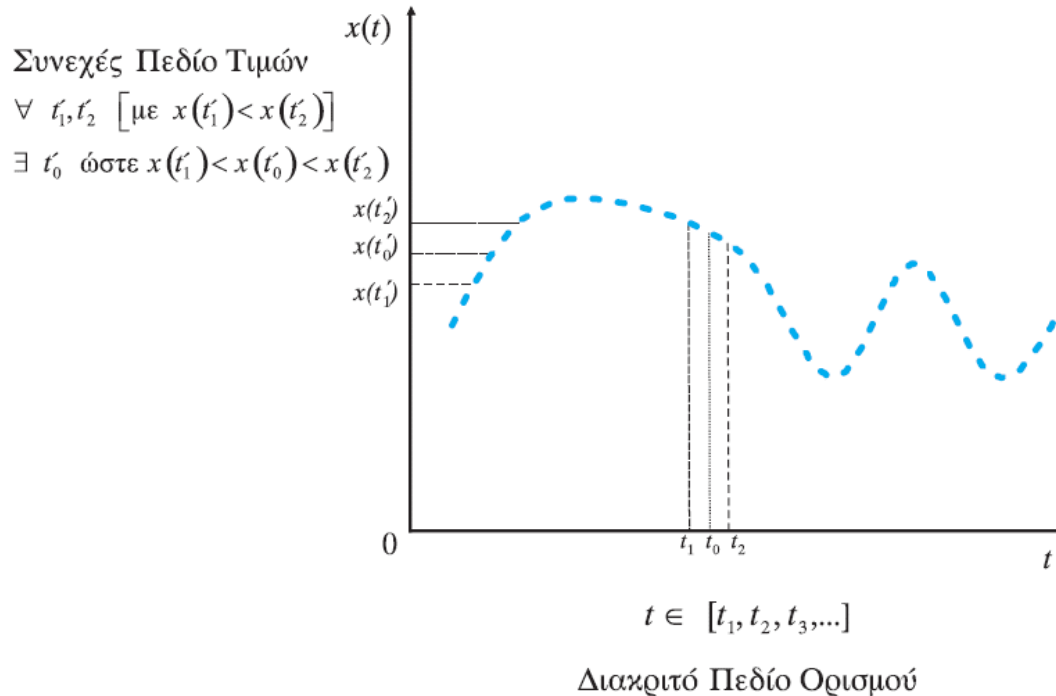
Σήματα συνεχούς χρόνου - αναλογικά



Τα σήματα συνεχούς χρόνου (αναλογικά) έχουν συνεχές πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$, $t \in \mathbb{R}$ είναι συνεχούς χρόνου.

Σήματα διακριτού χρόνου

Τα σήματα διακριτού χρόνου έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών.

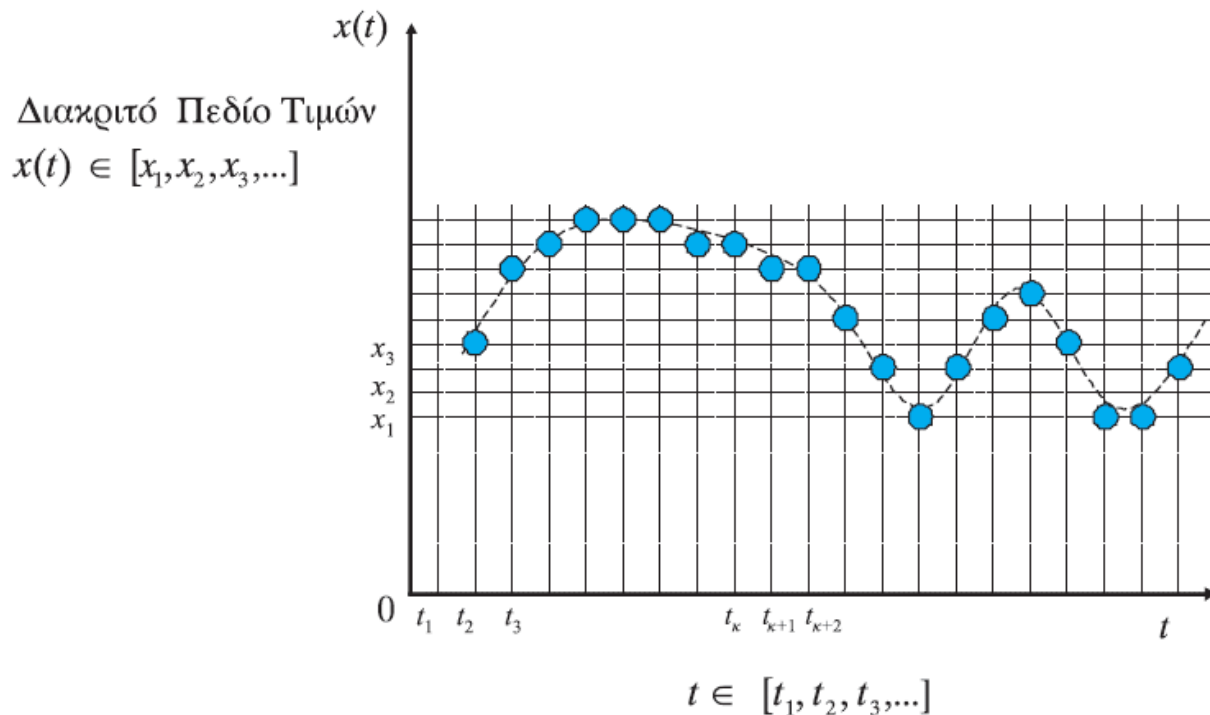


Για παράδειγμα, το σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και T_0 άρρητος

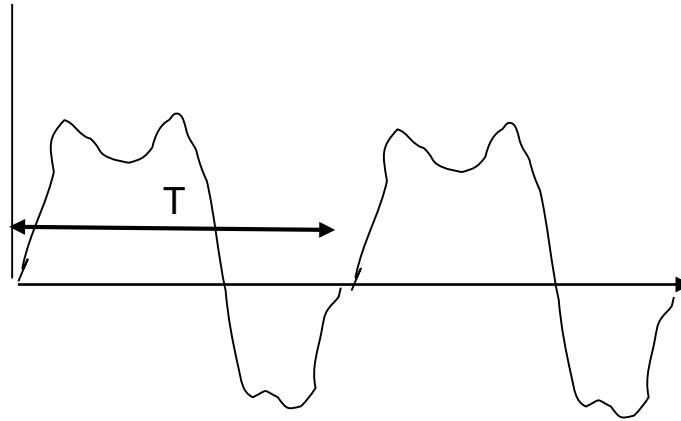
(π.χ. $T_0 = \sqrt{5}$), είναι διακριτού χρόνου, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα συνεχές σύνολο [το $(-1, 1)$] $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ψηφιακά σήματα

Τα ψηφιακά σήματα έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και διακριτό πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και T_0 ρητός, είναι ψηφιακό, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα διακριτό σύνολο [π.χ. για $T_0 = 5$, το $x(n)$ παίρνει τις τιμές $\{0.309, -0.809, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$].



Περιοδικά Σήματα



Ένα σήμα $x(t)$ ορίζεται ως περιοδικό αν ισχύει ότι:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}_+^*, \text{ τέτοιο ώστε } x(t+kT) = x(t) \text{ για } k = 1, 2, \dots$$

(Συν)ημιτονοειδή Σήματα

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) = A \cdot \cos(2\pi f \cdot t + \theta) = A \cdot \sin\left(2\pi f \cdot t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

ω : κυκλική συχνότητα (μετράται σε rad/sec)

θ : φάση (μετράται σε rad)

f : συχνότητα (μετράται σε Hertz)

A : πλάτος (μετράται σε Volt)

Υπολογισμός περιόδου

Αναζητείται θετικό $T \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $\forall t \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x(t+T) = x(t) \Leftrightarrow A \cdot \cos(2\pi f(t+T) + \theta) = A \cdot \cos(2\pi f t + \theta) \Leftrightarrow$$

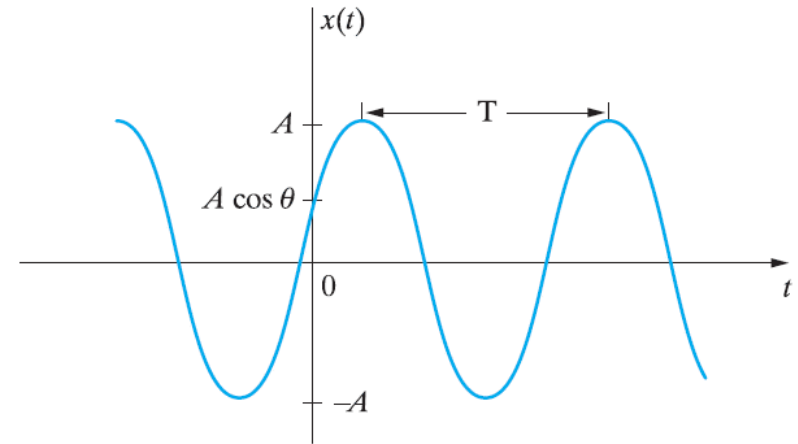
$$\Leftrightarrow \cos(2\pi f t + 2\pi f T + \theta) = \cos(2\pi f t + \theta) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ισχύει ότι αν } \cos(x) = \cos(y), \\ \text{τότε } x = 2k\pi + y, k = 1, 2, \dots \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi f t + 2\pi f T + \theta = 2\pi f t + \theta + 2k\pi, k = 1, 2, \dots$$

Άρα,

$$2\pi f T = 2k\pi \Leftrightarrow T = \frac{k}{f}, k = 1, 2, \dots$$

Η θεμελιώδης περίοδος λαμβάνεται για $k=1$ και ισούται με $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{2\pi}{\omega}$.



Περιοδικότητα Αθροίσματος Περιοδικών Σημάτων

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν:

$\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q} \text{ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει}$$

όλες οι δυνατές απλοποιήσεις).

Δηλαδή, θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 .$$

Γενίκευση

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2, \dots, T_N θα είναι περιοδικό εάν:

$\exists m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N .$$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \dots = m_N T_N$$

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Το άθροισμα περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό σήμα **αν και μόνο αν ο λόγος της περιόδου των επιμέρους σημάτων είναι ρητός αριθμός** (μπορεί να γραφεί ως κλάσμα ακεραίων).
- Πως υπολογίζεται η περίοδος του σύνθετου σήματος?

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Η βασική περίοδος του σύνθετου σήματος N περιοδικών σημάτων υπολογίζεται ως εξής:
 - Γράψε το λόγο των περιόδων T_{oi}/T_{o1} , $2 \leq i \leq N$ ως λόγο ακεραίων, όπου T_{o1} η περίοδος του 1^{ου} σήματος και T_{oi} η περίοδος των υπολοίπων $N-1$ σημάτων. **Αν ένας από τους λόγους είναι άρρητος το άθροισμα δεν είναι περιοδικό σήμα.**
 - Απαλείψτε τους κοινούς όρους σε αριθμητή και παρονομαστή κάθε λόγου ακεραίων.
 - Η βασική περίοδος του σύνθετου σήματος είναι $T_o = k_o T_{o1}$, όπου k_o είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των επιμέρους λόγων.

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Θεωρείστε σήμα $v(t)$ ως άθροισμα των περιοδικών σημάτων

$$v(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$x_1(t) = \cos(3.5t)$$

$$x_2(t) = \cos(2t)$$

$$x_3(t) = \cos\left(\frac{7}{6}t\right)$$

- Είναι περιοδικό το σύνθετο σήμα και αν ναι ποια η περίοδος?

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Υπολογίστε τους λόγους των περιόδων των επιμέρους σημάτων

$$T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3.5}$$

$$T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2}$$

$$T_{03} = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{\frac{2\pi}{3.5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{2}{3.5} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{T_{01}}{T_{03}} = \frac{\frac{2\pi}{3.5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}} = \frac{7}{3.5} = \frac{6}{21}$$

- Οι λόγοι είναι ρητοί αριθμοί και άρα το σύνθετο σήμα περιοδικό.

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Απαλοιφή κοινών παραγόντων:
 - $T_{01}/T_{02} = 4/7$
 - $T_{01}/T_{03} = 7/21 = 1/3$
- Υπολογισμός ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου των παρονομαστών των λόγων:
 - $n_1 = 3 * 7 = 21$
- Βασική περίοδος του σύνθετου σήματος:
 - $T_0 = n_1 T_{01} = 21 * 2\pi/3.5 = 12\pi$

Εναλλακτική λύση

- Αναζητούμε ελάχιστους ακέραιους m_1, m_2, m_3 ώστε να ισχύει

$$m_1 T_{01} = m_2 T_{02} = m_3 T_{03} \Leftrightarrow$$

$$m_1 \frac{2\pi}{3.5} = m_2 \frac{2\pi}{2} = m_3 \frac{2\pi}{\frac{7}{6}} \Leftrightarrow \{\text{διαίρεση κατά μέλη με } 2\}$$

$$m_1 \frac{1}{3.5} = m_2 \frac{1}{2} = m_3 \frac{1}{\frac{7}{6}} \Leftrightarrow \{\text{διαίρεση κατά μέλη με } 6\}$$

$$m_1 \frac{1}{21} = m_2 \frac{1}{12} = m_3 \frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 21 \\ m_2 = 12 \\ m_3 = 7 \end{cases}$$

Άρα σήμα περιοδικό με περίοδο $T_0 = m_1 T_{01} = m_2 T_{02} = m_3 T_{03} = 12\pi \text{ sec}$

Παράδειγμα Περιοδικότητας Σύνθετων Σημάτων

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

Παράδειγμα Περιοδικότητας Σύνθετων Σημάτων

$$\text{Είναι } s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

$$\text{Για το } \cos(5\pi t) \text{ η περίοδος είναι } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} \text{ sec}$$

$$\text{Για το } \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ η περίοδος είναι } T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \text{ sec}$$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha=1, \beta=10$ φυσικούς, άρα ρητός οπότε

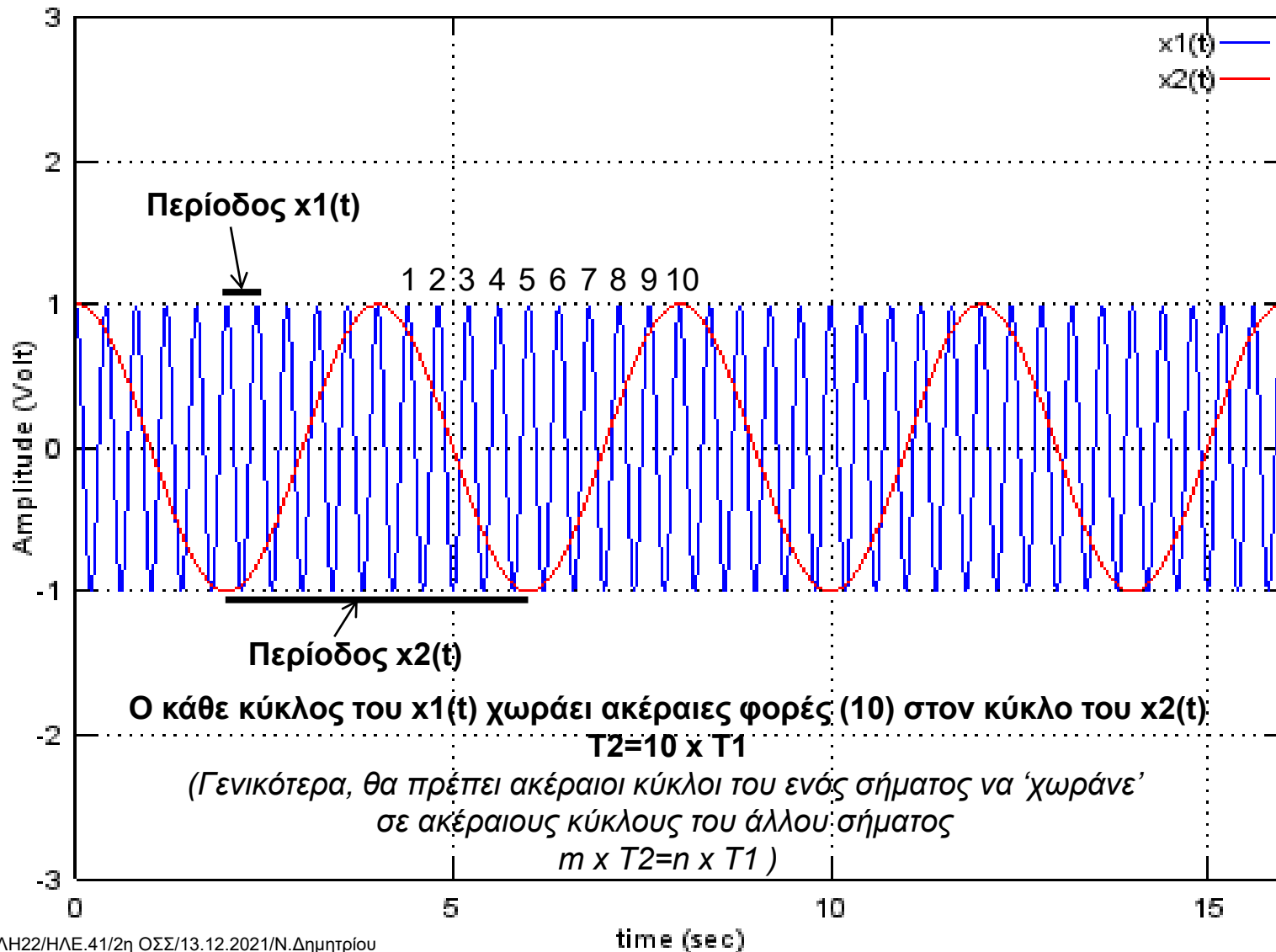
το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \beta T_1 = \alpha T_2 = 4 \text{ sec}$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25 \text{ Hz}$

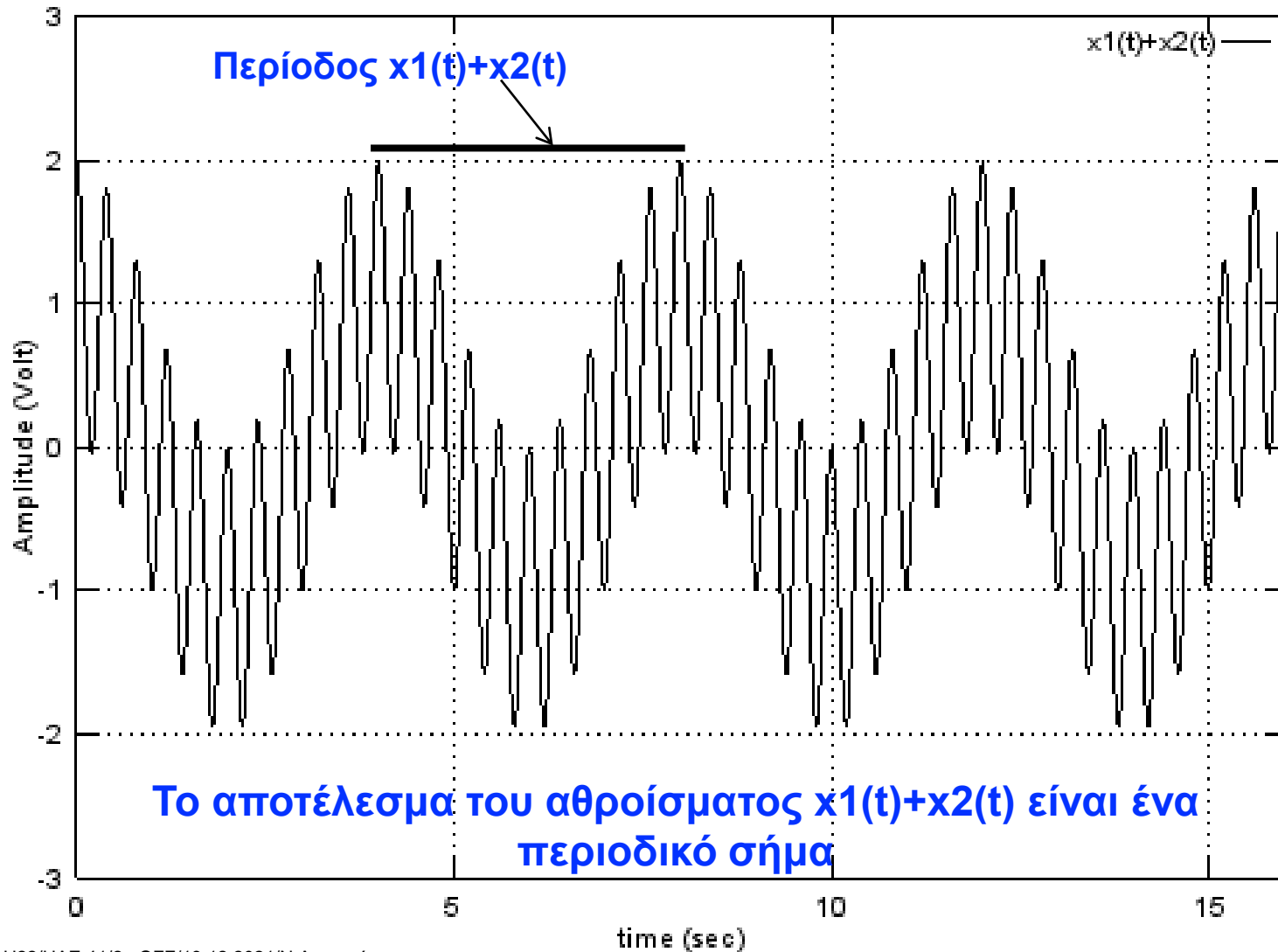
Example 1a

- `figure;` % figure creation
- `Ts=1./50;` % sample duration (sampling frequency=50Hz)
- `t=0:Ts:10000.*Ts;` %create 10000 time samples
- `x1=cos(5.*pi.*t);` % 1st signal with frequency 2.5Hz
- `x2=cos(pi.*t./2);` % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- `plot(t,x1,'b');` %plot 1st signal 'b' is for blue line
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- `hold;` %hold the first plot
- `plot(t,x2,'r');` % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- `legend('x1(t)','x2(t)');` % show which plot corresponds to which signal
- `grid;` % show a rectangular grid
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- `figure;` % figure creation
- `plot(t,x1+x2,'k');` %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- `xlabel('time (sec)');` % label of x- axis
- `ylabel('Amplitude (Volt)');` % label of y-axis
- `legend('x1(t)+x2(t)');` % show to which signal the plot corresponds
- `axis([0 16 -3 3]);` %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- `grid` % show a rectangular grid

Example 1a



Example 1a



Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

$$\text{Είναι } s_1(t) = \boxed{f(5t/\pi)} + f\left(\frac{t}{2}\right) = \boxed{\cos(5t)} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

$$\text{Για το } \cos(5t) \text{ η περίοδος είναι } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5} \text{ sec}$$

$$\text{Για το } \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \text{ η περίοδος είναι } T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4 \text{ sec}$$

Ο λόγος των περιόδων είναι, $T_1/T_2 = \pi/10$

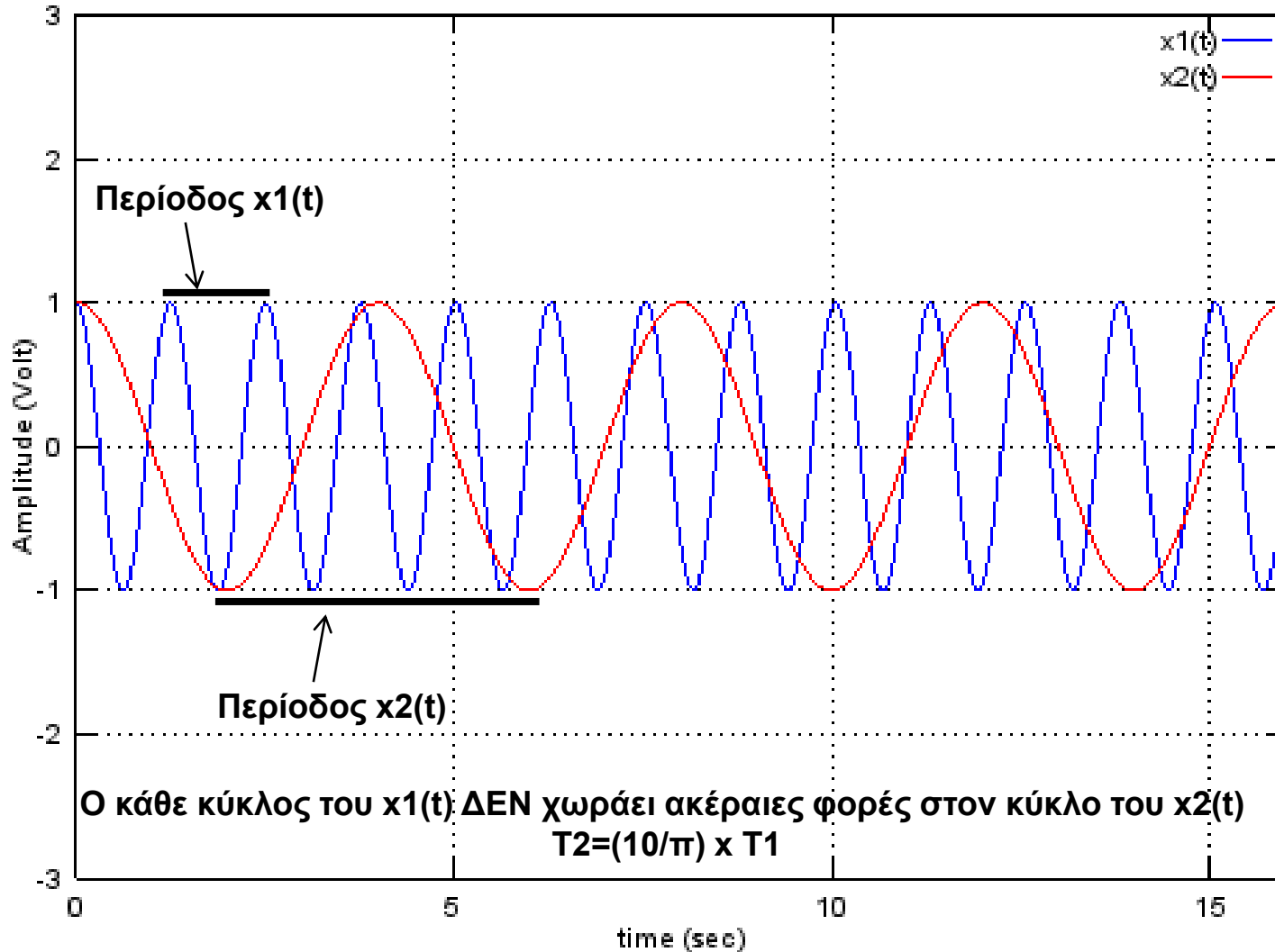
Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

Example 1b

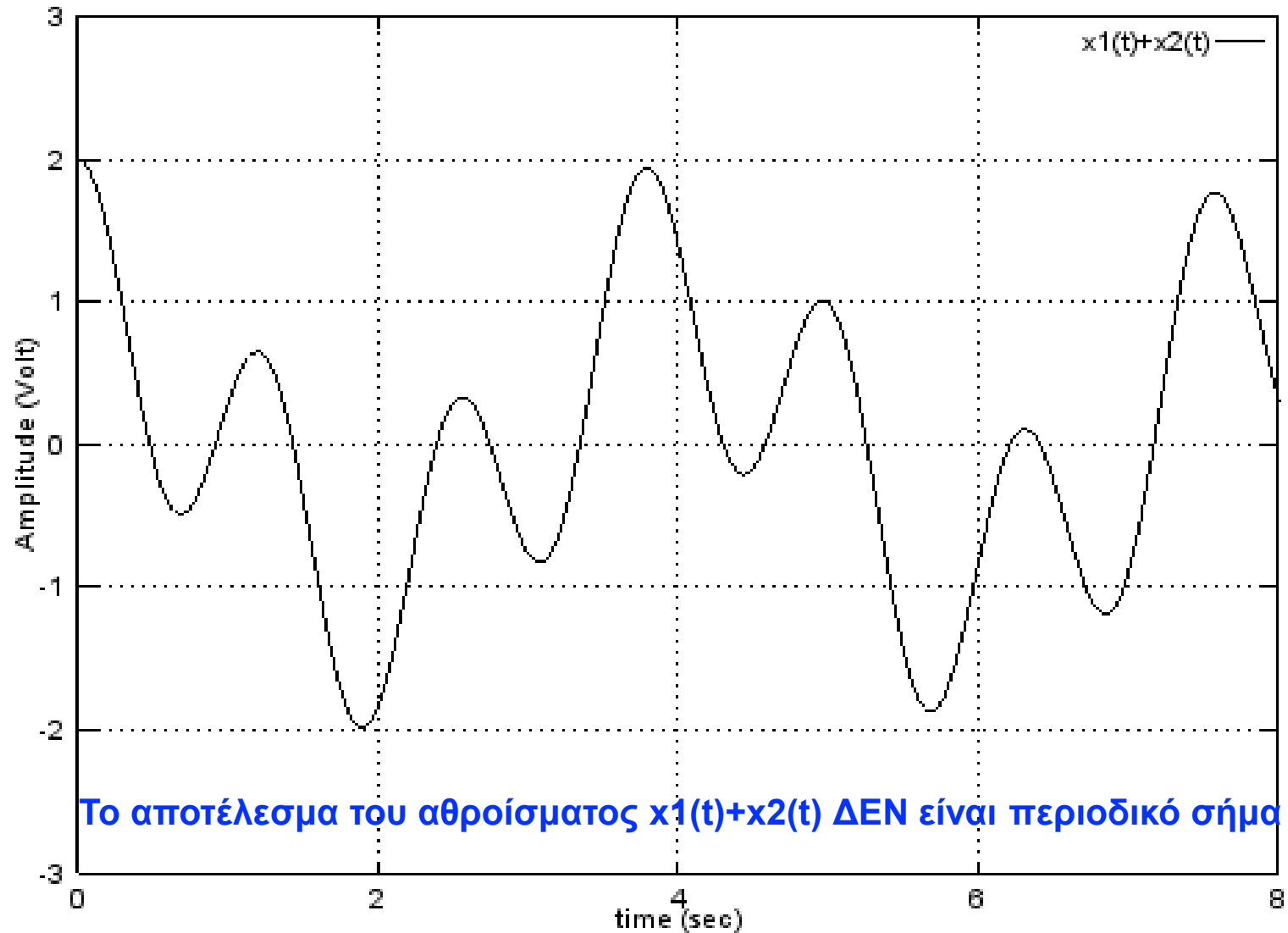
- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal 'b' is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

← Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a

Example 1b



Example 1b



Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

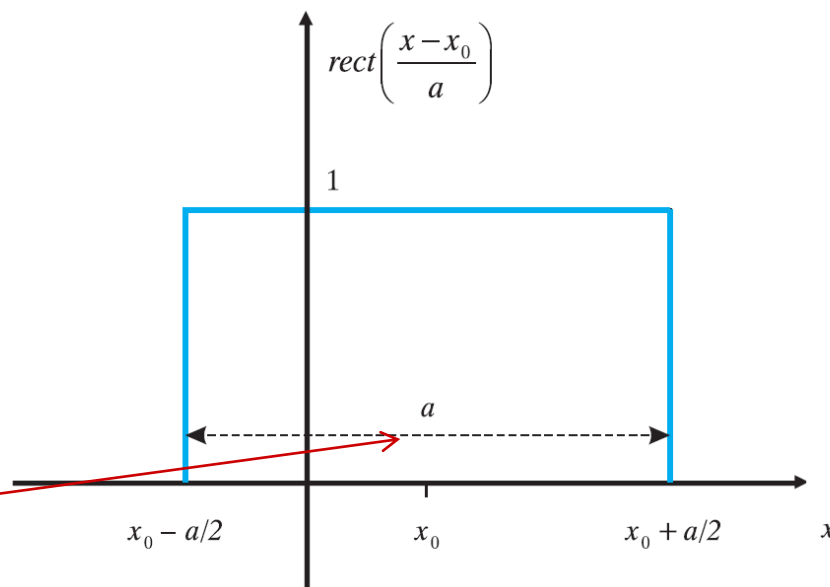
2.2.7	Ενδεικτικά μη περιοδικά σήματα.....	23
2.2.7.1	Ορθογωνικός παλμός.....	23
2.2.7.2	Τριγωνικός παλμός	26
2.2.7.3	Συνάρτηση sinc	29
2.2.7.4	Μοναδιαίο βηματικό σήμα	30
2.2.7.5	Πραγματικό εκθετικό σήμα.....	31
2.2.7.6	Κρουστική συνάρτηση $\delta(x)$ (Dirac)	32

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } |x-x_0| < \frac{a}{2}, \text{ δηλ. } x_0 - \frac{a}{2} < x < x_0 + \frac{a}{2} \\ 0, & \text{όταν } |x-x_0| > \frac{a}{2}, \text{ δηλ. } \begin{cases} x < x_0 - \frac{a}{2} \\ \text{ή} \\ x > x_0 + \frac{a}{2} \end{cases} \end{cases}$$

όπου $a > 0$



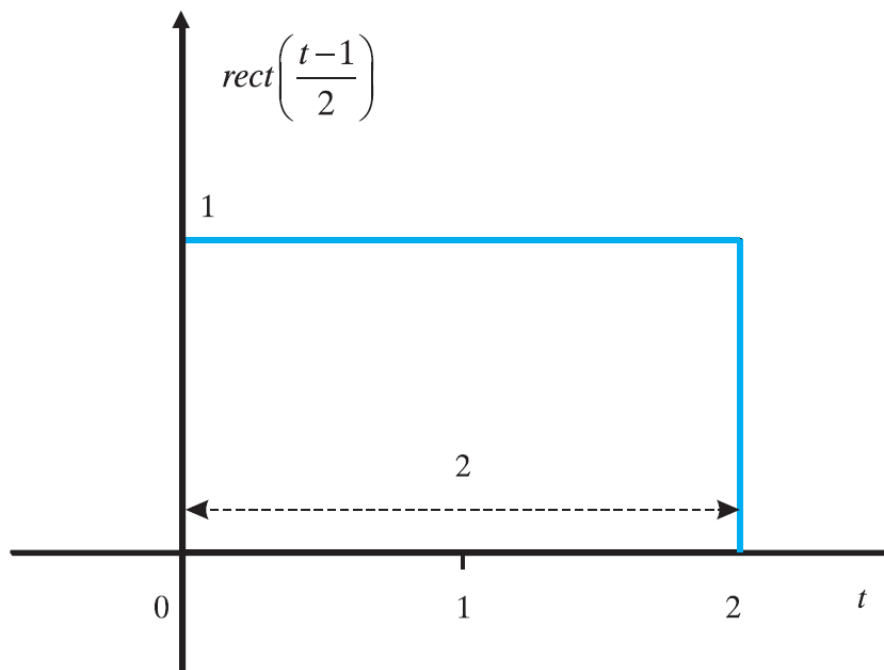
Σχεδιαστικό Εύρος

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (2)

■ Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0, 2)$.

- $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

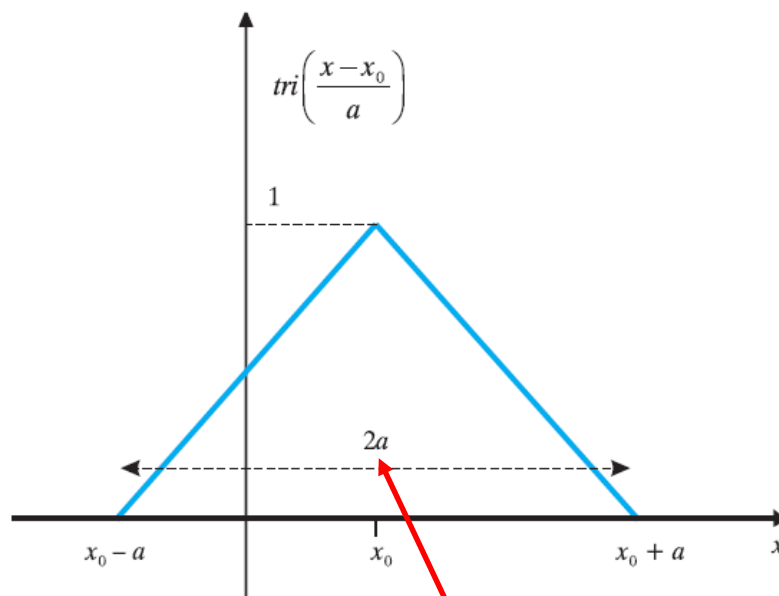


Σήμα Τριγωνικός Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \text{tri}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_0|}{a}, & \text{όταν } |x-x_0| < a, \text{ δηλ. } x_0 - a < x < x_0 + a \\ 0, & \text{όταν } |x-x_0| > a, \text{ δηλ. } \begin{cases} x < x_0 - a \\ \text{ή} \\ x > x_0 + a \end{cases} \end{cases}$$

όπου $a > 0$



Σχεδιαστικό Εύρος

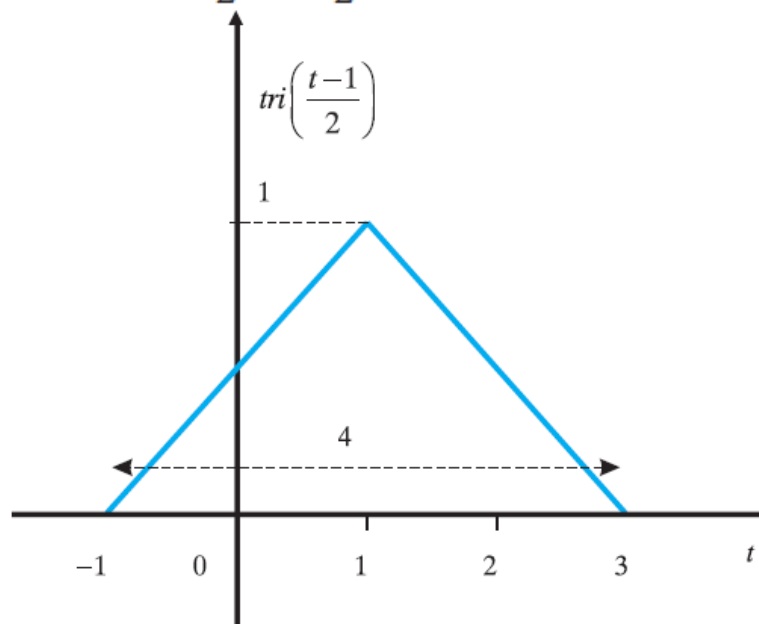
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (2)

■ Παραδείγματα

- $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2}, t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$.



Σήμα Τριγωνικός Παλμός (3)

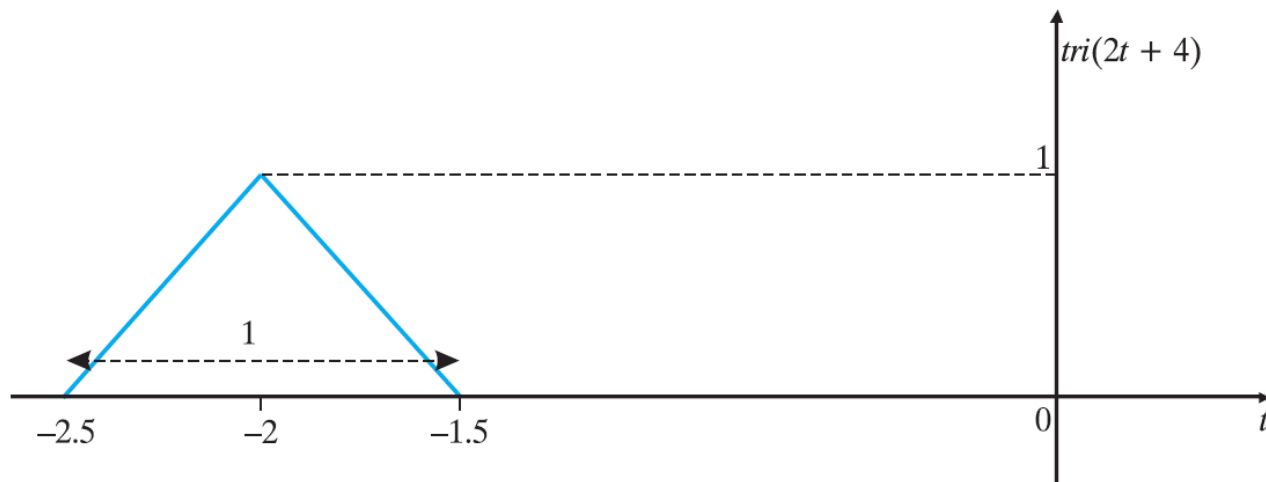
- $x(t) = \text{tri}(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $\text{tri}\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι: $x(t) = \text{tri}(2t+4) = \text{tri}(2(t+2)) = \text{tri}\left(\frac{t+2}{1/2}\right) = \text{tri}\left(\frac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \frac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα

$$\left(t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right) = (-2.5, -1.5).$$



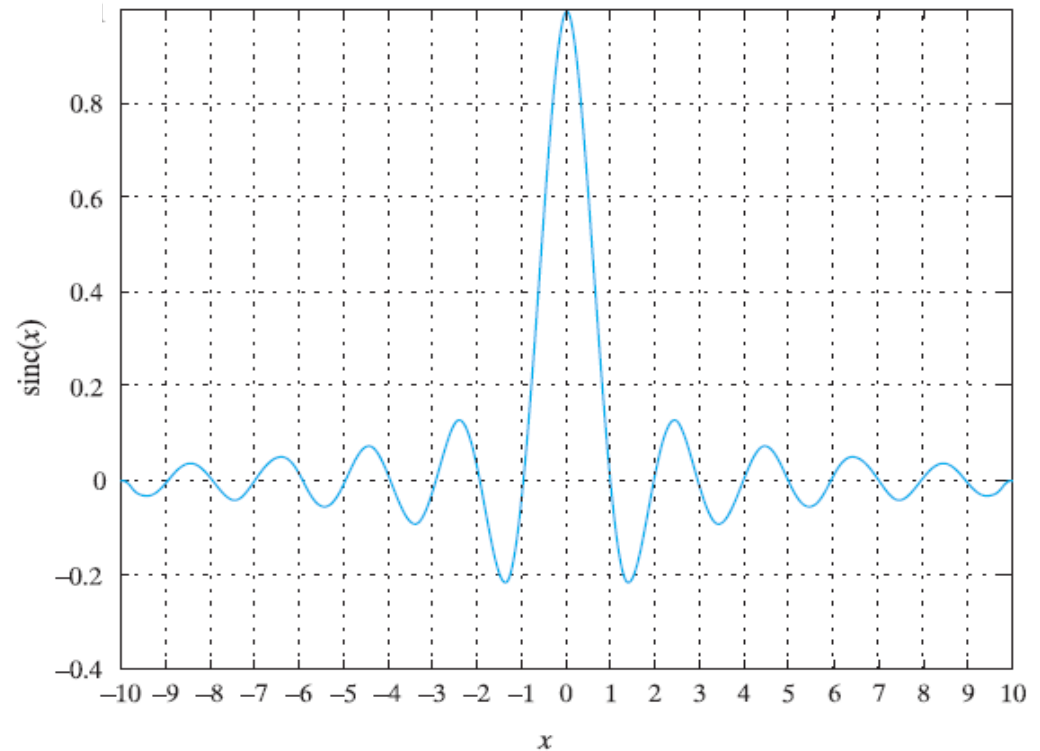
Συνάρτηση sinc(x)

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

Κρουστική Συνάρτηση $\delta(x)$ Dirac (I)

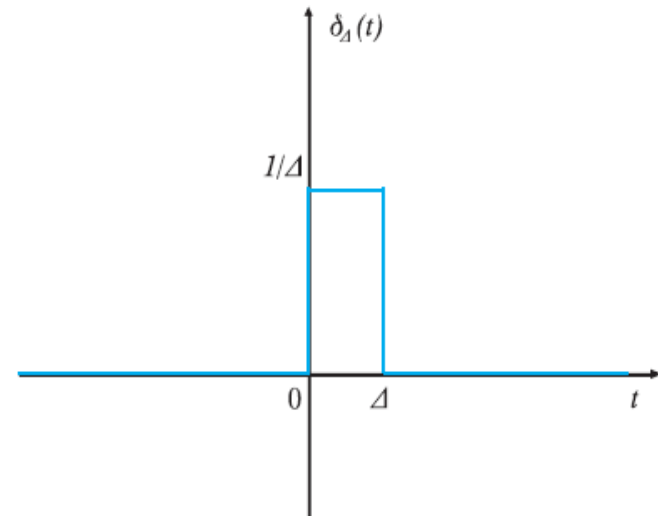
Έστω ένας ορθογωνικός παλμός μοναδιαίου εμβαδού με την εξής μορφή:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & \text{όταν } 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{όταν } t > \Delta \end{cases}$$

όπου $\Delta > 0$.

Δηλαδή, ισχύει ότι:

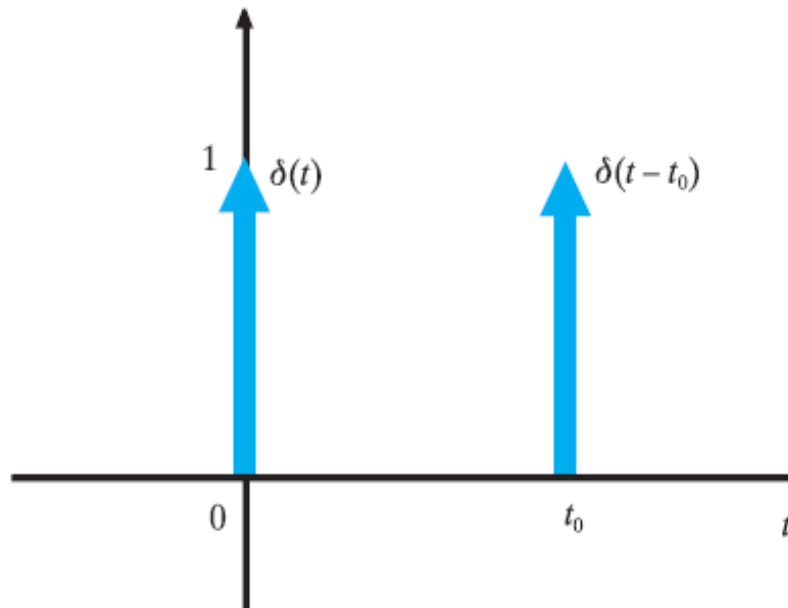
$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{\Delta}{2}}{\Delta}\right)$$



Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού

Κρουστική Συνάρτηση $\delta(x)$ Dirac (II)

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \rightarrow 0$), η χρονική διάρκεια του παλμού μηδενίζεται και το πλάτος του «απειριζείται», ενώ το εμβαδόν του παραμένει ίσο με 1. Η κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [\delta_{\Delta}(t)]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης $\delta(x)$

- $\delta(t) = 0$, όταν $t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0$, όταν $t \neq t_0$

- $\delta(-t) = \delta(t)$

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$

- $f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$

- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$ αντιμεταθετική

$[f(x) * g(x)] * h(x) = f(x) * [g(x) * h(x)]$ προσεταιριστική

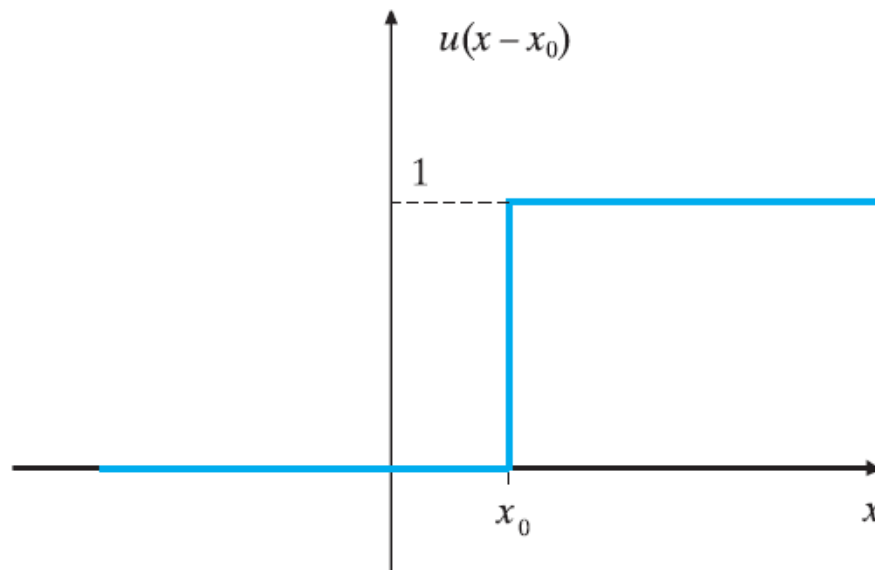
$f(x) * [g(x) + h(x)] = f(x) * g(x) + f(x) * h(x)$ επιμεριστική

Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα

Το μοναδιαίο βηματικό σήμα ορίζεται ως εξής:

$$u(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < x_0 \\ 1, & \text{όταν } x > x_0 \end{cases}$$

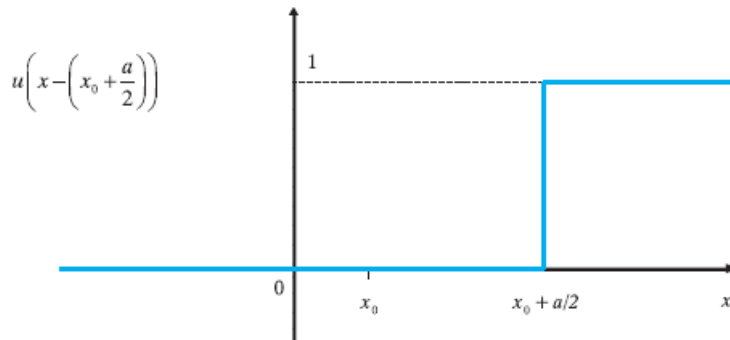
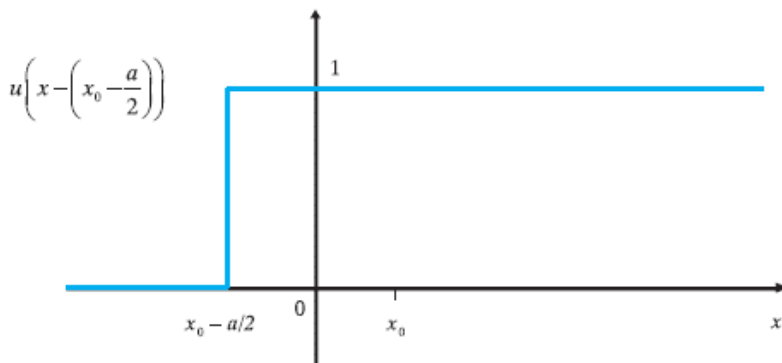
και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



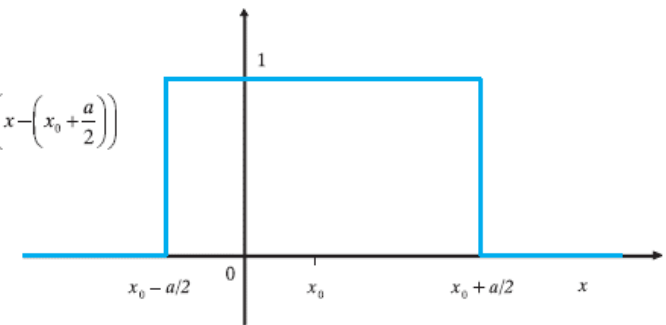
Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα – Ορθογωνικός Παλμός

Η συνάρτηση ορθογωνικού παλμού μπορεί να περιγραφεί με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση ως εξής:

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = u\left(x - \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\right) - u\left(x - \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)\right)$$

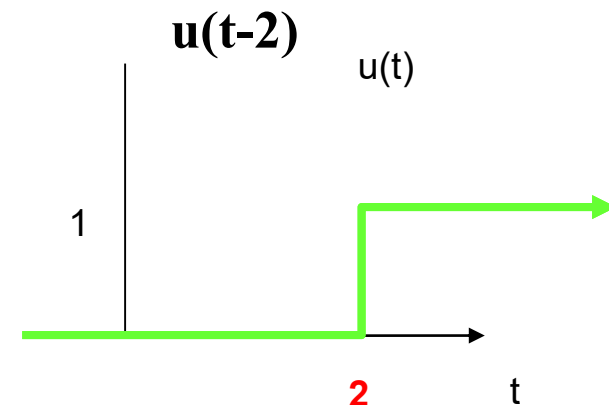
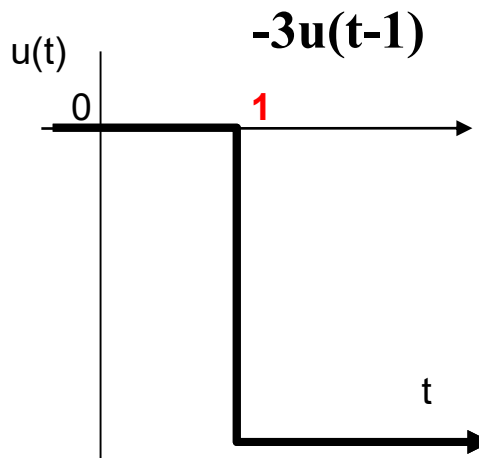
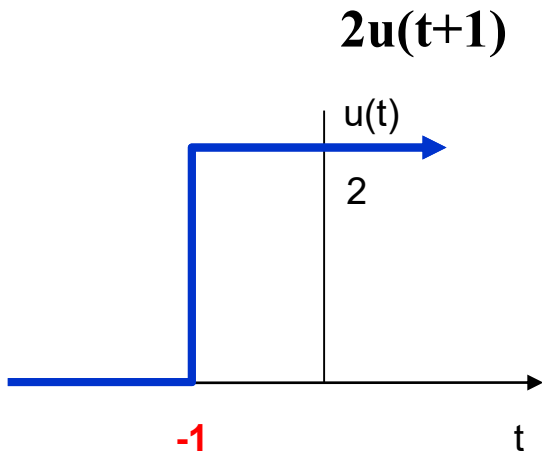


$$\begin{aligned} \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) &= \\ &= u\left(x - \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\right) - u\left(x - \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)\right) \end{aligned}$$



Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (3)

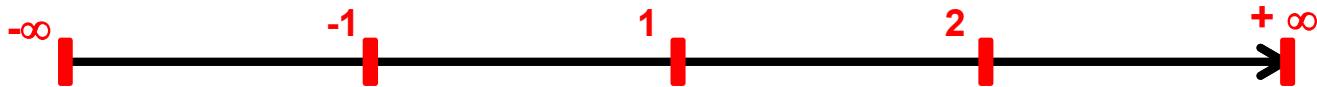
- Παραδείγματα
 - Να σχεδιαστεί το σήμα $x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)$
- Μέθοδος
- Βήμα 1: Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους



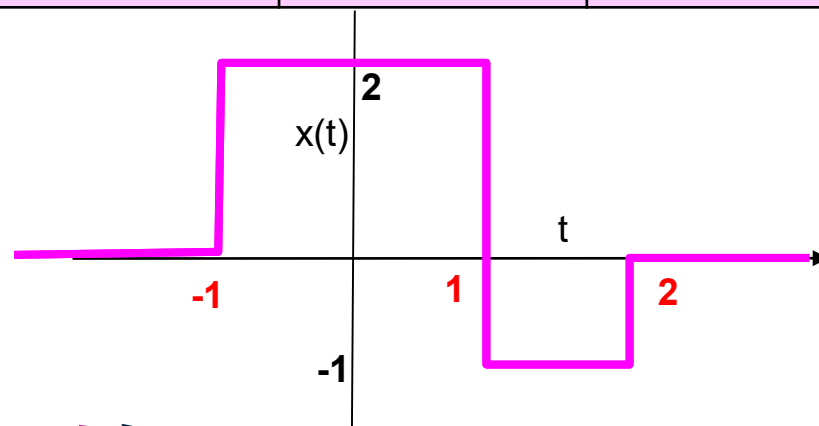
- Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1 και 2**

Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (4)

- Βήμα 3: Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



$2u(t+1)$	0	2	2	2
$-3u(t-1)$	0	0	-3	-3
$u(t-2)$	0	0	0	1
$x(t)$	0	2	-1	0



- Βήμα 4:
- Γραφική Παράσταση

Υπέρθεση Σημάτων (1)

- Εργασία 1^η, (2009), Θέμα 4

- Δίνεται το σήμα

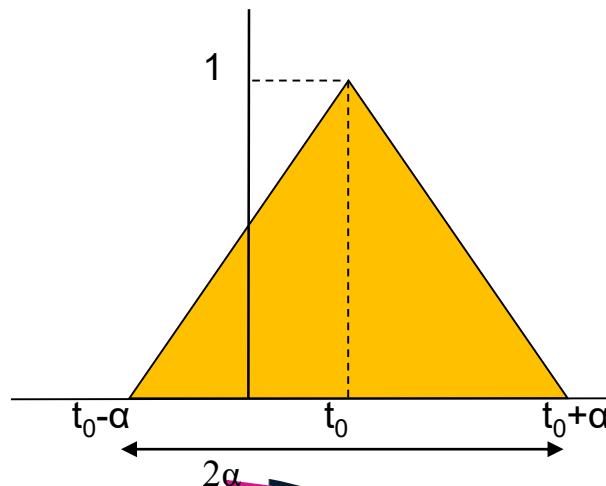
$$x(t) = -2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) + 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - 2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα $x(t)$.

Υπέρθωση Σημάτων (2)

- Βήμα 1^ο: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

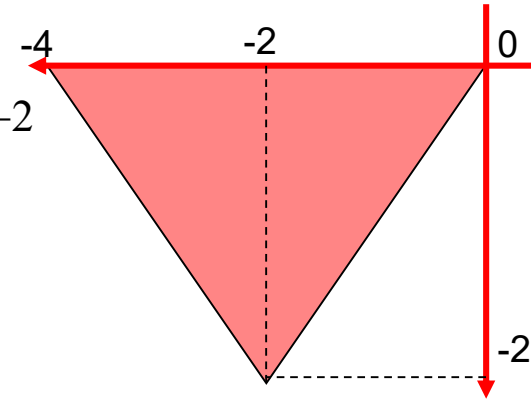
$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \text{tri}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{t-t_0}{a}, & \text{όταν } t_0 < t < a+t_0 \\ 1 - \frac{-(t-t_0)}{a} = 1 + \frac{t-t_0}{a}, & \text{όταν } -a+t_0 < t < t_0 \\ 0, & \text{όταν } |t-t_0| > a \text{ ή } -a+t_0 > t \text{ \& } t > t_0+a \end{cases}$$



Υπέρθυση Σημάτων (3)

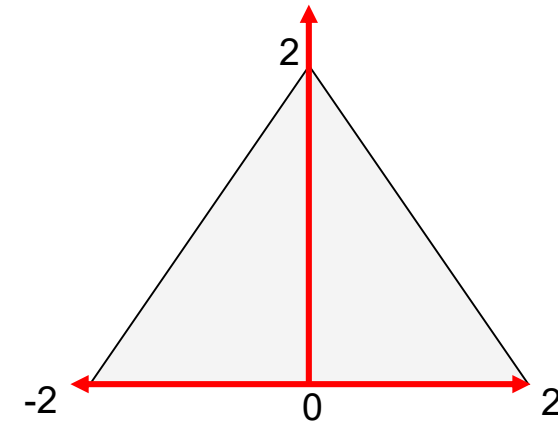
- Αρα 1^ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right) = \begin{cases} -2\left[1 - \frac{-(t+2)}{2}\right] = -4 - t, \text{ όταν } -2 < t+2 < 0 \Rightarrow -4 < t < -2 \\ -2\left[1 - \frac{(t+2)}{2}\right] = t, \text{ όταν } 0 < t+2 < 2 \Rightarrow -2 < t < 0 \\ 0, \text{ όταν } t < -4 \text{ ή } t > 0 \end{cases}$$



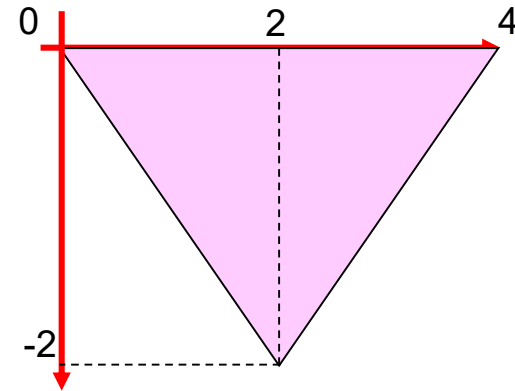
- 2^ο σήμα

$$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 2\left[1 - \frac{-(t)}{2}\right] = 2 + t, \text{ όταν } -2 < t < 0 \\ 2\left[1 - \frac{(t)}{2}\right] = 2 - t, \text{ όταν } 0 < t < 2 \\ 0, \text{ όταν } t < -2 \text{ ή } t > 2 \end{cases}$$



Υπέρθυση Σημάτων (4)

$$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right) = \begin{cases} -2\left[1 - \frac{-(t-2)}{2}\right] = -t, \text{ όταν } -2 < t-2 < 0 \Rightarrow 0 < t < 2 \\ -2\left[1 - \frac{(t-2)}{2}\right] = t-4, \text{ όταν } 0 < t-2 < 2 \Rightarrow 2 < t < 4 \\ 0, \text{ όταν } t < 0 \text{ ή } t > 4 \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (5)

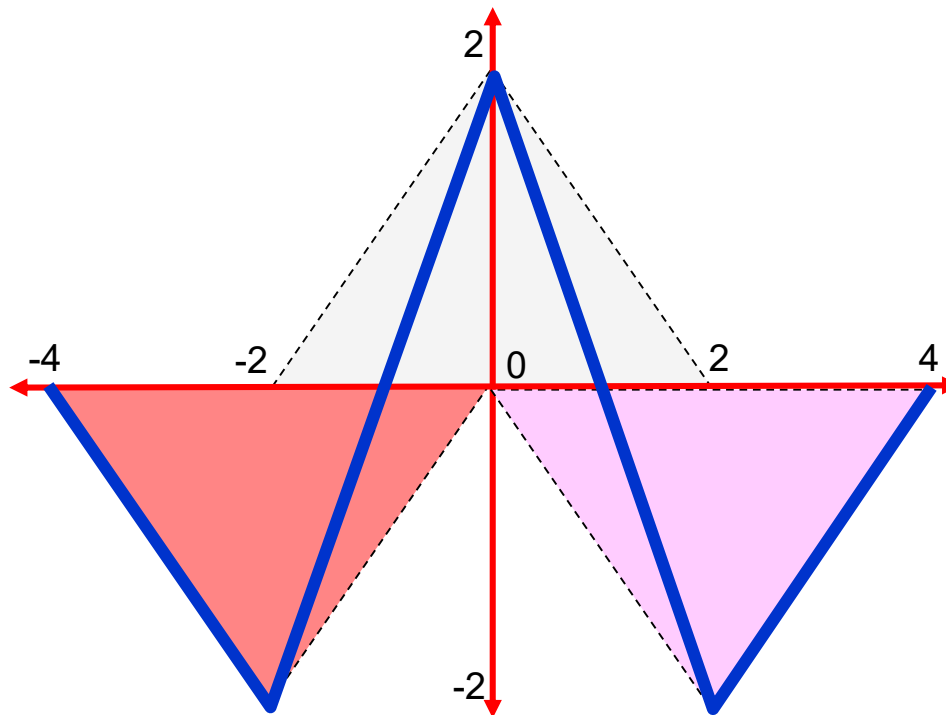
- Βήμα 2^ο: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα



$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right)$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$	0	0	0	-t	t-4
$x(t)$	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

Υπέρθεση Σημάτων (6)

- Βήμα 3^ο: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα



Υπέρθεση Σημάτων (7)

- Από Εργασία 1^η, (2009), Θέμα 6(β)

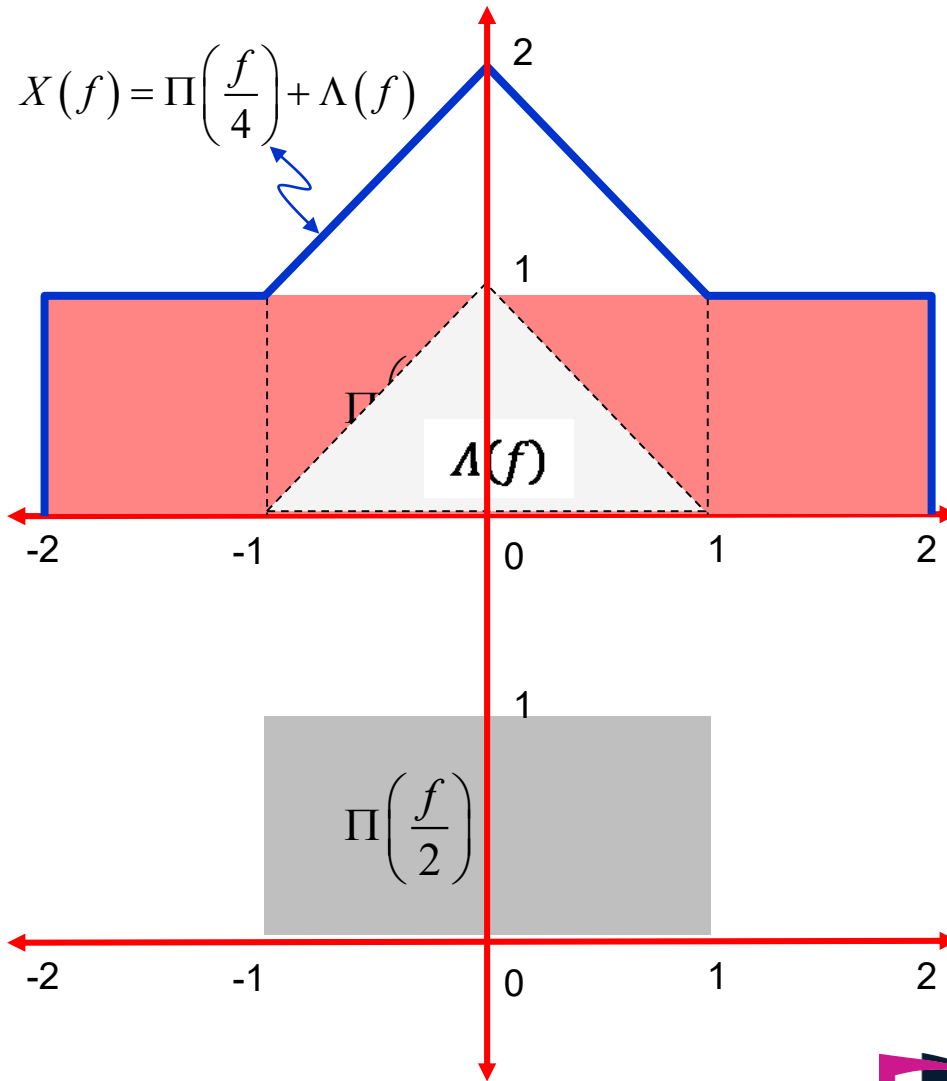
- Δίνεται το $X(f)$ και $H(f)$ που είναι

- $$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f) \quad \text{και} \quad H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

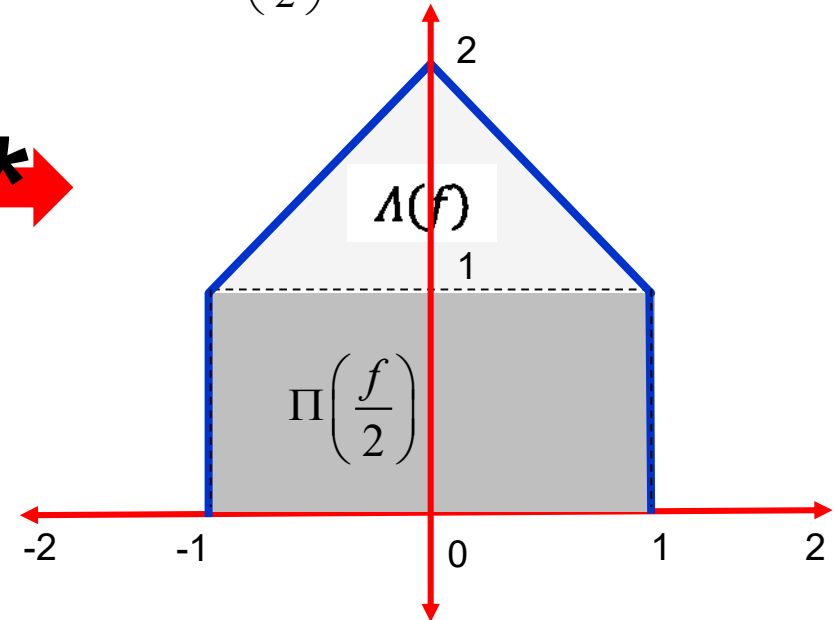
- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Υπέρθωση Σημάτων (8)



$$\begin{aligned}
 Y(f) &= \left[\Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\
 &= \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f)
 \end{aligned}$$

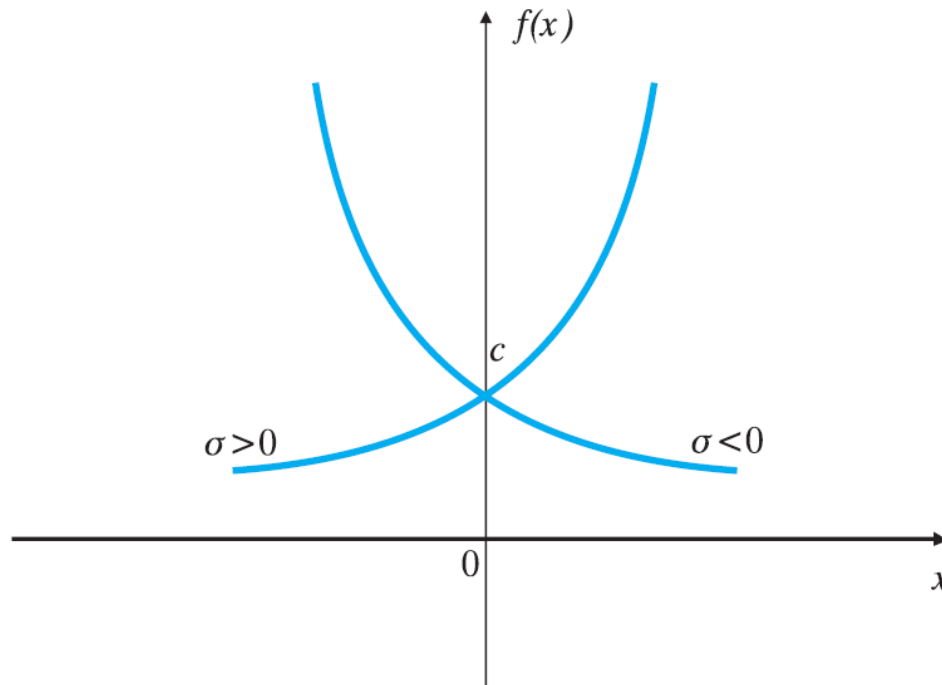


Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (1)

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\sigma x}, \text{ όπου } c, \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



Μιγαδικοί Αριθμοί (I)

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

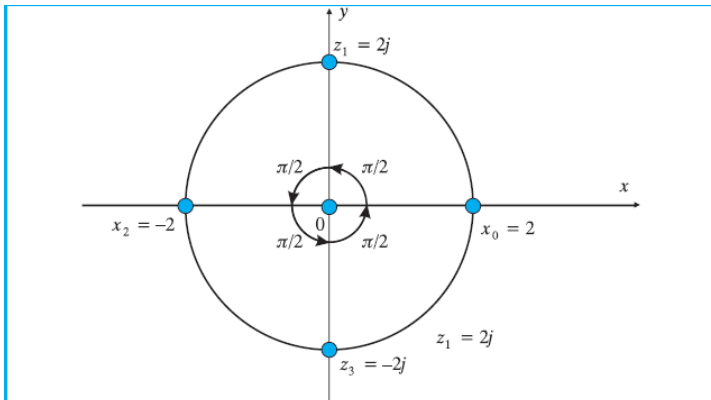
Ο μιγαδικός αριθμός « j » ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

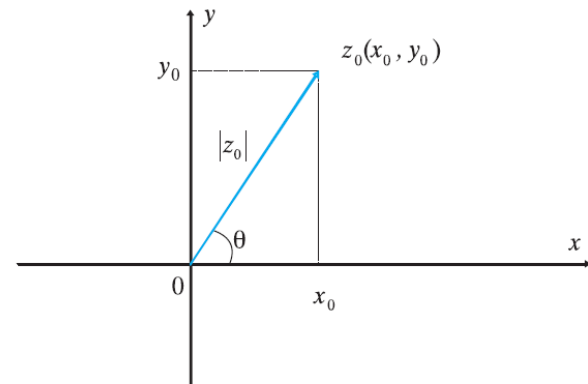
Ο πολλαπλασιασμός του « j » επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.



Σχήμα 2.3

Πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού επί « j »

Ο άξονας των x ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών και ο άξονας των y ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών.



Σχήμα 2.7

Διοδίαστατη απεικόνιση μιγαδικού αριθμού

Μιγαδικοί Αριθμοί (II)

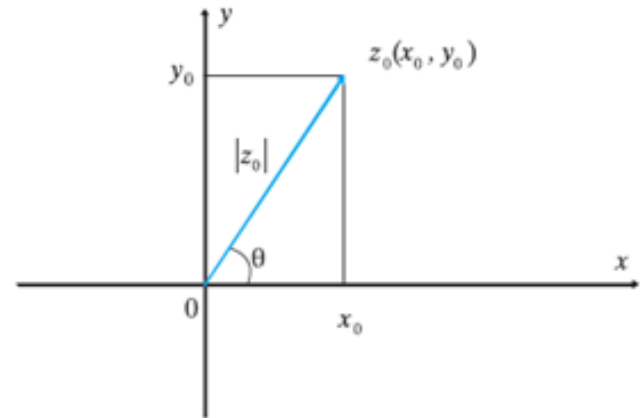
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0| \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0| \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0| [\cos(\theta) + j \sin(\theta)]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0| e^{j\theta}$$

Εξισώσεις Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Εξισώσεις Euler

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) + \cos(\theta) - j \sin(\theta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= 2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) - \cos(\theta) + j \sin(\theta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= 2j \sin(\theta) \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

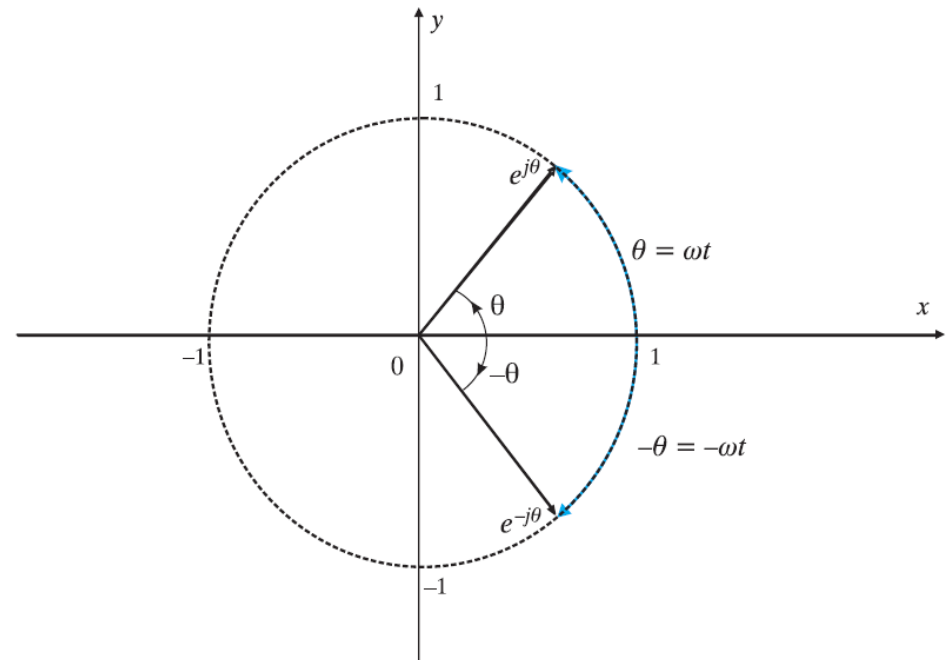
Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (2)

- Έκφραση περιοδικών σημάτων με τη χρήση εκθετικών όρων
- Με χρήση σχέσεων Euler

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



Χαρακτηριστικά Σήματος

- Στην πράξη, κάθε ηλεκτρομαγνητικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σε (περισσότερα από ένα) περιοδικά αναλογικά σήματα διαφορετικής συχνότητας, πλάτους και φάσης
- Ανάλυση Fourier
 - Ανάπτυξη περιοδικών σημάτων σε Σειρές Fourier
 - Μετασχηματισμός Fourier σημάτων ενέργειας

Μετασχηματισμός Fourier

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

2.3	Φάσμα σημάτων	35
2.3.1	Περιοδικά σήματα – Σειρές Fourier	35
2.3.2	Γενίκευση: Μετασχηματισμός Fourier	38

Φάσμα πλάτους Σημάτων – Μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων

Παράδειγμα.

Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$

$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

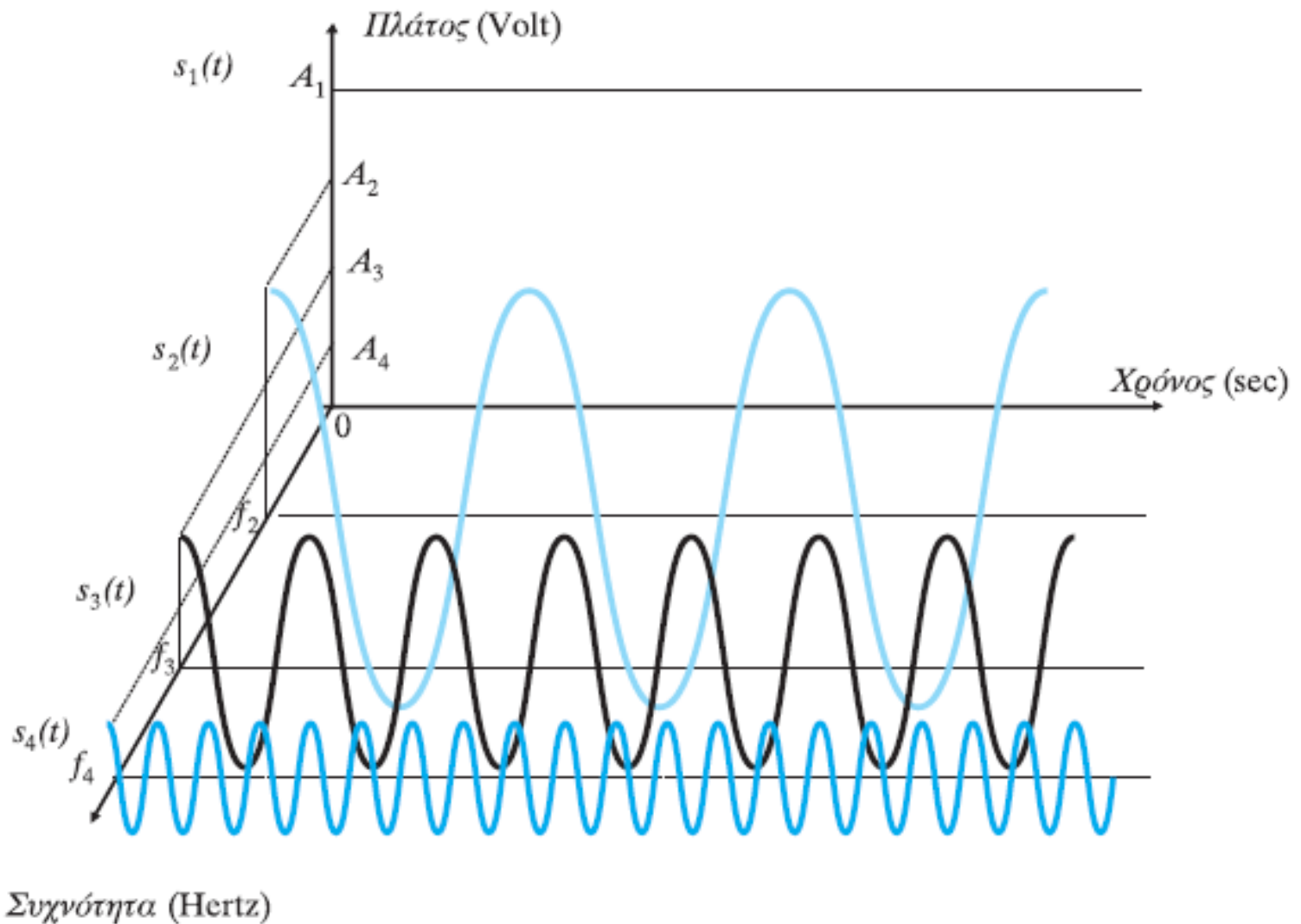
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$

$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$

$$f_2 < f_3 < f_4$$

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:

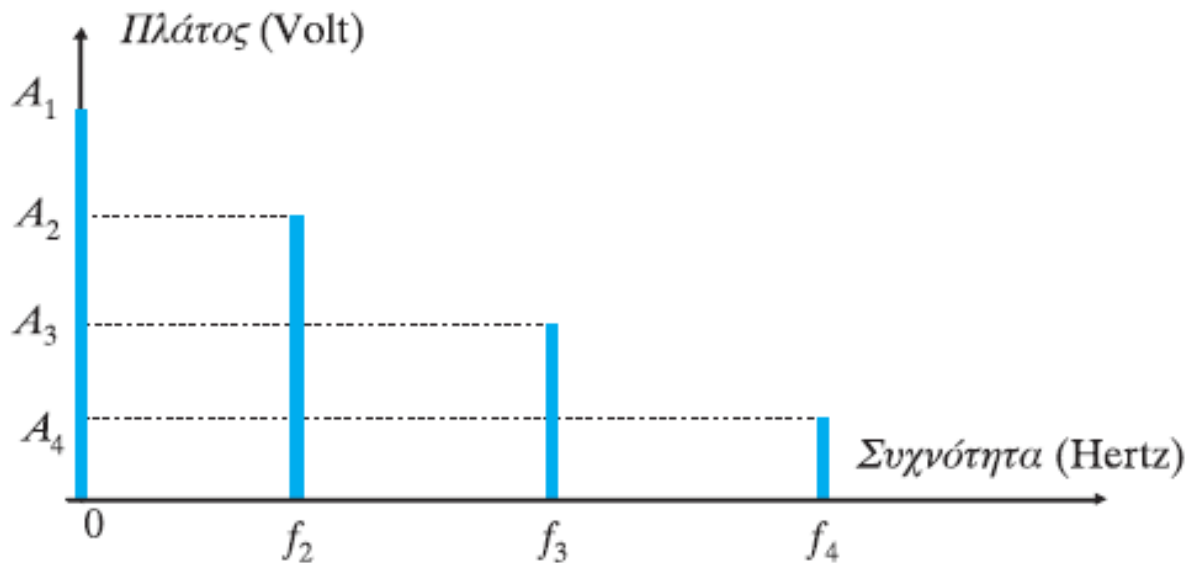


Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Μονόπλευρο Φάσμα πλάτους

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Μιγαδικοί Αριθμοί (I)

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

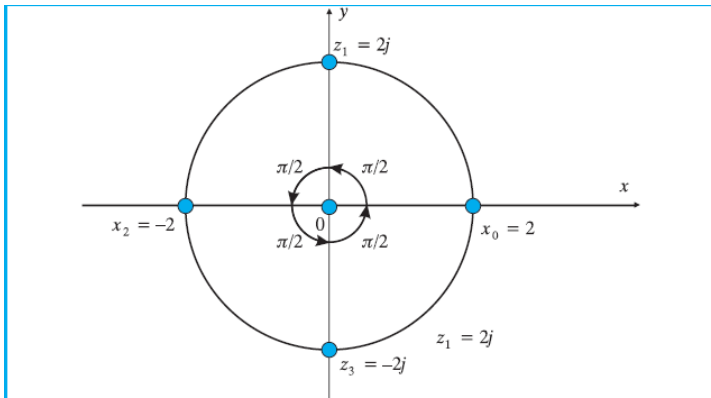
Ο μιγαδικός αριθμός « j » ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

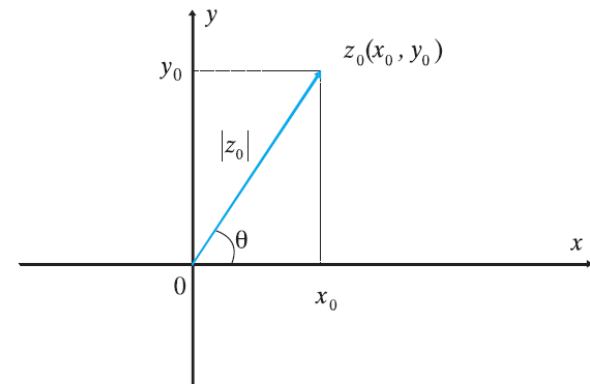
Ο πολλαπλασιασμός του « j » επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.



Σχήμα 2.3

Πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού επί « j »

Ο άξονας των x ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών και ο άξονας των y ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών.



Σχήμα 2.7

Διοδίαστατη απεικόνιση μιγαδικού αριθμού

Μιγαδικοί Αριθμοί (II)

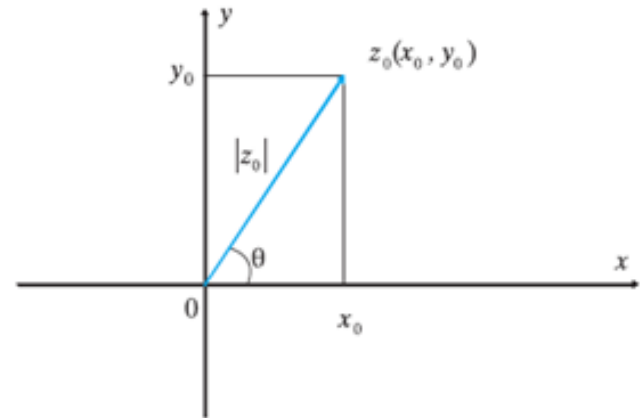
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0| \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0| \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0| [\cos(\theta) + j \sin(\theta)]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0| e^{j\theta}$$

Εξισώσεις Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Εξισώσεις Euler

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) + \cos(\theta) - j \sin(\theta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= 2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) - \cos(\theta) + j \sin(\theta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= 2j \sin(\theta) \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

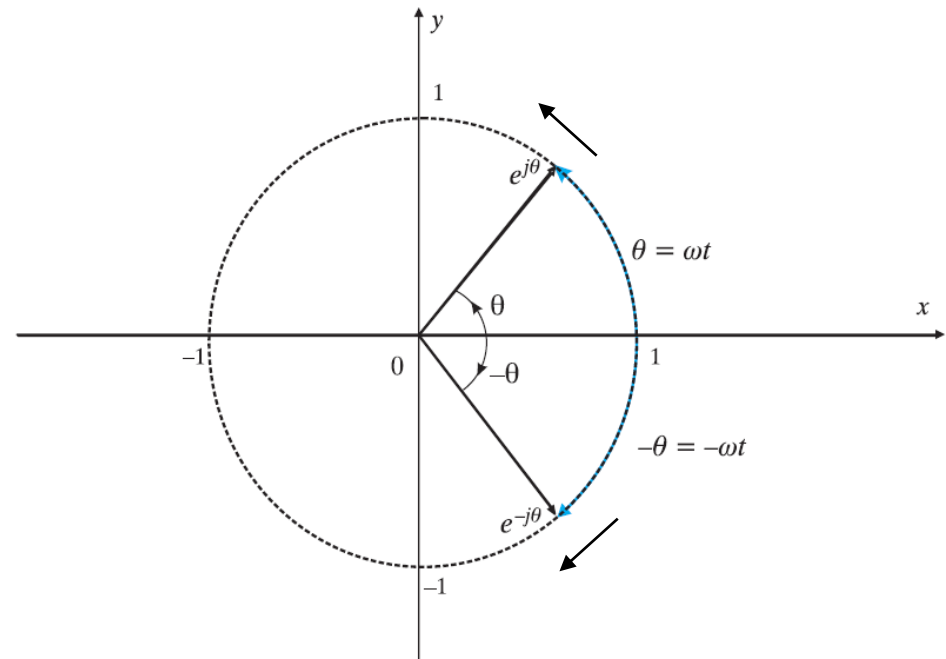
Μετάβαση στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους

- Έκφραση περιοδικών σημάτων με τη χρήση εκθετικών
- Με χρήση σχέσεων Euler

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

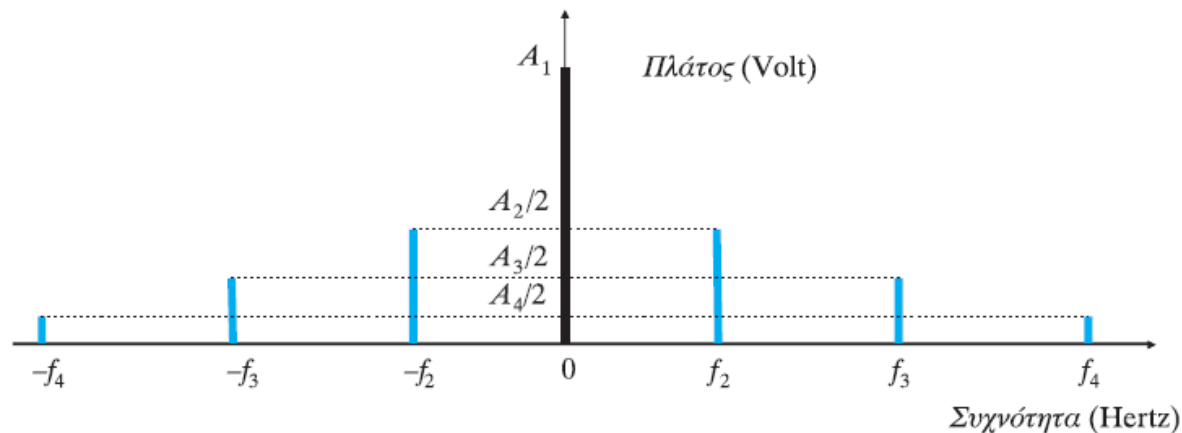


Αμφίπλευρο Φάσμα πλάτους

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

$$\begin{aligned} s(t) &= A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} = \\ &= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t} \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



Υπολογισμός πλάτους ανά συχνότητα

$$V_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j2\pi f_k t} dt, k = 1, 2, 3, 4$$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.

■ Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων:

- Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}_+^*, \text{ τέτοιο ώστε } x(t+kT) = x(t) \text{ για } k = 1, 2, \dots$$

- Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση
- Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από διακριτό σύνολο συχνοτήτων που ικανοποιούν τη σχέση

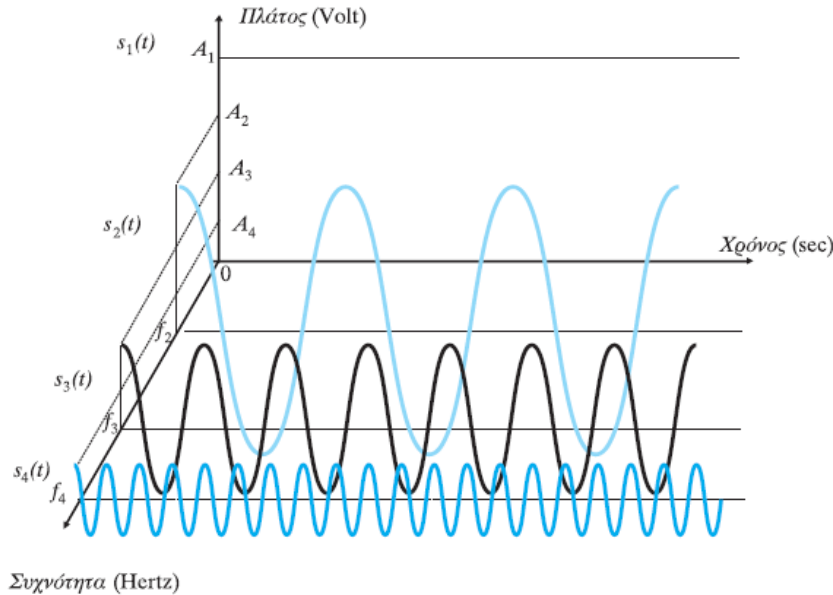
$$f = f_1/m_1 = f_2/m_2 = \dots = f_N/m_N, \quad m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

- Υπολογισμός πλάτους ανά συχνότητα (Συντελεστές Fourier)

$$V_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi kft} dt$$

Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας εργαλείο με το οποίο βλέπουμε ένα σήμα από μια άλλη οπτική γωνία:



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σήματος:

- Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολές συναρτήσεως του χρόνου
- Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

Επέκταση Ανάλυσης Fourier και για μη περιοδικά σήματα

- Το πλάτος ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ συχνότητας f σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k = kf$ προσδιορίζεται από τον αντίστοιχο συντελεστή Fourier

$$V_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi \cdot kf \cdot t} dt, k \in \mathbb{Z}$$

- Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η περίοδος μπορεί να υποθεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \rightarrow \infty$) και το φάσμα του σήματος θα αποτελείται από ένα συνεχές (και όχι διακριτό) σύνολο συχνοτήτων ($kf \rightarrow f$).
- Με τη γενίκευση αυτή προκύπτει ο Μετασχηματισμός Fourier, δηλ. η έκφραση του φάσματος $X(f)$ με βάση τη χρονική έκφραση του σήματος $x(t)$ (που συμπεριλαμβάνει και μη περιοδικά σήματα)

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier, δηλ. η έκφραση της χρονικής έκφρασης του σήματος $x(t)$, με βάση το φάσμα $X(f)$ είναι:

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Άλλη Μορφή Μ/Σ Fourier

- Ισοδύναμες αναφορές με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ μετριέται σε radians/sec και $d\omega = 2\pi df$

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

2.3.3	Χαρακτηριστικές ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier	39
2.3.3.1	Γραμμικότητα	39
2.3.3.2	Αλλαγή κλίμακας	39
2.3.3.3	Χρονική μετατόπιση	40
2.3.3.4	Συνδυασμός χρονικής μετατόπισης και αλλαγής κλίμακας.....	41
2.3.3.5	Ολίσθηση συχνότητας.....	41
2.3.3.6	Δυσισμός	42
2.3.3.7	Συνέλιξη.....	42
2.3.3.8	Διαμόρφωση	46
2.3.4	Μετασχηματισμοί Fourier χαρακτηριστικών σημάτων.....	48
2.3.4.1	Κρουστική συνάρτηση	48
2.3.4.2	Τετραγωνικός παλμός.....	48
2.3.4.3	Τριγωνικός παλμός	50
2.3.4.4	Βασικές σχέσεις Fourier τετραγωνικού και τριγωνικού παλμού.....	52
2.3.4.5	Συνημίτονο.....	52
2.3.4.6	Ημίτονο	52
2.3.5	Πίνακας ιδιοτήτων/ΜΣ Fourier χαρακτηριστικών σημάτων	54

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (1)

Σημείωση: δείτε τον πίνακα Α, σελ. 54-55 (τόμος Β, μέρος Β)

■ Γραμμικότητα

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(f), \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(f) \Leftrightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$$

■ Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου και Συχνότητας

$$x_1(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \quad \frac{1}{|a|} x_1\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow X_1(af)$$

■ Χρονική καθυστέρηση

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) \exp(-j2\pi ft_0)$$

■ Δυϊσμός

$$\text{Αν } x(t) \leftrightarrow X(f) \Rightarrow X(-t) \leftrightarrow x(f) \text{ \& } X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (2)

- Συνδυασμός Αλλαγής Κλίμακας & Χρονικής Ολίσθησης

$$x_1(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \exp\left(-j2\pi f \frac{t_0}{a}\right)$$

- Ολίσθηση Συχνότητας

$$\exp(j2\pi f_c t) x(t) \leftrightarrow X(f - f_c)$$

- Συνέλιξη σημάτων στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = x(t) * g(t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = X(f)G(f)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (3)

- Παραγωγή στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f) X(f)$$

- Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$$

- Διαμόρφωση

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X(f - f_c) + \frac{1}{2} X(f + f_c)$$

- Θεώρημα Parseval

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

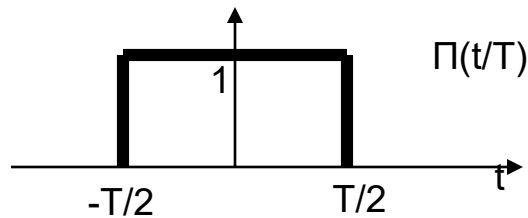
Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1
$x(t) = 1$	$\delta(f)$

Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t} x(t) = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(f) \delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(f) H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$[X(f) * Y(f)]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$ ή $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$	$y(t) = X(t)$	$Y(f) = x(-f)$

Παραδείγματα (1)

- Τετραγωνικός Παλμός



$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

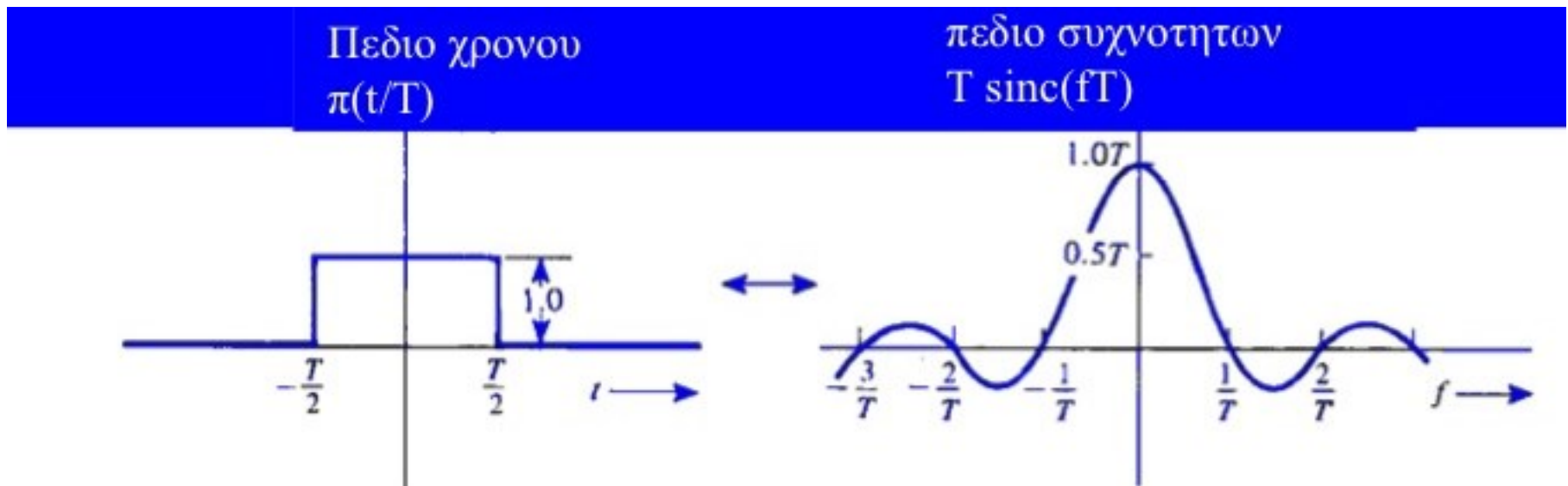
$$F[\Pi(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f}$$

- Αλλά $(e^{jx} - e^{-jx})/2j = \sin(x)$
- Αποτέλεσμα:

$$\Pi(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \cdot \text{sinc}(fT)$$

Παραδείγματα (2)

- Είδαμε ότι $\Pi(t/T) \Leftrightarrow T \text{sinc}(f \cdot T)$
- Παρατηρήσεις:
 - Η διάρκεια του παλμού είναι αντιστρόφως ανάλογη του εύρους φάσματος
 - Η ασυνέχεια στο πεδίο του χρόνου οδηγεί σε απεριόριστο φάσμα



Παραδείγματα (3)

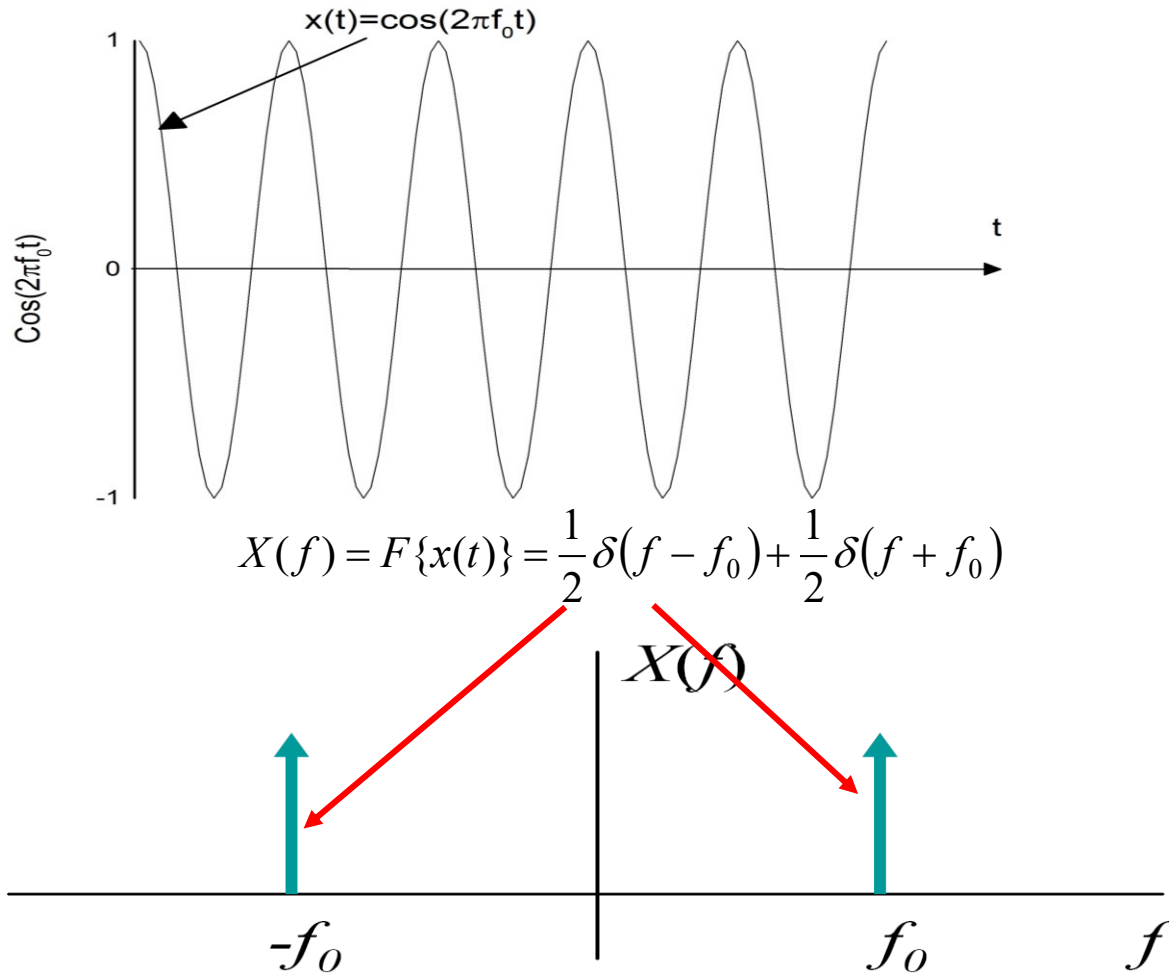
- Μερικές φορές είναι ευκολότερο να βρούμε ένα σήμα στο χρόνο υπολογίζοντας τον αντιστροφο Μ/Σ

- Δίνεται
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}\delta(f + f_c)$$

- Βρίσκουμε

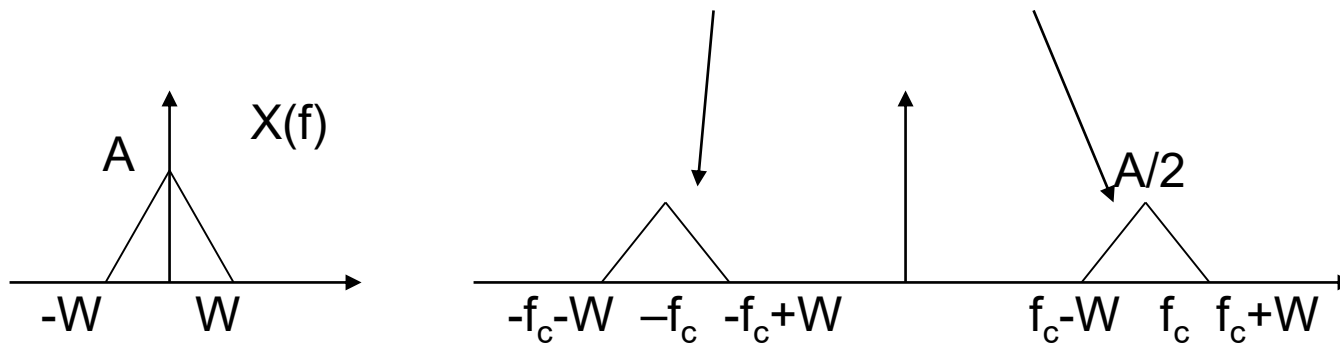
$$\begin{aligned}x(t) &= F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f - f_c)e^{j2\pi ft} df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(f + f_c)e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} = \cos(2\pi f_c t)\end{aligned}$$

Παραδείγματα (4)



Παραδείγματα (5)

■ $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$



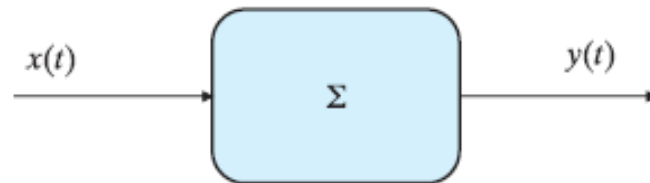
Εισαγωγή στα Συστήματα

Ορισμοί (I)

Ως σύστημα χαρακτηρίζεται οποιαδήποτε διαδικασία μετασχηματισμού ενός αρχικού σήματος $x(t)$ σε ένα άλλο σήμα $y(t)$ το οποίο και χαρακτηρίζεται ως απόκριση του συστήματος

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται, μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα.

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα $y(t)$.



Η σχέση εισόδου–εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S(x(t))$$

Ορισμοί (II)

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:

Αν

$$y_1(t) = S(x_1(t))$$

και

$$y_2(t) = S(x_2(t))$$

τότε

$$a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) = S(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t))$$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι:

αν

$$y_1(t) = S(x_1(t)), y_2(t) = S(x_2(t)), \dots, y_k(t) = S(x_k(t))$$

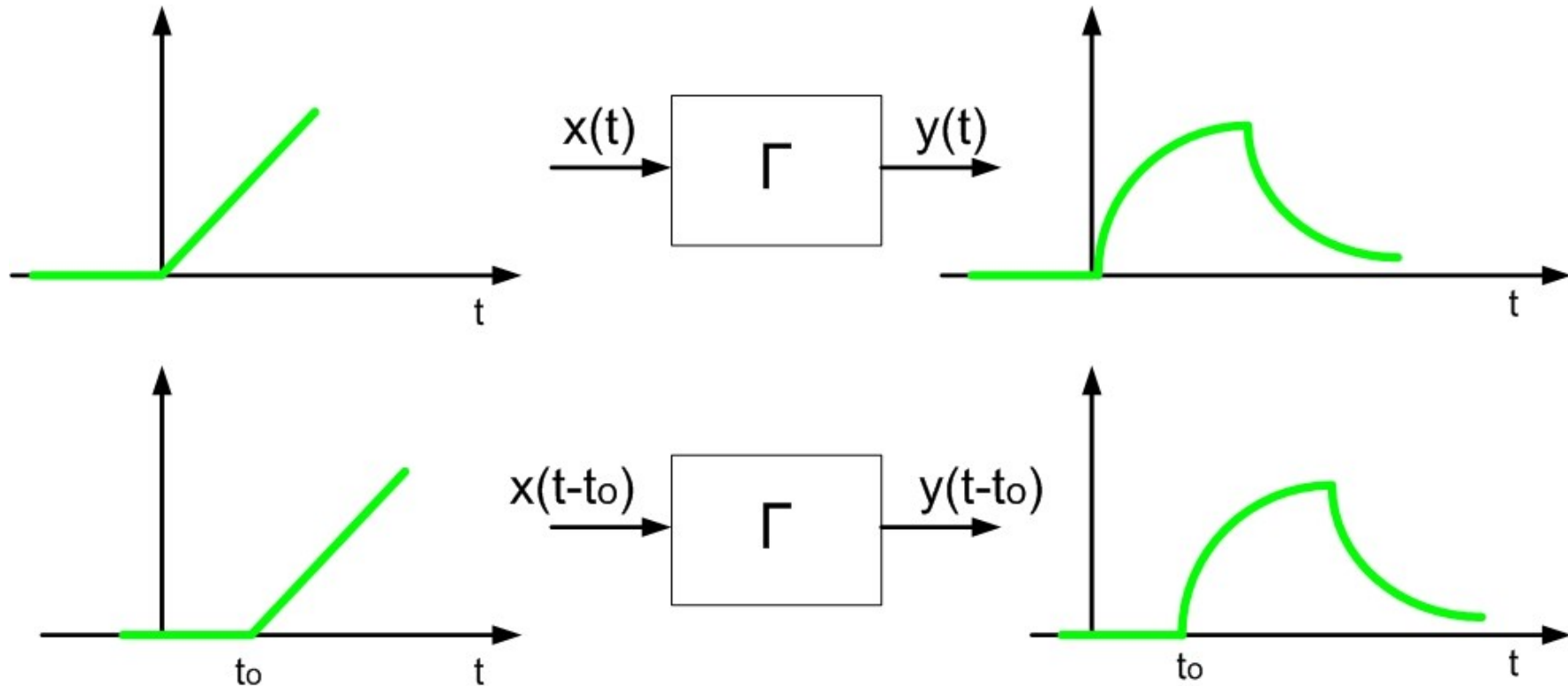
τότε

$$\begin{aligned} a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots + a_k y_k(t) &= \sum_{i=1}^k a_i y_i(t) = \\ &= S(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots + a_k x_k(t)) = S\left(\sum_{i=1}^k a_i x_i(t)\right) \end{aligned}$$

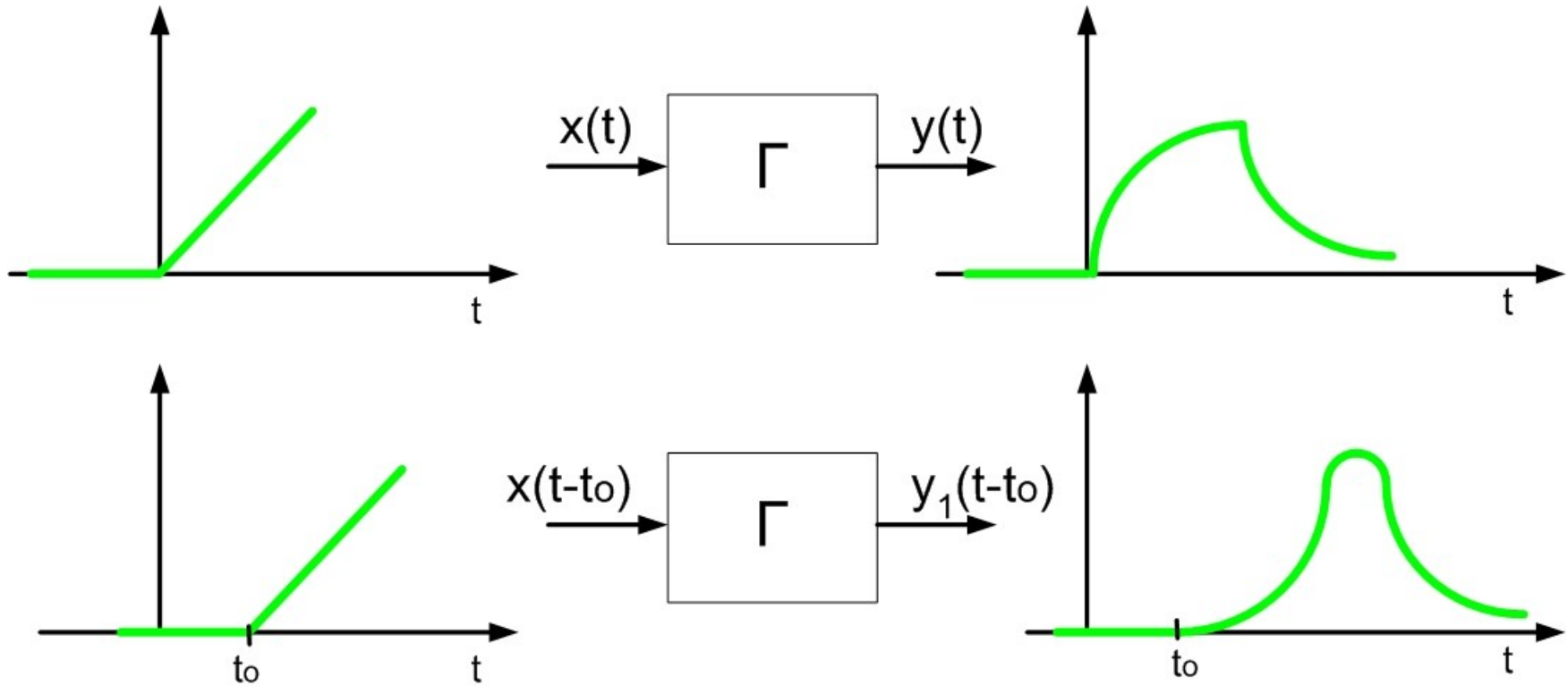
Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη από το χρόνο εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, αν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0 , το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0 .

Δηλαδή, αν $y(t) = S[x(t)]$, τότε $y(t-t_0) = S[x(t-t_0)]$.

Παράδειγμα Χρονικά Αμετάβλητου Συστήματος

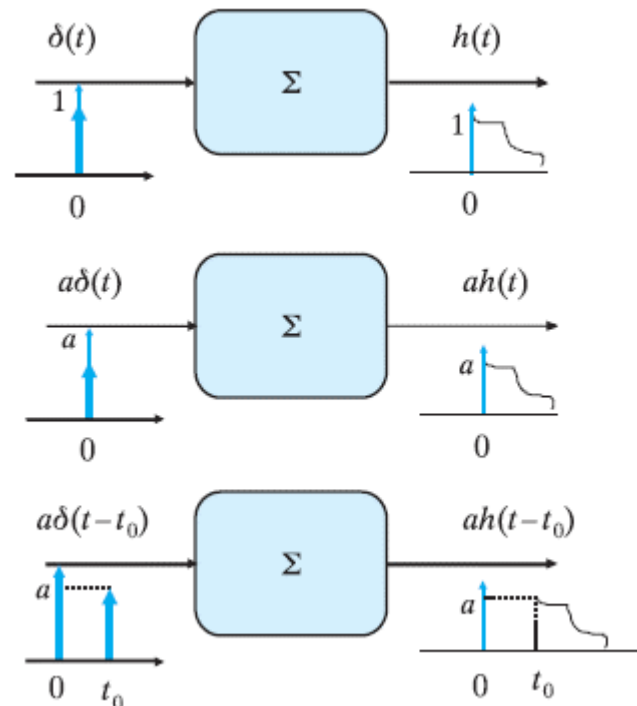


Παράδειγμα Χρονικά Μεταβαλλόμενου Συστήματος



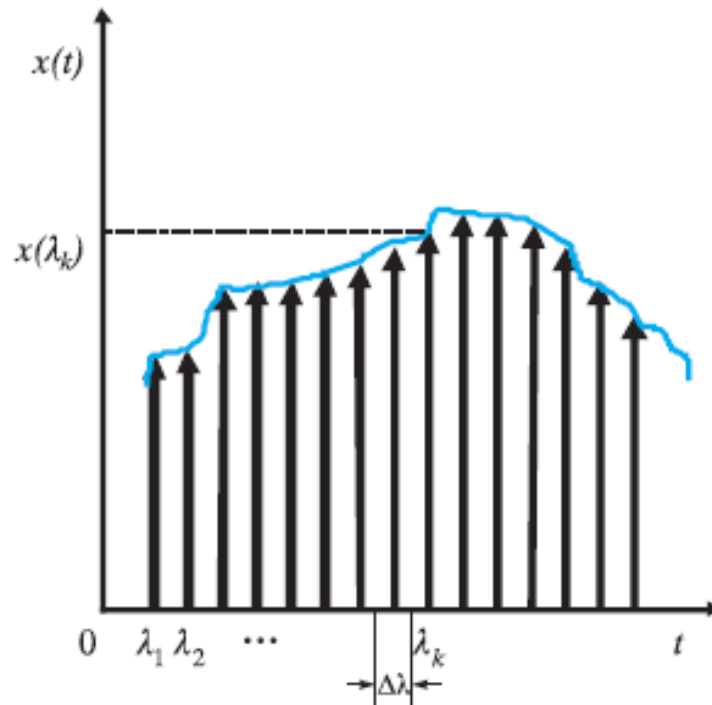
Κρουστική Είσοδος / Απόκριση

Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος $h(t)$ είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



Συνέλιξη (I)

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ :



οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i) \cdot \delta(t - \lambda_i) \cdot \Delta\lambda$$

Συνέλιξη (II)

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου-εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\Delta\lambda \xrightarrow{\Delta\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(t)*h(t)$$

Η πράξη $x(t)*h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t), h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και, αντιστρόφως, η συνέλιξη δύο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου).

Δηλαδή, αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$ και $y(t) \xleftrightarrow{F} Y(f)$

τότε

$$x(t)*y(t) \xleftrightarrow{F} X(f)\cdot Y(f) \quad (\text{A})$$

και

$$x(t)\cdot y(t) \xleftrightarrow{F} X(f)*Y(f) \quad (\text{B})$$

Κρουστική Απόκριση – Συνάρτηση μεταφοράς

Η πράξη $x(t) * h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t), h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$$

αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος
οπότε ισχύει:

$$\begin{array}{ccc} y(t) = & x(t) * & h(t) \\ \updownarrow F & \updownarrow F & \updownarrow F \\ Y(f) = & X(f) \cdot & H(f) \end{array}$$

Ιδανικά Φίλτρα

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

2.5	Ιδανικά φίλτρα.....	66
2.5.1	Βαθυπερατά φίλτρα.....	66
2.5.2	Υψιπερατά φίλτρα	67
2.5.3	Ζωνοπερατά φίλτρα.....	67
2.5.4	Ζωνοφρακτικά φίλτρα.....	69

Φίλτρα

- Το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας ή συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$ παίρνει σημαντικές τιμές μόνο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων
- Κατηγορίες Φίλτρων
 - Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (LPF): επιτρέπει τη διέλευση όλων των συνιστωσών του σήματος εισόδου με συχνότητες κάτω από ένα όριο b
 - Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (HPF): Το ιδανικό HPF αποκόπτει όλες τις συνιστώσες του σήματος εισόδου με συχνότητες μικρότερες από b και αφήνει τη διέλευση όλων των συνιστωσών πάνω από b χωρίς παραμόρφωση
 - Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (BPF): Διέλευση μιας συγκεκριμένης ζώνης συχνότητας

Φίλτρα

- Βαθυπερατά
 - Χαμηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Υψιπερατό
 - Υψηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Ζωνοπερατό
 - Συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζωνοφρακτικό
 - Αποκοπή συγκεκριμένης ζώνης συχνοτήτων
- Ζώνες διέλευσης και αποκοπής

Τύποι Φίλτρων

- Ιδανικό Βαθυπερατό (Low Pass)

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

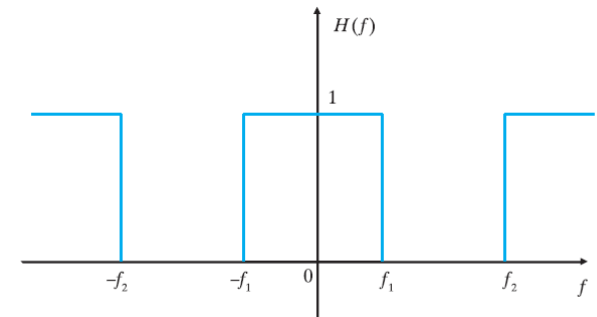
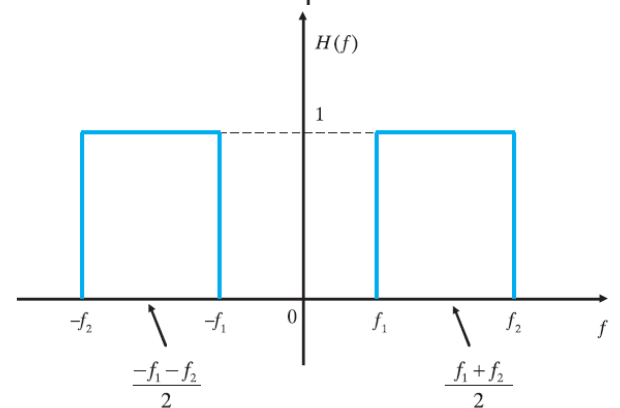
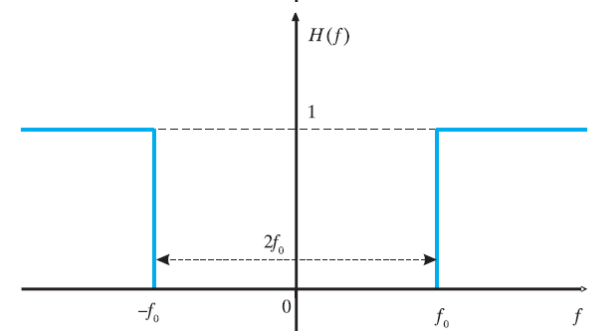
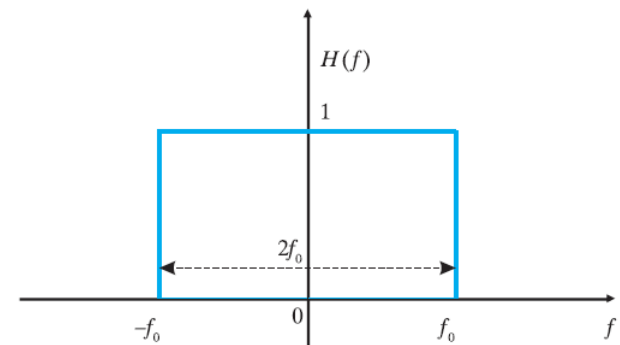
$$H(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_0 \\ 1, & |f| > f_0 \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

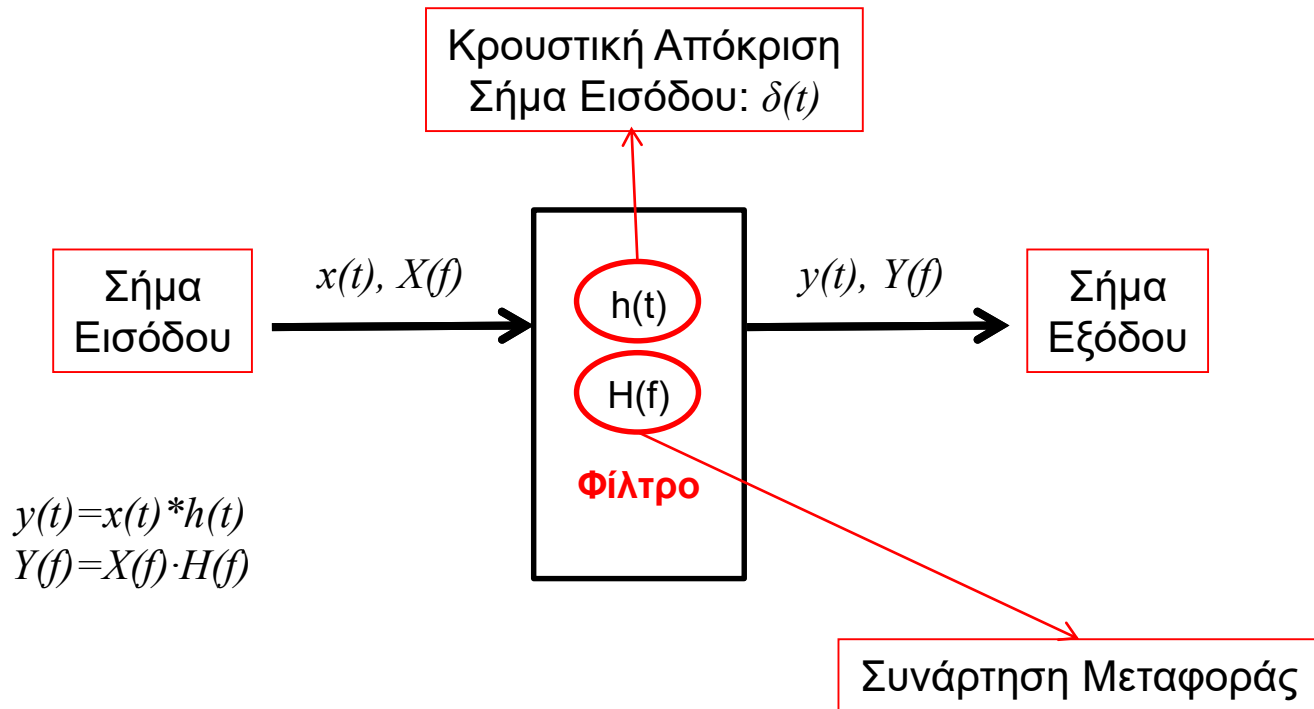
$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

$$H(f) = \begin{cases} 0, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases}$$



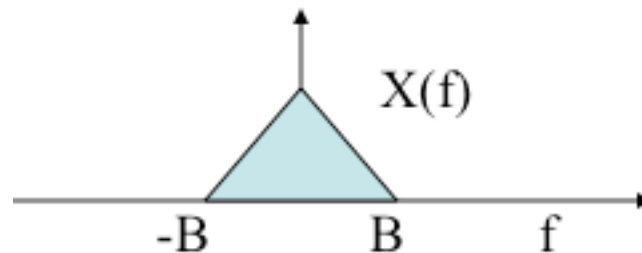
Ορολογία Φίλτρων



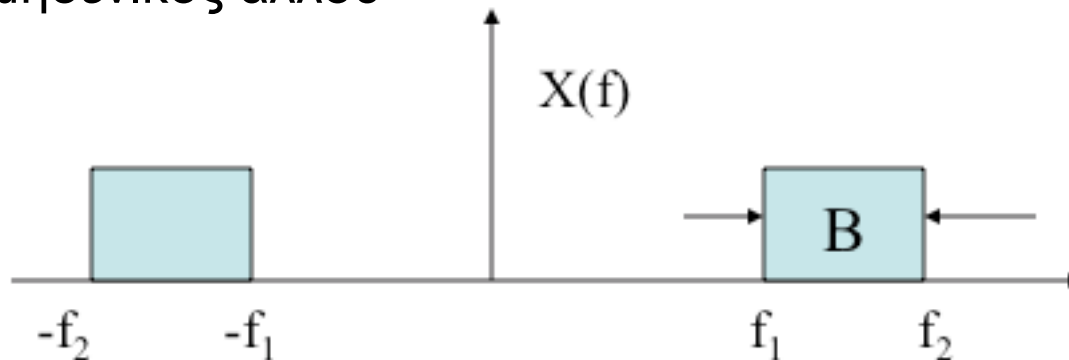
Σήματα Βασικής Ζώνης και Ζωνοπερατά

Baseband and Bandpass Signals

- Ένα σήμα $x(t)$ Βασικής Ζώνης με εύρος φάσματος B είναι ένα σήμα για το οποίο ο Μ/Σ Fourier $X(f)$ είναι μη μηδενικός για $|f| \leq B$, και είναι μηδενικός $X(f) = 0$ για $|f| > B$.



- Ένα ζωνοπερατό σήμα $x(t)$ με εύρος φάσματος $B = f_2 - f_1$ είναι ένα σήμα για το οποίο ο $X(f)$ είναι μη μηδενικός για $0 < f_1 < |f| < f_2$, και είναι μηδενικός αλλού



Ερωτήσεις



Επιπλέον Παραδείγματα – Λυμένες Ασκήσεις

ΘΕΜΑ 1 (20 Μονάδες)

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(2\pi 100t)$. Να υπολογιστεί η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (αν υπάρχουν) για τα παρακάτω σήματα:

Ερώτηση 1^η (5 Μονάδες): $y_a(t) = x(t) + x(2t)$

Ερώτηση 2^η (5 Μονάδες): $y_b(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right) \right]^2$

Ερώτηση 3^η (5 Μονάδες): $y_c(t) = [x(t) \cdot x(5t)] * \text{sinc}(1000t) + 1$, όπου ο τελεστής ‘*’ αντιστοιχεί στη συνέλιξη

Ερώτηση 4^η (5 Μονάδες): $y_d(t) = [x(t) \cdot 10\text{sinc}^2(10t)] + \delta(t)$

Ερώτηση 1^η:

$$y_a(t) = x(t) + x(2t) = \cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 200t)$$

Οι περίοδοι των 2 όρων είναι αντίστοιχα

$$T_1 = \frac{1}{100} \text{sec}, T_2 = \frac{1}{200} \text{sec}.$$

Ο λόγος τους είναι:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{200}} = 2, \text{ ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο}$$

$$T = T_1 = 2T_2 = \frac{1}{100} \text{sec}$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 200Hz άρα το σήμα έχει συχνότητα δειγματοληψίας ίση με 400Hz

Ερώτηση 2^η:

$$y_{\beta}(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right) \right]^2 = \cos^2(200t) = \frac{1 + \cos(400t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{400}{2\pi} t\right)$$

Έχουμε έναν σταθερό και έναν περιοδικό όρο με συχνότητα $\frac{200}{\pi} \text{ Hz}$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{\pi}{200} \text{ sec}$ και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $\frac{400}{\pi} \text{ Hz}$

Ερώτηση 3^η:

$$y_{\gamma}(t) = [x(t) \cdot x(5t)] * \text{sinc}(1000t) + 1$$

$$x(t) \cdot x(5t) = \cos(2\pi 100t) \cdot \cos(2\pi 500t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 400t)$$

Άρα

$$y_{\gamma}(t) = \left[\frac{1}{2} \cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 400t) \right] * \text{sinc}(1000t) + 1 \stackrel{F}{\leftrightarrow} \\ \stackrel{F}{\leftrightarrow} F \left\{ \frac{1}{2} \cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 400t) \right\} \cdot \frac{1}{1000} \text{rect} \left(\frac{f}{1000} \right) + \delta(f)$$

Στην ανωτέρω έκφραση ο τετραγωνικός παλμός αποκόπτει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από 500Hz οπότε τελικά έχουμε το σήμα :

$$y_{\gamma}(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{1000} \cos(2\pi 400t) + 1$$

που είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{400} \text{ sec}$ και συχνότητα 400Hz .

Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 800Hz

Ερώτηση 4^η:

$$\begin{aligned}y_{\delta}(t) &= [x(t) \cdot 10\text{sinc}^2(10t)] + \delta(t) \\&= \cos(2\pi 100t) \cdot 10\text{sinc}^2(10t) + \delta(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} \\&\stackrel{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2} \left\{ \text{tri} \left(\frac{f - 100}{10} \right) + \text{tri} \left(\frac{f + 100}{10} \right) \right\} + 1\end{aligned}$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Επίσης, το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης άρα δεν δειγματίζεται με το κριτήριο Nyquist.

ΘΕΜΑ 1

ΓΕ2 2020/21

Στόχος της άσκησης: είναι η εξοικείωση με τα περιοδικά σήματα και με την έννοια της περιοδικότητας.

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ2/19-20/Θ1, ΓΕ2/18-19/Θ2

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα να εξετάσετε αν είναι περιοδικό ή όχι και να υπολογίσετε την περίοδό του (αν υπάρχει)

(α) $x_1(t) = 3\sin(3\pi t) + 2\sin(4\pi t)$

(β) $x_2(t) = 4\cos(100t) + 5\sin(70\sqrt{2} t)$

(γ) $x_3(t) = \sqrt{2}\cos(12t) + 1,5 \cos(2\pi t)$

(δ) $x_4(t)$ με φάσμα $X_4(f) = 3 \cos(5f + \pi/4)$

(ε) $x_5(t) = \{\cos(7\pi t) + 3 \sin(8\pi t)\} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{1000}\right)$.

(στ) $w(t) = x(t) + x(-t)$, όπου $x(t) = e^{4\pi j t}$

(ζ) $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5x(t - 2n)$ όπου $x(t) = \text{rect}(4t)$

(α)

Σχετικά με την συχνότητα κάθε συνιστώσας του σήματος, ισχύει $2\pi f_1 = 3\pi \Rightarrow f_1 = 3/2$ και $2\pi f_2 = 4\pi \Rightarrow f_2 = 2$ και αφού το πηλίκο $f_2/f_1 = 4/3$ είναι ένας ρητός αριθμός, προκύπτει ότι το σήμα $x_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T=2\text{sec}$

(β) Ισχύει ότι $2\pi f_1 = 100 \Rightarrow f_1 = \frac{100}{2\pi}$ και $2\pi f_2 = 70\sqrt{2} \Rightarrow f_2 = 70\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$. Επομένως ισχύει

$\frac{f_2}{f_1} = 70\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{2\pi}{100} = \sqrt{2} \frac{7}{10}$. Το αποτέλεσμα είναι άρρητος αριθμός, άρα το $x_2(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(γ) Ισχύει ότι $2\pi f_1 = 12 \Rightarrow f_1 = 6/\pi$ και $2\pi f_2 = 2\pi \Rightarrow f_2 = 1$, άρα $(f_2/f_1) = \pi/6$. Το αποτέλεσμα είναι άρρητος αριθμός, άρα το σήμα $x_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(δ)

Το φάσμα του σήματος είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό

(ε)

Το σήμα $x_5(t)$ έχει περιορισμένη διάρκεια επειδή εμπεριέχει τον πολλαπλασιαστικό όρο $rect\left(\frac{t}{1000}\right)$ συνεπώς δεν είναι περιοδικό

(στ)

$$x(t) = e^{4\pi jt}$$

Είναι $w(t) = e^{4\pi jt} + e^{-4\pi jt} = 2 \cos(4\pi t) = 2 \cos(2\pi 2t)$

Το σήμα είναι συν ημιτονοειδές άρα περιοδικό με συχνότητα $f=2\text{Hz}$ και περίοδο $\frac{1}{2} \text{ sec}$

(ζ)

$$x(t) = \text{rect}(4t)$$

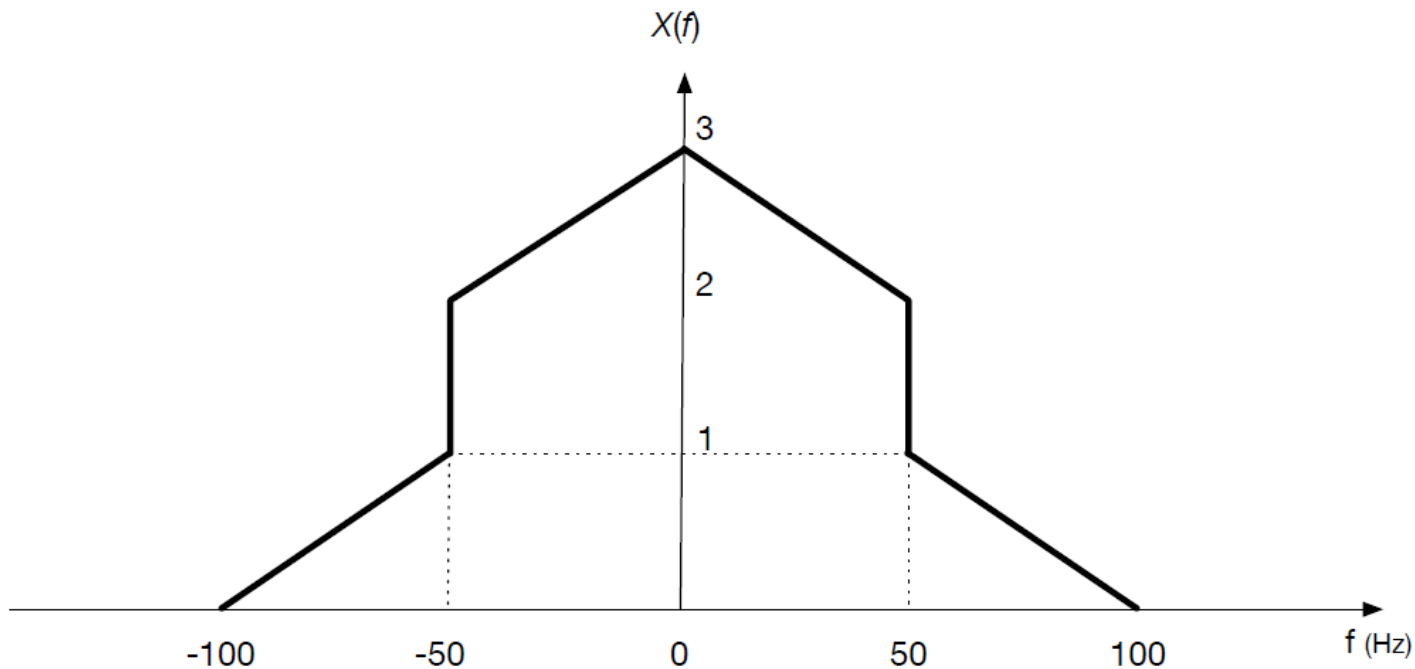
Είναι $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5x(t - 2n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5\text{rect}(4(t - 2n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5\text{rect}\left(\frac{t-2n}{1/4}\right)$

Το σήμα αποτελείται από άπειρους ορθογωνικούς παλμούς στο πεδίο του χρόνου εύρους $\frac{1}{4} \text{ sec}$ με κέντρα στα $\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \text{ sec}$

Δηλαδή οι παλμοί επαναλαμβάνονται ανά 2sec , οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 2sec .

ΘΕΜΑ 2 (20 Μονάδες)

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



Ερώτηση 1^η (5 Μονάδες): Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

Ερώτηση 1^η: Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 2 \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$a \text{sinc}(at) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$a \text{sinc}^2(at) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{tri}\left(\frac{f}{a}\right)$$

.....

$$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100 \text{sinc}(100t) + 2 \cdot 100 \text{sinc}^2(100t)$$

ΘΕΜΑ 2

ΓΕ2/ 2019-20

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων.

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ2/17-18/Θ7, ΓΕ2/18-19/Θ1.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους $X(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω σημάτων: $x(t) = u(t - 3) - u(t - 7) + \text{tri}(t - 5)$ (όπου u η μοναδιαία βηματική συνάρτηση και όπου tri η συνάρτηση τριγωνικού παλμού).

Με μία προσεκτική απεικόνιση του σήματος προκύπτει ότι οι δύο βηματικοί παλμοί σχηματίζουν ένα τετραγωνικό παλμό:

$$x(t) = u(t-3) - u(t-7) + \text{tri}(t-5) = \text{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) + \text{tri}(t-5)$$

Ισχύουν τα παρακάτω σύμφωνα με την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier για αλλαγή κλίμακας & χρονικής ολίσθησης:

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f)$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \xleftrightarrow{F} 4\text{sinc}(4f)$$

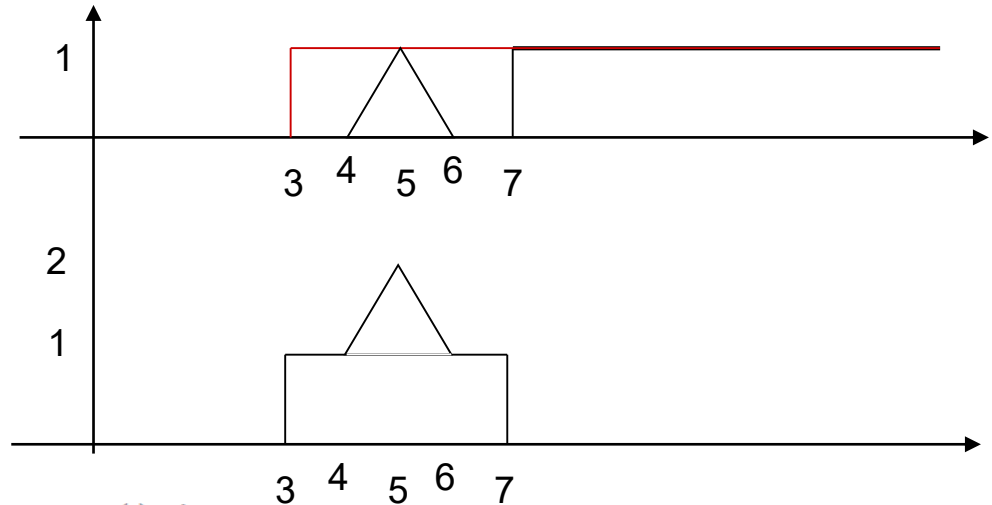
$$\text{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f 5} 4\text{sinc}(4f)$$

$$\text{tri}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}^2(f)$$

$$\text{tri}(t-5) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f 5} \text{sinc}^2(f)$$

Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ είναι:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 5} 4\text{sinc}(4f) + e^{-j2\pi f 5} \text{sinc}^2(f)$$



ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = 4 \cos(800\pi t)$ και $X_2(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$.

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

- (α). Να υπολογιστεί η έκφραση $x_3(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[x_1\left(\frac{3t}{2}\right) + x_1(t)x_2(t)\right]$
- (β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $x_3(t)$.

1/

(α), (β)

$$x_1\left(\frac{t}{2}\right) = 4 \cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{t}{2}\right) = 4 \cos(2\pi 200t) \leftrightarrow 2[\delta(f - 200) + \delta(f + 200)] \quad (\text{A})$$

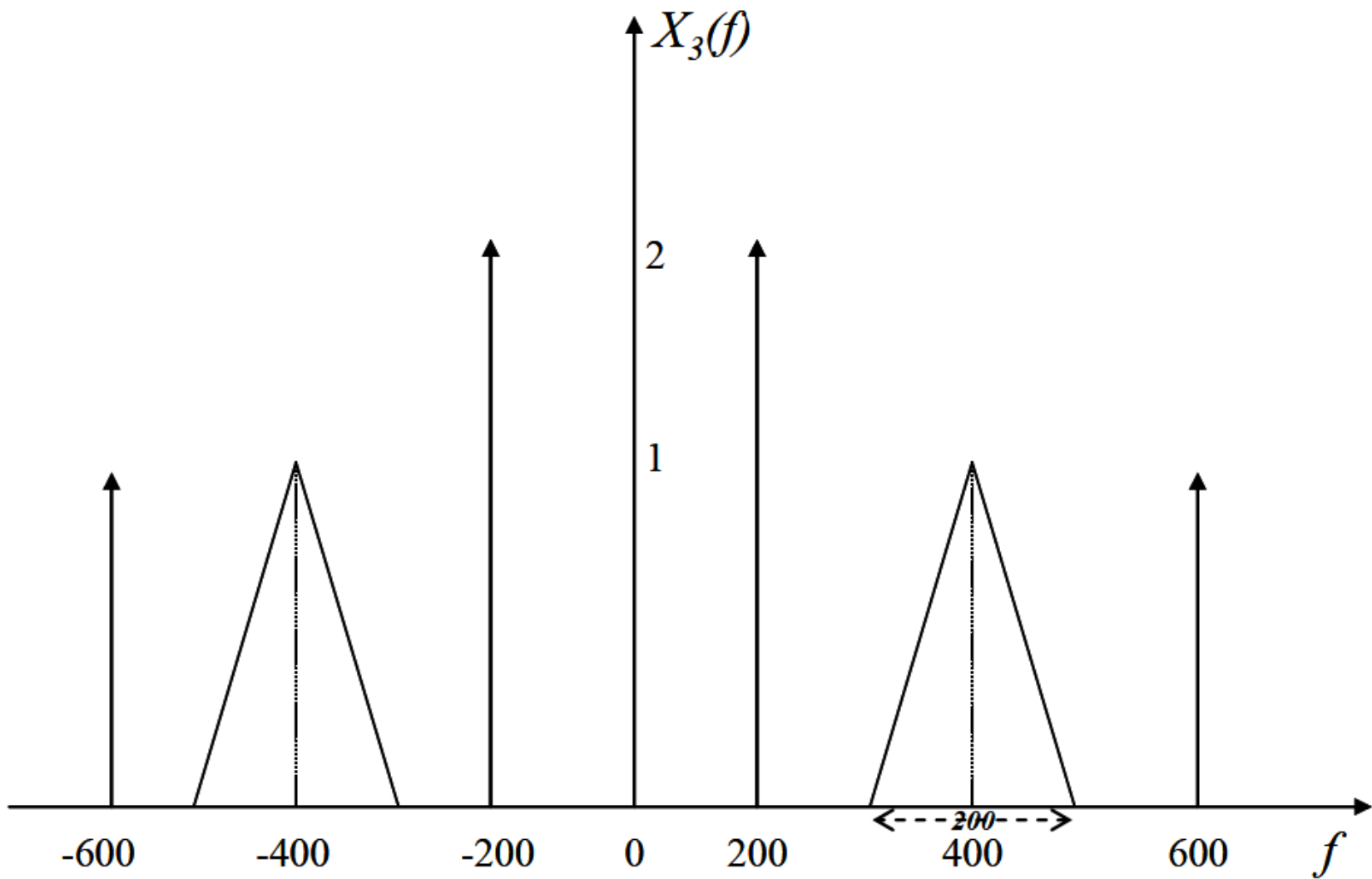
$$\frac{1}{2}x_1\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{1}{2}4 \cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{3t}{2}\right) = 2 \cos(2\pi 600t) \leftrightarrow \delta(f - 600) + \delta(f + 600) \quad (\text{B})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) &= 2 \cos(2\pi 400t)100 \sin c^2(100t) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \{\delta(f - 400) + \delta(f + 400)\} * \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right) = \text{tri}\left(\frac{f - 400}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + 400}{100}\right) \end{aligned} \quad (\text{Γ})$$

Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \left[x_1\left(\frac{3t}{2}\right) + x_1(t)x_2(t) \right] = 4 \cos(2\pi 200t) + 2 \cos(2\pi 600t) + 200 \cos(2\pi 400t) \sin^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2 \left[\delta(f - 200) + \delta(f + 200) \right] + \left[\delta(f - 600) + \delta(f + 600) \right] + \left[\text{tri}\left(\frac{f - 400}{100}\right) + \text{tri}\left(\frac{f + 400}{100}\right) \right]$$



ΘΕΜΑ 1 ΓΕ2/1819

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων. Επίσης, μόνο στο ερώτημα (ε) απαιτείται χρήση OCTAVE/MATLAB

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/2010-11/Θ6, ΓΕ1/2011-12/Θ5,6, ΓΕ1/2012-13/Θ1,3

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους $X(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω μοναδιαίων βηματικών σημάτων: $x(t) = u(t+4) - u(t+2) + u(t-2) - u(t-4)$

(β) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $Y(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση $y(t) = 8\text{sinc}(8t) - 4\text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους $Z(f)$ του σήματος με χρονική έκφραση

$$z(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \right].$$
 Επίσης να διερευνηθεί η περιοδικότητα του σήματος και να υπολογιστεί η

περίοδός του (αν υπάρχει).

(δ) Να προσδιοριστούν και να σχεδιαστούν πρόχειρα τα φάσματα που προκύπτουν από τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των φασμάτων που υπολογίστηκαν στα ερωτήματα (β), (γ):

(i) $W(f) = Y(f)Z(f)$

(ii) $V(f) = Y(f) * Y(f)$ (το σύμβολο * αντιστοιχεί στην πράξη της συνέλιξης)

(α)

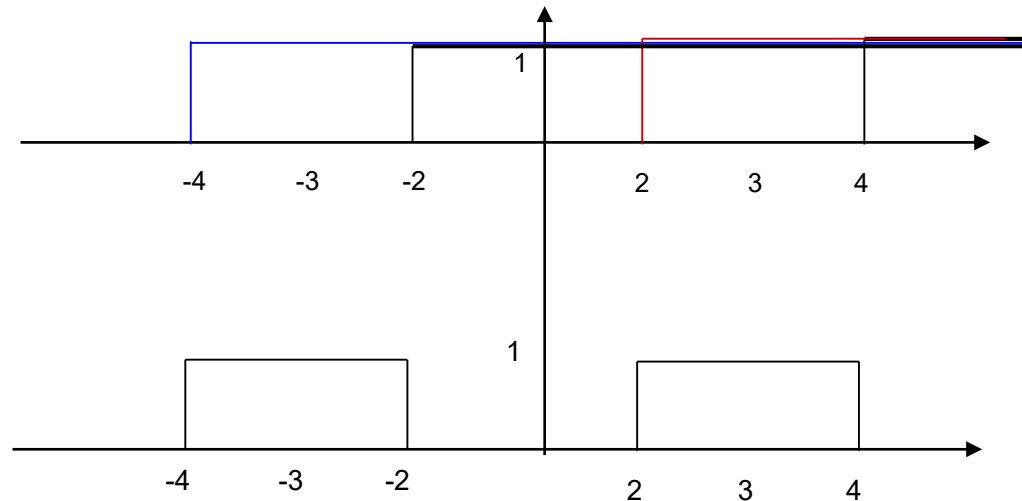
Έχουμε διαδοχικά:

$$x(t) = u(t+4) - u(t+2) + u(t-2) - u(t-4) = \text{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\text{sinc}(2f) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{rect}\left(\frac{t+3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) \\ \text{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(f) = e^{j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) + e^{-j2\pi f3} 2\text{sinc}(2f) = 2\text{sinc}(2f) [e^{j2\pi f3} + e^{-j2\pi f3}] = 2\text{sinc}(2f) 2\cos(6\pi f)$$



(β)

Εφόσον στο προηγούμενο ερώτημα προέκυψε ότι $rect\left(\frac{t+3}{2}\right) + rect\left(\frac{t-3}{2}\right) \xrightarrow{F} 2\text{sinc}(2f) 2\cos(6\pi f)$

με βάση την ιδιότητα του δυϊσμού θα ισχύει:

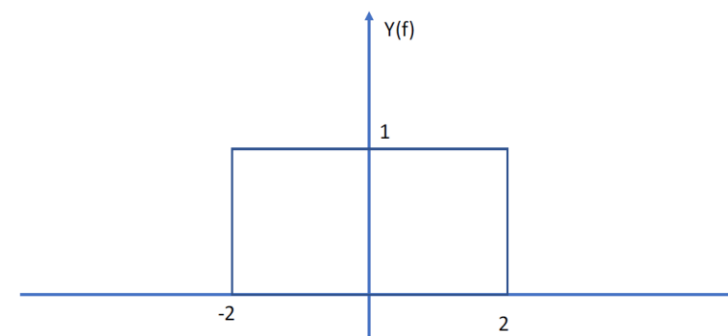
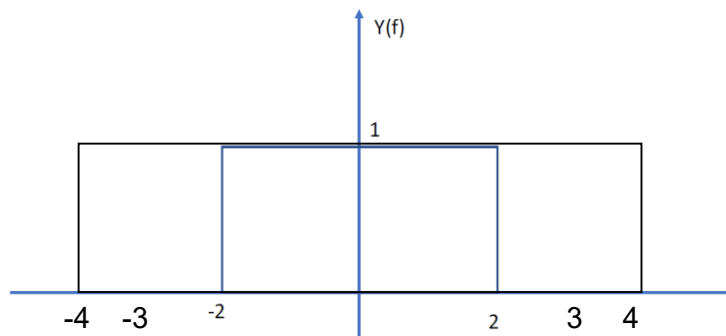
$$4\text{sinc}(2t) \cos(6\pi t) \xrightarrow{F} rect\left(\frac{-f+3}{2}\right) + rect\left(\frac{-f-3}{2}\right) = rect\left(\frac{f-3}{2}\right) + rect\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} 4\text{sinc}(2t) \cos(6\pi t) &= 2\text{sinc}(2t) 2\cos(6\pi t) \xrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2}\right) * [\delta(f-3) + \delta(f+3)] = \\ &= rect\left(\frac{f-3}{2}\right) + rect\left(\frac{f+3}{2}\right) \end{aligned}$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} y(t) &= 8\text{sinc}(8t) - 4\text{sinc}(2t) \cos(6\pi t) \xrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{8}\right) - rect\left(\frac{f-3}{2}\right) - rect\left(\frac{f+3}{2}\right) = \\ &= rect\left(\frac{f}{4}\right) \end{aligned}$$



Εφόσον ισχύει $\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$,

με την ιδιότητα του δυΐσμού θα έχουμε

$$\frac{1}{2} [\delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi t_0 f)$$

Συνεπώς

$$z(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \right] \xleftrightarrow{F} \cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$$

Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Εναλλακτικά

$$\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f/8}$$

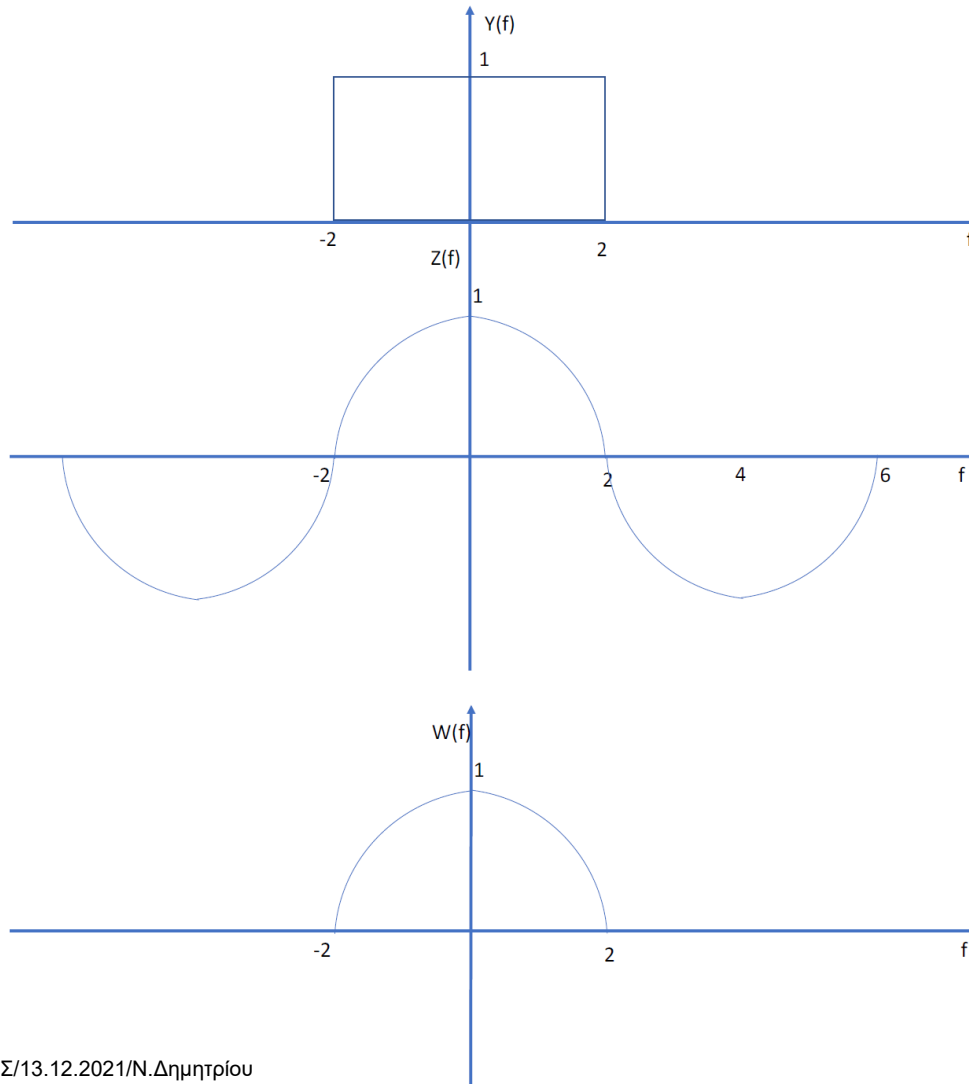
$$\delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f/8}$$

Και με χρήση του κανόνα του Euler

$$z(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{8}\right) \right] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [e^{-j2\pi f/8} + e^{j2\pi f/8}] = \cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$$

(δ)

$$(i) W(f) = Y(f)Z(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) \cos\left(2\pi \frac{1}{8} f\right)$$



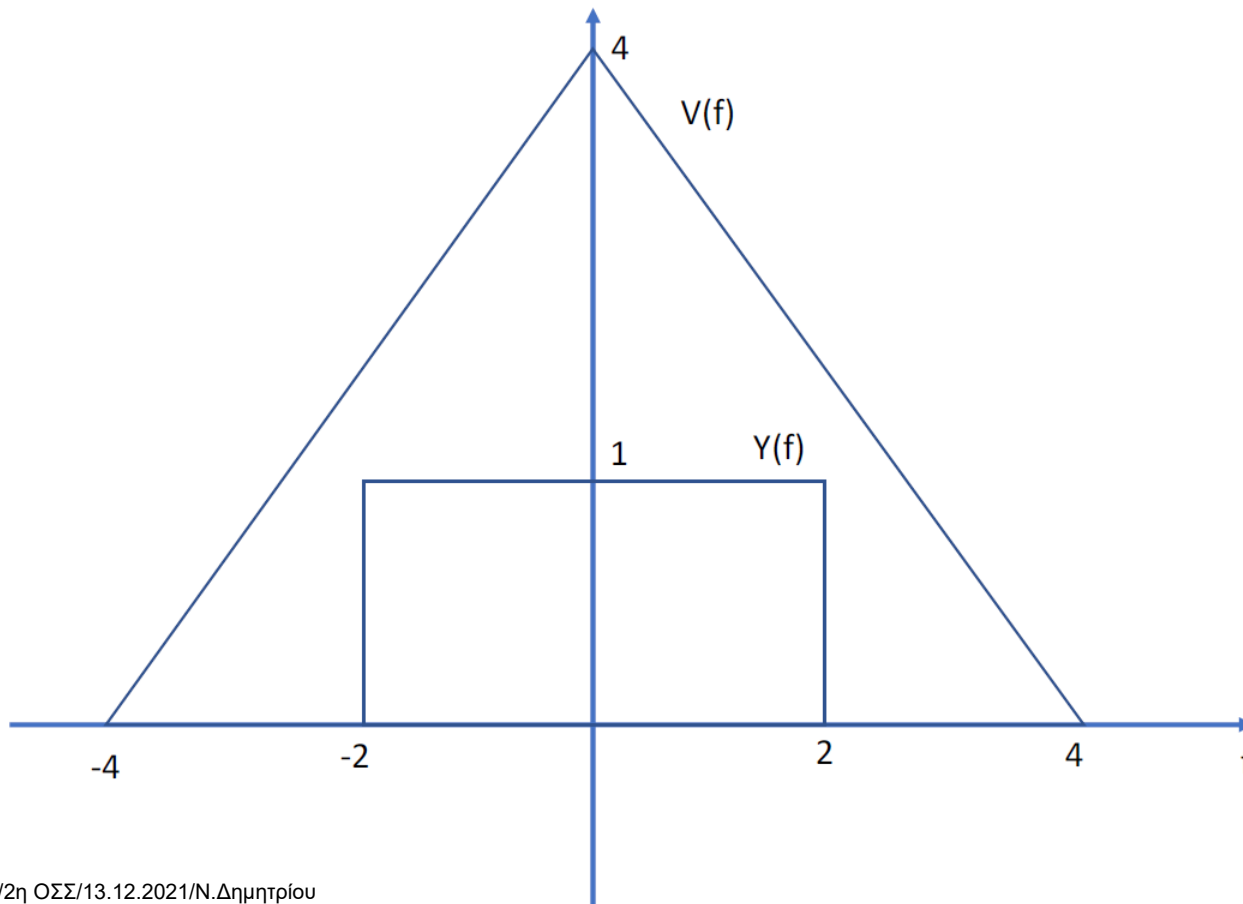
$$(ii) V(f) = Y(f) * Y(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right) * \text{rect}\left(\frac{f}{4}\right)$$

Στο πεδίο του χρόνου έχουμε:

$$v(t) = 4 \sin c(4t) \cdot 4 \sin c(4t) = 16 \sin^2 c(4t)$$

Επιστρέφοντας στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε:

$$v(t) = 16 \sin^2 c(4t) \xrightarrow{F} 16 \frac{1}{4} \text{tri}\left(\frac{f}{4}\right) = 4 \text{tri}\left(\frac{f}{4}\right)$$



ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_g(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)]$, όπου $a > f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

$$(ε) x_6(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)], \text{ όπου } a > f_0$$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * [2a \cdot \text{sinc}(2at)] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \mathfrak{F}[2a \cdot \text{sinc}(2at)]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

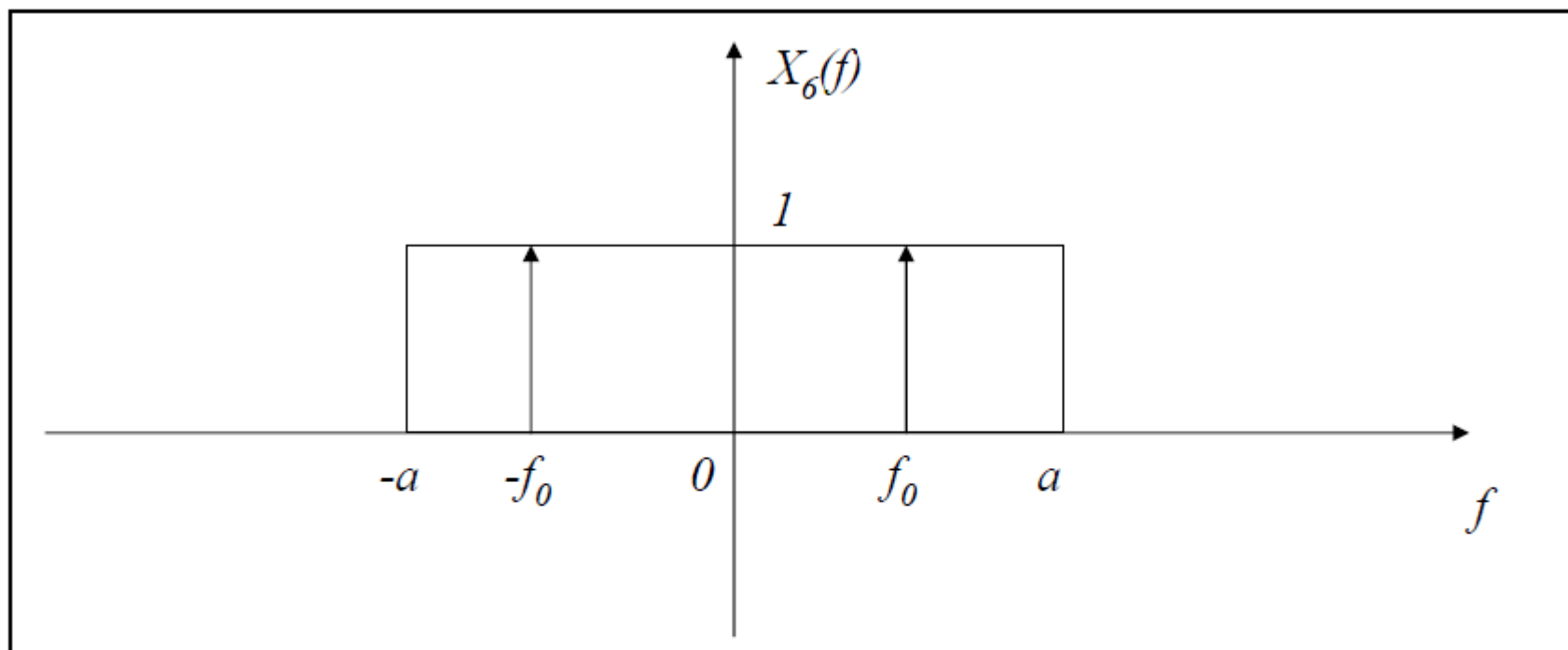
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = X(f)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(f) \Leftrightarrow$$

$$\text{και } \Leftrightarrow \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \text{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $[2a \cdot \text{sinc}(2at)]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \frac{1}{f_0}$

ΘΕΜΑ 6 ΕΞ2016Α

Δίνεται το σήμα $x(t) = \sin(100t)$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και η ικανότητα δειγματοληψίας (με το κριτήριο Nyquist) των παρακάτω σημάτων. Επίσης για κάθε σήμα να υπολογίσετε –αν υπάρχουν- την περίοδο και την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

(α) $y(t) = [x(t)]^2$

(β) $z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]$

(γ) $w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]^2$

(δ) $r(t) = x(5.5 \cdot t) \cdot x(2.5 \cdot t)$

(α)

$$y(t) = [x(t)]^2 = \sin^2(100t) = \frac{1 - \cos(200t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(2\pi \frac{200}{2\pi} t\right)}{2}$$

Το σήμα έχει έναν συνημιτονικό όρο άρα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_y = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$,
με περίοδο $T_y = \frac{\pi}{100} \text{ sec}$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,y} = \frac{200}{\pi} \text{ Hz}$

(β)

$$z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right] = \sin(100t) * \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi t} = \sin(100t) * \operatorname{sinc}(100t) = \\ = \sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) * \operatorname{sinc}(100t)$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$Z(f) = \frac{1}{2j} \left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right) \right] \cdot \frac{1}{100} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το τελικό σήμα περιλαμβάνει τους 2 παλμούς δ στις συχνότητες $\pm \frac{100}{2\pi} \text{ Hz} = \pm \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$ (εφόσον στην ανωτέρω πράξη ο τετραγωνικός παλμός δρα ως βαθυπερατό φίλτρο με μεγαλύτερη συχνότητα αποκοπής, ίση με 50 Hz).

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_z = \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$,

με περίοδο $T_z = \frac{\pi}{50} \text{ sec}$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,z} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$

$$\begin{aligned} (\gamma) w(t) &= x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t} \right]^2 = \sin(100t) + \left[\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi t} \right]^2 = \sin(100t) + \text{sinc}^2(100t) = \\ &= \sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) + \text{sinc}^2(100t) \end{aligned}$$

Το σήμα έχει φάσμα πλάτους :

$$W(f) = \frac{1}{2j} \left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right) \right] + \frac{1}{100} \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100Hz, άρα η ελάχιστη συχνότητα Nyquist είναι $f_{s,w} = 200\text{Hz}$.

$$\begin{aligned}(\delta) r(t) &= x(5.5t) \cdot x(2.5t) = \sin(550t) \cdot \sin(250t) = \frac{1}{2} [\cos(550t - 250t) - \cos(550t + 250t)] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(300t) - \cos(800t)]\end{aligned}$$

Οι περίοδοι των 2 συνημιτονικών όρων είναι οι εξής:

$$T_1 = \frac{2\pi}{300} \text{ sec}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{800} \text{ sec}$$

και ο λόγος τους είναι

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{300}}{\frac{2\pi}{800}} = \frac{8}{3}, \text{ ρητός, } \text{οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο } T_r = 3T_1 = 8T_2 = \frac{\pi}{50} \text{ sec}$$

, έχει συχνότητα $f_r = \frac{50}{\pi} \text{ Hz}$,

και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,r} = 2 \frac{400}{\pi} \text{ Hz} = \frac{800}{\pi} \text{ Hz}$

Στόχος της άσκησης Η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας σημάτων τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως επίσης και η εφαρμογή του κριτηρίου Nyquist για την εύρεση της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.

Σχετικές ασκήσεις: Άσκηση 1 (σελ.1), Άσκηση 5 (σελ.8) - Επεξεργασία Σημάτων και Φάσμα και Άσκηση 4 (σελ.27)-Διαμόρφωση από το plh22_oss1-final.pdf

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = \cos(10\pi t)$, $x_2(t) = \sin(t)$.

Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περίοδοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(α) $y_1(t) = x_1(t) - x_2(t)$

(β) $y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(\pi t)$

Δίνονται τα σήματα $x_3(t) = \delta(t-100) + \delta(t+100)$, $x_4(t) = \frac{1}{200} \sin c\left(\frac{t}{200}\right)$

Να βρεθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(γ) $y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$

(δ) $y_4(t) = x_3(t) * x_4(t)$

(α)

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \cos(10\pi t) - \sin(t)$$

$\cos(10\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{1}{5} \text{ sec}$

$\sin(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = 2\pi \text{ sec}$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{1}{5}}{2\pi} = \frac{1}{10\pi}$ άρρητος, άρα το $y_1(t)$ απεριοδικό

(β)

$$y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(\pi t) = \cos(10\pi t) \cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2} [\sin(\pi t + 10\pi t) + \sin(\pi t - 10\pi t)] = \\ = \frac{1}{2} [\sin(11\pi t) - \sin(9\pi t)]$$

$\sin(11\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{2}{11} \text{sec}$

$\sin(9\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = \frac{2}{9} \text{sec}$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$ ρητός, άρα το $y_2(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_2 = 11T_A = 9T_B = 2 \text{sec}$

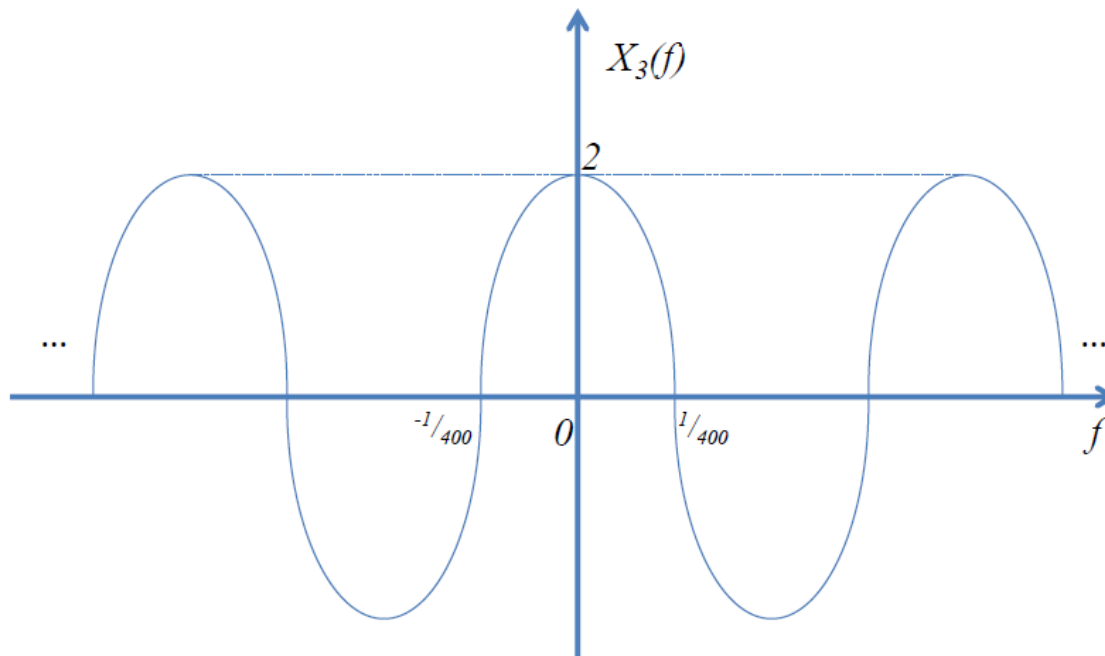
(γ)

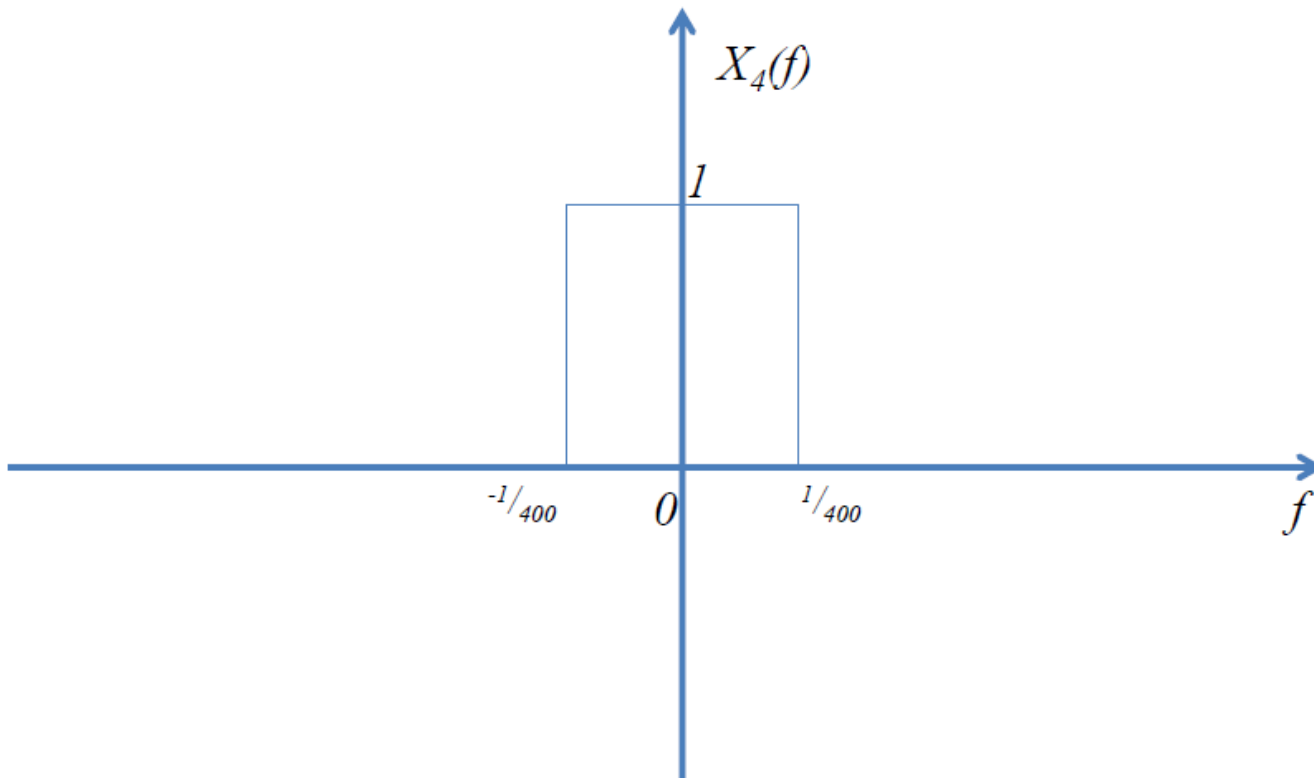
$$y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3(t) \xrightarrow{F} 2 \cos(2\pi f 100) = X_3(f)$$

$$x_4(t) \xrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{1/200}\right) = X_4(f)$$

Τα φάσματα πλάτους των ανωτέρω σημάτων απεικονίζονται παρακάτω

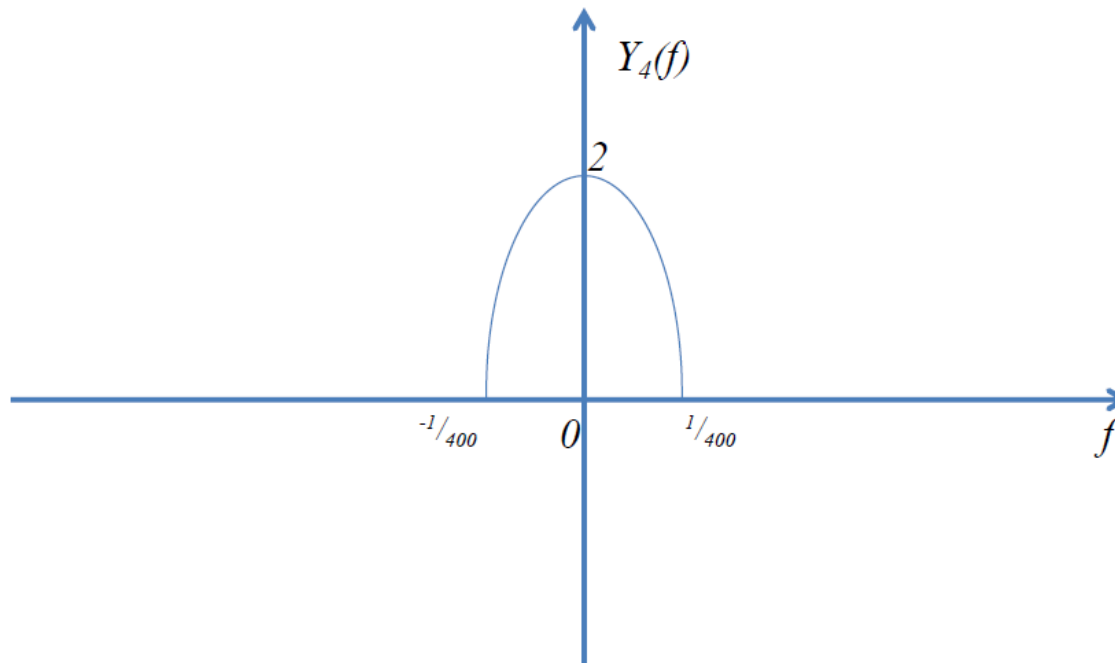




Το φάσμα $Y_3(f) = X_3(f) + X_4(f)$ είναι συνεχές συνεπώς το σήμα $y_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

$$(\delta) \quad y_4(t) = x_3(t) * x_4(t) \xrightarrow{F} X_3(f) \cdot X_4(f) = 2 \cos(2\pi f 100) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{1/200}\right)$$

Το φάσμα $Y_4(f)$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Το φάσμα είναι συνεχές, συνεπώς το σήμα $y_4(t)$ δεν είναι περιοδικό.

ΘΕΜΑ 1 2018B

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(2\pi 200t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα
ακόλουθα σήματα:

για τα

(α) $a(t) = [x(t\sqrt{2})]^2$

(β) $b(t) = x(t) + \text{sinc}(400t)$

(γ) $c(t) = [x(4t) + \text{sinc}^2(100t)] * [\delta(t) - 300\text{sinc}(300t)]$ (όπου το ‘*’ υποδηλώνει τη συνέλιξη).

(δ) $e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot \text{sinc}(400t)$

$$(α) a(t) = x^2(t\sqrt{2}) = \frac{1 + \cos(2\pi 400\sqrt{2} \cdot t)}{2} \text{ με τη βοήθεια της ιδιότητας } \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2})$$

$$\text{Περιοδικό με περίοδο } T = \frac{1}{400\sqrt{2}} \text{ sec} = \frac{\sqrt{2}}{800} \text{ sec}$$

$$\text{Συχνότητα } f = 400\sqrt{2} \text{ Hz}$$

(β)

$$b(t) = x(t) + \sin c(400t) = \cos(2\pi 200t) + \sin c(400t) \xrightarrow{F} c(f) = \frac{1}{2} \{ \delta(f - 200) + \delta(f + 200) \} + \frac{1}{400} \text{rect} \left(\frac{f}{400} \right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα μη περιοδικό

(γ)

$$\begin{aligned}c(t) &= [x(4t) + \sin c^2(100t)] * [\delta(t) - 300 \sin c(300t)] = \\&= [\cos(2\pi 800t) + \sin c^2(100t)] * [\delta(t) - 300 \sin c(300t)] \xrightarrow{F} \\&\xrightarrow{F} \left\{ \frac{1}{2} \{ \delta(f - 800) + \delta(f + 800) \} + \frac{1}{100} \text{tri} \left(\frac{f}{100} \right) \right\} \cdot \left\{ 1 - \text{rect} \left(\frac{f}{300} \right) \right\}\end{aligned}$$

Εδώ έχουμε υψιπερατό φίλτρο που αφήνει να περάσουν οι παλμοί δ στα +/- 800Hz

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $T = \frac{1}{800} \text{ sec}$

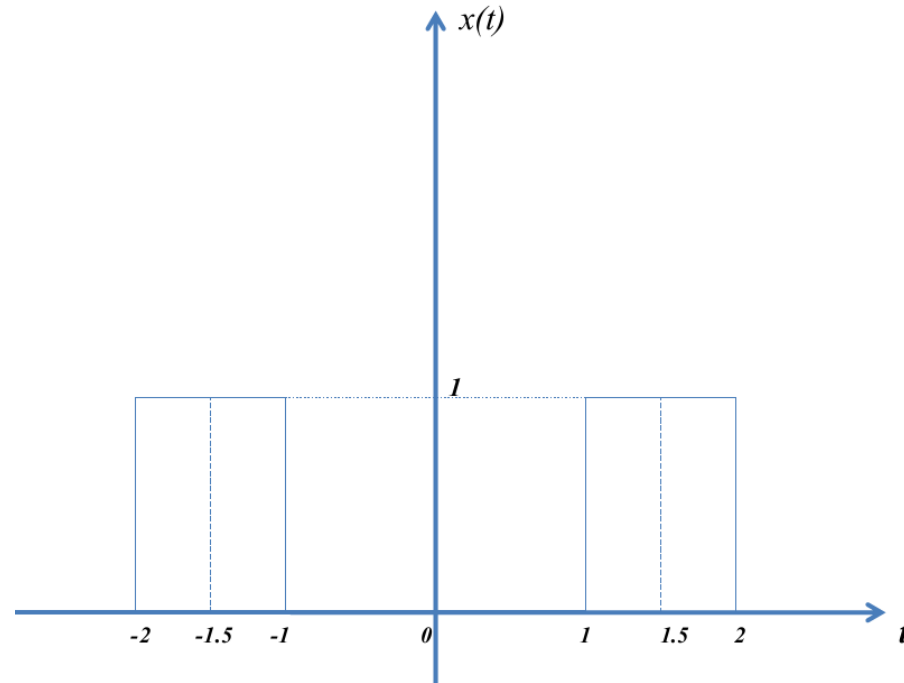
(δ)

$$e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot \operatorname{sinc}(400t) = 1 + \cos(2\pi 200t) \cdot t \cdot \frac{\sin(400\pi t)}{400\pi t} = 1 + \frac{1}{800\pi} \sin(2\pi 400t) \quad (\text{με βάση την ιδιότητα } \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta))$$

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $T = \frac{1}{400} \text{ sec}$

ΘΕΜΑ 4 / ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής

$$\text{συνέλιξη: } y(t) = \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} * \text{rect}(t) .$$

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f) = \cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = \text{rect}(t - 1.5) + \text{rect}(t + 1.5) .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5} \text{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5} \text{sinc}(f) = 2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f) .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} * \text{rect}(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \mathfrak{F} \left\{ \delta(t) + \frac{1}{2} [\delta(t-3) + \delta(t+3)] \right\} \cdot \mathfrak{F} [\text{rect}(t)] = \\ &= [1 + \cos(6\pi f)] \cdot \text{sinc}(f) = \text{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \text{sinc}(f) \end{aligned}$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{[1 + \cos(6\pi f)] \cdot \text{sinc}(f)}{2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

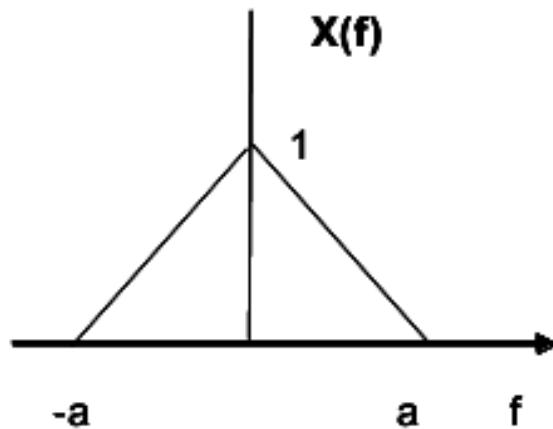
$$1 + \cos(6\pi f) = 2 \cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

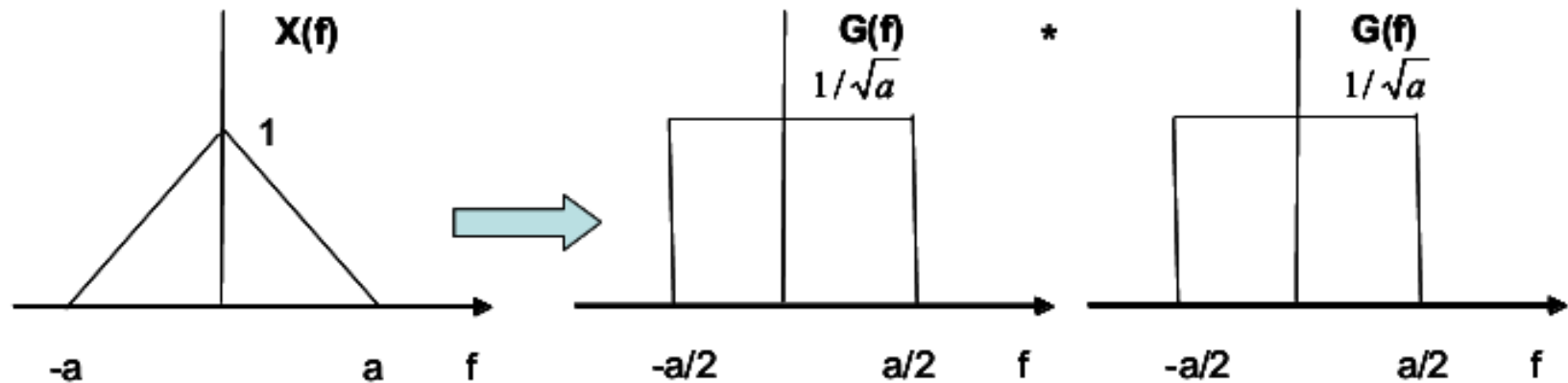
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2 \cos^2(3\pi f) \cdot \text{sinc}(f)}{2 \cos(3\pi f) \text{sinc}(f)} = \cos(3\pi f)$$

Θέμα 5 ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ $[X(f)]$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα $x(t)$ προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος $G(f)$ όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση $g(t)$ με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a} \sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \text{sinc}^2(at)$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1) Ποιο από τα παρακάτω σήματα, η έκφραση των οποίων δίνεται στο πεδίο του χρόνου t ή των συχνοτήτων f , δεν είναι περιοδικό:

A) $x(t) = \cos(2\pi ft)$

B) $Y(f) = \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)$

Γ) $z(t) = \delta(t)$

Δ) και τα τρία σήματα, $x(t)$, $Y(f)$, $z(t)$, δεν είναι περιοδικά

4) Κατά την _____ τα σήματα διαχωρίζονται μεταξύ τους στο πεδίο των συχνοτήτων.

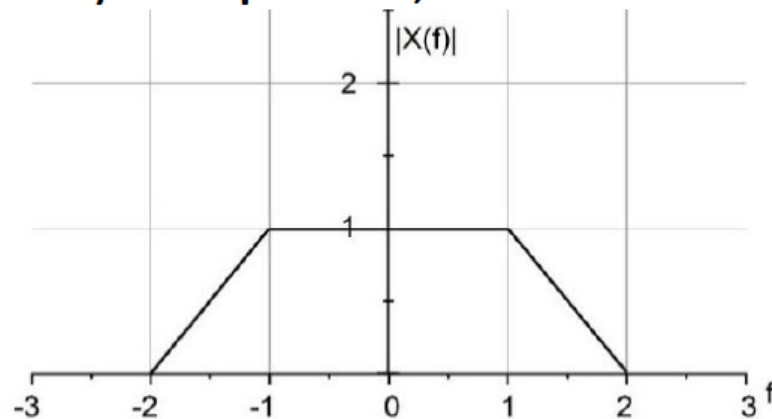
A) Πολυπλεξία FDM

B) Πολυπλεξία TDM

Γ) Διαμόρφωση SSB

Δ) Διαμόρφωση AM

5 Ποιά είναι η μαθηματική έκφραση του φάσματος του σήματος $X(f)$ με φάσμα πλάτους όπως το παρακάτω;



1 $X(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - 2\text{tri}(f)$

2 $X(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{tri}(f)$

3 $X(f) = \text{tri}(f) - 2\text{tri}\left(\frac{f}{2}\right)$

4 $X(f) = 2\text{tri}\left(\frac{f}{2}\right) - \text{tri}(f)$

6

Ποιος είναι το εύρος ζώνης του σήματος $x(t) = 12\text{sinc}(6t) + 2\text{sinc}^2(2t)$;

1	3	2	6
3	4	4	2

Δίνεται το παρακάτω φάσμα πλάτους ενός σήματος

$$X(f) = \delta(f - 4) + \delta(f + 4) + \text{tri}(f + 1) + \text{tri}(f - 1) + \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$$

το οποίο διέρχεται από φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)$. Ποιο είναι το φάσμα πλάτους $Y(f)$ στην έξοδο του φίλτρου.

1 $Y(f) = \text{tri}(f + 1) + \text{tri}(f - 1) + \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$

2 $Y(f) = \delta(f - 4) + \delta(f + 4)$

3 $Y(f) = 0,5(\delta(f - 4) + \delta(f + 4))$

4 $Y(f) = 2\text{tri}(f + 1) + 2\text{tri}(f - 1)$

1) Ποιο από τα παρακάτω σήματα, δεν είναι περιοδικό:

A) $x_1(t) = \cos(2\pi 100t) + 3\cos(2\pi 200t)$

B) $x_2(t) = \cos(100t) + 3\cos(200t)$

Γ) $x_3(t) = \cos(100t) + 3\cos(2\pi 200t)$

Δ) και τα τρία σήματα, $x_1(t)$, $x_2(t)$, και $x_3(t)$ είναι περιοδικά

2) Ποια από τις παρακάτω ιδιότητες του Μ/Σ Fourier είναι λάθος;

A) Όλες είναι σωστές.

B) $asinc(at) \stackrel{F}{\leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$

Γ) $asinc^2(at) \stackrel{F}{\leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$

Δ) $e^{-j2\pi at} sinc(t) \stackrel{F}{\leftrightarrow} rect(f - a)$

5	<p>Δίνεται το σήμα $x(t)=\delta(t)+\sin(2\pi 1000t)$. Ποιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;</p>	
1	<p>Η συχνότητα του σήματος είναι 1000Hz και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist είναι 2000Hz</p>	<p>2 Η συχνότητα του σήματος είναι 100Hz αλλά δεν υπάρχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας με το κριτήριο Nyquist.</p>
3	<p>Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας με το κριτήριο Nyquist είναι 2000Hz αλλά το σήμα δεν είναι περιοδικό.</p>	<p>4 Το σήμα δεν είναι περιοδικό και δεν εφαρμόζεται το κριτήριο Nyquist.</p>

7	Να υπολογιστεί η συνέλιξη του σήματος $z(t) = x(t) * y(t)$, όπου $x(t) = 2\text{sinc}^2(t)$ και $y(t) = \text{sinc}(2t)$		
1	$z(t) = 2\text{sinc}^2(t) \cdot \text{sinc}(2t)$	2	$z(t) = \text{sinc}^2(t)$
3	$z(t) = \text{sinc}(t)$	4	$z(t) = \text{sinc}^2(2t)$