

ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

3^η ΟΣΣ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

2021-22

29.01.2022

Ν.Δημητρίου

Στόχοι Μελέτης

- Αναλογικές Διαμορφώσεις
 - Διαμορφώσεις Πλάτους (DSB, AM, SSB)
 - Διαμορφώσεις Γωνίας (PM, FM)
- Πολυπλεξία Σημάτων
- Μετατροπή Αναλογικών Σημάτων σε Ψηφιακά
 - Δειγματοληψία Αναλογικών Σημάτων
 - Κριτήριο Nyquist
- Ψηφιακές Διαμορφώσεις
 - Διαμόρφωση PCM

Αναλογικές Διαμορφώσεις

Διαμόρφωση

- **ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Modulation)**= Η μεταβολή, σύμφωνα με το σήμα πληροφορίας, των παραμέτρων ενός φέροντος κύματος (carrier wave) που είναι κατάλληλο για την μετάδοση μέσα από το δεδομένο κανάλι
- ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ (Demodulation) είναι η αντίστροφη διαδικασία
- Το είδος της διαμόρφωσης καθορίζει:
 - Την αντοχή στο θόρυβο και στην παραμόρφωση του καναλιού
 - Την πιστότητα αναπαραγωγής του αρχικού σήματος πληροφορίας
 - Το εύρος του απαιτούμενου για την μετάδοση φάσματος
 - Την πολυπλοκότητα των συστημάτων εκπομπής και λήψης

Τι επιτυγχάνουμε με τη Διαμόρφωση

- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή συχνοτήτων όπου το μέσο διάδοσης (γραμμή μεταφοράς, ατμόσφαιρα, οπτική ίνα) έχει βελτιωμένα χαρακτηριστικά.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε κατάλληλη περιοχή συχνοτήτων, όπως αυτή έχει αποδοθεί από τους διεθνείς οργανισμούς προτυποποίησης για συγκεκριμένες υπηρεσίες.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχή υψηλότερων συχνοτήτων όπου το μήκος κύματος είναι μικρότερο. Επειδή το μέγεθος των κεραιών εξαρτάται από το μήκος κύματος, με τη μετατόπιση σε υψηλότερες συχνότητες μπορούμε να κατασκευάσουμε κεραιές άρα και πομποδέκτες μικρότερου μεγέθους.

Τι επιτυγχάνουμε με τη Διαμόρφωση

- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σε περιοχές συχνοτήτων όπου τα κυκλώματα λειτουργούν με καλύτερα χαρακτηριστικά. Ένα παράδειγμα είναι η μετατόπιση του σήματος σε *ενδιάμεση συχνότητα (intermediate frequency - IF)*. Το πλεονέκτημα αυτής της μετατόπισης είναι η δυνατότητα χρήσης του ίδιου κυκλώματος IF από πολλά σήματα, τα οποία μπορεί να καταλαμβάνουν διαφορετικές ζώνες ραδιοσυχνοτήτων (*radio frequencies - RF*).
- Μέχρι κάποιο όριο “ανοσία” του σήματος από θόρυβο και παρεμβολές. Η ανοσία αυτή επιτυγχάνεται με τη διεύρυνση του εύρους ζώνης που καταλαμβάνει το διαμορφωμένο σήμα σε σχέση με το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας. Αυτό το πλεονέκτημα προσφέρεται μόνο από μερικούς τύπους διαμορφώσεων.
- Μετατόπιση του σήματος πληροφορίας σημαίνει και επίτευξη μεγαλύτερων αποστάσεων σε σχέση με αυτό που μπορεί να επιτευχθεί αν το σήμα παραμείνει βασικής ζώνης

Τι επιτυγχάνουμε με τη Διαμόρφωση

- Δυνατότητα ταυτόχρονης μετάδοσης πολλών σημάτων μέσα από τον ίδιο δίαυλο επικοινωνίας, διατηρώντας βέβαια τη δυνατότητα διαχωρισμού των διαφορετικών σημάτων πληροφορίας από τις διαφορετικές πηγές. Δηλαδή επιτυγχάνουμε *πολυπλεξία (multiplexing)* σημάτων από διαφορετικές πηγές, η οποία καλείται *πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (frequency division multiplexing - FDM)*.

Σύγκριση Αναλογικών και Ψηφιακών Συστημάτων Επικοινωνίας

Αναλογικά Συστήματα

- Απλούστερη δομή
- Δυσκολότερη σχεδίαση
- Ελάχιστες δυνατότητες υλοποίησης βέλτιστων διατάξεων
- Δυσκολότερη υλοποίηση και συντήρηση
 - Ανάγκη συνεχών ρυθμίσεων
 - Απαιτήσεις γραμμικότητας εξαρτημάτων
 - Εξάρτηση από τις θερμοκρασιακές μεταβολές των εξαρτημάτων
 - Εξάρτηση από την γήρανση του υλικού

Ψηφιακά Συστήματα

- Πολυπλοκότερη δομή
- Ευκολότερη σχεδίαση
- Δυνατότητα υλοποίησης βέλτιστων διατάξεων
- Ευκολότερη υλοποίηση και συντήρηση
- Καλύτερη προσαρμογή προς το κανάλι
- Ευελιξία κατασκευής
 - DSPs, μPs
 - FPGAs, ASICs
- Μικρότερο κόστος

Τόμος Β/Μέρος Β

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αναλογικές διαμορφώσεις

| | | |
|---------|--|----|
| 3.1 | Φέρον σήμα | 72 |
| 3.2 | Διαμόρφωση πλάτους | 73 |
| 3.2.1 | Διαμόρφωση AM (Amplitude Modulation) | 73 |
| 3.2.2 | Διαμόρφωση DSB–SC (Double Sideband Suppressed Carrier) | 74 |
| 3.2.3 | Διαμόρφωση SSB (Single Side Band) | 75 |
| 3.2.4 | Δείκτης διαμόρφωσης πλάτους | 76 |
| 3.2.5 | Εφαρμογές: Διαμόρφωση πλάτους απλού τόνου | 76 |
| 3.2.5.1 | Διαμόρφωση AM | 76 |
| 3.2.5.2 | Διαμόρφωση DSB/SC | 77 |
| 3.2.5.3 | Διαμόρφωση SSB | 78 |

Φέρον Σήμα

Το φέρον σήμα (ή φέρουσα) είναι συνήθως ένα συνημιτονοειδές σήμα πλάτους A_c , συχνότητας f_c και φάσης φ_c :

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi_c)$$

Η διαδικασία της διαμόρφωσης συνίσταται στην επισύναψη του σήματος πληροφορίας σε ένα από τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά του φέροντος, ώστε να είναι δυνατή η μετάδοσή του στο κανάλι και η λήψη του από το δέκτη, ο οποίος με την «αντίστροφη» διαδικασία της αποδιαμόρφωσης ανακτά το σήμα πληροφορίας.

Διαμόρφωση DSB/SC

Έστω σήμα μηνύματος/πληροφορίας $x(t)$ περιορισμένου εύρους ζώνης f_x , με φάσμα $G(f) = \mathfrak{F}[x(t)]$ που διαμορφώνει κατά DSB-SC το φέρον σήμα

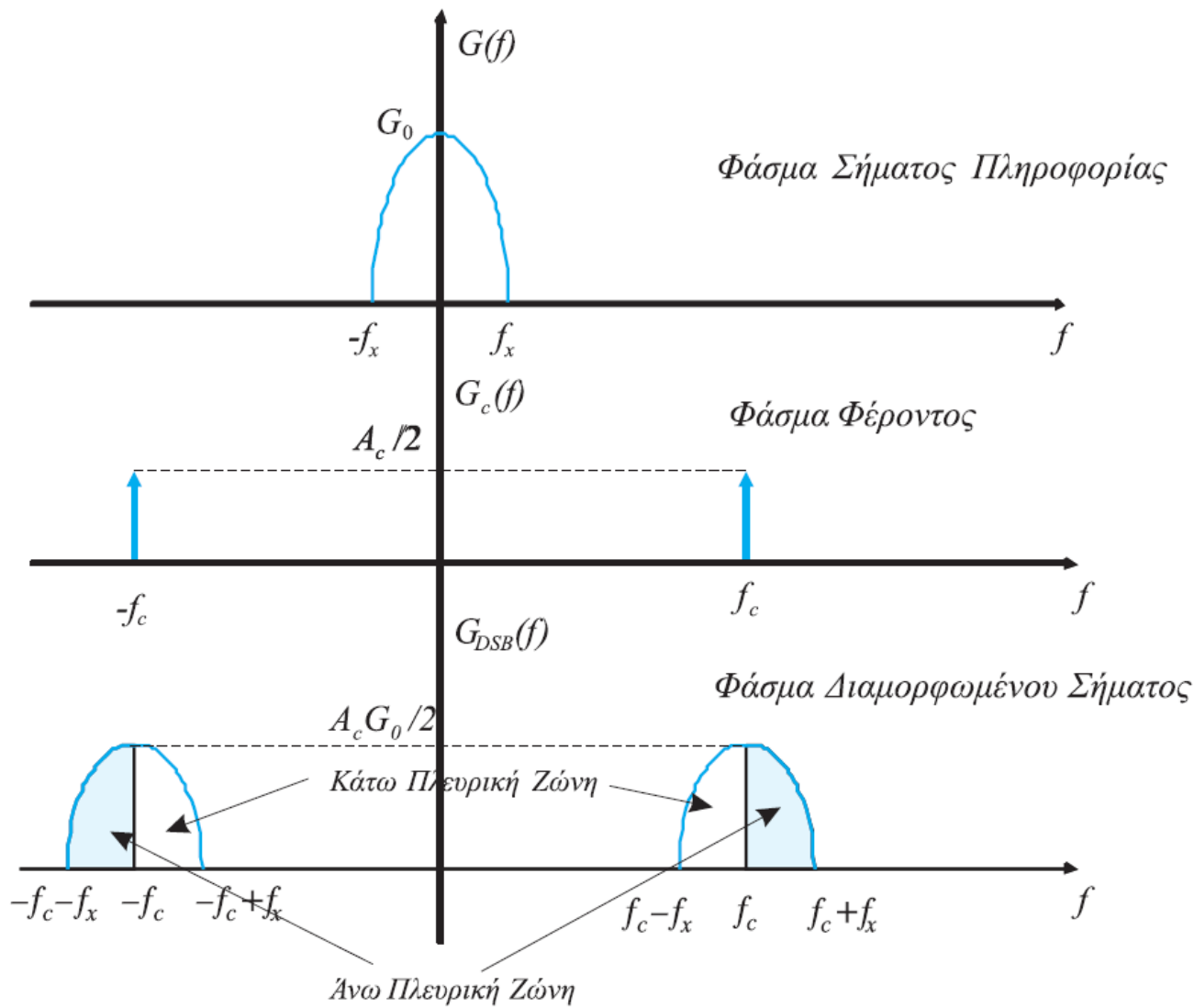
$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t).$$

Το διαμορφωμένο σήμα γράφεται στο πεδίο του χρόνου:

$$x_{DSB}(t) = x(t)x_c(t) = x(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων το φάσμα του σήματος θα ισούται με:

$$G_{DSB}(f) = \mathfrak{F}\{x(t)A_c \cos(2\pi f_c t)\} = \frac{A_c}{2} [G(f - f_c) + G(f + f_c)]$$

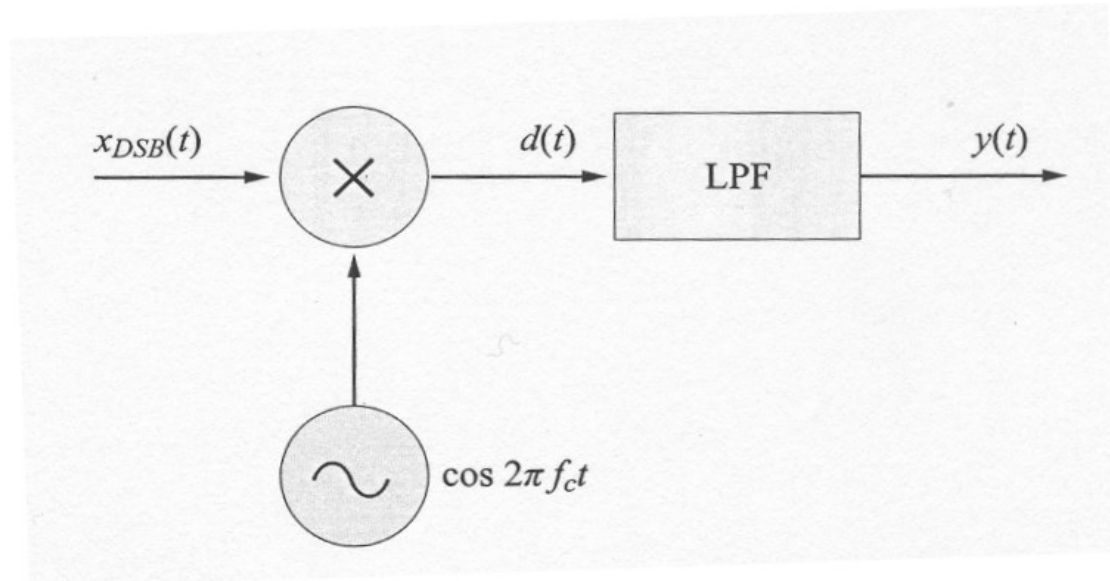


Σχήμα 3.3

Φάσμα πλάτους διαμόρφωσης DSB-SC

Παρατήρηση: Το διαμορφωμένο σήμα καταλαμβάνει το διπλάσιο εύρος ζώνης ($W = 2f_x$) σε σχέση με το αρχικό σήμα πληροφορίας.

Αποδιαμόρφωση DSB-SC



Πεδίο χρόνου

$$d(t) = x_{DSB}(t) \cos 2\pi f_c t \Leftrightarrow d(t) = x(t) \cos^2 2\pi f_c t \Leftrightarrow$$

$$d(t) = \frac{1}{2} x(t) (1 + \cos 4\pi f_c t) \Leftrightarrow d(t) = \frac{x(t)}{2} + \frac{x(t)}{2} \cos 4\pi f_c t$$

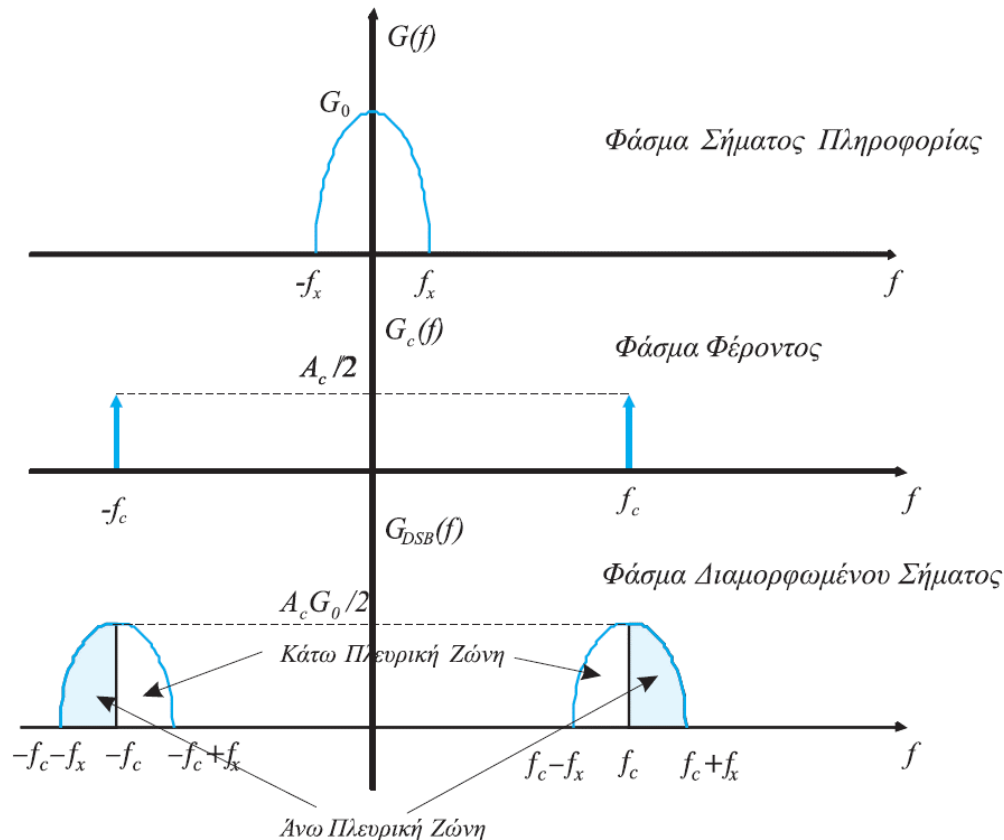
Πεδίο συχνότητας

$$d(t) = \frac{1}{2} x(t) (1 + \cos 4\pi f_c t) \xrightarrow{\text{Fourier Transform}} D(f) = \frac{1}{2} X(f) + \frac{1}{2} X(f) \left\{ \frac{1}{2} [\delta(f - 2f_c) + \delta(f + 2f_c)] \right\} \Leftrightarrow$$

$$D(f) = \frac{1}{2} X(f) + \frac{1}{4} [X(f - 2f_c) + X(f + 2f_c)]$$

Διαμόρφωση SSB

Η διαμόρφωση μονής πλευρικής ζώνης (SSB) προκύπτει από την αντίστοιχη DSB με κατάλληλο φιλτράρισμα της μιας από τις δύο ζώνες. Το διαμορφωμένο σήμα καταλαμβάνει το ίδιο εύρος ζώνης ($W = f_x$) σε σχέση με το αρχικό σήμα πληροφορίας.



Διαμόρφωση ΑΜ

Έστω σήμα μηνύματος/πληροφορίας $x(t)$ περιορισμένου εύρους ζώνης f_x , με φάσμα $G(f) = \mathfrak{F}[x(t)]$ που διαμορφώνει κατά ΑΜ το φέρον σήμα $x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$.

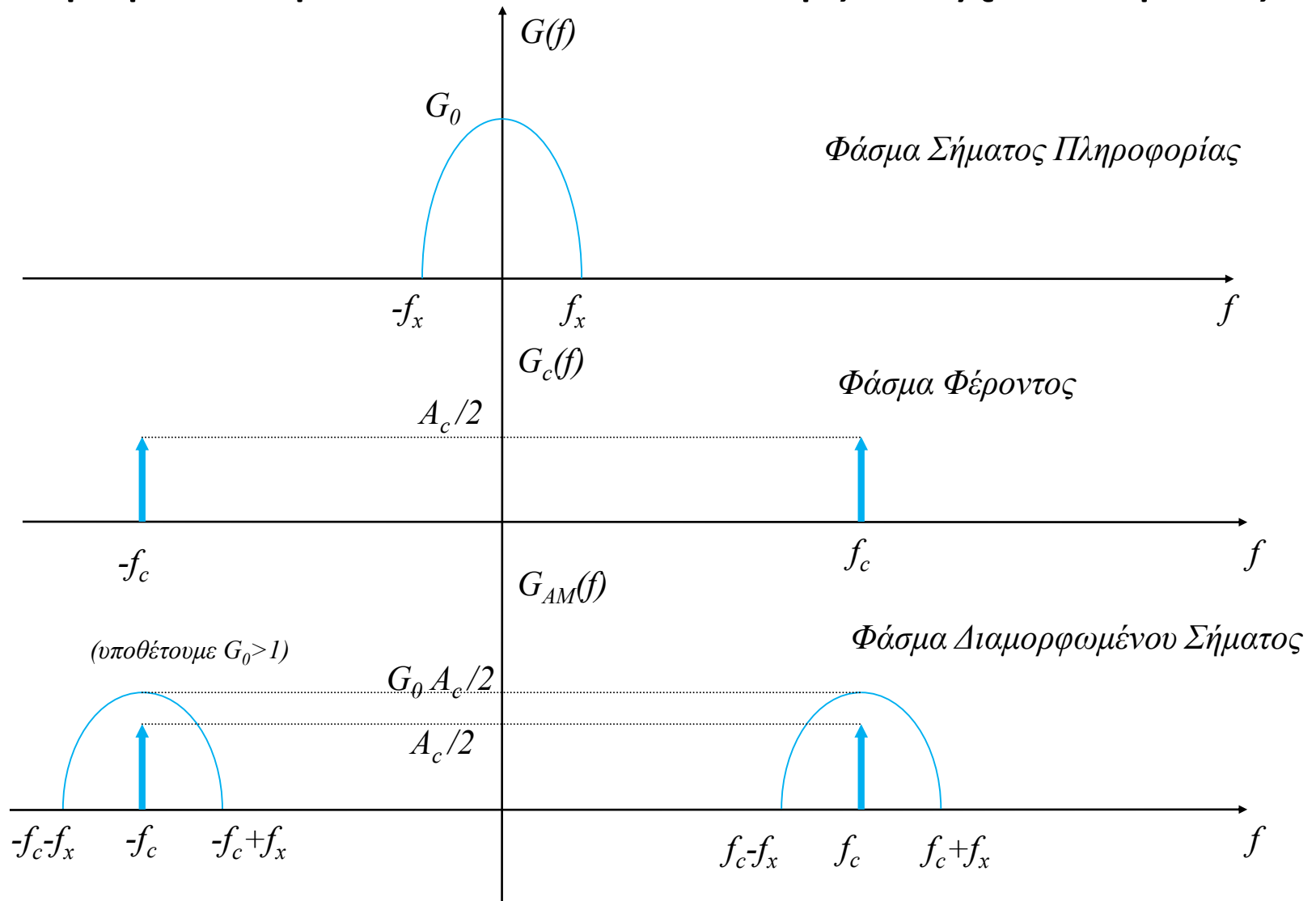
Το διαμορφωμένο σήμα γράφεται στο πεδίο του χρόνου:

$$\begin{aligned}x_{AM}(t) &= (1 + x(t))x_c(t) = (1 + x(t))A_c \cos(2\pi f_c t) = \\ &= A_c \cos(2\pi f_c t) + x(t)A_c \cos(2\pi f_c t)\end{aligned}$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων το φάσμα του σήματος θα ισούται με:

$$\begin{aligned}G_{AM}(f) &= \mathfrak{F}\{A_c \cos(2\pi f_c t) + x(t)A_c \cos(2\pi f_c t)\} = \\ &= \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c}{2}[G(f - f_c) + G(f + f_c)]\end{aligned}$$

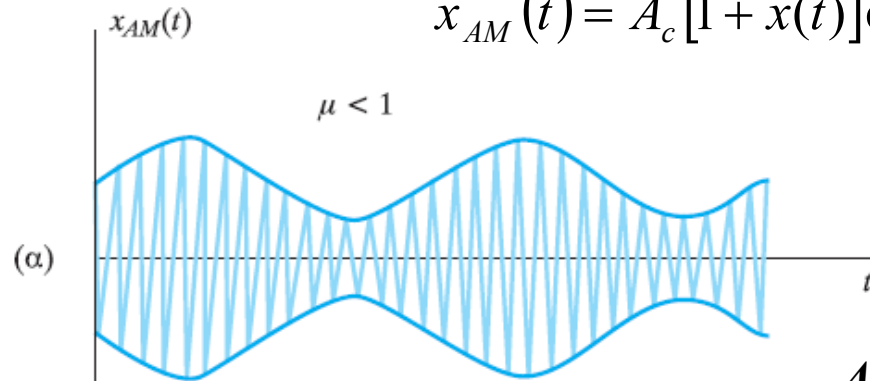
Διαμόρφωση AM: Πεδίο της Συχνότητας



Το φάσμα του σήματος AM είναι πανομοιότυπο με το φάσμα του σήματος DSB-SC, διαφέροντας μόνο στην προσθήκη της φασματικής συνιστώσας του φέροντος

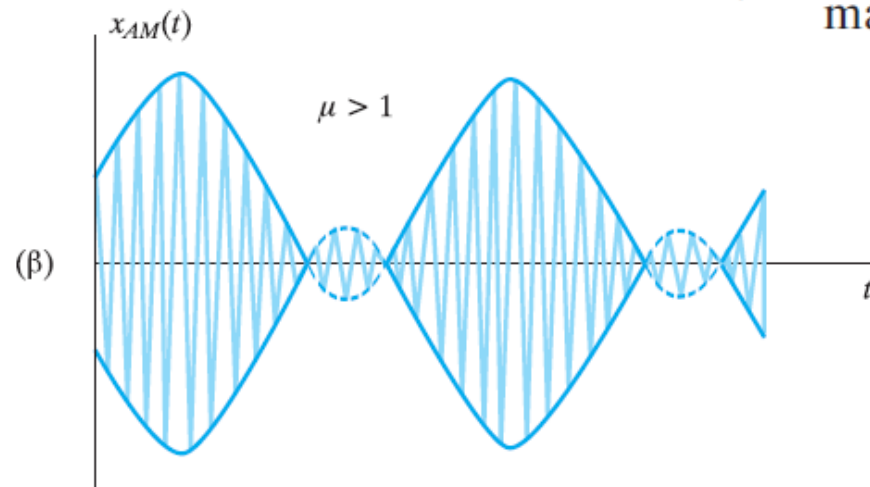
Διαμόρφωση AM (2)

$$x_{AM}(t) = A_c [1 + x(t)] \cos 2\pi f_c t = A(t) \cos 2\pi f_c t$$



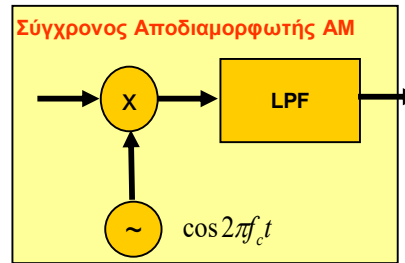
Δείκτης Διαμόρφωσης

$$\mu = \frac{\max\{A(t)\} - \min\{A(t)\}}{\max\{A(t)\} + \min\{A(t)\}}$$

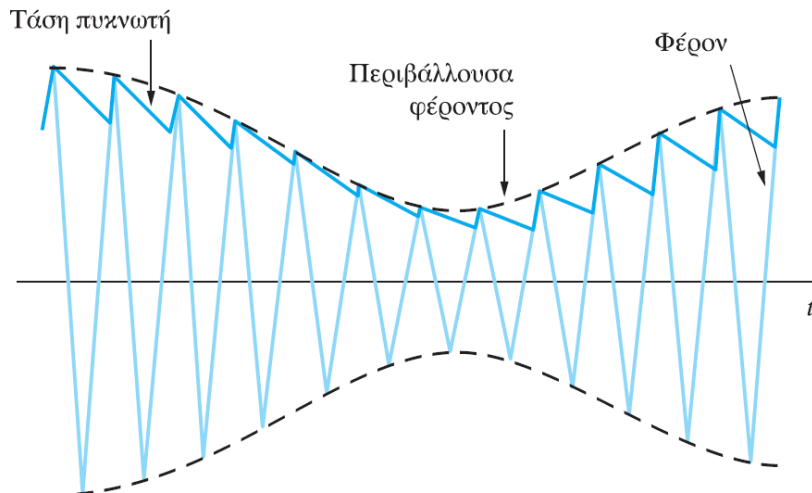


Αποδιαμόρφωση AM

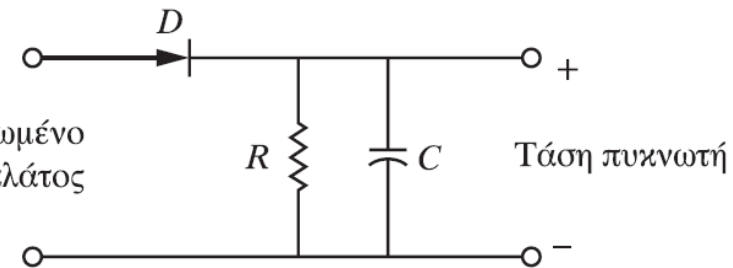
- Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση
 - Όπως στα σήματα DSB



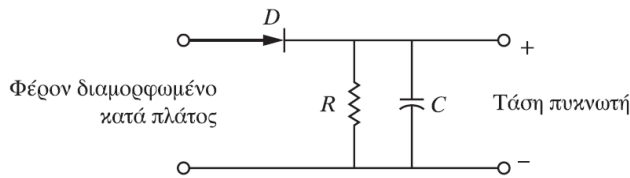
- Με φωρατή περιβάλλουσας (όταν $\mu < 1$)



Φέρον διαμορφωμένο κατά πλάτος



Ο αποδιαμορφωτής περιβάλλουσα αποτελείται από μία δίοδο, μία αντίσταση και έναν πυκνωτή. Εκτός από τη δομή του και η λειτουργία του είναι πολύ απλή (βλέπε Σχήμα 3.9.β). Συγκεκριμένα, η δίοδος αποκόβει τους αρνητικούς παλμούς του σήματος AM. Όταν η τιμή του σήματος AM είναι μεγαλύτερη από τη σταγμααία τάση του πυκνωτή C , τότε ο πυκνωτής φορτίζεται μέχρι τη μέγιστη τιμή του σήματος AM. Όταν το σήμα AM φτάσει στο μέγιστο και αρχίσει να πέφτει, τότε ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται μέσω της αντίστασης R , ακολουθώντας την εκθετική καμπύλη εκφόρτισης ενός πυκνωτή μέσω μιας αντίστασης. Ο ρυθμός εκφόρτισης του πυκνωτή είναι μικρότερος από το ρυθμό μείωσης του σήματος AM και έτσι πριν ο πυκνωτής εκφορτιστεί αρκετά, φθάνει ο επόμενος κύκλος του διαμορφωμένου φέροντος. Ο πυκνωτής επαναφορτίζεται στη μέγιστη τιμή του σήματος και η διαδικασία φόρτισης – εκφόρτισης του πυκνωτή επαναλαμβάνεται.

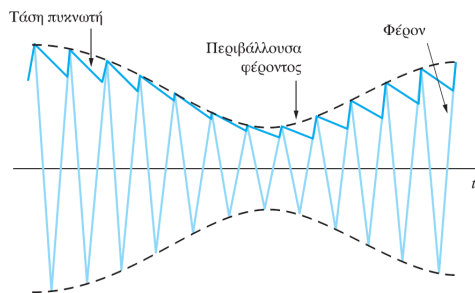


Αποτέλεσμα της παραπάνω λειτουργίας είναι το ότι η τάση του πυκνωτή παρακολουθεί την περιβάλλουσα του διαμορφωμένου φέροντος και δίδει σαν έξοδο του συστήματος μία πριονωτή κυματομορφή, η οποία προσεγγίζει το αρχικό σήμα μηνύματος. Η ακρίβεια της προσέγγισης ρυθμίζεται με την επιλογή των τιμών R , C . Υπό ιδανικές συνθήκες, η έξοδος του αποδιαμορφωτή, $z(t)$, θα είχε τη μορφή

$$z(t) = A_c + A_c x(t) \quad (3.25)$$

Τον πρώτο όρο του αθροίσματος (3.25), ο οποίος έχει σταθερή τιμή και ονομάζεται *συνιστώσα DC*, μπορούμε εύκολα να τον απομακρύνουμε χρησιμοποιώντας απλές διατάξεις, όπως για παράδειγμα ένα μετασχηματιστή.

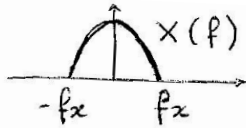
Ο αποδιαμορφωτής περιβάλλουσα δεν απαιτεί την ύπαρξη συγχρονισμένου σήματος τοπικού ταλαντωτή. Η κατασκευή του είναι απλή και οικονομική και αυτός είναι ο κύριος λόγος που η διαμόρφωση AM έχει ευρεία εφαρμογή στις τηλεπικοινωνίες, όπως π.χ., στη ραδιοφωνία.



Τυπολόγιο-Ασκήσεις



Μήνυμα $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$



Διαμορφώσεις Πλάτους

Φέρων $x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} \{ \delta(f-f_c) + \delta(f+f_c) \}$$

DSB $x_{DSB}(t) = x(t) \cdot x_c(t) = x(t) A_c \cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{F} \frac{A_c}{2} [X(f-f_c) + X(f+f_c)] = X_{DSB}(f)$

AM $x_{AM}(t) = [1 + x(t)] \cdot x_c(t) = x_c(t) + x(t)x_c(t) = x_c(t) + x_{DSB}(t) \xleftrightarrow{F} X_c(f) + X_{DSB}(f) = X_{AM}(f)$

SSB $X_{SSB}(f) = \begin{cases} \text{LSB} & X_{DSB}(f) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \\ \text{USB} & X_{DSB}(f) \cdot [1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)] \end{cases}$

οι ζώνες LSB, USB αποκρίνονται και με ζωνοπερατό φίλτρο

Σύγχρονη Αποδιαμόρφωση (DSB)
 $(x_{DSB}(t) \cdot A_c \cos(2\pi f_c t)) +$ βαθυπερατό φίλτρο

$$\left\{ \frac{1}{2} [X(f-f_c) + X(f+f_c)] * \frac{A_c}{2} [\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)] \right\} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad f_x < f_c < 2f_c$$

$$\left\{ \frac{A_c}{4} [X(f-2f_c) + X(f) + X(f) + X(f+2f_c)] \right\} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) = \frac{A_c}{2} X(f)$$



ΕΞ2018B

ΘΕΜΑ 2 Ερωτήματα α-γ (DSB)

Δίνεται το σήμα $x(t) = 400\text{sinc}^2(400t)$

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του $x(t)$.

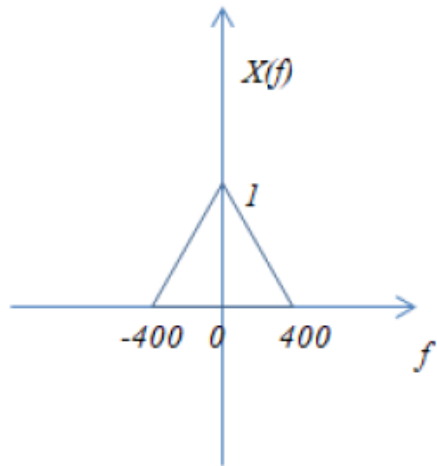
(β) Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

(γ) Για τη λήψη της άνω πλευρικής του διαμορφωμένου σήματος χρησιμοποιείται υψιπερατό φίλτρο, ενώ για τη λήψη της κάτω πλευρικής χρησιμοποιείται βαθυπερατό φίλτρο. Να υπολογιστούν οι κρουστικές αποκρίσεις των 2 φίλτρων.

(δ) Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100KHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 8\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του.

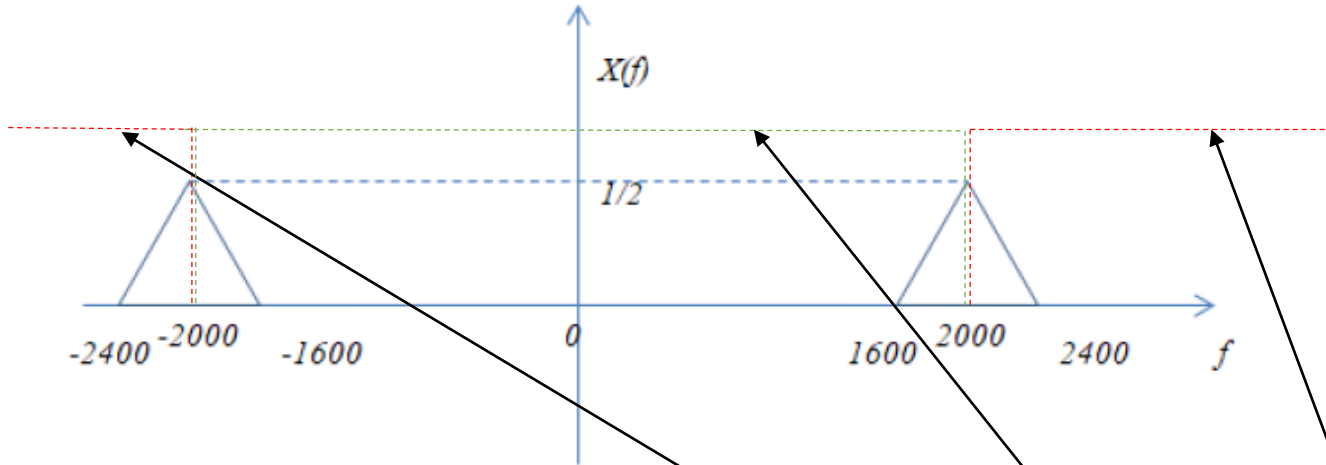
Λύση:

$$(\alpha) x(t) = 400 \sin c^2(400t) \xleftrightarrow{F} \text{tri}\left(\frac{f}{400}\right) = X(f)$$



(β) Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 ΚHz.

$$\begin{aligned} x_{DSB}(t) &= x(t) \cdot \cos(2\pi 2000t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [X(f-2000) + X(f+2000)] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{tri}\left(\frac{f-2000}{400}\right) + \text{tri}\left(\frac{f+2000}{400}\right) \right\} \end{aligned}$$



(γ)

Για τη λήψη της κάτω πλευρικής ζώνης:

Βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4000}\right)$ και κρουστική απόκριση

$$h(t) = 4000 \text{sinc}(4000t)$$

Για τη λήψη της άνω πλευρικής ζώνης:

Υψιπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{4000}\right)$ και κρουστική απόκριση

$$h(t) = \delta(t) - 4000 \text{sinc}(4000t)$$



ΕΞ 2015B /Θ1

ΘΕΜΑ 1

Η έξοδος ενός διαμορφωτή ΑΜ είναι το σήμα: $x_{AM} = 5 \cos^2(2000\pi t) \cos(6000\pi t)$

α) Αναγνωρίστε το σήμα πληροφορίας $x(t)$ και το φέρον στην παραπάνω έκφραση. **(5 μονάδες)**

β) Να υπολογίσετε και να απεικονίσετε τα φάσματα πλάτους του φέροντος, του σήματος πληροφορίας και του διαμορφωμένου κατά ΑΜ σήματος. **(8 μονάδες)**

γ) Να υπολογίσετε το δείκτη διαμόρφωσης μ . **(7 μονάδες)**

(Σύνολο μονάδων 20)



Σκεπτικό: Θέλουμε να φέρουμε την έκφραση του σήματος στη μορφή σήματος AM, δηλαδή, $A\cos(2\pi fct)[1+x(t)]$

α) Το διαμορφωμένο σήμα γράφεται με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos^2 A = \frac{1}{2}[1 + \cos(2A)]$

ως εξής

$$x_{AM} = 5 \cos^2(2000\pi t) \cos(6000\pi t) = \frac{5}{2} [1 + \cos(4000\pi t)] \cos(6000\pi t)$$

Άρα το σήμα πληροφορίας είναι το

$x = \cos(4000\pi t) = \cos(2\pi 2000t)$ και το φέρον είναι το

$$x_c = \frac{5}{2} \cos(6000\pi t) = \frac{5}{2} \cos(2\pi 3000t)$$



β) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος πληροφορίας είναι

$$G(f) = \mathfrak{F}[x(t)] = \frac{1}{2}[\delta(f - 2000) + \delta(f + 2000)]$$

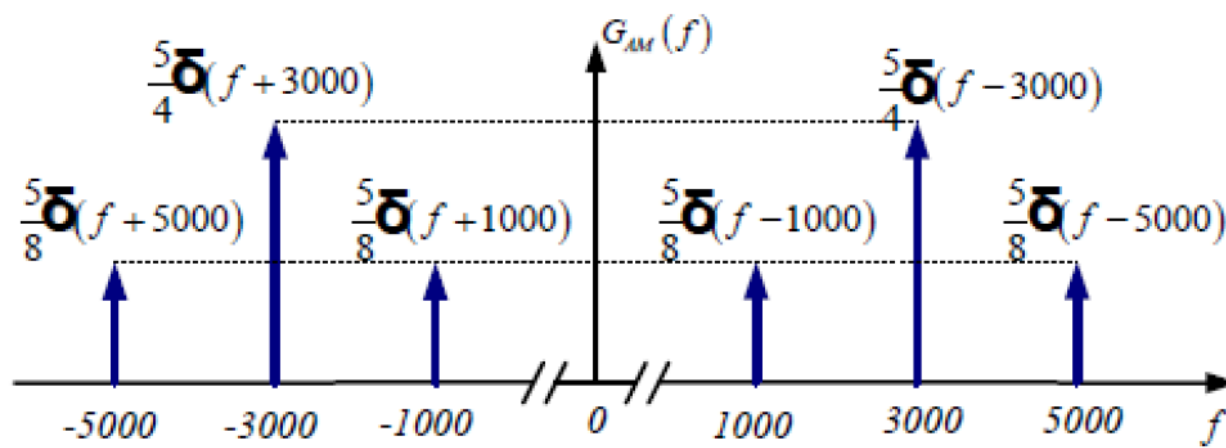
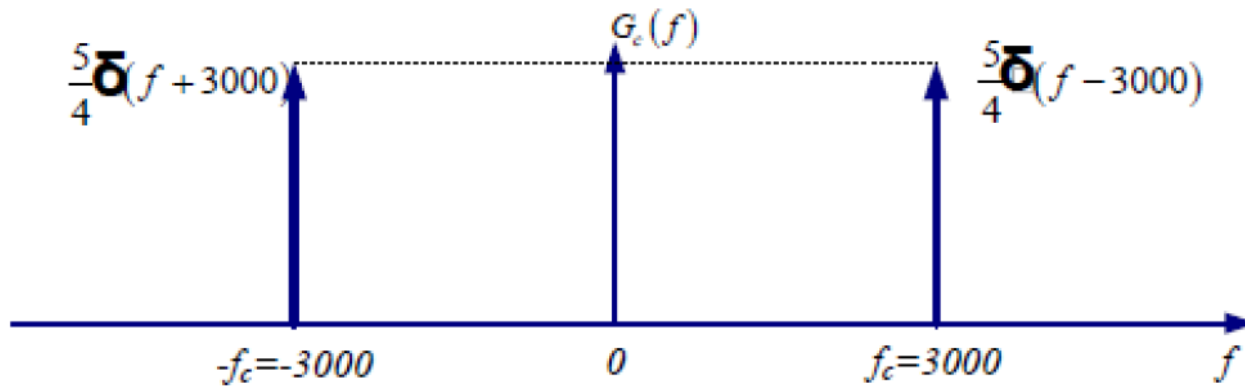
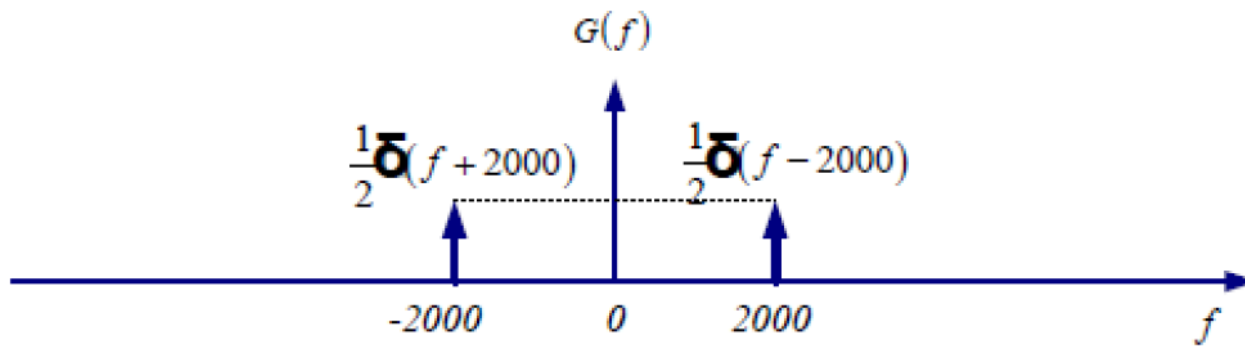
Ο μετασχηματισμός Fourier του φέροντος είναι

$$G_c(f) = \mathfrak{F}[x_c(t)] = \frac{5}{4}[\delta(f - 3000) + \delta(f + 3000)]$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του διαμορφωμένου σήματος είναι

$$\begin{aligned} G_{AM}(f) &= \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c}{2}[G(f - f_c) + G(f + f_c)] \\ &= \frac{5}{4}[\delta(f - 3000) + \delta(f + 3000)] + \frac{5}{8} \left\{ \left[\delta(f - 2000 - 3000) + \delta(f + 2000 - 3000) \right] + \left[\delta(f - 2000 + 3000) + \delta(f + 2000 + 3000) \right] \right\} \\ &= \frac{5}{4}[\delta(f - 3000) + \delta(f + 3000)] + \frac{5}{8} \left\{ \left[\delta(f - 5000) + \delta(f - 1000) \right] + \left[\delta(f + 1000) + \delta(f + 5000) \right] \right\} \end{aligned}$$

Η απεικόνιση του φάσματος των σημάτων ακολουθεί





γ) Για να ανακτηθεί ένα σήμα πληροφορίας το οποίο έχει διαμορφωθεί κατά τα ΑΜ Παρατηρούμε ότι για το σήμα πληροφορίας ισχύει ότι $|x(t)| \leq 1$, και μπορούμε να γράψουμε το διαμορφωμένο σήμα στη μορφή

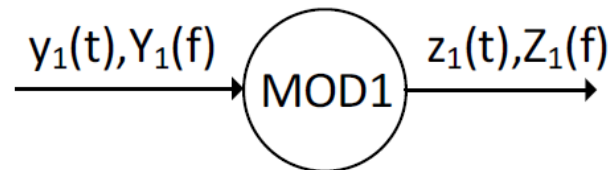
$$x_{AM}(t) = \frac{5}{4}(1 + \cos(4000\pi t))\cos(6000\pi t) = A(t)\cos(6000\pi t)$$

ο δείκτης διαμόρφωσης είναι

$$\mu = \frac{\max[A(t)] - \min[A(t)]}{\max[A(t)] + \min[A(t)]} = \frac{\frac{5}{2} - 0}{\frac{5}{2} + 0} = 1$$

ΘΕΜΑ 1 (15 Μονάδες)

Ας υποθέσουμε ότι το σήμα $y_1(t) = 6\text{sinc}^2(3t) + 12\text{sinc}(6t)$ διαμορφώνει φέρον κατά AM και λαμβάνεται το σήμα $z_1(t)$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα



Εάν το πλάτος του φέροντος είναι $A_c=1$ και συχνότητα του είναι $f_c=0.5\text{kHz}$, να υπολογιστούν τα παρακάτω σήματα και φάσματα:

1. Το $Y_1(f)$ **(5 Μονάδες)**
2. Τα $Z_1(f)$ και $z_1(t)$ **(10 Μονάδες)**

1. Για να υπολογίσουμε το φάσμα $Y_1(f)$ θα πρέπει να κάνουμε μετασχηματισμό Fourier (ΜΣF) στο σήμα $y_1(t)$. Συνεπώς με τη βοήθεια της ιδιότητας αλλαγής κλίμακας συχνότητας, όπως δίνεται παρακάτω

| | | |
|----------------------------------|---|--|
| Αλλαγή Κλίμακας Συχνότητας | $\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(af)$ | $6\text{sinc}^2(3t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} 2\text{tri}\left(\frac{f}{3}\right)$ $12\text{sinc}(6t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} 2\text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)$ |
|----------------------------------|---|--|

το $Y_1(f)$ μπορεί να υπολογιστεί ως

$$Y_1(f) = 2\text{tri}\left(\frac{f}{3}\right) + 2\text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)$$

2.

Γενικά, υποθέτοντας διαμόρφωση AM, το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από:

$$S_{AM}(f) = \frac{A_c}{2}X(f - f_c) + \frac{A_c}{2}X(f + f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f - f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f + f_c)$$

Όπου A_c και f_c είναι το πλάτος και η συχνότητα του φέροντος σήματος και $X(f)$ είναι το φάσμα του σήματος μηνύματος. Με βάση τα παραπάνω, το $Z_1(f)$ μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$Z_1(f) = tri\left(\frac{f - 500}{3}\right) + tri\left(\frac{f + 500}{3}\right) + rect\left(\frac{f - 500}{6}\right) + rect\left(\frac{f + 500}{6}\right) + \frac{1}{2}\delta(f - 500) + \frac{1}{2}\delta(f + 500)$$

Για τον υπολογισμό του σήματος $z_1(t)$ θα πραγματοποιηθεί αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier στο $Z(f)$. Με τη βοήθεια της ακόλουθης ιδιότητας

| | | |
|-------------|---|--|
| Διαμόρφωσης | $x(t) \cos(2\pi f_c t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c)$ | $tri\left(\frac{f - 500}{3}\right) + tri\left(\frac{f + 500}{3}\right) \stackrel{F^{-1}}{\Leftrightarrow} 6sinc^2(3t)\cos(2\pi 500t)$ $rect\left(\frac{f - 500}{6}\right) + rect\left(\frac{f + 500}{6}\right) \stackrel{F^{-1}}{\Leftrightarrow} 12sinc(6t)\cos(2\pi 500t)$ |
|-------------|---|--|

Με βάση τα παραπάνω το $z(t)$ μπορεί να υπολογιστεί ως

$$z_1(t) = (6sinc^2(3t)\cos(2\pi 500t) + 12sinc(6t)\cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 500t)) = (6sinc^2(3t) + 12sinc(6t) + 1)\cos(2\pi 500t)$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να προκύψει κι απευθείας από τον ορισμό της AM διαμόρφωσης χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + x(t)] \cos 2\pi f_c t = A(t) \cos 2\pi f_c t$$

Όπου $x(t) = y_1(t) = 6\text{sinc}^2(3t) + 12\text{sinc}(6t)$

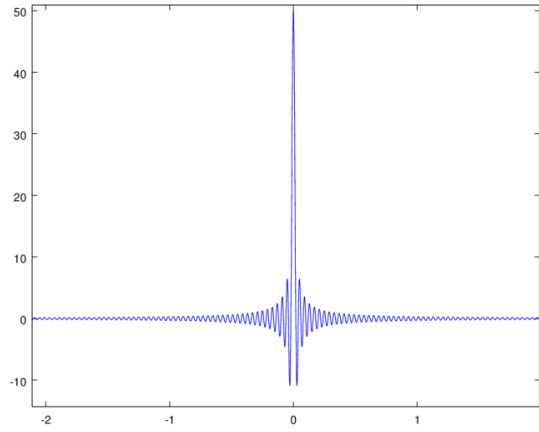
Παράδειγμα Octave -DSB



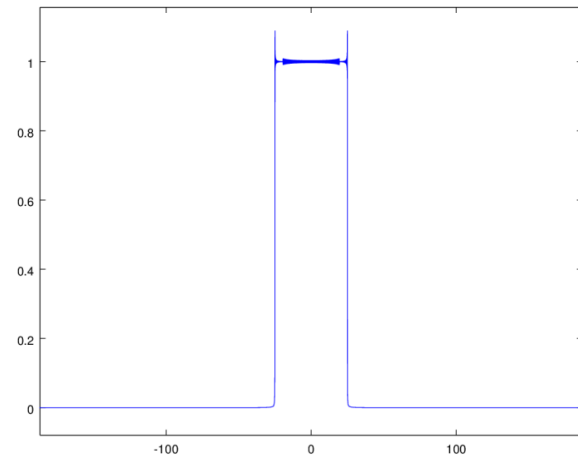
```
clear
fc=1000 %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platoys shmatos plhroforias
xdsb=xm.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos dsb
[f,ff]=fourier_transform(xdsb,Ts); % ypologismos fasmatos shmatos dsb
figure
plot(t,xdsb);title('Shma DSB ');%apeikonish shmatos dsb sto xrono
figure
plot(f,ff);title('Fasma DSB ');%apeikonish fasmatos dsb
xx=xdsb.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t);%sygxronh apodiamorfwsb dsb
[f,ff]=fourier_transform(xx,Ts);% ypologismos fasmatos apodiamorfwmenou shmatos
%% Prosoxh: Den exoun apokopei oi oroi sta +/- 2fc
title('Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc');
figure
plot(f,ff);% apeikonish apodiamorfwmenou shmatos me tis 2 zwnes sta /-2fc
hlp=(2./Ac.^2).*rectpulse(f,0,200); %synarthsh metaforas bathyperatou filtro sta +/-100Hz
figure;
plot(f,hlp,'r');%apeikonish synarthshs metaforas bathyperatou filtroy
title('Synarthsh metaforas filtrou');
gg=ff.*hlp; %ypologismos exodou tou filtrou
figure
plot(f,gg,'k'); %apeikonish lhftontos apodiamorfwmenou shmatos
title('Fasma apodiamorfwmenou shmatos');
```

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.41/3η
ΟΣΣ/30.01.2021/Ν.Δημητρίου

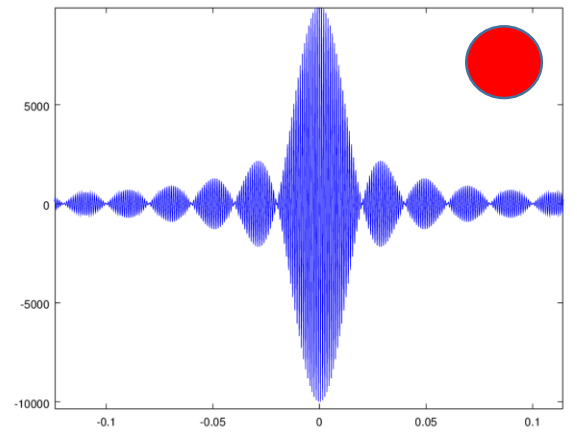
Shma Pihlorias



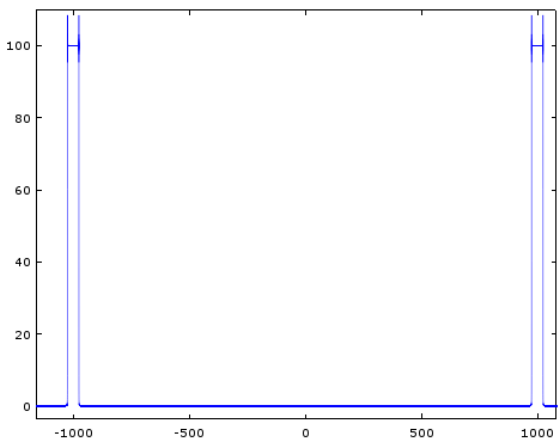
Fasma Pihlorias



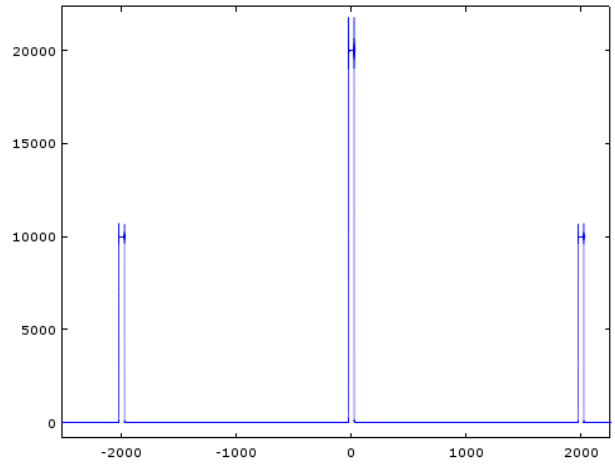
Shma DSB



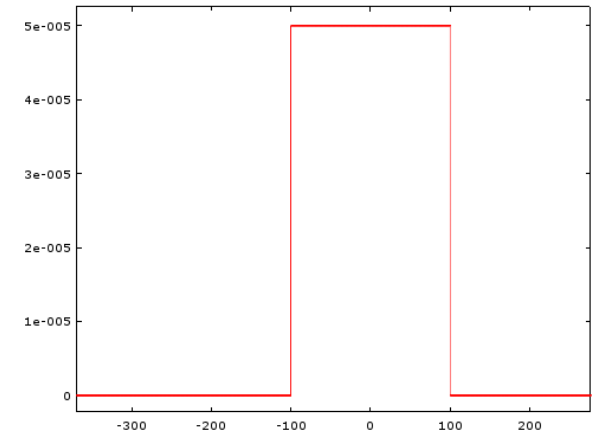
Fasma DSB



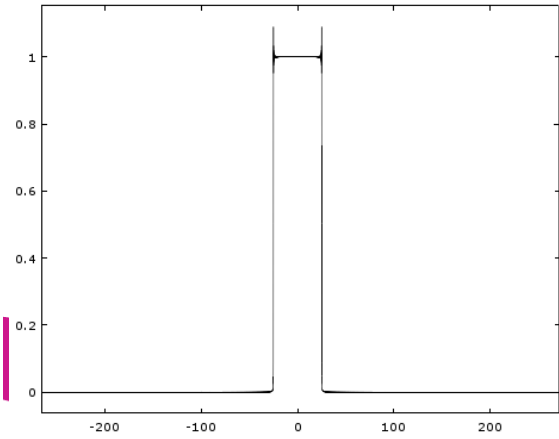
Apodiamorfwmeno shma me tis zwnes sta +/-2fc



Synarthsh metaforas filtrou



Fasma apodiamorfwmenou shmatos



ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.41/3η
 ΟΣΣ/29.01.2022/Ν.Δημητρίου



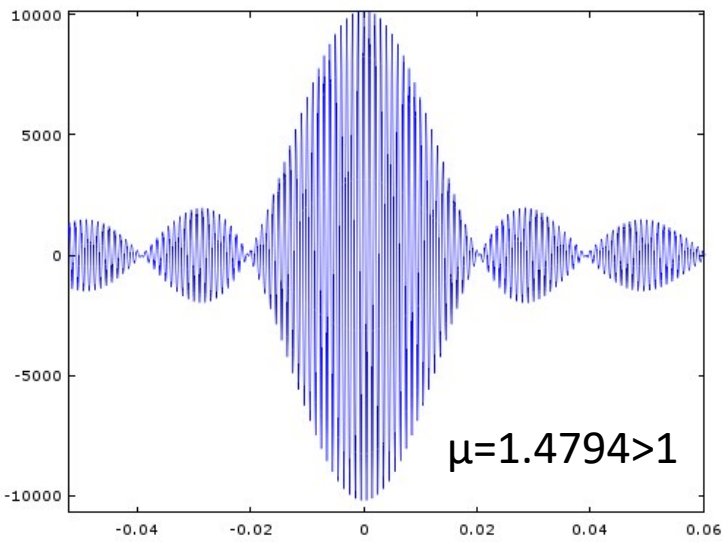
```
clear
fc=1000 %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platus shmatos plhroforias
```

```
xAM=(1+xm).*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos am
[f,ff]=fourier_transform(xAM,Ts); % ypologismos fasmatos shmatos am
figure
plot(t,xAM);title('Shma AM ');%apeikonish shmatos am sto xrono
figure
plot(f,ff);title('Fasma AM ');%apeikonish fasmatos am
xx=xAM.*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t);%sygxronh apodiamorfws am
[f,ff]=fourier_transform(xx,Ts);% ypologismos fasmatos apodiamorfwmou shmatos
%% Prosoxh: Den exoun apokepei oi oroi sta +/- 2fc
figure
plot(f,ff);% apeikonish apodiamorfwmou shmatos me tis 2 zwnes sta +/-2fc
title('Apodiamorfwmou shma me tis zwnes sta +/-2fc');
hlp=(2./Ac.^2).*rectpulse(f,0,200); %synarthsh metaforas bathyperatou filtro sta +/-100Hz
figure;
plot(f,hlp,'r');%apeikonish synarthshs metaforas bathyperatou filtroy
title('Synarthsh metaforas filtrou');
gg=ff.*hlp; %ypologismos exodou tou filtrou
figure
plot(f,gg,'k'); %apeikonish lhthentos apodiamorfwmou shmatos
title('Fasma apodiamorfwmou shmatos');
```

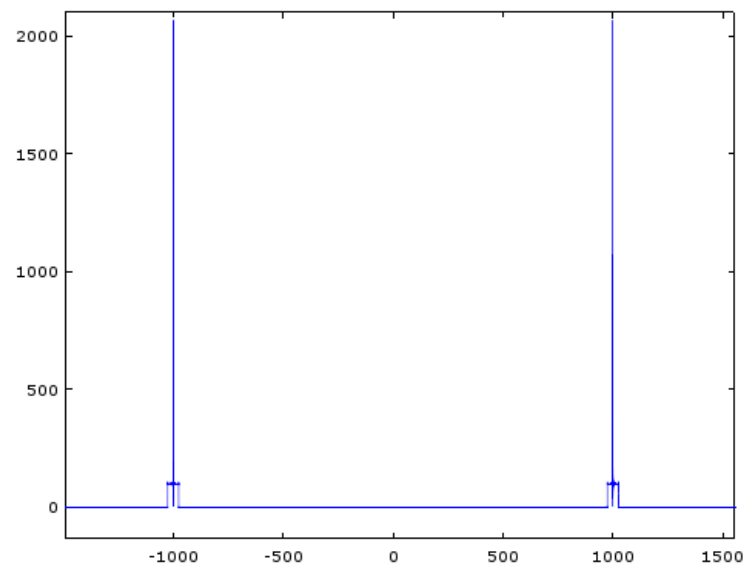
ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.41/3η
ΟΣΣ/29.01.2022/Ν.Δημητρίου



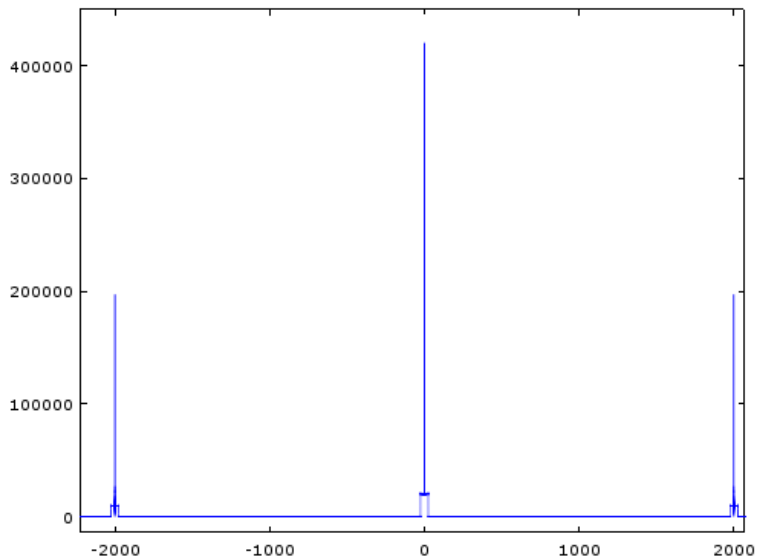
Shma AM



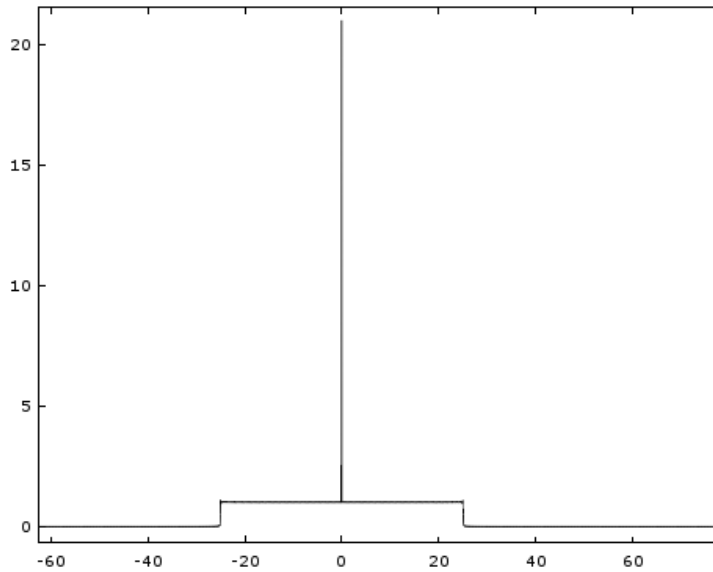
Fasma AM



Αποδιαμορφωμένο shma me tis zwnes sta +/-2fc



Fasma apodiamorfωμένου shmatos



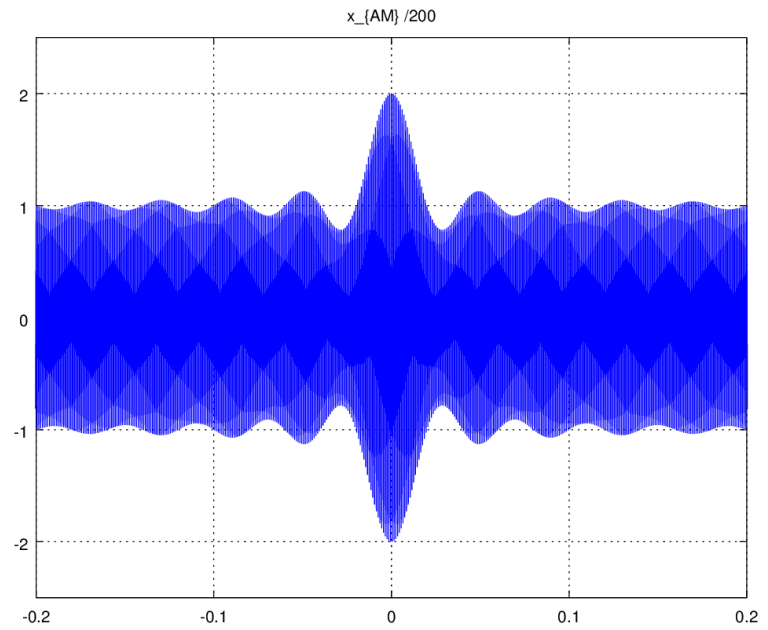
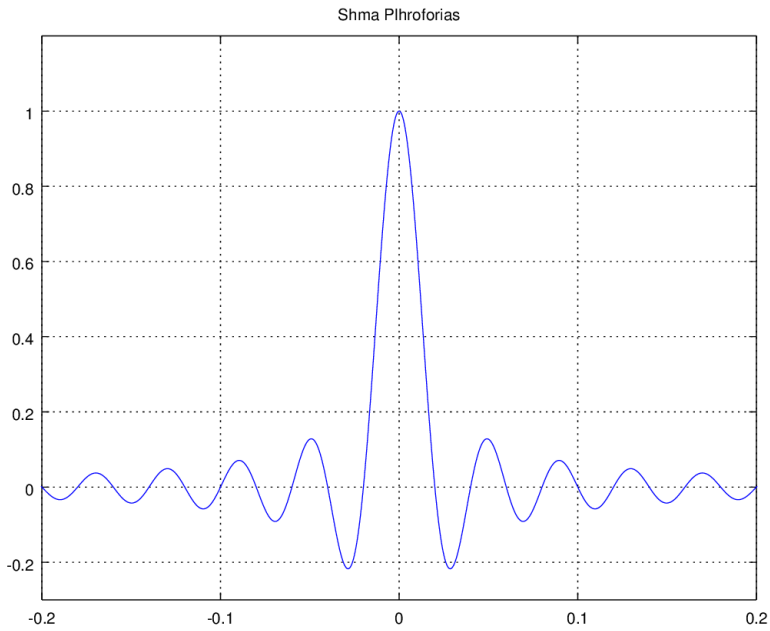
ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.41/3η
ΟΣΣ/29.01.2022/Ν.Δημητρίου



```
clear
fc=1000 %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=1.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
figure;
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
title('Shma Plhroforias');
axis([-0.2 0.2 -0.3 1.2])

xAM=(1+xm).*Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t); %orismos shmatos am
figure
plot(t,xAM./200);title('Shma AM / 200');%apeikonish shmatos am sto xrono
axis([-0.2 0.2 -2.5 2.5])
```

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.41/3η
ΟΣΣ/29.01.2022/Ν.Δημητρίου



$$\mu=0.43742 < 1$$

Γωνιακές Διαμορφώσεις

Τόμος Β/Μέρος Β

| | | |
|---------|--|----|
| 3.3 | Διαμόρφωση γωνίας..... | 81 |
| 3.3.1 | Φάσμα γωνιακά διαμορφωμένου σήματος..... | 81 |
| 3.3.2 | Λόγος απόκλισης γωνιακά διαμορφωμένου σήματος..... | 82 |
| 3.3.3 | Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος..... | 82 |
| 3.3.4 | Διαμόρφωση φάσης | 83 |
| 3.3.4.1 | Διαμόρφωση φάσης απλού τόνου..... | 83 |
| 3.3.4.2 | Φάσμα διαμορφωμένου (PM) σήματος από απλό τόνο | 83 |
| 3.3.5 | Διαμόρφωση συχνότητας | 85 |
| 3.3.5.1 | Διαμόρφωση συχνότητας απλού τόνου..... | 86 |
| 3.3.5.2 | Φάσμα διαμορφωμένου (FM) σήματος από απλό τόνο..... | 87 |

Γωνιακή Διαμόρφωση – Βασικοί Ορισμοί

Μορφή Διαμορφωμένου Σήματος

$$x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

Πλάτος Φέροντος

Φέρον

$$A_c \cos 2\pi f_c t$$

Συχνότητα
Φέροντος

$$x(t)$$

Σήμα
Μηνύματος

$$\phi(t)$$

Φασματική
Γωνία

Η Φασματική Γωνία είναι συνάρτηση του Σήματος Μηνύματος

$$\omega(t) = \frac{d[2\pi f_c t + \phi(t)]}{dt} = \omega_c + \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία Συχνότητα, f_i ή
Στιγμιαία Κυκλική Συχνότητα ω_i

$$\phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία
Απόκλιση
Φάσης

Στιγμιαία
Απόκλιση
Συχνότητας

Γωνιακή Διαμόρφωση (I)

- Στη γωνιακή διαμόρφωση, το διαμορφωμένο σήμα έχει τη μορφή

$$x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

- Η φασματική γωνία $\phi(t)$ είναι **συνάρτηση του σήματος μηνύματος $x(t)$**
- Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι γωνιακής διαμόρφωσης, οι οποίοι διαφέρουν στη σχέση μεταξύ των $\phi(t)$ και $x(t)$
 - Διαμόρφωση φάσης (phase modulation – PM)
 - Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency modulation – FM)

Γωνιακή Διαμόρφωση (II)

Έστω σήμα μηνύματος/πληροφορίας $x(t)$ με φάσμα περιορισμένου εύρους ζώνης $G(f) = \mathfrak{F}[x(t)]$ διαμορφώνει κατά γωνία το φέρον σήμα $x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

διαμορφωμένο σήμα $x_m(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$

στιγμιαία γωνία του διαμορφωμένου σήματος $\theta(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$

$\varphi(t)$ είναι η στιγμιαία απόκλιση φάσης του.

στιγμιαία κυκλική συχνότητα του διαμορφωμένου σήματος

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d(2\pi f_c t + \varphi(t))}{dt} = 2\pi f_c + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

και η στιγμιαία συχνότητά του θα είναι

$$f(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$\Delta\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ είναι η στιγμιαία απόκλιση (κυκλικής) συχνότητάς του.

Γωνιακή Διαμόρφωση (III)

Λόγος απόκλισης γωνιακά διαμορφωμένου σήματος

$$D = \frac{\max(|\Delta\omega|)}{2\pi f_x} = \frac{\max(|\Delta f|)}{f_x} = \frac{\max\left(\left|\frac{d\phi(t)}{dt}\right|\right)}{2\pi f_x}$$

Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος

$$W \approx 2(D+1)f_x = 2\left(\max(|\Delta f|) + f_x\right) \quad \text{κανόνας του Carson.}$$

Διαμόρφωση Φάσης, Phase Modulation - PM

$$\varphi(t) = k_p x(t)$$

k_p ονομάζεται σταθερά απόκλισης φάσης και έχει μονάδες rad/Volt

Το διαμορφωμένο κατά φάση σήμα γράφεται:

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p x(t)]$$

$$D_{PM} = \frac{\max \left\{ \left| \frac{d}{dt} \varphi(t) \right| \right\}}{2\pi f_x} = \frac{\max \left\{ \left| \frac{d}{dt} k_p x(t) \right| \right\}}{2\pi f_x} = \frac{k_p}{2\pi f_x} \max \left\{ \left| \frac{d}{dt} x(t) \right| \right\}$$

Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος

$$W_{PM} \approx 2(D_{PM} + 1)f_x \quad \text{κανόνας του Carson.}$$

Διαμόρφωση Συχνότητας, Frequency Modulation - FM

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f x(t) \Leftrightarrow \varphi(t) = k_f \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$$

Στον παραπάνω τύπο υπάρχει η παραδοχή ότι $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0$

όπου η k_f ονομάζεται σταθερά απόκλισης συχνότητας και έχει μονάδες $\frac{\text{rad/sec}}{\text{Volt}}$.

Το διαμορφωμένο κατά συχνότητα σήμα γράφεται:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right]$$

$$D_{FM} = \frac{\max \left\{ \left| \frac{d}{dt} \varphi(t) \right| \right\}}{2\pi f_x} = \frac{\max \left\{ \left| \frac{d}{dt} k_f \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right| \right\}}{2\pi f_x} = \frac{k_f}{2\pi f_x} \max \left\{ \left| \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right| \right\} = \frac{k_f}{2\pi f_x} \max \{ |x(t)| \}$$

Εύρος ζώνης διαμορφωμένου σήματος

$$W_{FM} \approx 2(D_{FM} + 1)f_x \quad \text{κανόνας του Carson.}$$

Διαμόρφωση Γωνιας

$$x_m(t) = A_c \cos \{ 2\pi f_c t + \phi(t) \}$$

\int περιέχει
 σήμα πληροφορίας / μηνύματος εύρους ζώνης f_x
 (βλ. τέλος διαφάνειας)

Στιγμιαία Γωνια: $\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$ (σε rad)

Στιγμιαία κυκλική συχνότητα: $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 2\pi f_c + \frac{d\phi(t)}{dt}$ (σε $\frac{rad}{sec}$)

Στιγμιαία Συχνότητα: $f(t) = \frac{\omega(t)}{2\pi} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$ (σε Hz)

Στιγμιαία Απόκλιση Συχνότητας: $\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$

Λόγος Απόκλισης: $\frac{\max |\Delta f(t)|}{f_x} = \frac{\max \left| \frac{d\phi(t)}{dt} \right|}{2\pi f_x}$

Εύρος Ζώνης Διαμορφωμένου σήματος
 (Κανόνας Carson) $W = 2(D+1) f_x$

Διαμόρφωση Γωνιας:

- Διαμόρφωση φάσης (PM) $\phi(t) = k_f x(t)$ ↗ σήμα πληροφορίας
- Διαμόρφωση Συχνότητας (FM) $\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$

Σχετικές Αποκρίσεις ΓΕ3/1718/03,4 ΕΞ 2017Α/02 ΕΞ 2015Α/01 σήμα πληροφορίας



ΕΞ2018B

ΘΕΜΑ 2

Ερώτημα δ (FM)

Δίνεται το σήμα $x(t) = 400\text{sinc}^2(400t)$

(α) Να υπολογισθεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του $x(t)$.

(β) Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 2 KHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.

(γ) Για τη λήψη της άνω πλευρικής του διαμορφωμένου σήματος χρησιμοποιείται υψιπερατό φίλτρο, ενώ για τη λήψη της κάτω πλευρικής χρησιμοποιείται βαθυπερατό φίλτρο. Να υπολογιστούν οι κρουστικές αποκρίσεις των 2 φίλτρων.

(δ) Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100KHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 8\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του.

Εφαρμογή κανόνα Carson



$$(\delta) x_{FM}(t) = \cos \left(2\pi 100000t + 8\pi \int_{-\infty}^t 400 \sin c^2(400\lambda) d\lambda \right)$$

Λόγος απόκλισης:

$$D = \frac{\Delta f_{\max}}{f_x} = \frac{k_f \max(|x(t)|)}{f_x} = \frac{\frac{8\pi}{2\pi} 400}{400} = 4$$

Μέγιστη απόλυτη τιμή στο πεδίο του χρόνου

$$W = 2(D+1)f_x = 2(4+1)400\text{Hz} = 4\text{KHz}$$

Εύρος ζώνης στο πεδίο της συχνότητας

**ΘΕΜΑ 2**

Υποθέστε ένα σήμα πληροφορίας είναι της μορφής $m(t) = 10 \text{sinc}(600t)$ και διαμορφώνει κατά FM το φέρον $c(t) = 100 \cos(2\pi f_c t)$. Αν ο λόγος απόκλισης είναι $D = 8$,

Ερώτηση 1^η: Δώστε τη μορφή του διαμορφωμένου σήματος.

Ερώτηση 2^η: Υπολογίστε τη μέγιστη απόκλιση συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος.

Ερώτηση 3^η: Υπολογίστε το εύρος ζώνης μετάδοσης και την ισχύ του διαμορφωμένου σήματος

Ερώτηση 4^η: Ποιο θα ήταν το εύρος ζώνης μετάδοσης αν το σήμα πληροφορίας διαμόρφωνε το φέρον κατά AM



A) Έχουμε ότι:

$$\Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi} \max(|m(t)|), \text{ ή } k_f = \frac{2\pi \Delta f_{\max}}{\max(|m(t)|)}$$

Το διαμορφωμένο FM σήμα γράφεται:

$$y_{FM}(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda\right) = 100 \cos\left(2\pi f_c t + k_f \int_{-\infty}^t 10 \operatorname{sinc}(600\lambda) d\lambda\right)$$

B) Η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι

$\Delta f_{\max} = f_m D$, όπου f_m το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας.

Όμως $F[10 \operatorname{sinc}(600t)] = \frac{10}{600} \Pi\left(\frac{f}{600}\right)$, άρα το εύρος ζώνης είναι $f_m = 300$ και η μέγιστη

απόκλιση συχνότητας

$$\Delta f_{\max} = f_m D = 300 \cdot 8 = 2400 \text{ Hz}$$



Γ) Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος δίνεται από τον κανόνα του Carson:

$$W = 2(D+1)f_m$$

Συνεπώς το εύρος ζώνης του FM σήματος είναι:

$$W = 2 \cdot 9 \cdot 300 = 5400 \text{ Hz}$$

Η ισχύς του διαμορφωμένου είναι η ισχύς ουσιαστικά ενός συνημιτονοειδούς σήματος με πλάτος 100, άρα

$$P = \frac{100^2}{2} = 5000$$

Ισχύς συνημιτονοειδούς σήματος $A \cos(2\pi fct + \varphi)$: $P = 0.5 \cdot A^2$ (Watt)

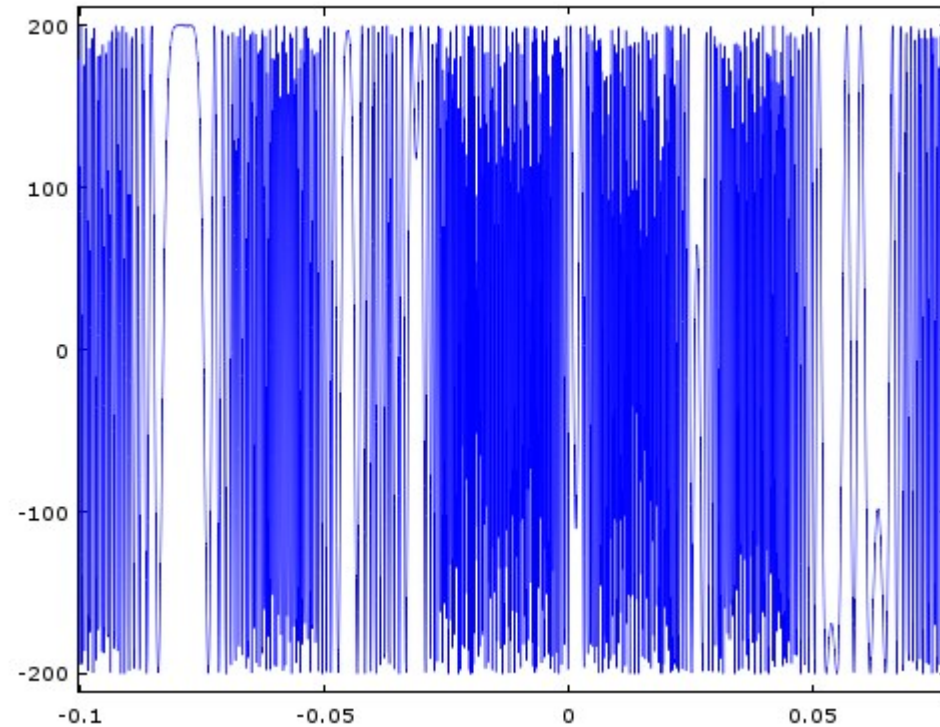
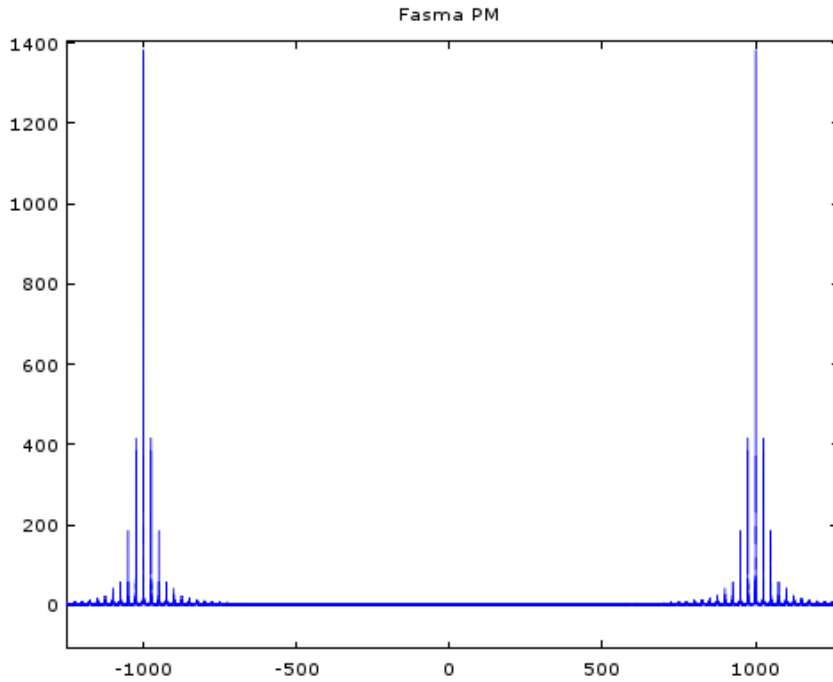
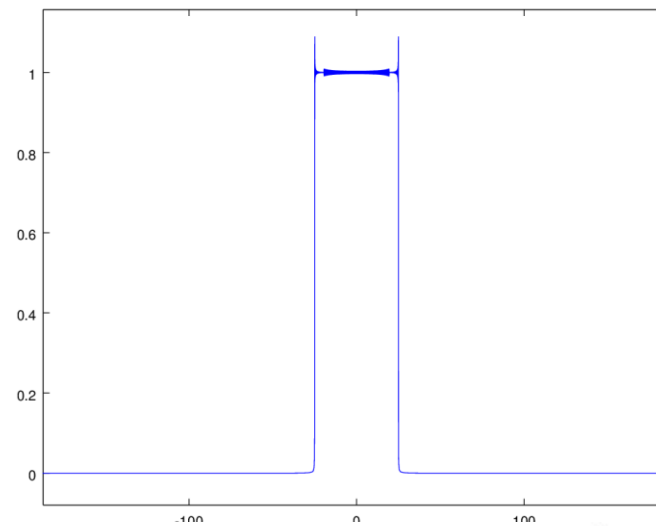
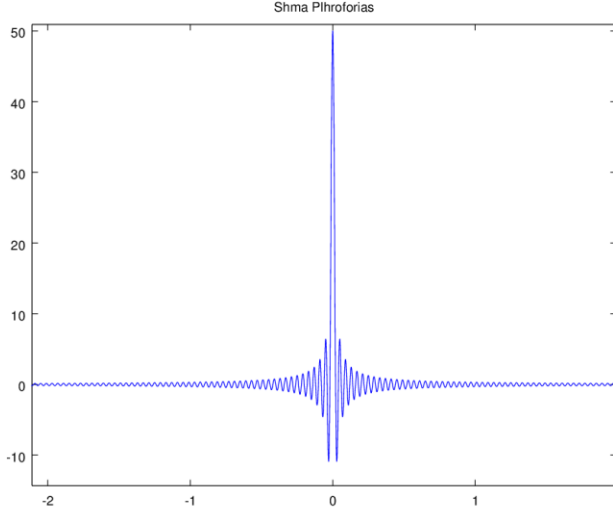
Δ) Το εύρος ζώνης στην περίπτωση διαμόρφωσης ΑΜ θα ήταν

$$W = 2f_m = 600 \text{ Hz}$$

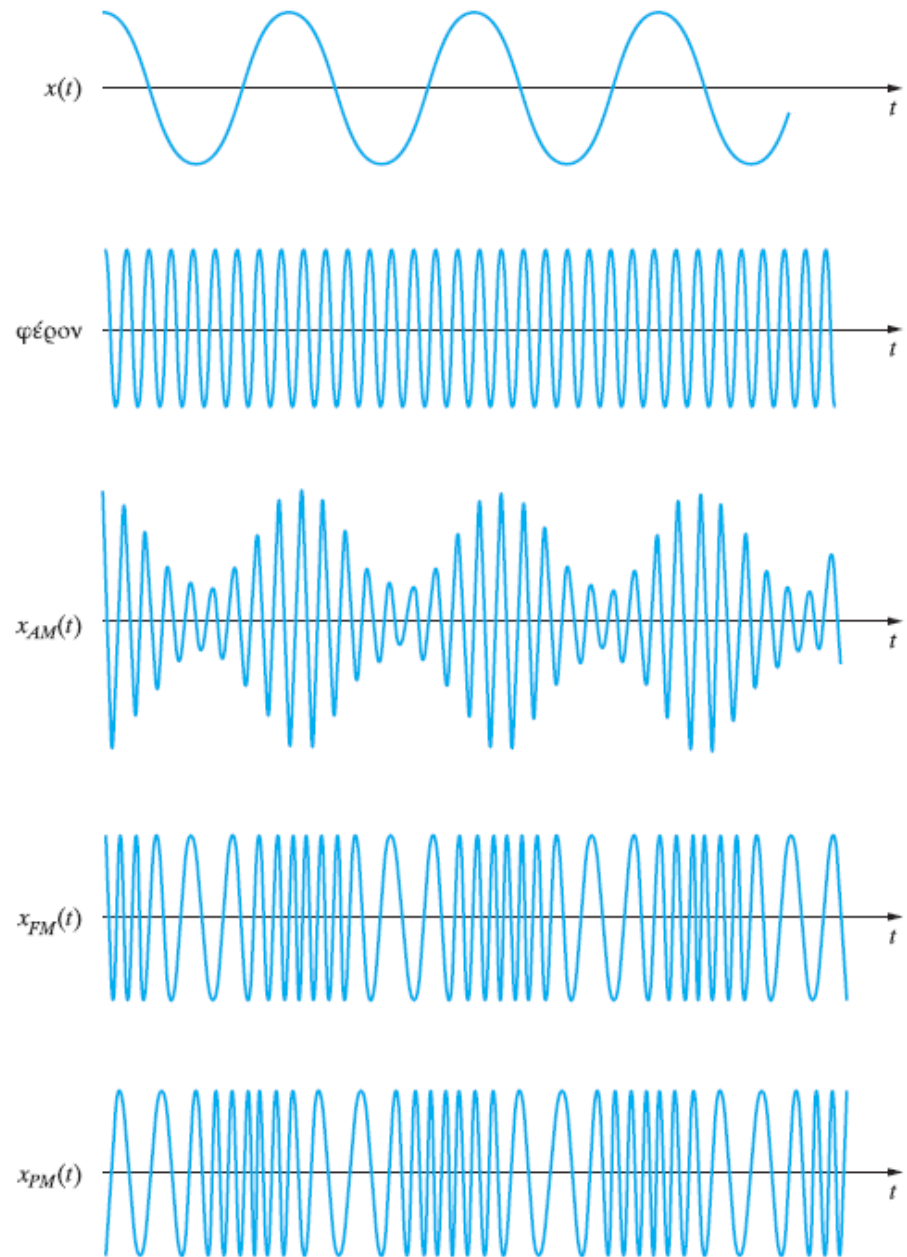
Παράδειγμα Octave



```
clear
fc=1000 %syxnothta ferontos
fs=10000 %syxnothta deigmatolhpsias
Ac=200; %platos ferontos
Ts=1./fs %periodos deigmatolhpsias
t=-100000.*Ts:Ts:100000.*Ts; % Orismos pediou xronou
xm=50.*(sinc(50.*t)).^1; %orismos shmatos plhroforias
plot(t,xm);title('Shma Plhroforias'); % apeikonish shmatos plhroforias sto xrono
[f,ff]=fourier_transform(xm,Ts); %ypologismos fasmatos platoys shmatos plhroforias
figure
plot(f,ff);title('Fasma Plhroforias'); %apseikonish fasmatos platous shmatos plhroforias
xpm=Ac.*cos(2.*pi.*fc.*t+10.*xm); % Shma PM me kp=10
[f,ff]=fourier_transform(xpm,Ts); %ypologismos fasmatos PM
figure
plot(f,ff);title('Fasma PM '); %apeikonish fasmatos PM
figure
plot(t,xpm);title('Shma PM '); %Apeikonish shmatos PM sto xrono
```



Σύγκριση κυματομορφών διαμορφώσεων πλάτους-γωνίας



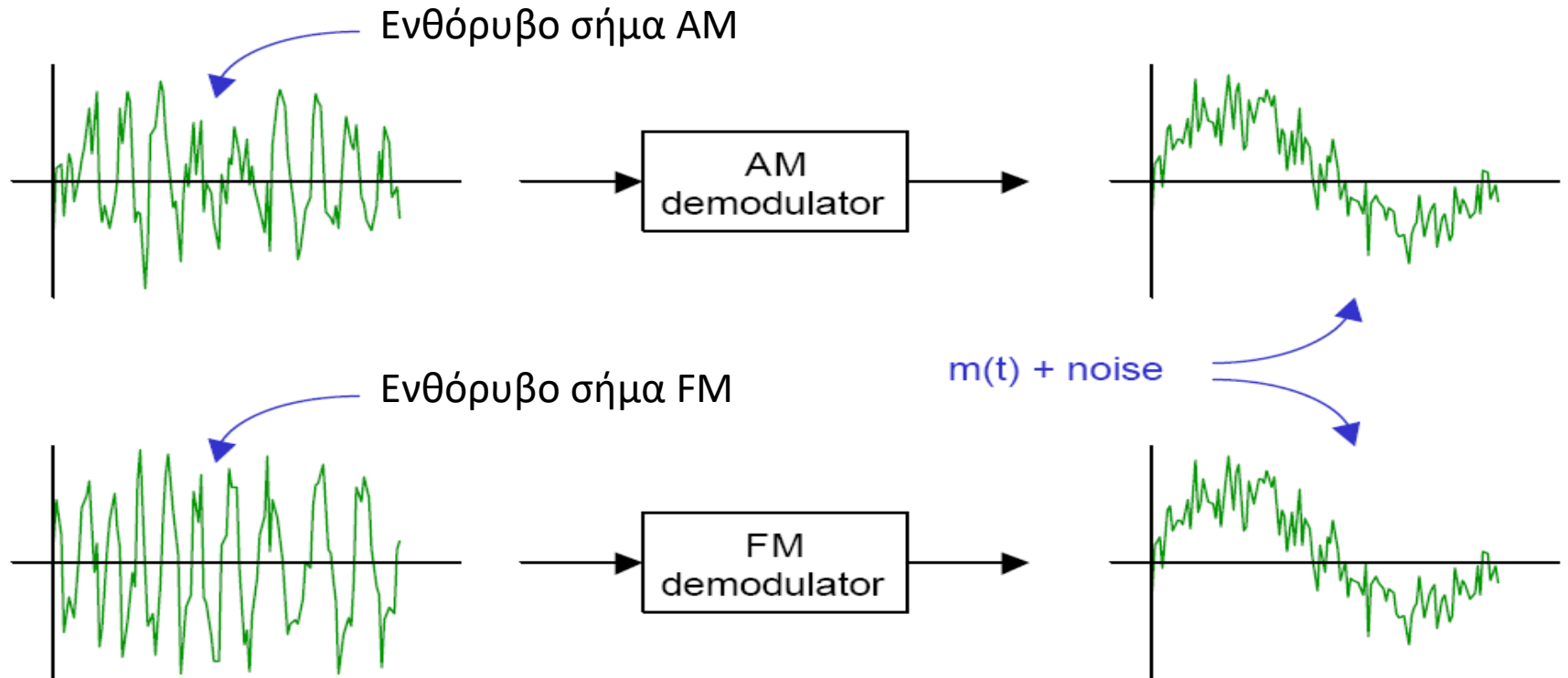
Σχήμα 3.15

*Τα σήματα AM, FM
και PM που
δημιουργούνται για
τη μετάδοση ενός
ημιτονικού σήματος
μηνύματος.*

Αναλογικές Έναντι Ψηφιακών Διαμορφώσεων (1)

Αναλογική διαμόρφωση

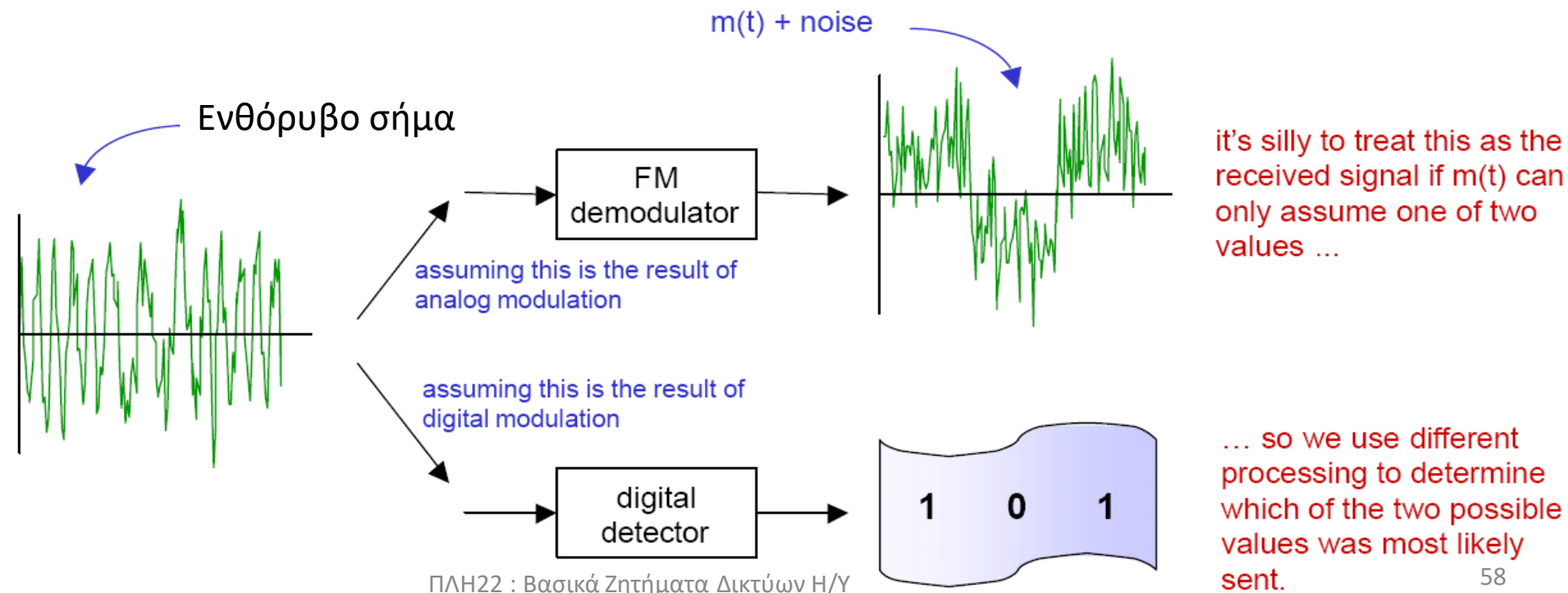
1. Το σήμα $m(t)$ είναι αναλογικό
2. Ο αποδιαμορφωτής πρέπει να αναπαραγάγει το $m(t)$



Αναλογικές Έναντι Ψηφιακών Διαμορφώσεων (2)

Ψηφιακή διαμόρφωση

1. Το $m(t)$ παίρνει μια τιμή από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών
2. Ο αποδιαμορφωτής πρέπει να αποφασίσει ποια από τις πιθανές τιμές έχει μεταδοθεί – δεν υπάρχει ανάγκη πιστής αναπαραγωγής του $m(t)$



Βασικές Αρχές Δειγματοληψίας

Τόμος Β/Μέρος Α

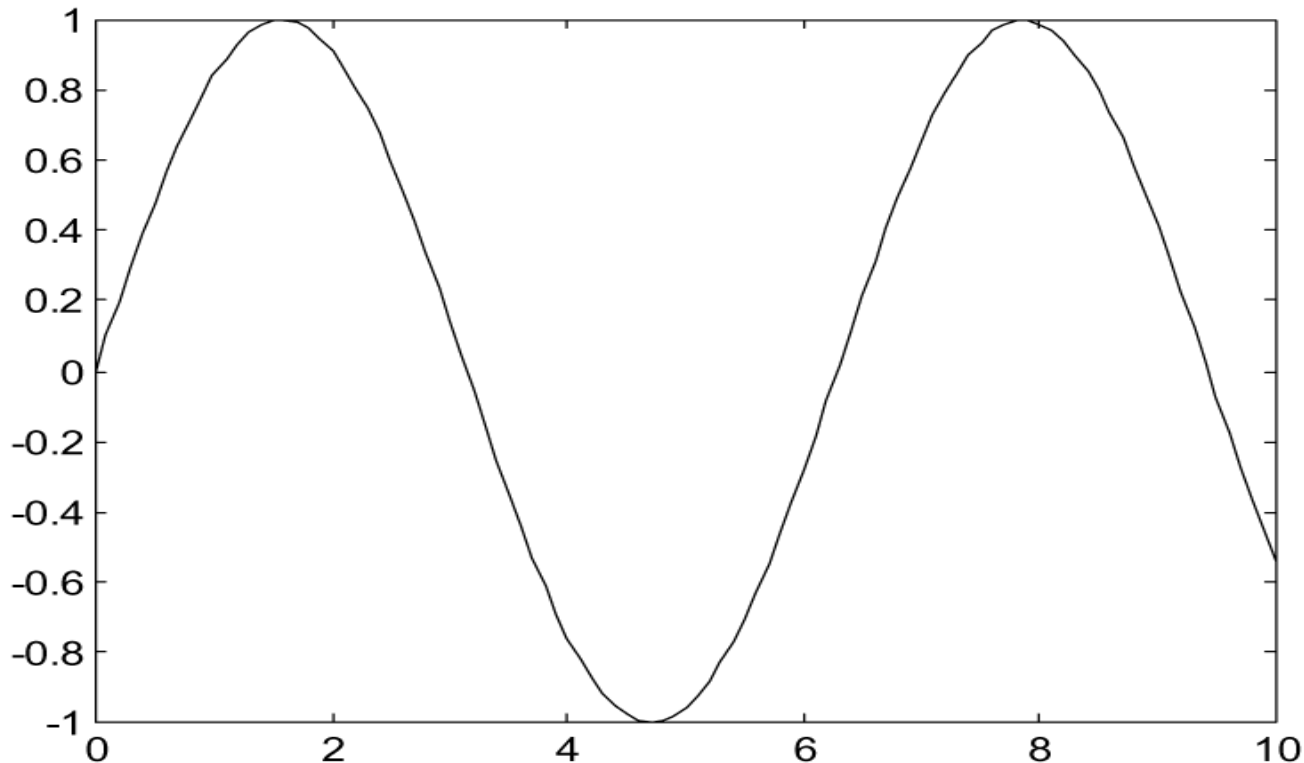
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μετατροπή αναλογικού σήματος σε ψηφιακό

| | |
|---|-----|
| <i>Σκοπός, Προσδοκώμενα Αποτελέσματα, Έννοιες Κλειδιά, Εισαγωγικές Παρατηρήσεις</i> | 109 |
| 4.1 Μετατροπή αναλογικού σήματος σε διακριτό | |
| <i>Προσδοκώμενα Αποτελέσματα</i> | 111 |
| 4.1.1 Θεώρημα δειγματοληψίας | 111 |
| 4.1.2 Φυσική δειγματοληψία | 115 |
| 4.2 Η παλμοκωδική διαμόρφωση | |
| <i>Προσδοκώμενα Αποτελέσματα</i> | 118 |
| 4.2.1 Κβάντιση | 118 |
| 4.2.2 Ομοιόμορφη κβάντιση | 123 |

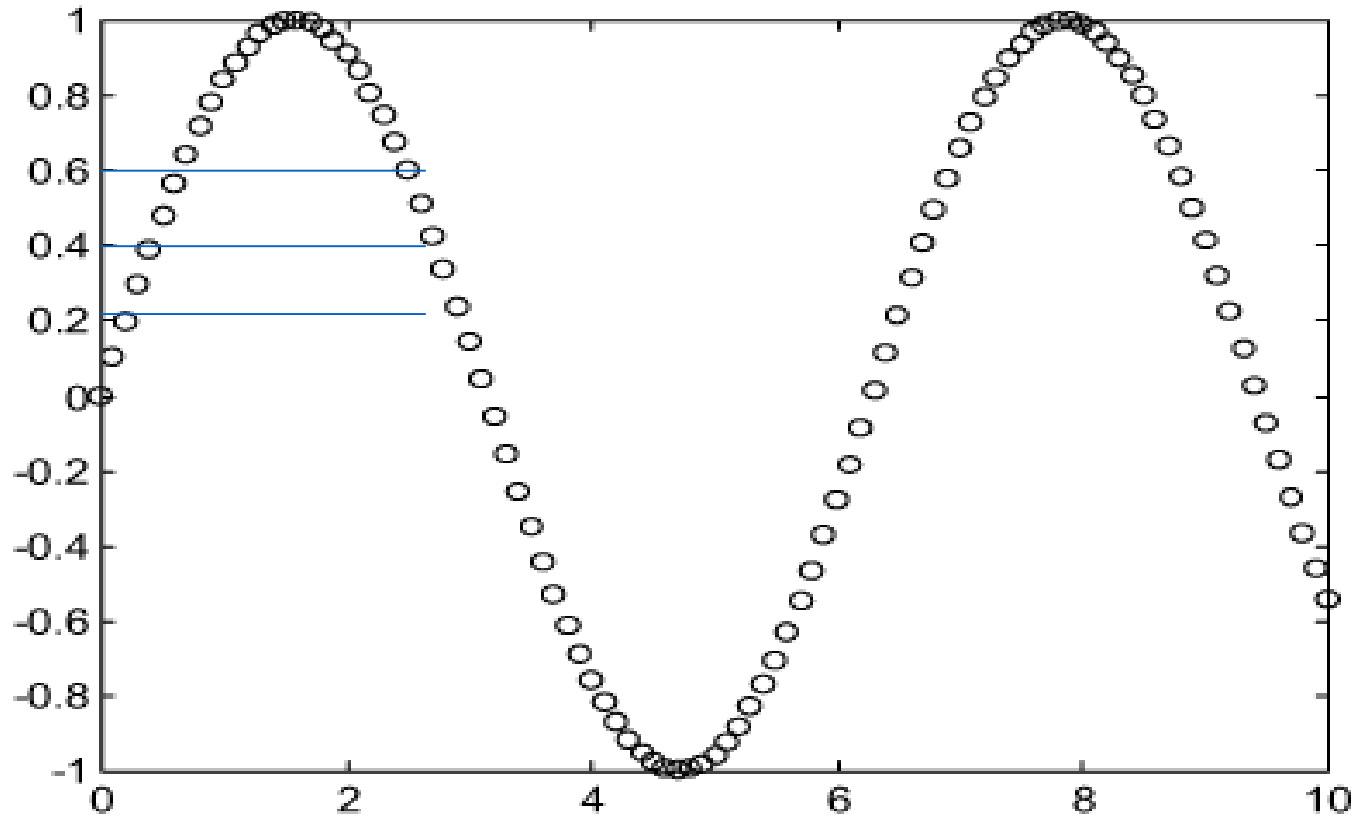
Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (1)

- Τα αναλογικά σήματα (π.χ. η φωνή, το video) είναι σήματα συνεχή στον χρόνο και στο πλάτος (amplitude)



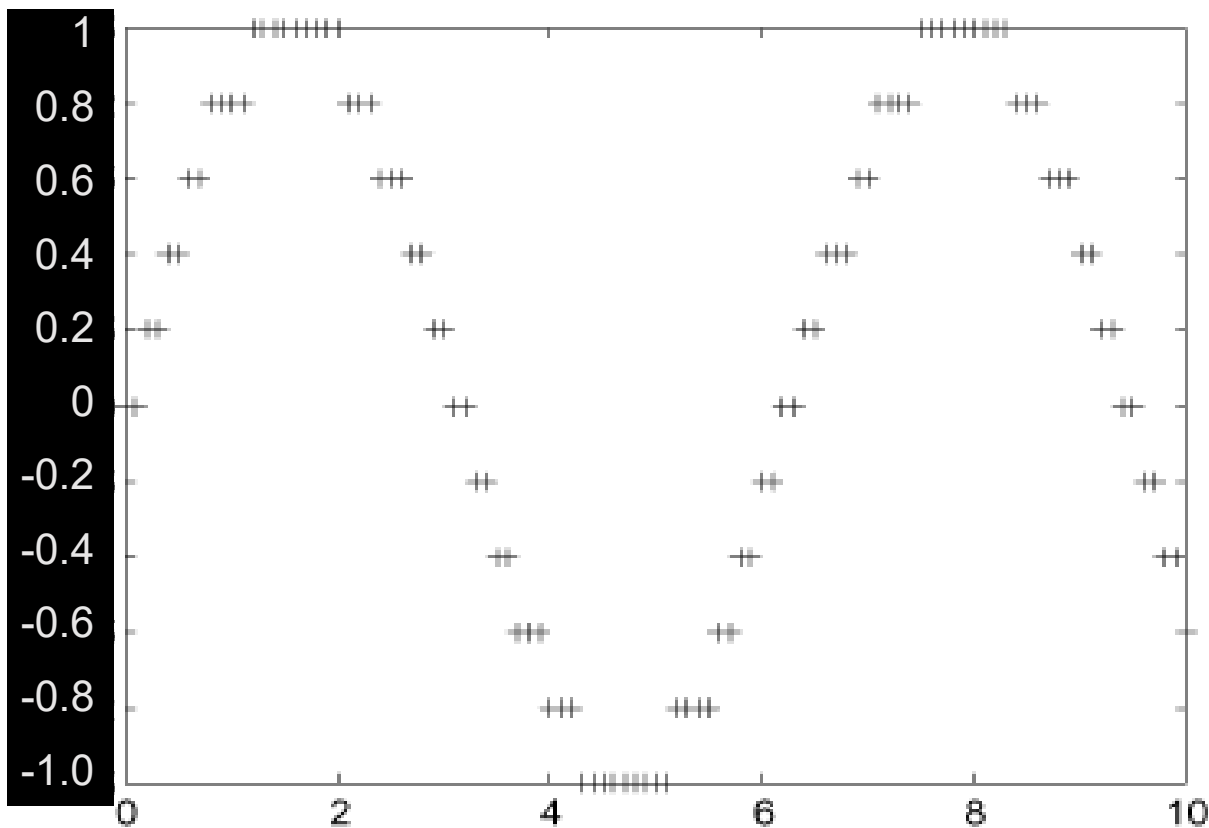
Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (2)

- Με την **δειγματοληψία** τα αναλογικά σήματα μετατρέπονται σε σήματα **διακριτού χρόνου**



Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (3)

- Με την **κβάντιση (Quantization)** τα δείγματα ενός σήματος γίνονται διακριτά ως προς την τιμή τους

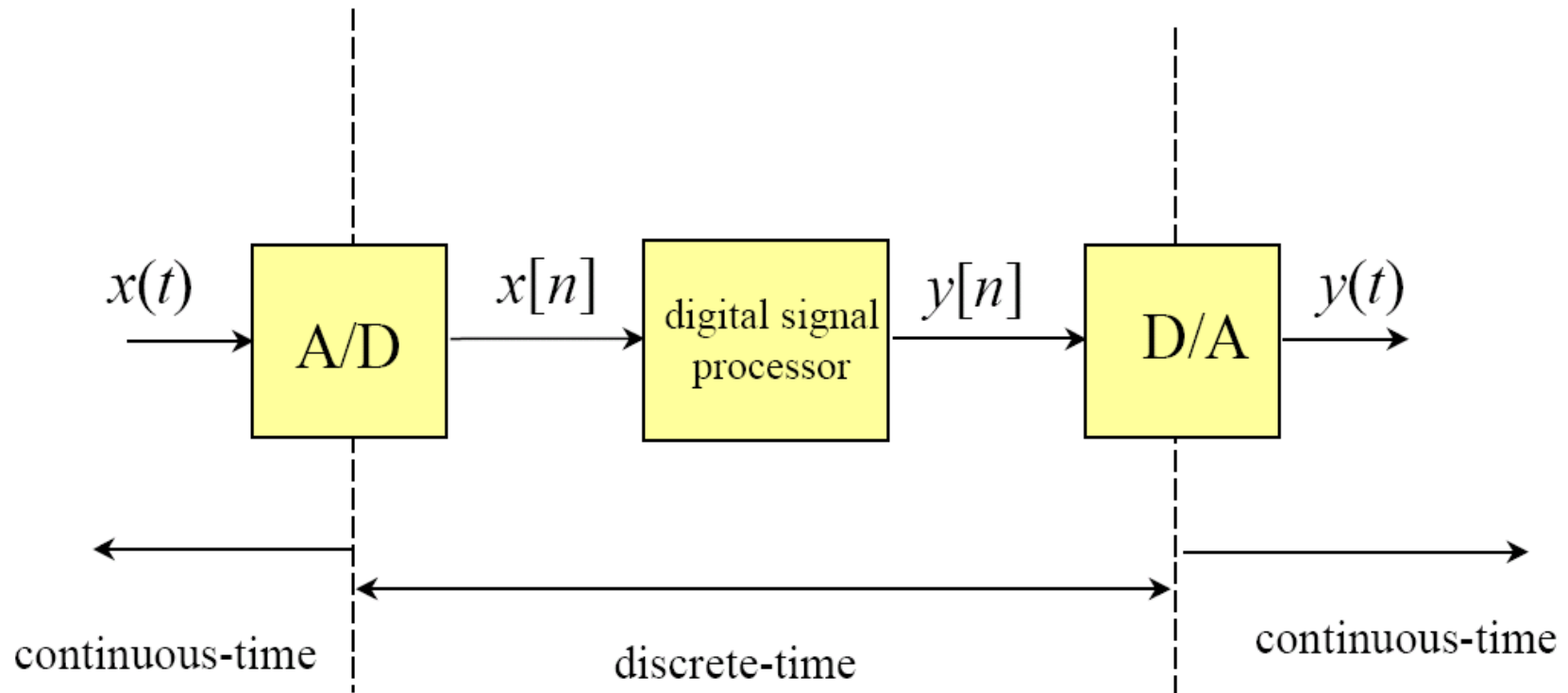


Επίπεδα κβάντισης = 11

Ψηφιακή Παράσταση Αναλογικών Σημάτων (4)

- Εάν γίνει όπως πρέπει η δειγματοληψία (δηλαδή με την σωστή συχνότητα), δεν εισάγει παραμόρφωση στο σήμα.
- Η κβάντιση όμως εισάγει πάντοτε κάποια παραμόρφωση.
 - Η παραμόρφωση μειώνεται αν αυξηθεί ο αριθμός των επιπέδων κβάντισης (= ο αριθμός των απαιτούμενων bits για την κωδικοποίηση)
 - Μπορεί να γίνει ανταλλαγή μεταξύ της παραμόρφωσης και του ρυθμού παραγωγής bits/sec (= των απαιτήσεων σε φάσμα για την μετάδοση του κβαντισμένου σήματος)
- Θα ασχοληθούμε αρχικά με την δειγματοληψία και κατόπιν με την κβάντιση

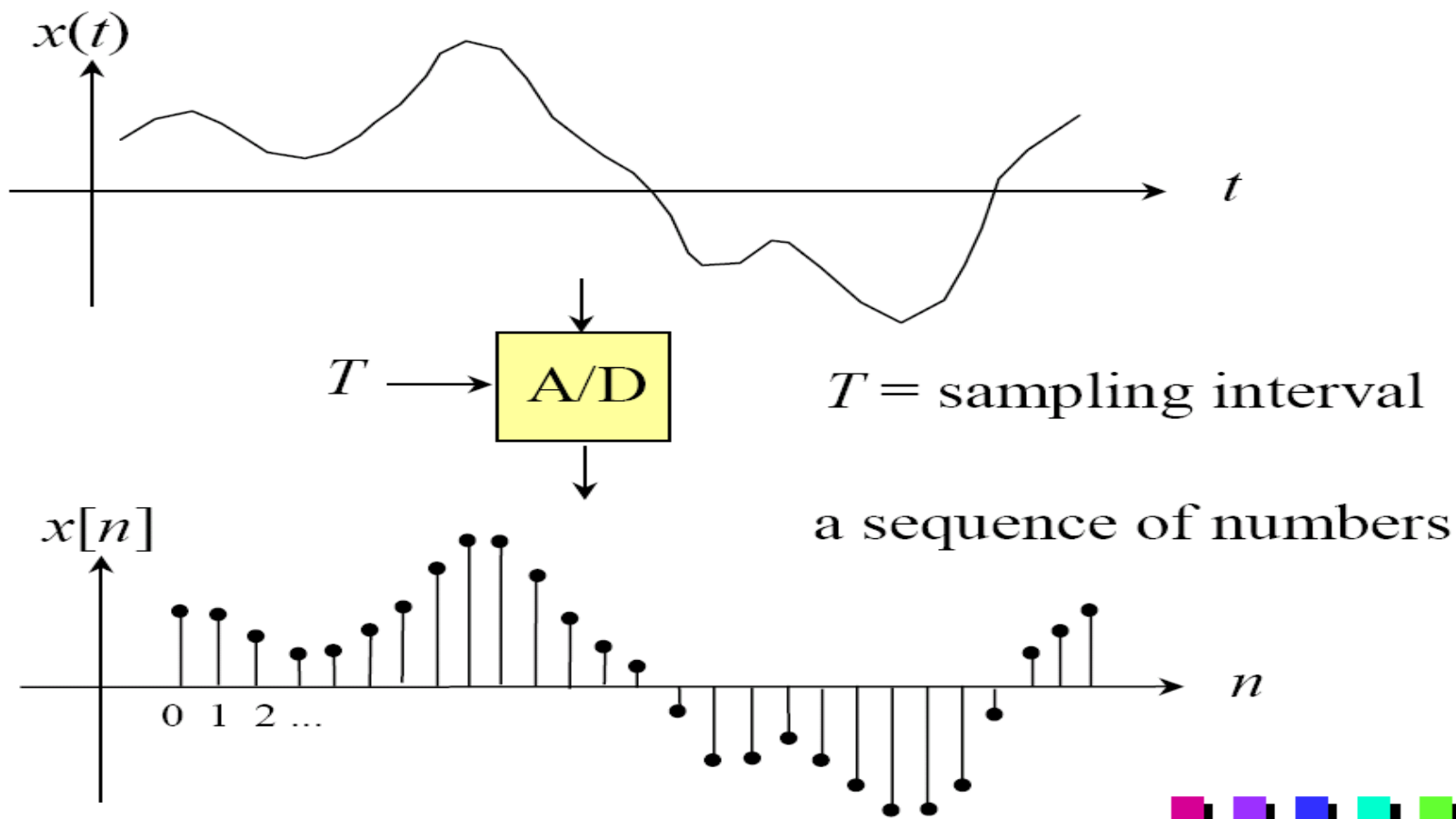
Μετατροπείς A/D και D/A (1)



Μετατροπείς A/D και D/A (2)

- **Ο μετατροπέας Αναλογικού-σε-Ψηφιακό** (Analog to Digital - A/D) κωδικοποιεί την τιμή του δείγματος ενός σήματος σε δυαδικό αριθμό ανάλογο της τιμής αυτής.
- **Ο μετατροπέας Ψηφιακού-σε-Αναλογικό** (Digital to Analog (D/A) μετατρέπει έναν δυαδικό αριθμό σε τάση (ή ένταση) ανάλογη της τιμής του αριθμού αυτού.

Διαδικασία A/D

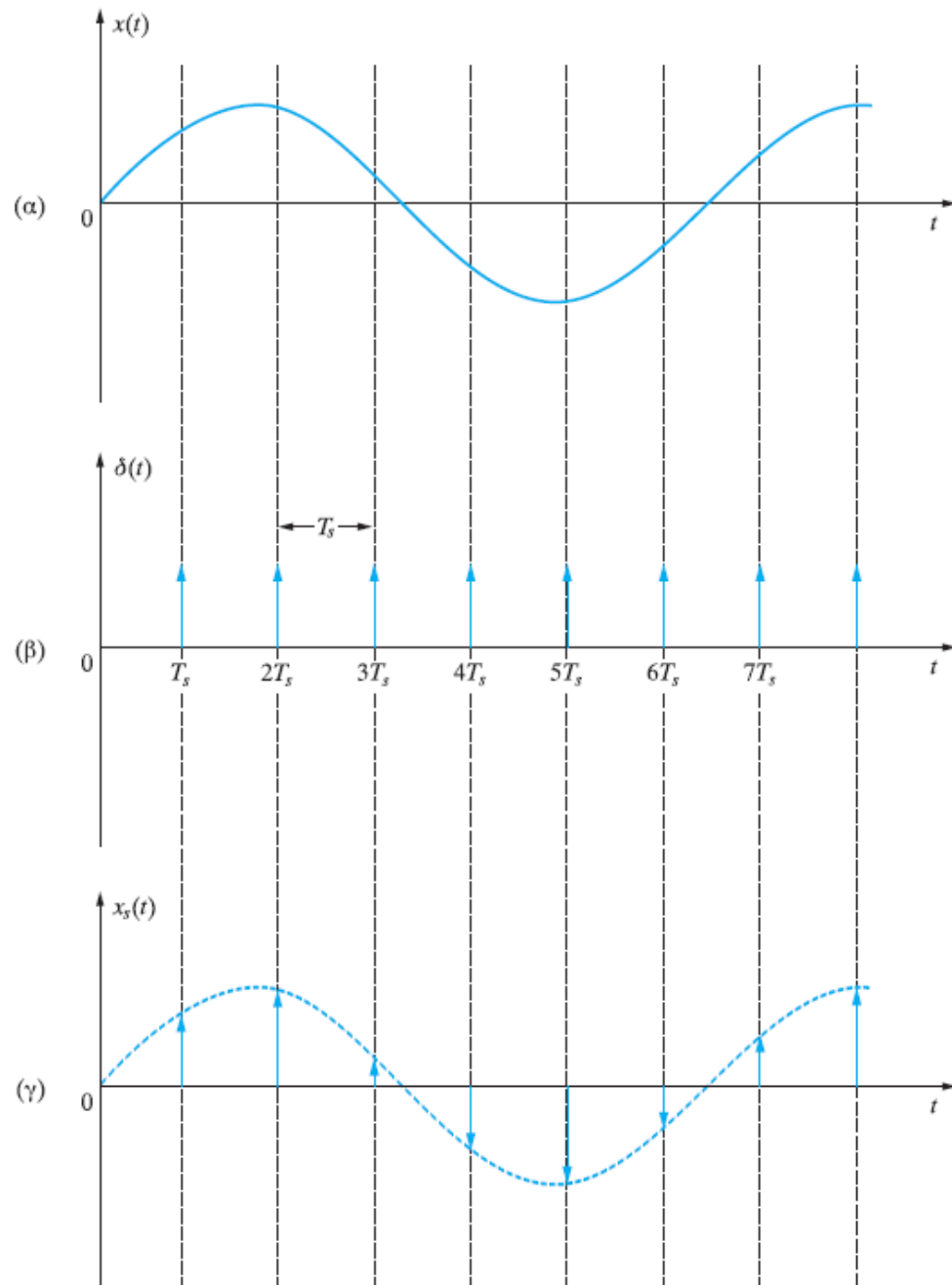


Βασικές Αρχές Δειγματοληψίας

Δειγματοληψία

- Η διαδικασία κατά την οποία ένα σήμα συνεχούς χρόνου μετατρέπεται σε σήμα διακριτού χρόνου.
- Ερωτήματα που τίθενται
 - ρυθμός δειγματοληψίας (φάσμα)
 - τρόπος ανακατασκευής του αρχικού σήματος από τα δείγματα (συνάρτηση παρεμβολής)
- Και στα δύο ερωτήματα απαντά το **θεώρημα της δειγματοληψίας** που διατυπώθηκε από τον Claude Shannon το 1949, ο οποίος στηρίχθηκε στην εργασία του H. Nyquist, που έδωσε το ρυθμό δειγματοληψίας.

Ιδανική Δειγματοληψία



Σχήμα 4.1

Η πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο του χρόνου:
(α) το αρχικό σήμα $x(t)$,
(β) μια σειρά στιγμιαίων παλμών $\delta(t)$, με περίοδο T_s δευτερόλεπτα, και
(γ) το διακριτό σήμα $x_s(t) = x(nT_s)$, $n = 1, 2, \dots$, που προκύπτει από τη δειγματοληψία.

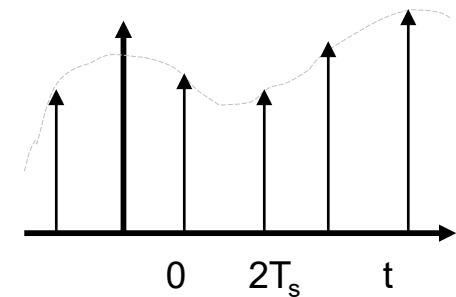
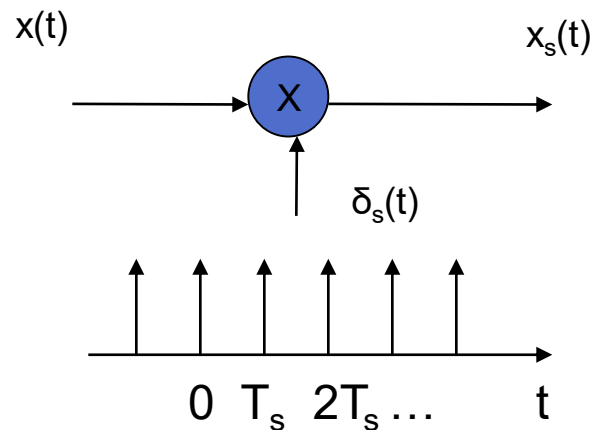
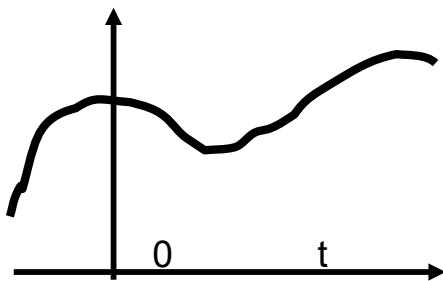
Ιδανική Δειγματοληψία (1)

- Ιδανική δειγματοληψία (Impulse Sampling) είναι η διαδικασία πολλαπλασιασμού ενός σήματος $x(t)$ με μια ακολουθία συναρτήσεων delta $\delta_s(t)$

$$\delta_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

- Το σήμα $x_s(t)$ που προκύπτει από την ιδανική δειγματοληψία είναι:

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$



Ιδανική Δειγματοληψία (2)

- Θεωρούμε το σήμα $x_s(t)$ που προέκυψε από ιδανική δειγματοληψία ενός σήματος $x(t)$

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$

- Η ακολουθία των συναρτήσεων delta επιλέγει τις τιμές του $x(t)$ σε τακτά διαστήματα που απέχουν T_s seconds.
 - Η **περίοδος δειγματοληψίας** είναι T_s και
 - η **συχνότητα δειγματοληψίας** $f_s = 1/T_s$
- Φάσμα δειγματοσιμένου σήματος

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Κριτήριο Δειγματοληψίας Nyquist

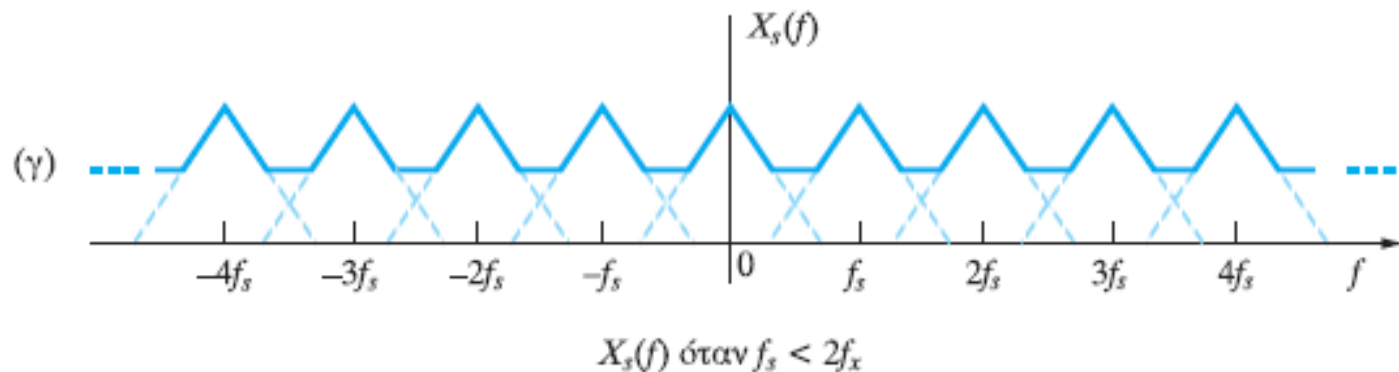
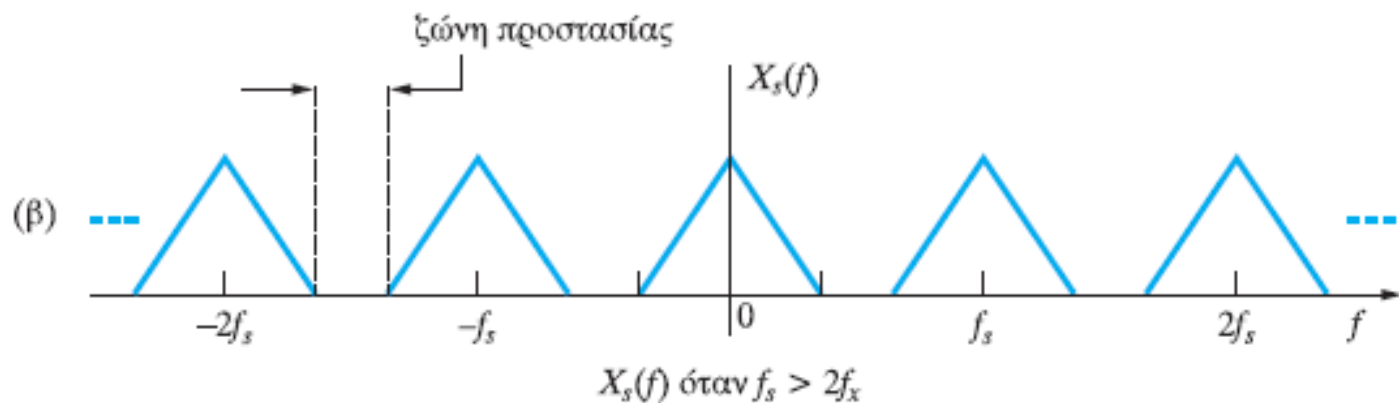
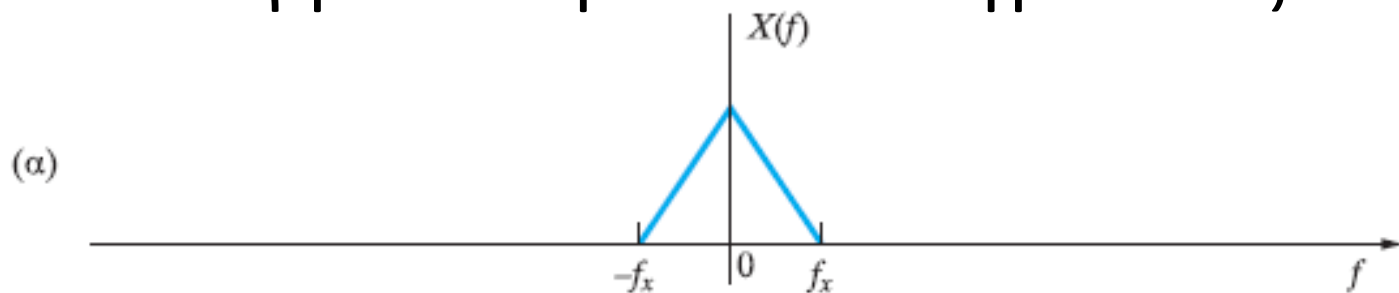
- Έστω σήμα $x(t)$ με περιορισμένο εύρος ζώνης f_x και Μ/Σ Fourier: $X(f) = 0$, για $|f| > f_x$
- Αν συμβολίσουμε με f_s το ρυθμό δειγματοληψίας του σήματος, όπου η μέγιστη συχνότητα του φάσματός του είναι f_x , τότε για να μπορούμε να ανακτήσουμε πλήρως και χωρίς σφάλματα το αρχικό σήμα, θα πρέπει

$$f_s \geq 2 f_x$$

- Ο ρυθμός δειγματοληψίας του Nyquist είναι ο ελάχιστος επιτρεπτός ρυθμός δειγματοληψίας του σήματος που εξασφαλίζει την ορθή επανάκτηση του από τα δείγματά του

$$f_{Nyquist} = f_{s,min} = 2 f_x$$

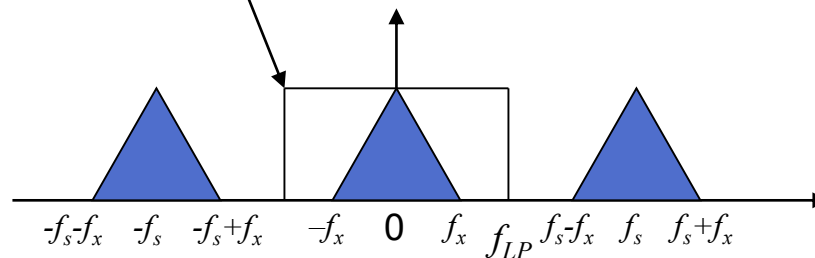
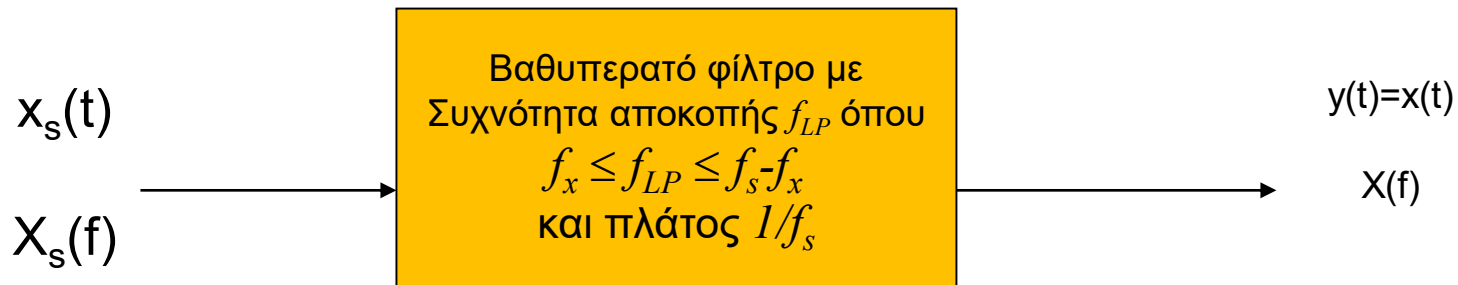
Φάσμα Δειγματοσιμένου Σήματος



Σχήμα 4.2
 Η πράξη της δειγματοληψίας στο πεδίο συχνοτήτων:
 (α) το φάσμα $X(f)$ του σήματος $x(t)$,
 (β) το φάσμα $X_s(f)$ του σήματος $x_s(t)$, που προκύπτει από τη δειγματοληψία, όταν $f_s > 2f_x$ και
 (γ) το φάσμα $X_s(f)$, όταν $f_s < 2f_x$

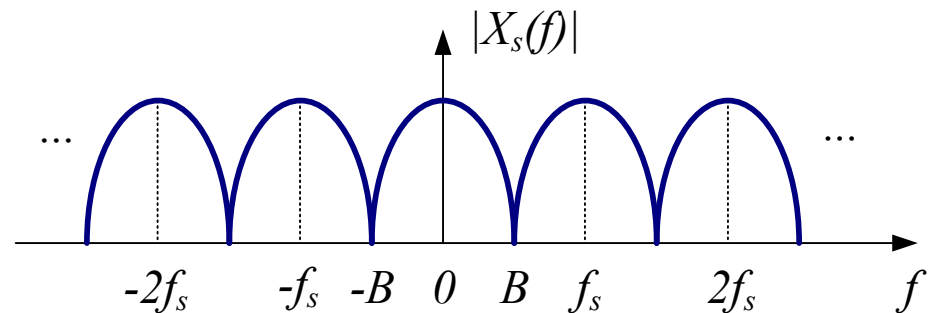
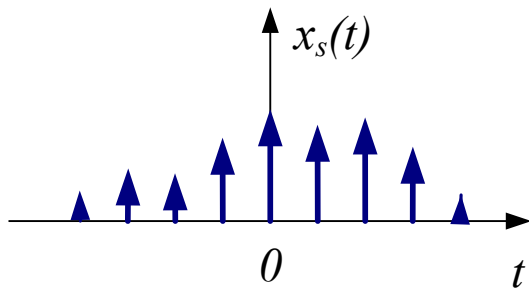
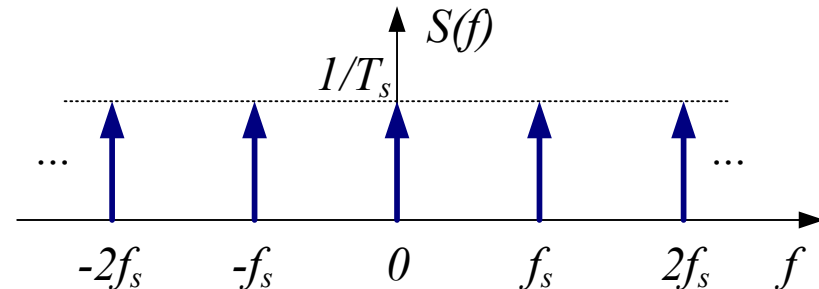
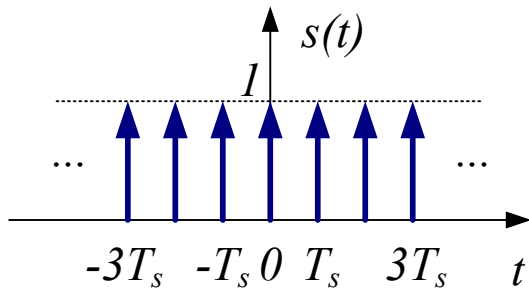
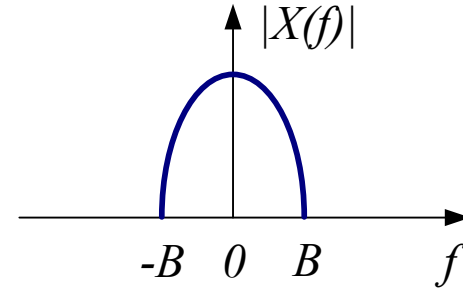
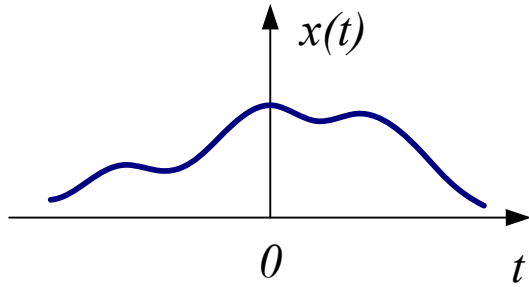
Ανάκτηση του αρχικού σήματος

- Το σήμα διέρχεται μέσα από ένα βαθυπερατό φίλτρο το οποίο επιτρέπει την διέλευση μόνο του 'κεντρικού' φάσματος .



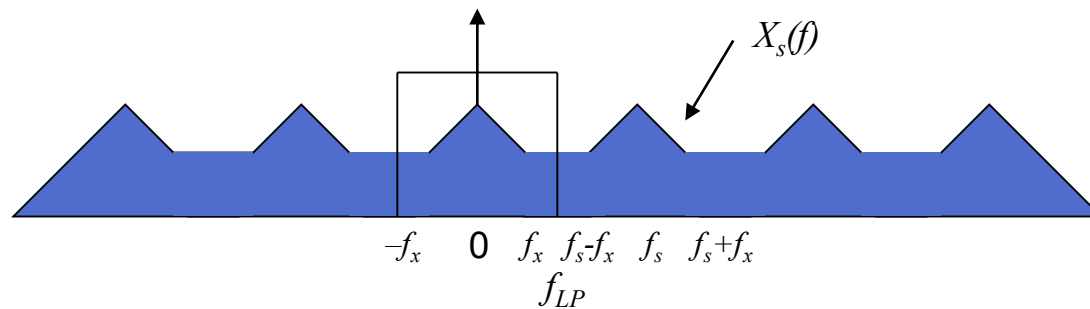
Αν $f_s \geq 2f_x$ το $x(t)$ ανακτάται ακριβώς από τα δείγματα του (Κριτήριο Nyquist)

Ιδανική Δειγματοληψία

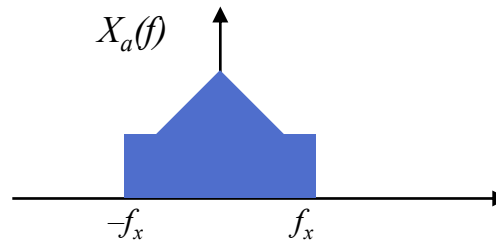


Υπο-δειγματοληψία και aliasing

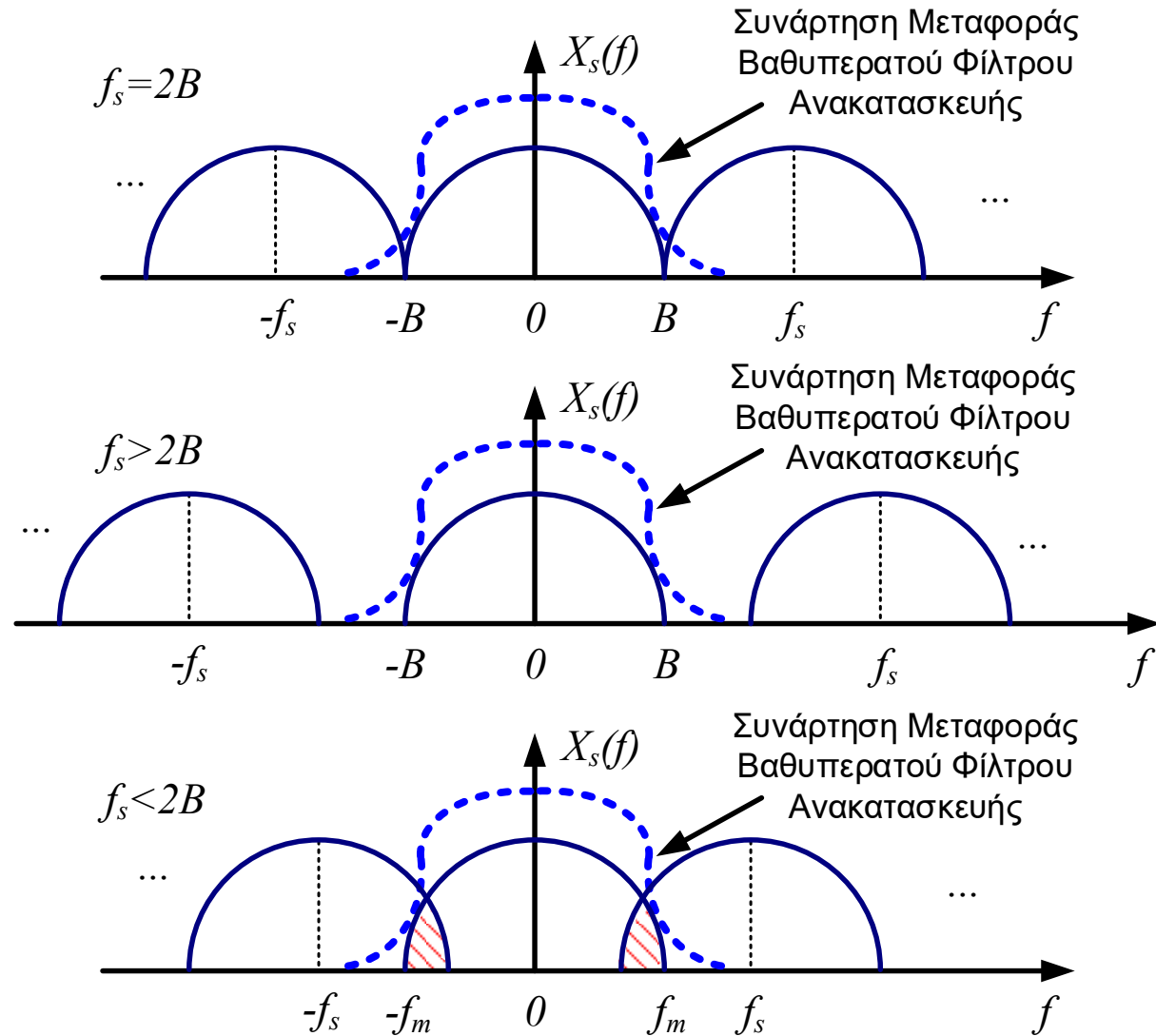
- Αν το σήμα υποστεί δειγματοληψία με συχνότητα $f_s < 2f_x$ τότε θα έχουμε υπερέκλυση των περιοδικά επαναλαμβανόμενων φασμάτων $X(f-nf_s)$ στο φάσμα του $X_s(f)$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



- Το σήμα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου θα διαφέρει από το αρχικό σήμα (aliasing)

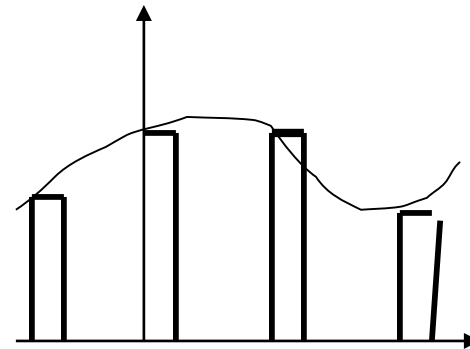
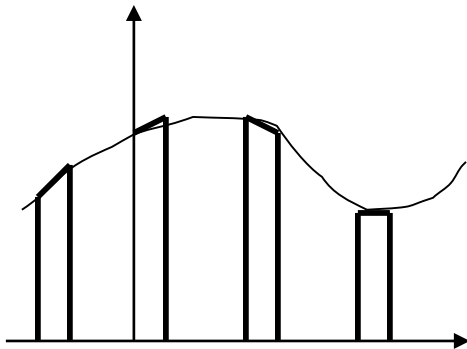


Δειγματοληψία

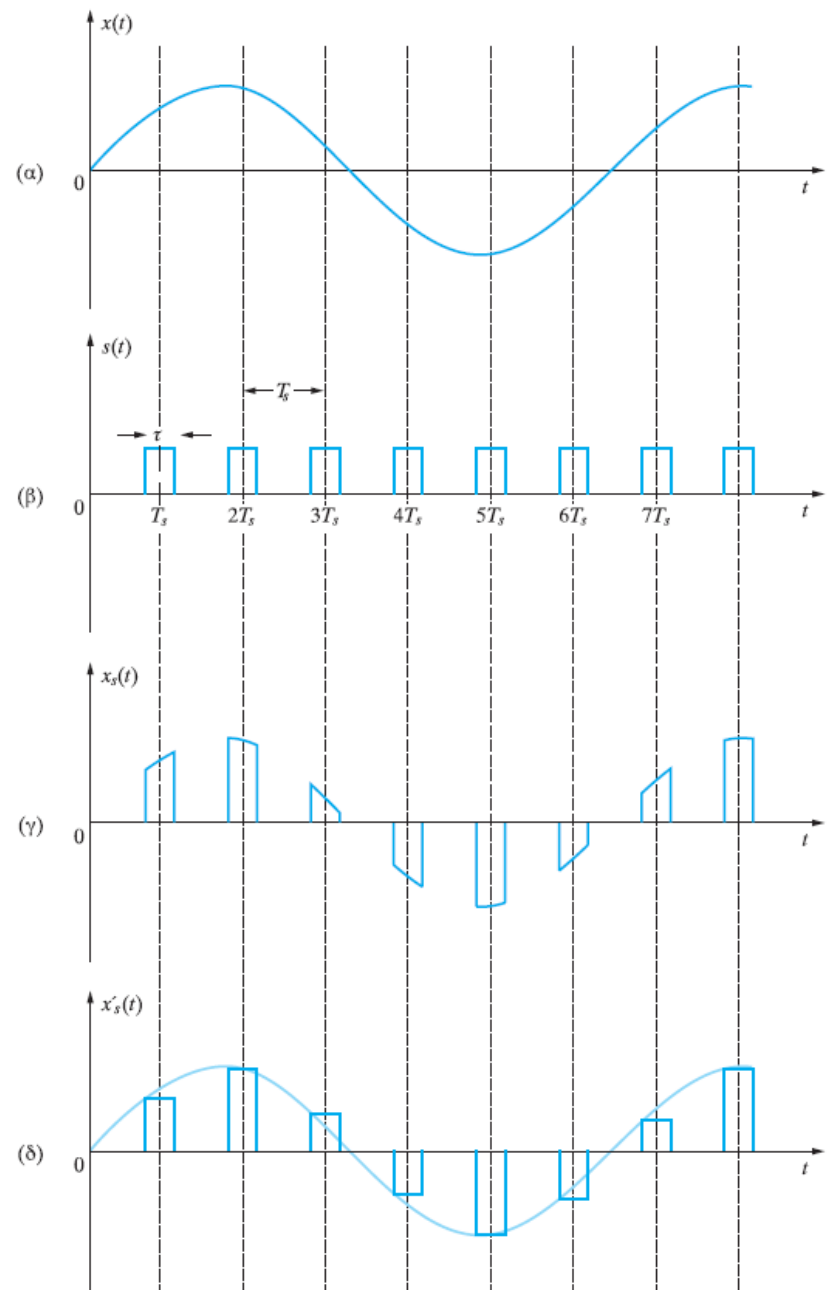


Άλλες μορφές Δειγματοληψίας

- Στην πράξη η δειγματοληψία γίνεται
 - Με δείγματα πεπερασμένης διάρκειας (αντί για ακολουθία συναρτήσεων delta χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διάρκειας)
 - Με δείγματα με επίπεδη κορυφή όπου και πάλι χρησιμοποιούνται παλμοί πεπερασμένης διάρκειας με ύψος όσο η τιμή του σήματος κατά την αρχή του παλμού
 - Συγκλίνουν στην ιδανική δειγματοληψία όταν η διάρκεια μικραίνει.



Φυσική Δειγματοληψία



Σχήμα 4.3

Φυσική

δειγματοληψία:

(α) το αρχικό
σήμα $x(t)$,

(β) η συνάρτηση
δειγματοληψίας $s(t)$

με παλμούς πεπερα-
σμένου εύρους τ ,

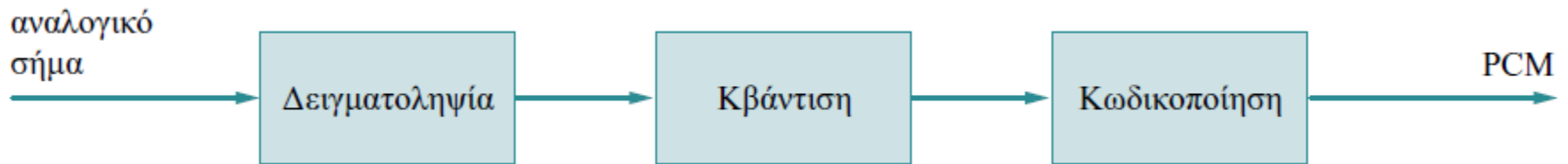
(γ) το σήμα $x_s(t)$ της
φυσικής δειγματολη-
ψίας με δείγματα με-
ταβλητού πλάτους
και

(δ) το σήμα $x'_s(t)$ με
δείγματα σταθερού
πλάτους

Τυπικές συχνότητες δειγματοληψίας

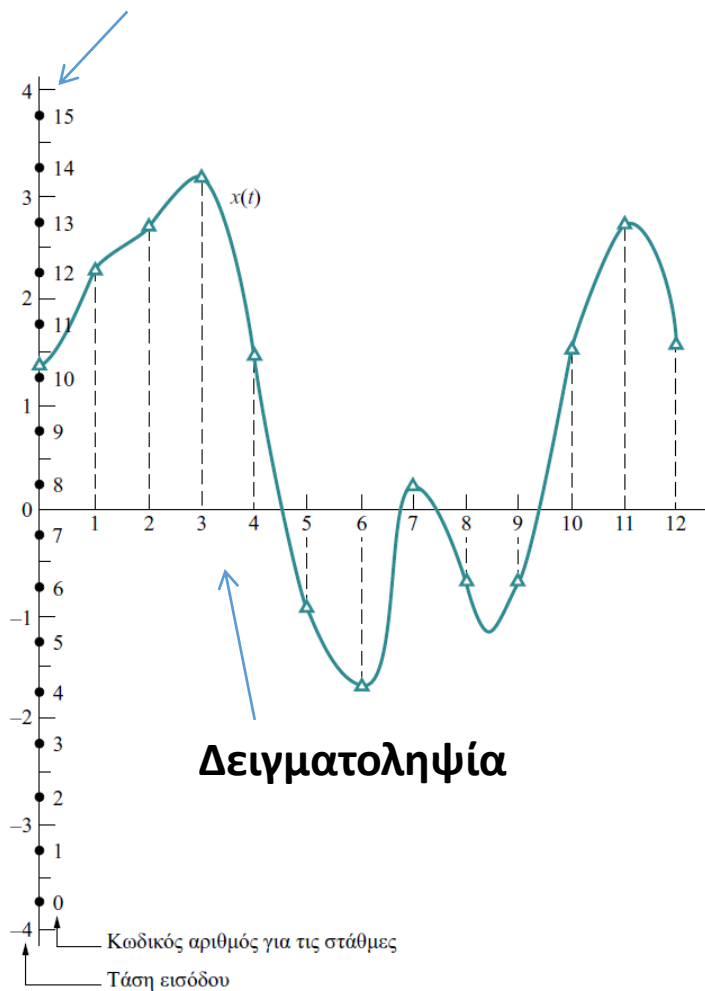
- Σήματα φωνής:
 - Τηλεφωνικής ποιότητας φωνή έχει εύρος φάσματος 300 Hz εως 4000 Hz
 - Τα περισσότερα συστήματα ψηφιακής τηλεφωνίας κάνουν δειγματοληψία με 8000 samples/ sec.
- Ακουστικά σήματα:
 - Η υψηλότερη συχνότητα που αντιλαμβάνεται το ανθρώπινο αυτί είναι περίπου 15 kHz.
 - Στα CDs η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 44000 samples/sec.
- Σήματα Video:
 - Το μάτι χρειάζεται δείγματα με ρυθμό τουλάχιστον 20 πλαίσια/sec για να δημιουργηθεί η εντύπωση ομαλής κίνησης

Παλμοκωδική Διαμόρφωση (PCM)



Παράδειγμα

Κβάντιση



Κωδικοποίηση

| Αριθμός δείγματος | $x_s(t)$ | $x_q(t)$ | Αριθμός στάθμης | Δυαδική τιμή αριθμού στάθμης |
|-------------------|----------|----------|-----------------|------------------------------|
| 0 | 1,3 | 1,25 | 10 | 1010 |
| 1 | 2,3 | 2,25 | 12 | 1100 |
| 2 | 2,7 | 2,75 | 13 | 1101 |
| 3 | 3,2 | 3,25 | 14 | 1110 |
| 4 | 1,45 | 1,25 | 10 | 1010 |
| 5 | -0,9 | -0,75 | 6 | 0110 |
| 6 | -1,7 | -1,75 | 4 | 0100 |
| 7 | 0,3 | 0,25 | 8 | 1000 |
| 8 | 0,7 | 0,75 | 9 | 1001 |
| 9 | 0,7 | 0,75 | 9 | 1001 |
| 10 | 1,6 | 1,75 | 11 | 1011 |
| 11 | 2,8 | 2,75 | 13 | 1101 |
| 12 | 1,7 | 1,75 | 11 | 1011 |

Διαδικασία Κβάντισης

Μέγιστο Σφάλμα
ομοιόμορφης κβάντισης: $\frac{\Delta}{2}$

Αριθμός σταθμών κβάντισης:

$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{\Delta} = \frac{V_{p-p}}{\Delta}$$

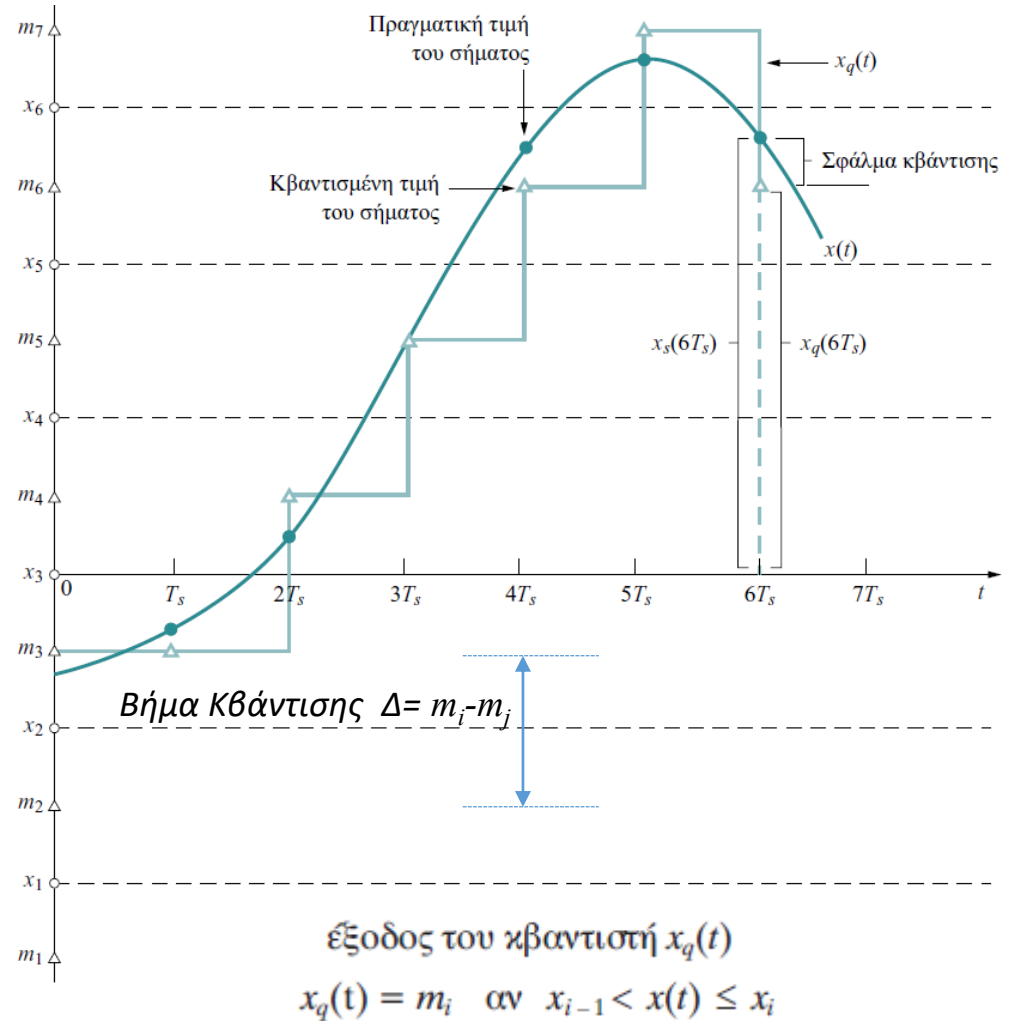
Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης:

$$SNR_q = 10 \log_{10} (Q^2)$$

Αριθμός απαιτούμενων δυαδικών bits
ανά στάθμη κβάντισης:

$$n = \lceil \log_2 (Q) \rceil$$

Q στάθμες κβάντισης m_1, m_2, \dots, m_Q



Εύρος Ζώνης PCM

εάν f_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας,

τότε ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας θα είναι ίσος με $f_s \log_2 L$ bits/sec.

Όμως

στα δυαδικά συστήματα τα κανάλια βασικής ζώνης μπορούν να μεταφέρουν μέχρι

2 bits/sec/Hz,

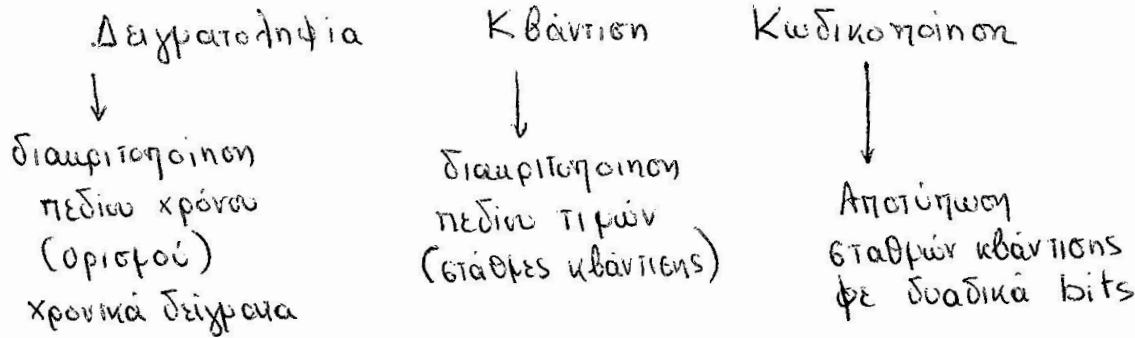
Άρα

το απαιτούμενο εύρος ζώνης, B_{PCM} , του σήματος PCM εκφράζεται

από τον τύπο

$$B_{\text{PCM}} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L$$

Διαμόρφωση PCM



Υπόθεση: Συχνότητα Δειγματοληψίας f_s $\frac{\text{samples}}{\text{sec}}$

πλήθος σταθμών κβάντισης: L

⇒ bits / στάθμη κβάντισης: $\eta = \lceil \log_2 L \rceil$ $\frac{\text{bits}}{\text{sample}}$

⇒ Ρυθμός Μετάδοσης Δειγματοστένου σήματος (PCM) $f_s \frac{\text{samples}}{\text{sec}} \cdot \lceil \log_2 L \rceil \frac{\text{bits}}{\text{sample}}$

Δυαδικά Συστήματα: μεταφορά $2 \frac{\text{bits/sec}}{\text{Hz}}$ στο κανάλι βασικής f_0 Hz

⇒ Εύρος f_0 Hz PCM σήματος: $B_{\text{PCM}} = \frac{1}{2} f_s \cdot \log_2 L$ Hz

Σηματοθεωρητικός λόγος κβάντισης (ορισμένη κβάντιση) $S_{\text{QNR}} = 10 \log_{10} L^2 = 20 \log_{10} L$

Παραδείγματα δειγματοληψίας στο octave

Βασικά σημεία

- Προκειμένου να αναπαρασταθεί ένα αναλογικό σήμα και να δειγματοποιηθεί, θα πρέπει να υποτεθεί μια μεγαλύτερη συχνότητα δειγματοληψίας
- Δημιουργία ενός 'αναλογικού' σήματος $x(t)$ με συχνότητα δειγματοληψίας (fd) πολλαπλάσια αυτής που θα χρησιμοποιηθεί στο δειγματοποιημένο σήμα (fs) $f_d = k f_s$
- Δημιουργία του δειγματοποιημένου σήματος x_s από το αναλογικό με λήψη 1 δείγματος ανά k από τα δείγματα του αναλογικού σήματος. Τα υπόλοιπα δείγματα μηδενίζονται.
- Εφαρμογή ΜΣ Fourier με χρήση της συνάρτησης `fourier_transform_1.m` (επικαιροποιημένη έκδοση της `fourier_transform.m` που λαμβάνει υπόψη τη χρήση των ανωτέρω 2 δειγματοληψιών)
- Σημείωση: Τα φάσματα των δειγματοποιημένων σημάτων έχουν πλάτος πολλαπλάσιο του αρχικού (με τη συχνότητα δειγματοληψίας), λόγω της σχέσης:

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_s)$$

Συνάρτηση fourier_transform_1.m

```
function [f,X ] = fourier_transform_1( x,Td,Ts)
%function to implement Fourier Transform
% FFT size
L=length(x);
Nfft=size(x,2);
Nfft=16384;% 8192;
if Td==Ts,
    factor=Td;
else
    factor=1;
end
% Compute amplitude spectrum
X=factor.*abs(fftshift(fft(x,Nfft)));
% Frequency range centered at zero, -Fs/2 to Fs/2, Fs=1/Ts
%Here we are calculating the Fourier series coefficients.
%The command fftshift modifies the output of fft so that the zero-frequency
%component is in the middle of the vector f.
%(Now, we look at a spectrum symmetric about ! = 0.)
f = (1/Td)*(-Nfft/2:Nfft/2-1)/Nfft;
end
```

Παράδειγμα 1 (σήμα θέματος 3/ ΓΕ3)

```
clear
fs=12; % syxnothta deigmatolhyias deigmatismenou shmatos
fd=12.*10; % syxnothta deigmatolhyias 'analogikou'
shmatos (k=10)
Ts=1./fs;
Td=1./fd;
t=-20:Td:20; % xronika deigmata
xt=(10*sinc(10*t)-5*sinc(5*t).^2); %kumatomorphh
analogikou shmatos
sx=size(t,2);
fact=zeros(1,sx);
padding=fd./fs;
fact(1:padding:sx)=1;
xs=xt.*fact; % deigmatismeno shma (1 deigma ana Ts)
```

```

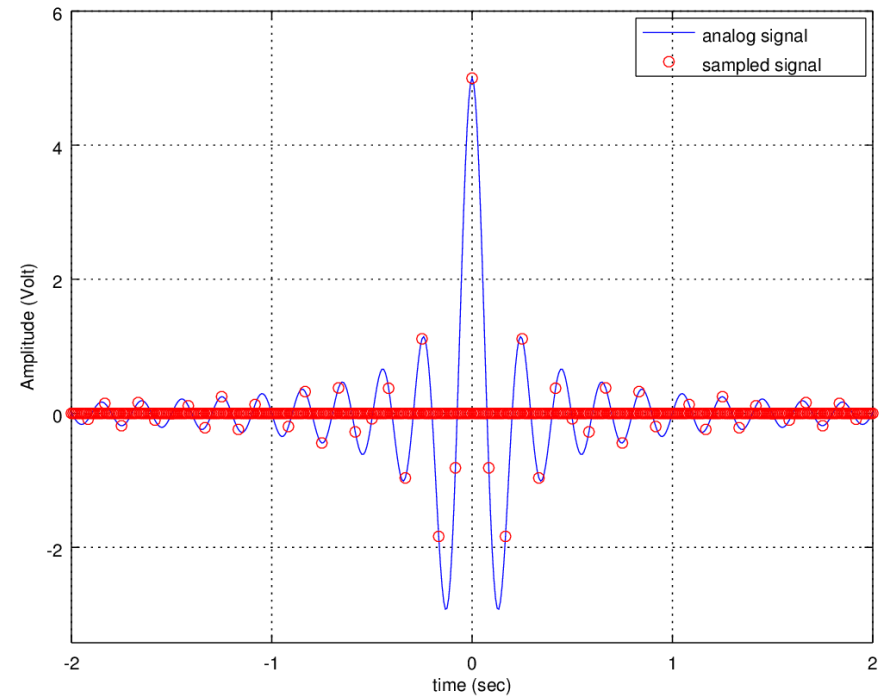
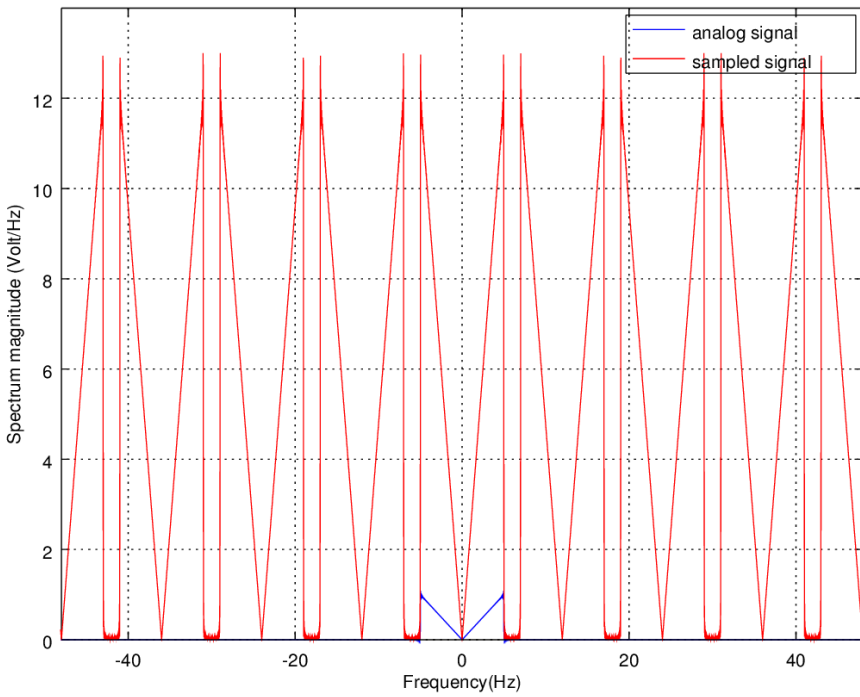
figure;
hold on;
[f ff]=fourier_transform_1(xt,Td,Td);
plot(f,ff,'-');
[g gg]=fourier_transform_1(xs,Td,Ts);
plot(g,gg,'r-');
grid
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Spectrum magnitude (Volt/Hz)');
legend('analog signal','sampled signal');
axis([-4.*fs 4.*fs 0 max(gg)+1]);

```

```

figure
plot(t,xt,'b-');
hold;
plot(t,xs,'ro');
grid
legend('analog signal','sampled signal');
xlabel('time (sec)');
ylabel('Amplitude (Volt)');
axis([-2 2 min(xt)-0.5 max(xt)+1]);

```



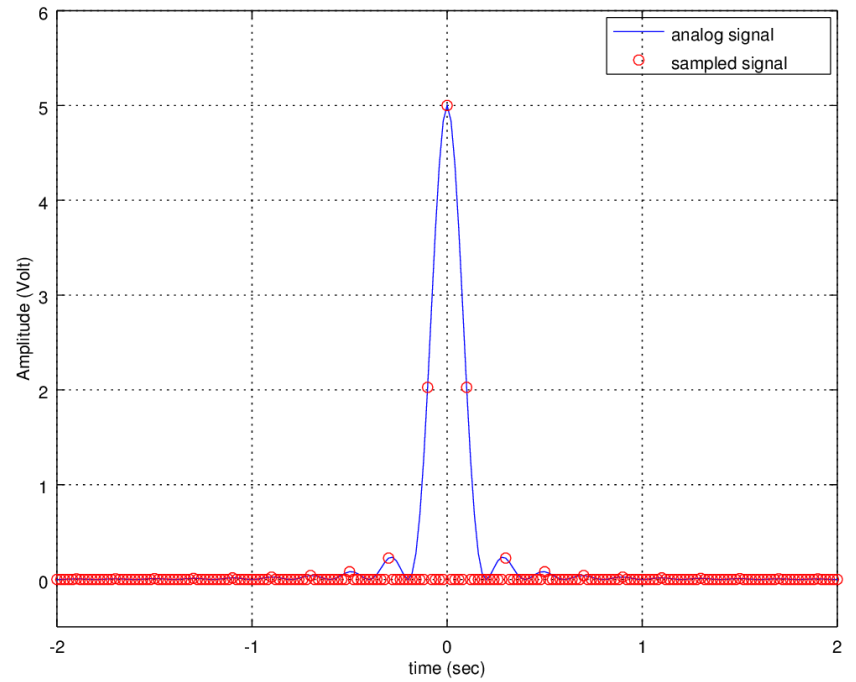
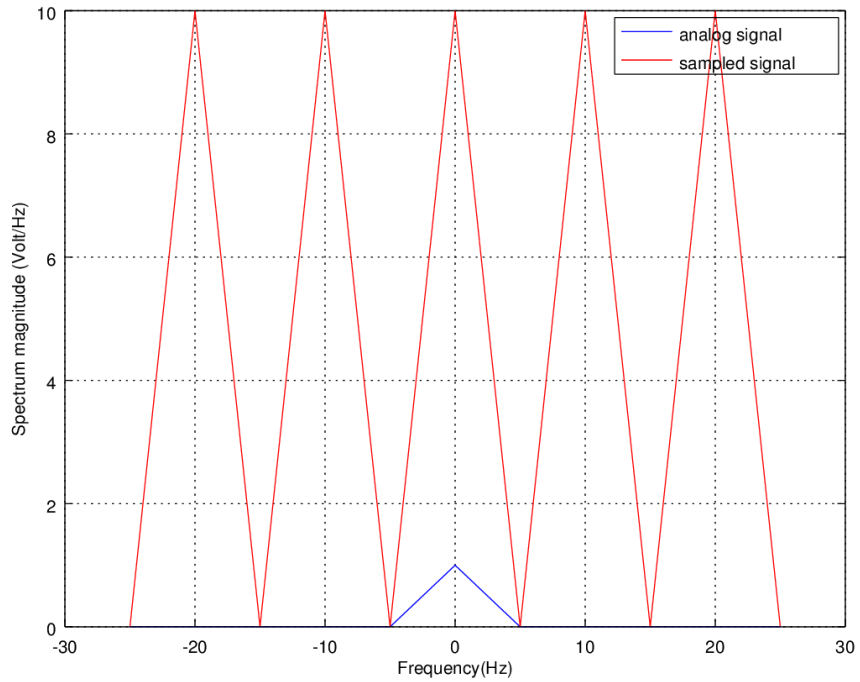
Παράδειγμα 2

```
clear
fs=10;
fd=fs.*5; % k=5
Ts=1./fs;
Td=1./fd;
t=-20:Td:20;
xt=(5.*(sinc(5.*t)).^2);
sx=size(t,2);
fact=zeros(1,sx);
padding=fd./fs;
fact(1:padding:sx)=1;
xs=xt.*fact;
```

```

figure;
hold on;
[f ff]=fourier_transform_1(xt,Td,Td);
plot(f,ff,'-');
[g gg]=fourier_transform_1(xs,Td,Ts);
plot(g,gg,'r-');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Spectrum magnitude (Volt/Hz)');
legend('analog signal','sampled signal');
axis([-4.*fs 4.*fs 0 max(gg)+1]);
grid;
figure
plot(t,xt,'b-');
hold;
plot(t,xs,'ro');
grid;
legend('analog signal','sampled signal');
xlabel('time (sec)');
ylabel('Amplitude (Volt)');
axis([-2 2 min(xt)-0.5 max(xt)+1]);

```



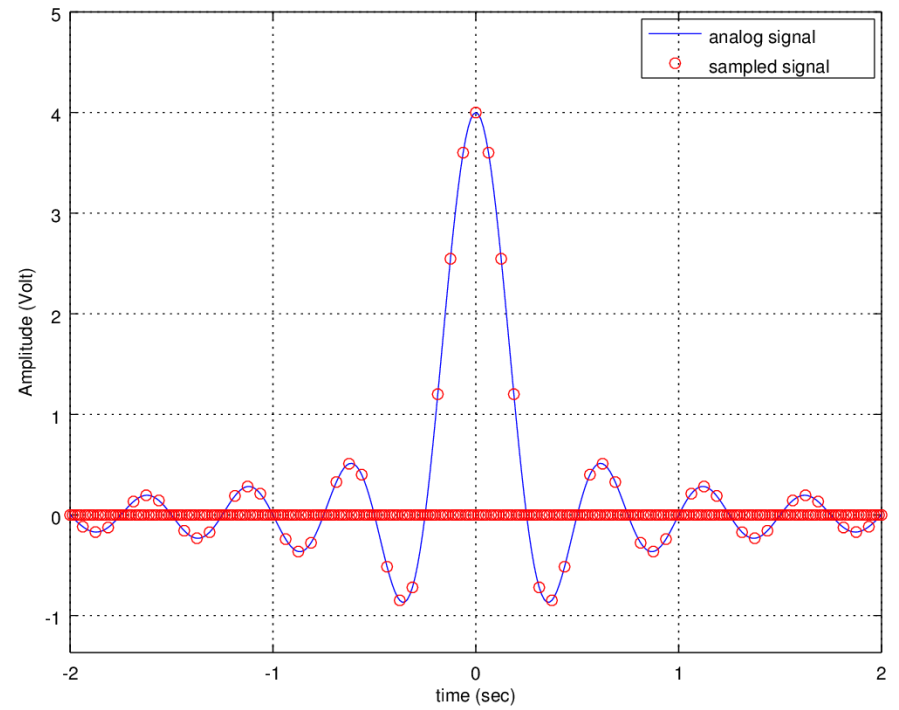
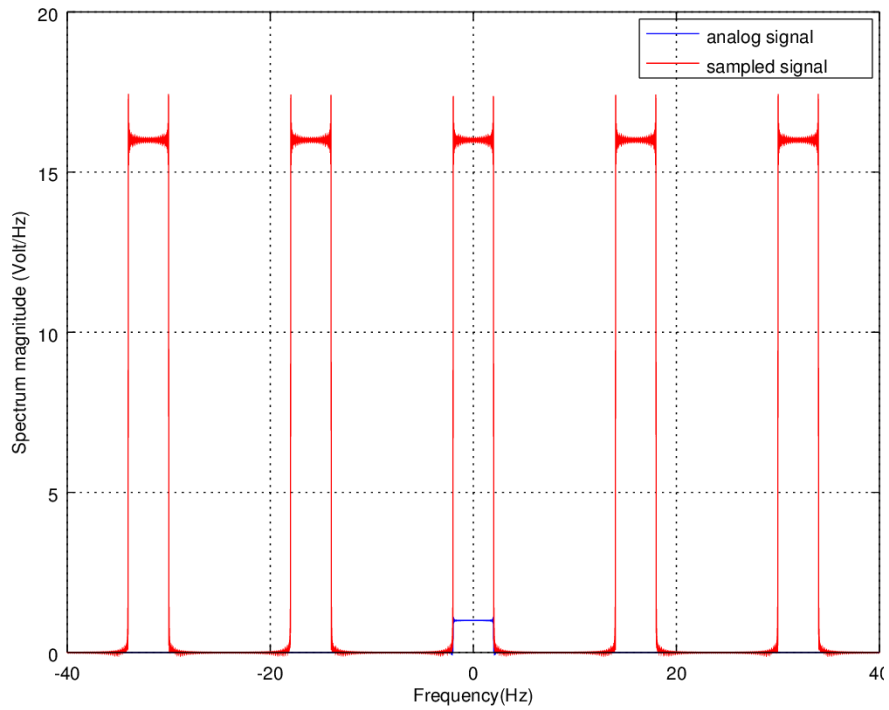
Παράδειγμα 3

```
clear
fs=16;
fd=fs.*5; % k=5
Ts=1./fs;
Td=1./fd;
t=-20:Td:20;
xt=4.*sinc(4.*t);
sx=size(t,2);
fact=zeros(1,sx);
padding=fd./fs;
fact(1:padding:sx)=1;
xs=xt.*fact;
```

```

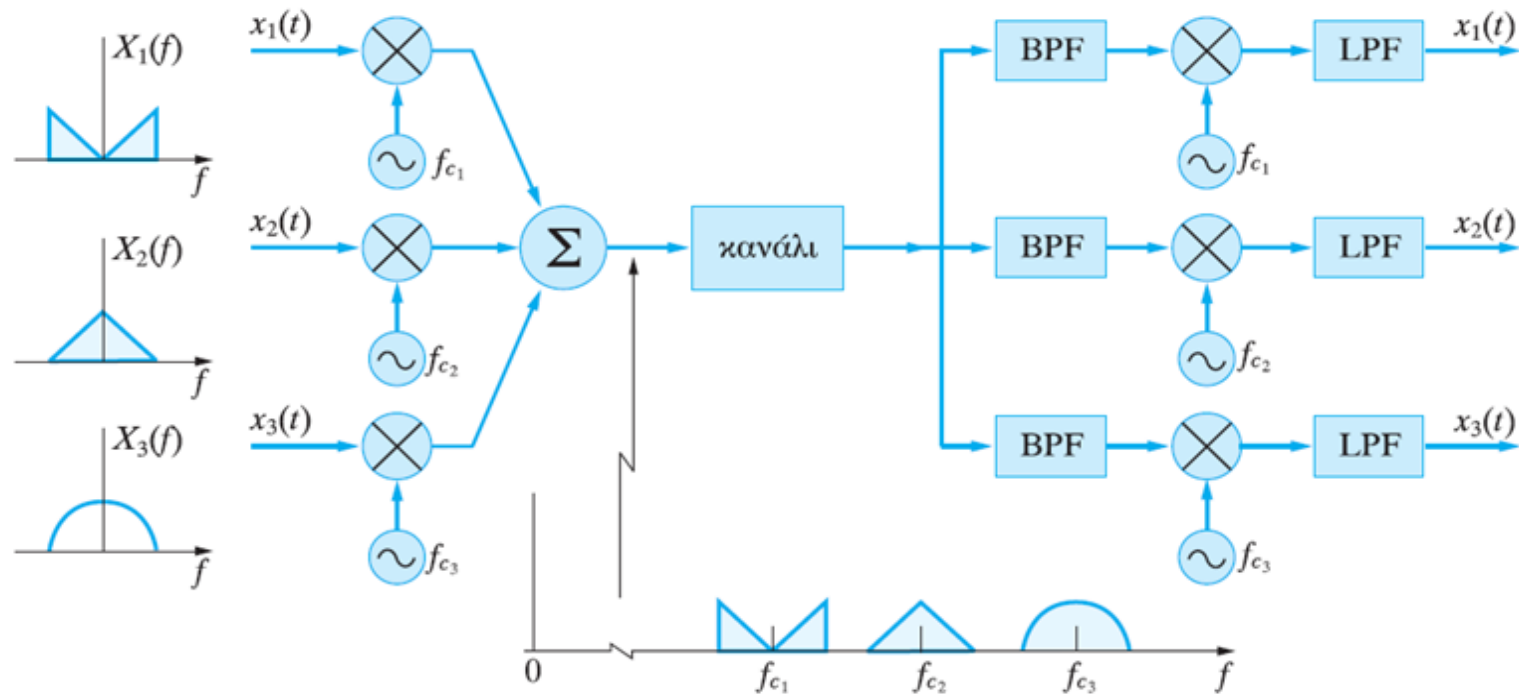
figure;
hold on;
[f ff]=fourier_transform_1(xt,Td,Td);
plot(f,ff,'-');
[g gg]=fourier_transform_1(xs,Td,Ts);
plot(g,gg,'r-');
xlabel('Frequency(Hz)');
ylabel('Spectrum magnitude (Volt/Hz)');
legend('analog signal','sampled signal');
axis([-4.*fs 4.*fs 0 max(gg)+1]);
grid;
figure;
plot(t,xt,'b-');
hold;
plot(t,xs,'ro');
grid;
legend('analog signal','sampled signal');
xlabel('time (sec)');
ylabel('Amplitude (Volt)');
axis([-2 2 min(xt)-0.5 max(xt)+1]);

```



Πολυπλεξία Σημάτων στα πεδία Συχνότητων /Χρόνου

Πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας (Frequency Division Multiplexing – FDM)



Έστω τρία σήματα μηνύματος πεπερασμένων εύρους ζώνης ($x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$), τα οποία θέλουμε να μεταδώσουμε ταυτόχρονα πάνω από το ίδιο κανάλι βασικής ζώνης. Για να το επιτύχουμε αυτό, μετατοπίζουμε το φάσμα του κάθε σήματος μηνύματος γύρω από τις τρεις διαφορετικές συχνότητες f_{c1} , f_{c2} , f_{c3} , αντίστοιχα. Οι τιμές των f_{c1} , f_{c2} , f_{c3} έχουν επιλεγεί κατάλληλα, έτσι ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη των φασμάτων των σημάτων μηνύματος.

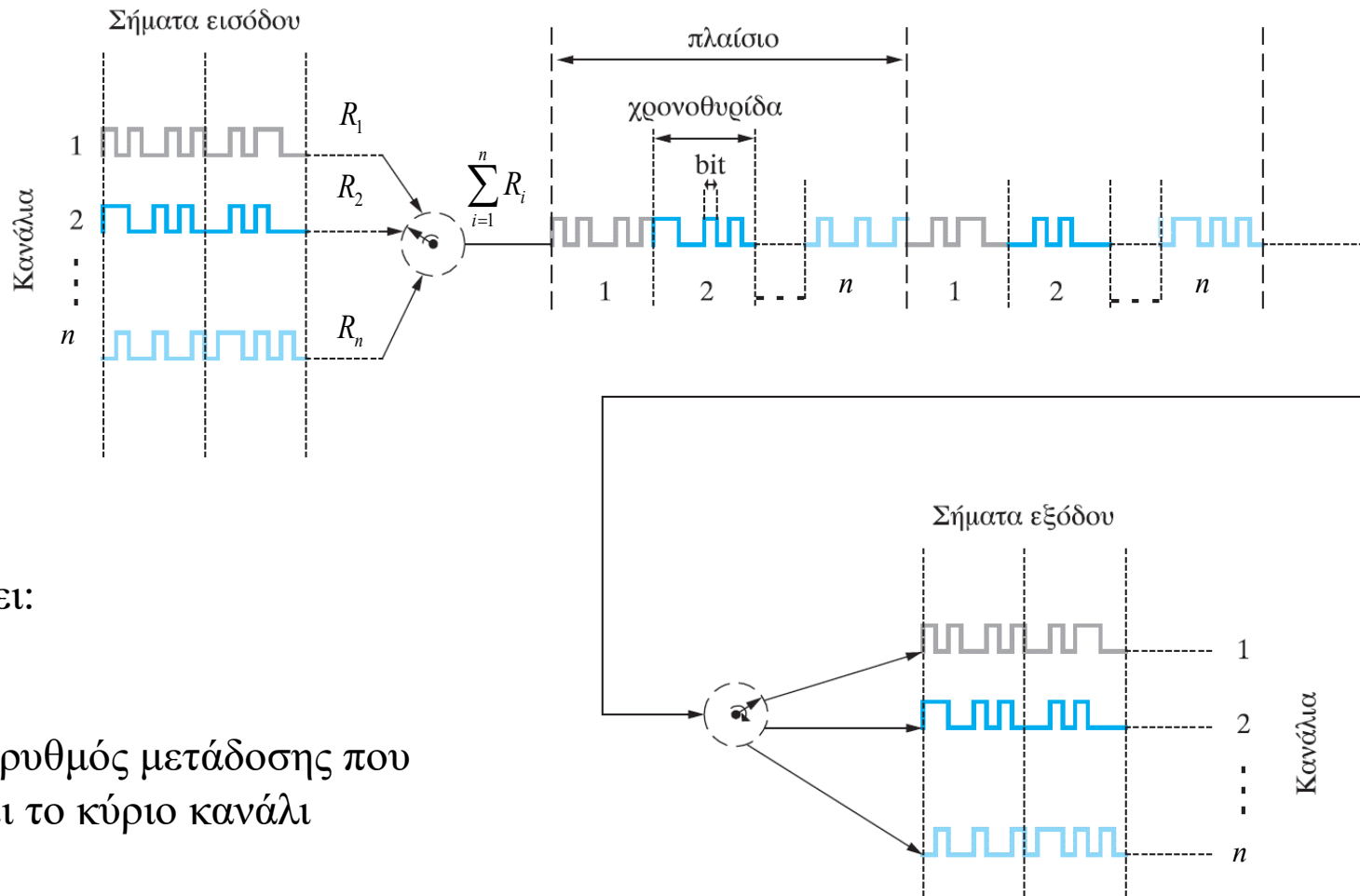
Πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου (Time Division Multiplexing - TDM)

- Τα n σήματα διαχωρίζονται μεταξύ τους στο πεδίο του χρόνου
- Ο χρόνος υποδιαιρείται σε n χρονοθυρίδες με σταθερή διάρκεια

- Θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n R_i \leq R_{\max}$$

όπου R_{\max} ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να υποστηρίξει το κύριο κανάλι επικοινωνίας



Ερωτήσεις



Παραδείγματα

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται το σήμα $x(t) = 200 \sin c(200t) + 100 \sin c^2(100t)$.

- 1) Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του $x(t)$ και να δοθούν οι εκφράσεις του δειγματισμένου σήματος στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων.
- 2) Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB συνημιτονικό φέρον πλάτους 2V και συχνότητας 1000Hz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του διαμορφωμένου σήματος.
- 3) Το $x(t)$ δειγματίζεται με κατάλληλη συχνότητα f_δ και διέρχεται από κατάλληλο ζωνοπερατό φίλτρο με την ελάχιστη δυνατή ζώνη διέλευσης και με χαμηλή συχνότητα αποκοπής ίση με $f_{low}=100\text{Hz}$, ώστε να προκύψει φάσμα πανομοιότυπο με αυτό της απάντησης του ερωτήματος (β). Να υπολογιστούν η συχνότητα δειγματοληψίας f_δ , καθώς και η κρουστική απόκριση και η συνάρτηση μεταφοράς (απόκριση συχνότητας) του φίλτρου.
- 4) Το $x(t)$ θα μεταδοθεί με διαμόρφωση PCM, με συχνότητα δειγματοληψίας 10πλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist και με ομοιόμορφη κβάντιση χρησιμοποιώντας 15 ψηφία ανά δείγμα. Να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος καθώς και ο σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης.

(α)

$$x(t) = 200 \sin c(200t) + 100 \sin c^2(100t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}\left(\frac{f}{200}\right) + \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Μέγιστη συχνότητα: 100Hz

Ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,\min} = 200\text{Hz}$

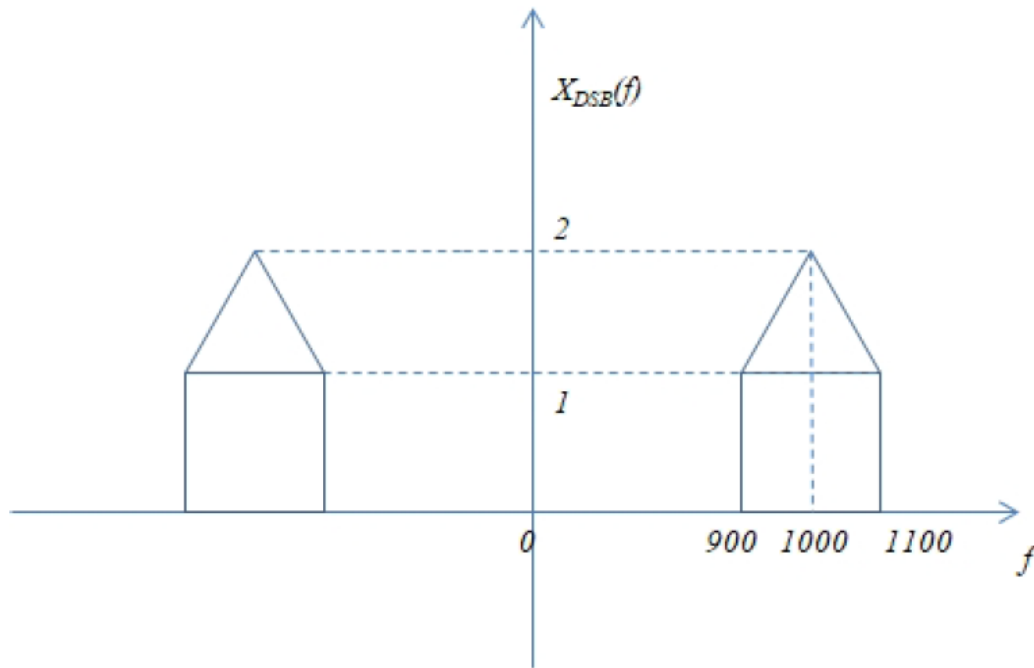
και περίοδος δειγματοληψίας $T_s = 1/200$

$$x_s(n) = x(t) \Big|_{t=nT_s} = 200 \sin c\left(200n \frac{1}{200}\right) + 100 \sin c^2\left(100n \frac{1}{200}\right), n \text{ ακέραιος}$$

$$X_s(f) = 200 \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s) = 200 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \text{rect}\left(\frac{f - m200}{200}\right) + \text{tri}\left(\frac{f - m200}{100}\right) \right\}$$

(β)

$$\begin{aligned}x_{DSB}(t) &= x(t) \cdot 2 \cos(2\pi 1000t) \xrightarrow{F} X(f-1000) + X(f+1000) = \\ &= \text{rect}\left(\frac{f-1000}{200}\right) + \text{tri}\left(\frac{f-1000}{100}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+1000}{200}\right) + \text{tri}\left(\frac{f+1000}{100}\right)\end{aligned}$$



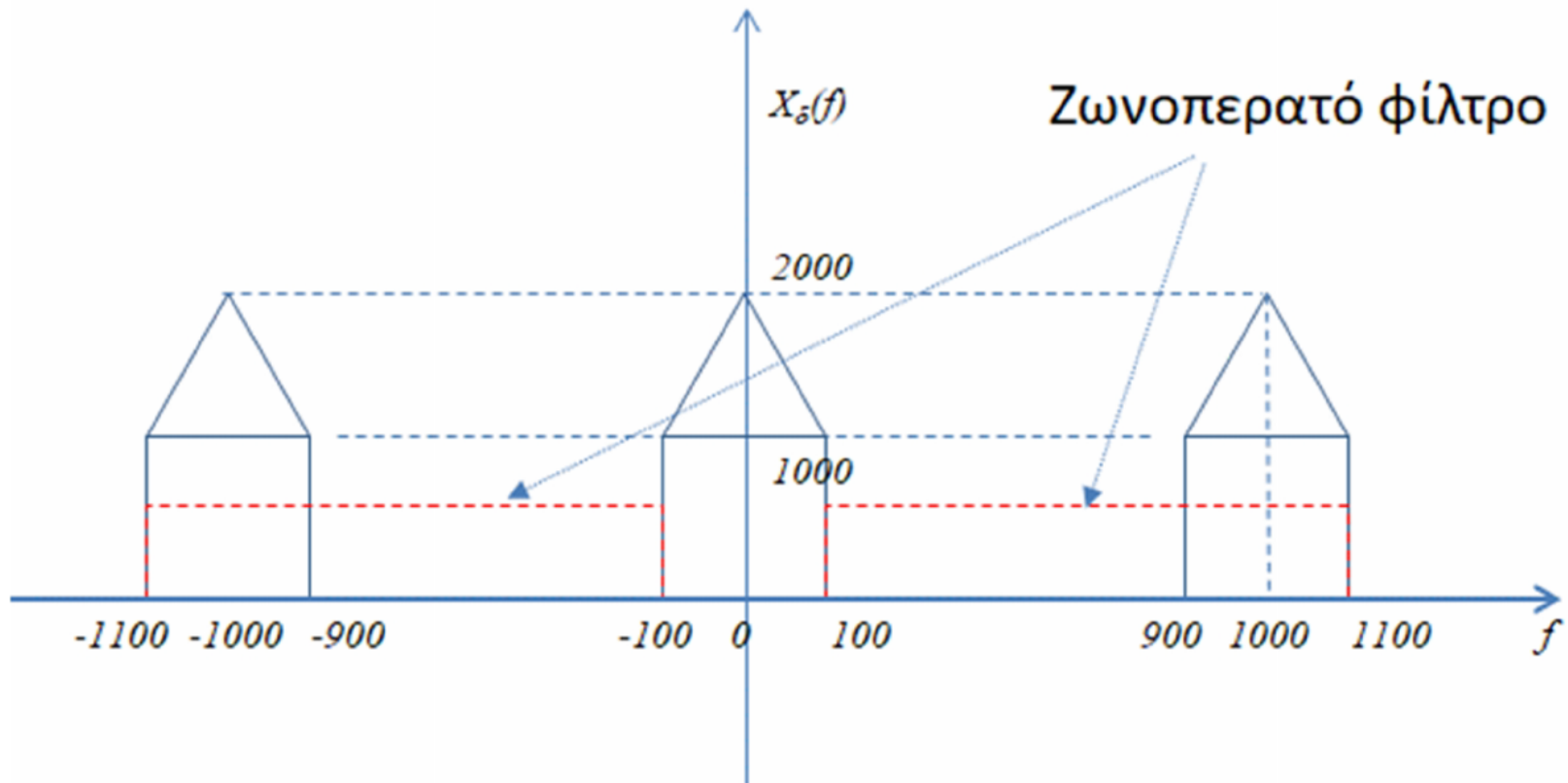
(γ)

Η συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι ίση με 1000 Hz

Το φάσμα του δειγματοσιμένου σήματος θα ισούται με:

$$X_{\delta}(f) = 1000 \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - m1000) = 1000 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \text{rect}\left(\frac{f - m1000}{200}\right) + \text{tri}\left(\frac{f - m1000}{100}\right) \right\}$$

Για να προκύψει το ζητούμενο φάσμα θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ζωνοπερατό φίλτρο με συχνότητες αποκοπής 100Hz, 1100Hz και πλάτος 1/1000.



Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(f) = \frac{1}{1000} \left\{ \text{rect} \left(\frac{f - 600}{1000} \right) + \text{rect} \left(\frac{f + 600}{1000} \right) \right\}$$

και η κρουστική απόκριση είναι:

$$h(t) = \frac{1}{1000} \left\{ e^{j2\pi 600t} 1000 \text{sinc}(1000t) + e^{-j2\pi 600t} 1000 \text{sinc}(1000t) \right\} = \frac{1}{1000} 1000 \text{sinc}(1000t) 2 \cos(2\pi 600t) = 2 \text{sinc}(1000t) \cos(2\pi 600t)$$

(δ)

$$\text{Εύρος ζώνης PCM: } W = \frac{1}{2} 10 \cdot 200 \frac{\text{samples}}{\text{sec}} \cdot 15 \frac{\text{bits}}{\text{sample}} = 15 \text{ KHz}$$

$$\text{Σηματοθορυβικός λόγος κβάντισης: } SNR_q = 20 \log_{10}(L) = 20 \log_{10}(2^{15}) = 90.39 \text{ dB}$$

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις τεχνικές πολυπλεξίας σημάτων και την παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM).

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ3/1415/Θ3, ΓΕ2/1112/Θ7

Στα πλαίσια υλοποίησης ενός συστήματος επικοινωνίας half-duplex, το οποίο προορίζεται για επικοινωνία ομιλίας (πχ ένα σύστημα ασυρμάτων), η εγγραφή/κωδικοποίηση του ήχου χρησιμοποιεί την παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM) με ομοιόμορφο κβαντιστή και τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Ελάχιστη συχνότητα ακουστικού σήματος τα 100Hz και μέγιστη συχνότητα ακουστικού σήματος τα 7kHz (δεδομένου ότι το εύρος του φάσματος ενός σήματος ομιλίας είναι συνήθως από τα 100Hz ως τα 7kHz οι συχνότητες κάτω από τα 100Hz και πάνω τα 7kHz έχουν απορριφθεί).
- Ρυθμό δειγματοληψίας 15,4kHz.
- 8bit για την κωδικοποίηση του αριθμού των σταθμών κβάντισης.
- Εύρος πλάτους του ακουστικού σήματος [-5, +5] Volt.

Απαντήστε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να υπολογίσετε το ρυθμό δειγματοληψίας συγκριτικά (σε ποσοστό %) με τον ελάχιστο ρυθμό δειγματοληψίας Nyquist.

β) Πόσος είναι ο σηματοθορυβικός λόγος της παραπάνω κωδικοποίησης;

γ) Ποιο είναι το μέγιστο σφάλμα κβάντισης;

δ) Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός των Bytes που προκύπτουν για μία επικοινωνία διάρκειας 5 λεπτών η οποία κωδικοποιείται με την παραπάνω κωδικοποίηση;

ε) Είναι εφικτή η ταυτόχρονη μετάδοση 8 σημάτων, κωδικοποιημένων με την παραπάνω κωδικοποίηση, σε ένα κανάλι εύρος ζώνης 1Mbps χρησιμοποιώντας TDMA πολυπλεξία; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση σήματος με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (εκφρασμένος σε decibel) ισούται με $SNR = 10 \log_{10}(L^2)$. Στους υπολογισμούς να θεωρήσετε ότι $1MByte = 1.000.000Bytes$ και $1Mbps = 1.000.000bps$.

α) Δεδομένου ότι η μέγιστη συχνότητα του ακουστικού σήματος είναι 7kHz, ο ελάχιστος ρυθμός δειγματοληψίας Nyquist είναι το διπλάσιο 14kHz. Επομένως, ο ρυθμός δειγματοληψίας 15,4kHz, δεδομένου ότι $15,4\text{kHz}/14\text{kHz}=1,10$, είναι κατά 10% μεγαλύτερος του ελάχιστου ρυθμού δειγματοληψίας Nyquist.

β) Δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται 8bit για την κωδικοποίηση του αριθμού των σταθμών κβάντισης, έχουμε $L=2^8 = 256$ στάθμες κβάντισης. Επομένως, ο σηματοθορυβικός λόγος (εκφρασμένος σε decibel) ισούται με:

$$SNR = 10 \log_{10}(L^2) = 20 \log_{10}(L) = 20 \log_{10}(256) = 48.16 \text{dB}.$$

γ)

Ο αριθμός σταθμών κβάντισης L , δίνεται από την παρακάτω σχέση (δεδομένου ότι έχουμε ομοιόμορφο κβαντιστή):

$$L = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{\Delta} \Leftrightarrow \Delta = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{L} \Leftrightarrow \Delta = \frac{5 - (-5)}{256} \Leftrightarrow \Delta = 39,0625 * 10^{-3} \text{Volt}$$

Επομένως το μέγιστο σφάλμα κβάντισης er_{\max} είναι $er_{\max} = \frac{\Delta}{2} = 19,53125 * 10^{-3} \text{Volt}$

δ) Με συχνότητα δειγματοληψίας 15,4 kHz, έχουμε 15.400 δείγματα/sec. Με 8 bits/δείγμα προκύπτει ρυθμός $15.400 * 8 = 123.200$ bits/sec από κάθε κανάλι. Για επικοινωνία διάρκειας 5 λεπτών, δηλαδή 300 sec:

$$123.200 \text{ bits/sec} * 300 \text{ sec} = 36.960.000 \text{ bits} = 4,62 \text{ MBytes} \text{ (όπου } 1\text{MByte} = 1.000.000\text{Bytes)}.$$

ε) Όπως προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα το ακουστικό σήμα απαιτεί ρυθμό μετάδοσης 123.200 bits/sec, Για να μεταδώσουμε 8 σήματα κωδικοποιημένα, με την παραπάνω κωδικοποίηση, σε ένα κανάλι χρησιμοποιώντας TDMA πολυπλεξία, απαιτείται τουλάχιστον εύρος ζώνης $8 \cdot 123.200 \text{ bits/sec} = 985.600 \text{ bits/sec}$ ή $0,9856 \text{ Mbps} < 1 \text{ Mbps}$ (όπου $1 \text{ Mbps} = 1.000.000 \text{ bps}$). Κατά συνέπεια μπορούμε να μεταδώσουμε 8 σήματα κωδικοποιημένα με την παραπάνω κωδικοποίηση, σε ένα κανάλι με εύρος ζώνης 1Mbps χρησιμοποιώντας TDMA πολυπλεξία.

ΘΕΜΑ 2

ΕΞ 2014 /Θ2

Δίνεται το σήμα $X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4a}\right)$.

α) Να προσδιοριστούν για το σήμα $y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right)$, οι εκφράσεις του δειγματοσιμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου $y_s(n)$. (5 μονάδες)

β) Να εξηγήσετε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά και να υπολογιστούν οι περίοδοι (αν υπάρχουν)

i) $y(t)$ και (3 μονάδες)

ii) $z(t) = \frac{\mathfrak{F}^{-1}\{X(f) * [\delta(f-20) + \delta(f+20)]\}}{2a\pi \sin c(4at)}$, (7 μονάδες)

(όπου με $\mathfrak{F}^{-1}\{\}$ εννοείται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier και με $*$ εννοείται η πράξη της συνέλιξης).

γ) Προκειμένου να μεταδοθούν τα σήματα $y(t)$ και $z(t)$ κάθε ένα θα υποστεί δειγματοληψία σε ρυθμό Nyquist, θα κωδικοποιηθεί κατά PCM με 8 bits και κατόπιν θα μεταδοθούν και τα δύο με πολυπλεξία FDMA. Να υπολογιστεί το συνολικό απαιτούμενο εύρος ζώνης αν $a=10$. (5 μονάδες)

α)

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{4a}\right) \leftrightarrow 4a \text{ sinc}(4at) = x(t)$$

$$y(t) = x(t) + \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right) = 4a \text{ sinc}(4at) + \frac{1}{2}4a \text{ sinc}\left(4a \frac{t}{2}\right) = 4a \text{ sinc}(4at) + 2a \text{ sinc}(2at)$$

$$y(t) = 4a \text{ sinc}(4at) + 2a \text{ sinc}(2at) \leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{f}{4a}\right) + \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) = Y(f)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα δύο σημάτων βασικής ζώνης με εύρος $4a$ ($f_{\max}=2a$) και $2a$ ($f_{\max}=a$) αντίστοιχα. Άρα $f_{\max}=2a$ και επομένως η συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist είναι $f_{s,\min}=4a$.

Άρα το δειγματοσιμμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου $y_\delta(n)$ είναι:

$$\begin{aligned} y_\delta(n) &= y(t) \Big|_{t=nT_s} = 4a \text{ sinc}\left(4an \frac{1}{f_{s,\min}}\right) + 2a \text{ sinc}\left(2an \frac{1}{f_{s,\min}}\right) = \\ &= 4a \text{ sinc}\left(4an \frac{1}{4a}\right) + 2a \text{ sinc}\left(2an \frac{1}{4a}\right) = \\ &= 4a \text{ sinc}(n) + 2a \text{ sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

β)

(i) Το σήμα $y(t)$ δεν είναι περιοδικό γιατί το φάσμα του είναι συνεχές

(ii)

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{\mathfrak{F}^{-1}\{X(f) * [\delta(f - 20) + \delta(f + 20)]\}}{2a\pi \sin c(4at)} = \frac{x(t)2 \cos(2\pi 20t)}{2a\pi \sin c(4at)} = \\ &= \frac{4a \sin c(4at) 2 \cos(2\pi 20t)}{2a\pi \sin c(4at)} \Leftrightarrow z(t) = \frac{4}{\pi} \cos(2\pi 20t) \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Άρα το σήμα αυτό είναι περιοδικό με περίοδο 1/20 sec.

γ)

Σύμφωνα με την ανάλυση στο ερώτημα 1), η συχνότητα δειγματοληψίας για το $y(t)$ είναι $f_{s,min}=4a$ samples/sec.

Το αντίστοιχο εύρος ζώνης θα είναι

$$\frac{1}{2} f_{s,min} N = \frac{1}{2} 4a \cdot 8 = 16a \text{ Hz}$$

Από την (Α) βλέπουμε ότι

$Z(f) = \frac{2}{\pi} (\delta(f - 20) + \delta(f + 20))$, άρα η συχνότητα δειγματοληψίας για το $z(t)$ είναι $f'_{s,min}=40\text{Hz}$. Το

αντίστοιχο εύρος ζώνης θα είναι

$$\frac{1}{2} f'_{s,min} N = \frac{1}{2} 40 \cdot 8 = 160 \text{ Hz}$$

Επομένως συνολικά απαιτείται εύρος ζώνης $16a+160=320$ Hz.

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις τεχνικές πολυπλεξίας σημάτων και την παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM).

Σχετικές Ασκήσεις: ΓΕ2/0910/Θ7, ΓΕ2/1011/Θ7, ΓΕ2/1112/Θ7

Σε ένα στούντιο εγγραφής τα δύο ακουστικά σήματα, από το δεξιό και το αριστερό μικρόφωνο (Left (L) ,Right (R)), δειγματοληπτούνται και τα δείγματα ψηφιοποιούνται από έναν αναλογικο/ψηφιακό μετατροπέα. Θεωρείστε ότι το εύρος ζώνης των ακουστικών σημάτων περιορίζεται περίπου στα 20 kHz. Η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist.

(α) Υπολογίστε το ρυθμό δειγματοληψίας των δύο ακουστικών σημάτων

(β) Αν απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος μεγαλύτερος από 92 dB υπολογίστε το πλήθος των σταθμών κβάντισης. Υποθέστε ότι τα δείγματα των δύο ακουστικών σημάτων κβαντίζονται με ομοιόμορφο κβαντιστή PCM.

(γ) Ποια η επιδείνωση του σηματοθορυβικού λόγου αν χρησιμοποιηθούν οι μισές στάθμες από εκείνες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα; Παρατηρήστε τι γίνεται για διαδοχικούς υποδιπλασιασμούς και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με τον αριθμό των bits που χρησιμοποιούνται.

(δ) Υπολογίστε τον συνολικό αριθμό των bits και bytes και για τα δύο ακουστικά σήματα (L,R) που προκύπτουν για ένα μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών.

(ε) Αν τα δύο ακουστικά σήματα πολυπλεχθούν κατά TDM (πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου) και μεταδοθούν από τον ίδιο δίαυλο, υπολογίστε το ελάχιστο εύρος ζώνης του διαύλου για την τεχνική PCM και υποδείξτε το ρυθμό μετάδοσης στο δίαυλο.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση σήματος με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (εκφρασμένος σε *decibel*) ισούται με $SNR = 10 \cdot \log_{10} (L^2)$.

(α) Τα δύο ακουστικά σήματα δειγματοληπτούνται το καθένα χωριστά. Επειδή η μέγιστη συχνότητα των ακουστικών σημάτων είναι τα 20 kHz, σύμφωνα με τον Nyquist ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι τουλάχιστο 40 kHz. Επιπλέον, στην εκφώνηση αναφέρεται ότι η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist, συνεπώς για κάθε ακουστικό κανάλι έχουμε

$$\text{Ρυθμός Δειγματοληψίας} = 40 \text{ kHz} * 1,1025 = 44,1 \text{ kHz}$$

(β) Προκειμένου κάθε σήμα να μεταδοθεί με PCM με σηματοθορυβικό λόγο $SNR > 92 \text{ dB}$, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

$$\text{Έχουμε } SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) = 10 \log_{10} (L^2) = 20 \log_{10} L$$

Άρα ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών κβάντισης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$SNR = 20 \log_{10} L \geq 92 \Rightarrow L \geq 10^{92/20} \approx 39,811$$

Άρα επειδή θα πρέπει το πλήθος των σταθμών να είναι δύναμη του 2, τελικά θα έχουμε $2^{16} = 65.536$ στάθμες.

(γ) Χρησιμοποιώντας $2^{16} = 65.536$ στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος

$$SNR = 20 \log_{10} L = 20 \log_{10} (65.536) = 96,3 \text{ dB}$$

Αν υποδιπλασιάσουμε τις στάθμες τότε θα χρησιμοποιήσουμε 15 bits για την κάθε κωδική λέξη και θα έχουμε $2^{15} = 32.768$ στάθμες. Άρα ο σηματοθορυβικός λόγος θα είναι

$$SNR = 20 \log_{10} L = 20 \log_{10} (32.768) = 90,3 \text{ dB}$$

Άρα η επιδείνωση με τη μείωση ενός bit είναι 6 dB.

Το ίδιο ισχύει για κάθε μείωση κατά 1 bit (π.χ. με 16.384 στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος 84.3 dB, κλπ.)

(δ) Με συχνότητα δειγματοληψίας 44.100 Hz, έχουμε 44.100 δείγματα/sec. Με 16 bits/δείγμα προκύπτει ρυθμός $44.100 \times 16 = 705.600$ bits/sec από κάθε ακουστικό σήμα. Για μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών δηλαδή 180 sec προκύπτουν ανά κανάλι

$$705.600 \text{ bits/sec} \times 180 \text{ sec} = 127,008 \times 10^6 \text{ bits} = 15,876 \text{ Mbytes}$$

Συνολικά για τα δύο κανάλια

$$2 \times 705.600 \text{ bits/sec} \times 180 \text{ sec} = 254,016 \times 10^6 \text{ bits} = 31,752 \text{ Mbytes}$$

(ε) Αν χρησιμοποιηθεί πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου, τότε το πλαίσιο θα περιέχει δύο χρονοθυρίδες και ο ελάχιστος ρυθμός που πρέπει να μπορεί να υποστηρίξει ο διάυλος είναι το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών δειγματοληψίας, δηλαδή $2 \times 44.100 \text{ samples/sec} = 88.200 \text{ samples/sec}$.

Επειδή όμως θα χρησιμοποιηθεί τεχνική PCM με κβαντοποίηση σε 65.536 στάθμες, το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} \times 88.200 \times \log_2 65.536 = 44.100 \times 16 = 705600 \text{ Hz} = 705,6 \text{ kHz}$$

Ο ρυθμός μετάδοσης είναι $705,6 \times 2 = 1411,2 \text{ kbps} = 1,4112 \text{ Mbps}$

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογίσετε τις τιμές του $\alpha > 0$ για τις οποίες ισχύει η κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Το σήμα $\cos(2\pi at) + \sin(2\pi f_2 t)$ είναι περιοδικό. **(3 μονάδες)**

β) Το σήμα $\cos(2\pi f_1 t) * a \operatorname{sinc}(at)$ είναι περιοδικό. **(3 μονάδες)**

γ) Ισχύει ότι $a \operatorname{sinc}(at) * g(t) = g(t)$ όπου $g(t) \xleftrightarrow{F} G(f)$ και $G(f) > 0, |f| < 60$
 $G(f) = 0, |f| > 60$ **(4 μονάδες)**

δ) Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist του $x(t) = a \operatorname{sinc}(at) \cdot 100a \operatorname{sinc}^2(100at)$ είναι 804Hz. **(6 μονάδες)**

ε) Το εύρος ζώνης του σήματος που προκύπτει από διαμόρφωση FM συνημιτονικού φέροντος από σήμα πληροφορίας $x(t) = a \operatorname{sinc}^3(100t)$ με $k_f = 50\pi$ είναι 600Hz. **(6 μονάδες)**

[Υπόδειξη: ο τελεστής * αντιστοιχεί σε συνέλιξη]

(Σύνολο μονάδων 22)

(α) Για το $\cos(2\pi at) + \sin(2\pi f_2 t)$ έχουμε

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{f_2}} = \frac{f_2}{a}$$

Το σήμα θα είναι περιοδικό αν ο λόγος των περιόδων είναι ρητός δηλ.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{f_2}} = \frac{f_2}{a} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow a = \frac{n}{m} f_2$$

(β) Έχουμε:

$$\cos(2\pi f_1 t) * a \sin c(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \text{ δηλ. διέλευση ενός τόνου από βαθυπερατό}$$

φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $a/2$.

Για να είναι περιοδικό το $\cos(2\pi f_1 t) \cdot a \sin c(at)$ θα πρέπει η συχνότητα f_1 να είναι μικρότερη από το εύρος

$$\text{ζώνης του φίλτρου δηλ } f_1 \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow a \geq 2f_1$$

(γ) $a \operatorname{sinc}(at) * g(t) \xrightarrow{F} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right) G(f)$ δηλ. διέλευση του φάσματος $G(f)$ από βαθυπερατό φίλτρο με

συχνότητα αποκοπής $a/2$.

$\operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right) G(f) = G(f)$ δηλ. το $G(f)$ διέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο εφόσον $\frac{a}{2} \geq 60 \Leftrightarrow a \geq 120$

(δ) Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist του $x(t) = a \operatorname{sinc}(at) \cdot 100a \operatorname{sinc}^2(100at)$ είναι 804Hz

Είναι

$$x(t) = a \operatorname{sinc}(at) \cdot 100a \operatorname{sinc}^2(100at) \xrightarrow{F} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{a}\right) * \operatorname{tri}\left(\frac{f}{100a}\right) = X(f)$$

Η μέγιστη συχνότητα της συνέλιξης των 2 φασμάτων αντιστοιχεί στο άθροισμα των επιμέρους μέγιστων συχνοτήτων, δηλ. $f_{\max} = \frac{a}{2} + 100a = \frac{201a}{2}$

Συνεπώς, η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_{s,\min} = 2 \frac{201a}{2} = 201a = 804 \Leftrightarrow a = 4$

$$(ε) x(t) = a \operatorname{sinc}^3(100t) = a \cdot \operatorname{sinc}(100t) \operatorname{sinc}^2(100t) \xrightarrow{F} a \frac{1}{100} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{100}\right) * \frac{1}{100} \operatorname{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Μέγιστο πλάτος: a

Εύρος ζώνης: $50+100=150\text{Hz}$

$$\text{Μέγιστη απόκλιση συχνότητας } \Delta f_{\max} = \frac{k_f}{2\pi} \max(|\dot{x}(t)|) = \frac{50\pi}{2\pi} a = 25a \text{Hz}$$

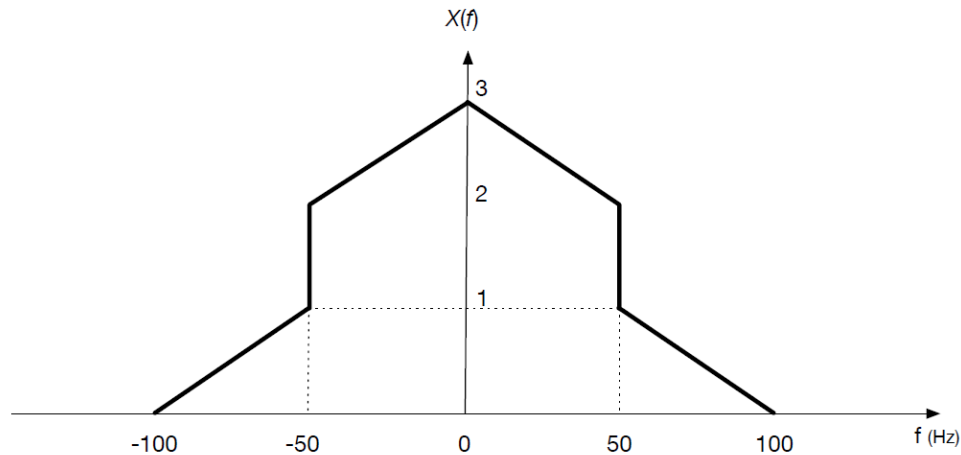
και ο λόγος απόκλισης είναι

$$D = \frac{25a}{150} = \frac{a}{6}$$

Άρα με βάση τον κανόνα Carson έχουμε:

$$W = 2 \left(\frac{a}{6} + 1 \right) \cdot 150 \text{ Hz} = 600 \text{ Hz} \Leftrightarrow \frac{a}{6} + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 6$$

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



Ερώτηση 1^η (5 Μονάδες): Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

Ερώτηση 2^η (5 Μονάδες): Να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,min}$ κατά Nyquist του $x(t)$ και η αντίστοιχη περίοδος δειγματοληψίας. Αν το σήμα $x(t)$ δειγματοληφτείται με συχνότητα διπλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist, να δοθεί η έκφραση του δειγματοποιημένου σήματος $x_s(n)$ στο πεδίο του χρόνου.

Ερώτηση 3^η (5 Μονάδες): Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB-SC συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 10 kHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το πλάτος φάσματος του διαμορφωμένου σήματος.

Ερώτηση 4^η (5 Μονάδες): Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100 kHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 4\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του. Σημείωση: Το σήμα $x(t)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του για $t = 0$.

Ερώτηση 1^η: Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + 2 \text{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$a \text{sinc}(at) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$a \text{sinc}^2(at) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} \text{tri}\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100 \text{sinc}(100t) + 2 \cdot 100 \text{sinc}^2(100t)$$

Ερώτηση 2^η: Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος του $x(t)$ είναι $f_{max} = 100\text{Hz}$. Συνεπώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist είναι $f_{s,min} = 2f_{max} = 200\text{Hz}$ και η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_s = 1/200 = 0.005 \text{ sec}$.

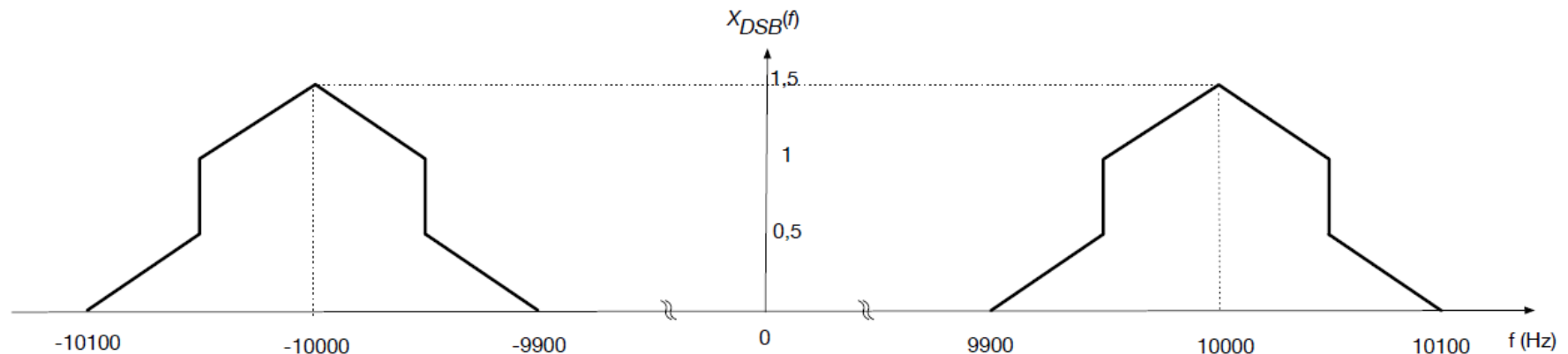
Για συχνότητα δειγματοληψίας $2f_{s,min} = 400\text{Hz}$, η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_s = 1/400 = 0.0025 \text{ sec}$, και το δειγματοποιημένο σήμα στο πεδίο του χρόνου γράφεται:

$$\begin{aligned}
 x_s(n) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 100 \text{sinc} \left(100 \frac{n}{400} \right) + 2 \cdot 100 \text{sinc}^2 \left(100 \frac{n}{400} \right)
 \end{aligned}$$

όπου n ακέραιος αριθμός.

Ερώτηση 3^η: Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB-SC συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 10kHz. Η έκφραση στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας για το διαμορφωμένο σήμα είναι:

$$\begin{aligned}
 x_{DSB-SC}(t) &= x(t) \cdot \cos(2\pi 10000t) \stackrel{F}{\Leftrightarrow} X_{DSB-SC}(f) \\
 &= \frac{1}{2} [X(f - 10000) + X(f + 10000)] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \text{rect} \left(\frac{f - 10000}{100} \right) + 2 \text{tri} \left(\frac{f - 10000}{100} \right) + \text{rect} \left(\frac{f + 10000}{100} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \text{tri} \left(\frac{f + 10000}{100} \right) \right\}
 \end{aligned}$$



Ερώτηση 4^η: Η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$x_{FM}(t) = \cos \left(2\pi 100000t + 4\pi \int_{-\infty}^t [100 \operatorname{sinc}(100\lambda) + 2 \cdot 100 \operatorname{sinc}^2(100\lambda)] d\lambda \right)$$

Ο λόγος απόκλισης είναι: $D = \frac{\Delta f_{max}}{f_x} = \frac{\frac{k_f}{2\pi} \max(|x(t)|)}{f_x} = \frac{\frac{4\pi}{2\pi} 300}{100} = 6$

Και το εύρος ζώνης είναι: $W = 2(D + 1)f_x = 2(6 + 1)100 = 1.4 \text{ kHz}$

ΘΕΜΑ 5 (20 Μονάδες)

Δίνονται τα παρακάτω σήματα

$$x(t) = 3(e^{j10\pi t} + e^{-j10\pi t})$$

$$y(t) = 10\text{sinc}^2(10t)$$

$$z(t) = 24\text{sinc}(12t)$$

Ερώτηση 1^η (6 Μονάδες): Να υπολογισθεί η μαθηματική έκφραση των σημάτων $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ στο πεδίο της συχνότητας.

Ερώτηση 2^η: Για τα παρακάτω σήματα, να υπολογιστούν οι μαθηματικές εκφράσεις στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας, η περίοδος (αν υπάρχει) και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

A) (4 Μονάδες): $q_1(t) = 2 \cdot x(t) + y(t) + z(t)$

B) (5 Μονάδες): $q_2(t) = x(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot z(t)$

Γ) (5 Μονάδες): $q_3(t) = x(t) * y(t) * z(t)$, όπου το σύμβολο '*' αντιστοιχεί στην πράξη της συνέλιξης.

Ερώτηση 1^η:

Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler, δηλαδή

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$x(t) = 6\cos(10\pi t)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $\cos(2\pi f_0 t)$ δίνεται από

$$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Με βάση τα παραπάνω, ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ δίνεται από

$$X(f) = 3[\delta(f - 5) + \delta(f + 5)]$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

$$\begin{aligned} \text{tri}(t) &\leftrightarrow \text{sinc}^2(f) \\ x(at) &\leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $y(t)$ δίνεται από

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \text{tri}\left(\frac{f}{10}\right)$$

Με την ίδια λογική, ο μετασχηματισμός Fourier του $z(t)$ δίνεται από

$$Z(f) = 2\text{rect}\left(\frac{f}{12}\right)$$

Ερώτηση 2^η :

A)

Το σήμα $q_1(t) = 2 \cdot x(t) + y(t) + z(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$q_1(t) = 12 \cos(10\pi t) + 10 \operatorname{sinc}^2(10t) + 24 \operatorname{sinc}(12t)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $q_1(t)$ δίνεται από

$$Q_1(f) = 6[\delta(f - 5) + \delta(f + 5)] + \operatorname{tri}\left(\frac{f}{10}\right) + 2 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{12}\right)$$

Το σήμα αυτό έχει συνεχές φάσμα συνεπώς δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα στο σήμα είναι η 10 Hz και άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 20 Hz.

B)

Το σήμα $q_2(t) = x(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot z(t)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}q_2(t) &= 6 \cos(10\pi t) 10 \operatorname{sinc}^2(10t) + 6 \cos(10\pi t) 24 \operatorname{sinc}(12t) \\ &= 60 \cos(10\pi t) \operatorname{sinc}^2(10t) + 144 \cos(10\pi t) \operatorname{sinc}(12t)\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $q_2(t)$, θα βασιστούμε στην ιδιότητα της διαμόρφωσης, δηλαδή

$$x(t) \cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c)$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της διαμόρφωσης και της γραμμικότητας, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $q_2(t)$, $Q_2(f)$, μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}Q_2(f) &= \mathcal{F}\{60 \cos(10\pi t) \operatorname{sinc}^2(10t)\} + \mathcal{F}\{144 \cos(10\pi t) \operatorname{sinc}(12t)\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{60}{10} \operatorname{tri} \left(\frac{f - 5}{10} \right) + \frac{60}{10} \operatorname{tri} \left(\frac{f + 5}{10} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{144}{12} \operatorname{rect} \left(\frac{f - 5}{12} \right) + \frac{144}{12} \operatorname{rect} \left(\frac{f + 5}{12} \right) \right] \\ &= 3 \left[\operatorname{tri} \left(\frac{f - 5}{10} \right) + \operatorname{tri} \left(\frac{f + 5}{10} \right) \right] + 6 \left[\operatorname{rect} \left(\frac{f - 5}{12} \right) + \operatorname{rect} \left(\frac{f + 5}{12} \right) \right]\end{aligned}$$

Το σήμα αυτό έχει συνεχές φάσμα συνεπώς δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα στο σήμα είναι η 15 Hz και άρα η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 30Hz

Γ)

Σύμφωνα με τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο των συχνοτήτων. Συνεπώς,

$$Q_3(f) = \mathcal{F}\{x(t) * y(t) * z(t)\} = \mathcal{F}\{s(t) * z(t)\} = S(f)Z(f)$$

όπου

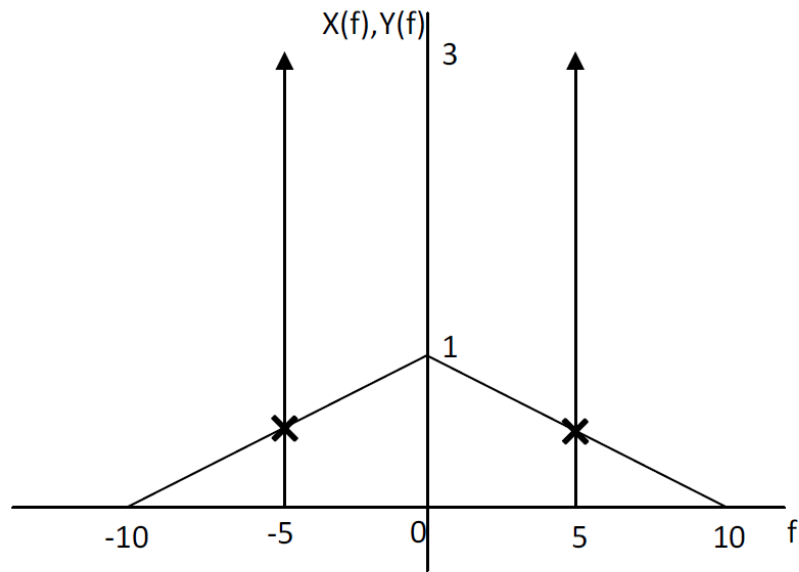
$$s(t) = x(t) * y(t) \text{ και } S(f) = X(f)Y(f)^1$$

Δεδομένου ότι τα φάσματα των σημάτων $X(f)$ και $Y(f)$ δίνονται από

$$X(f) = 3(\delta(f - 5) + \delta(f + 5))$$

$$Y(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{10}\right)$$

Με την ακόλουθη γραφική παράσταση



(είτε απευθείας από τον τύπο του τριγωνικού παλμού) μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της $Y(f)$ για την οποία $f = \pm 5$, δηλαδή

$$\text{tri}\left(\frac{\pm 5}{10}\right) = 1 - \frac{|\pm 5|}{10} = 0.5$$

Άρα το $S(f)$

$$S(f) = X(f)Y(f) = 1.5[\delta(f - 5) + \delta(f + 5)]$$

Συνεπώς

$$Q_3(f) = [1.5(\delta(f - 5) + \delta(f + 5))]Z(f) = 3[\delta(f - 5) + \delta(f + 5)]$$

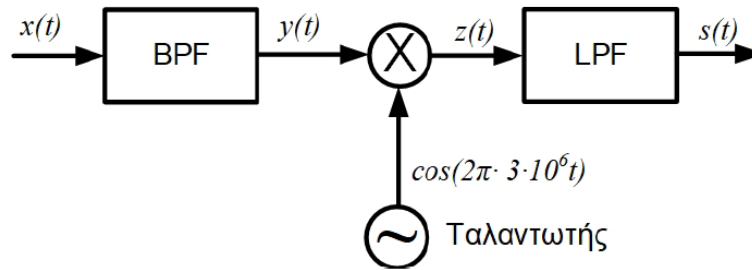
Πραγματοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $Q_3(f)$ υπολογίζεται η $q_3(t)$

$$q_3(t) = 6\cos(2\pi 5t)$$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T=0.2$ sec
 Η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας είναι 10Hz.

ΘΕΜΑ 6 (20 Μονάδες)

Θεωρήστε ότι το σήμα εισόδου στο ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο (BPF) του σχήματος είναι $x(t) = m(t) \left[1 + \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 t) \right]$, όπου $m(t) = 10^6 \text{sinc}(10^6 t)$. Η συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοπερατού φίλτρου είναι $H_{BPF}(f) = \Pi\left(\frac{f - 3 \cdot 10^6}{10^6}\right) + \Pi\left(\frac{f + 3 \cdot 10^6}{10^6}\right)$. Το βαθυπερατό φίλτρο (LPF) έχει συχνότητα αποκοπής τα $1,5 \cdot 10^6 \text{ Hz}$.



Ερώτηση 1^η (7 Μονάδες): Υπολογίστε και απεικονίστε το πλάτος του φάσματος του σήματος εξόδου, $Y(f)$, του ζωνοπερατού φίλτρου.

Ερώτηση 2^η (4 Μονάδες): Υπολογίστε το σήμα $s(t)$ στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου.

Ερώτηση 3^η (4 Μονάδες): Ποιος είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας κατά Nyquist των σημάτων $x(t)$ και $s(t)$.

Ερώτηση 4^η (5 Μονάδες): Αν εναλλακτικά το σήμα $s(t)$ υπόκειται σε δειγματοληψία με συχνότητα διπλάσια εκείνης που υποδεικνύει ο Nyquist και στη συνέχεια μετατραπεί σε ένα ψηφιακό σήμα PCM, υπολογίστε το εύρος ζώνης που θα απαιτηθεί για τη μετάδοση του σήματος PCM, υποθέτοντας ότι ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος για τη μετάδοση είναι τουλάχιστο 40 dB.

Ερώτηση 1^η: Αρχικά υπολογίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου, ώστε να εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα των ΓΧΑ συστημάτων που συνδέει το φάσμα του σήματος εισόδου με το φάσμα του σήματος εξόδου και τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου: $Y(f) = H_{BPF}(f)X(f)$.

Άρα

$$x(t) = m(t)[1 + \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 t)] \Rightarrow X(f) = F\{m(t)[1 + \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 t)]\}$$

$$\Rightarrow X(f) = F\{m(t) + m(t)\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 t)\}$$

$$\Rightarrow X(f) = F\{m(t)\} + F\{m(t)\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 t)\}$$

$$\Rightarrow X(f) = M(f) + M(f) * F\{\cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 t)\}$$

$$\Rightarrow X(f) = M(f) + M(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - 3 \cdot 10^6) + \delta(f + 3 \cdot 10^6)]$$

$$\Rightarrow X(f) = M(f) + \frac{1}{2}M(f - 3 \cdot 10^6) + \frac{1}{2}M(f + 3 \cdot 10^6)$$

όπου με * συμβολίζεται η πράξη της συνέλιξης.

Επειδή

$$m(t) = 10^6 \text{sinc}(10^6 t) \Rightarrow M(f) = F\{10^6 \text{sinc}(10^6 t)\} \Rightarrow M(f) = \Pi\left(\frac{f}{10^6}\right)$$

Άρα

$$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{10^6}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f - 3 \cdot 10^6}{10^6}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f + 3 \cdot 10^6}{10^6}\right)$$

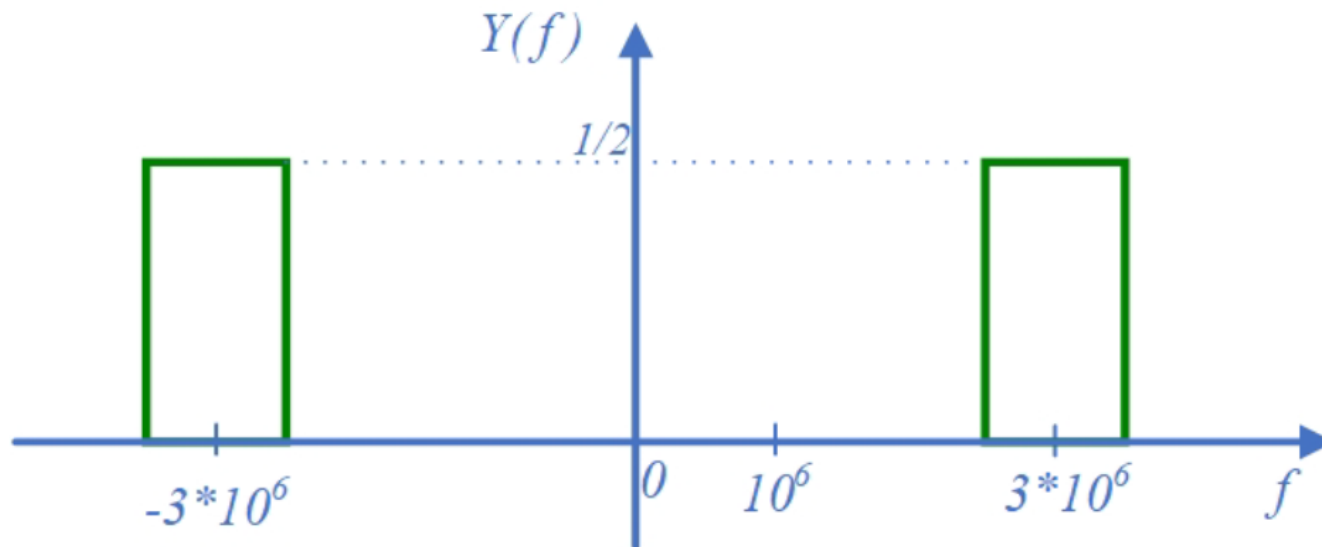
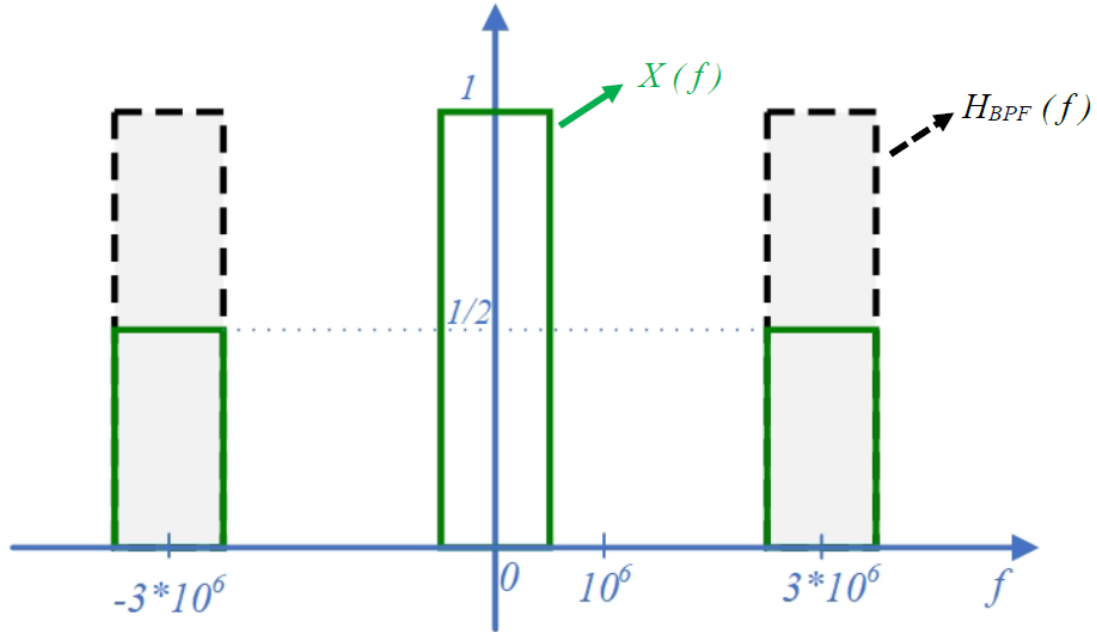
Άρα

$$Y(f) = H_{BPF}(f)X(f)$$

$$= \left[\Pi\left(\frac{f - 3 \cdot 10^6}{10^6}\right) + \Pi\left(\frac{f + 3 \cdot 10^6}{10^6}\right) \right] \left[\Pi\left(\frac{f}{10^6}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f - 3 \cdot 10^6}{10^6}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f + 3 \cdot 10^6}{10^6}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f - 3 \cdot 10^6}{10^6}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f + 3 \cdot 10^6}{10^6}\right)$$

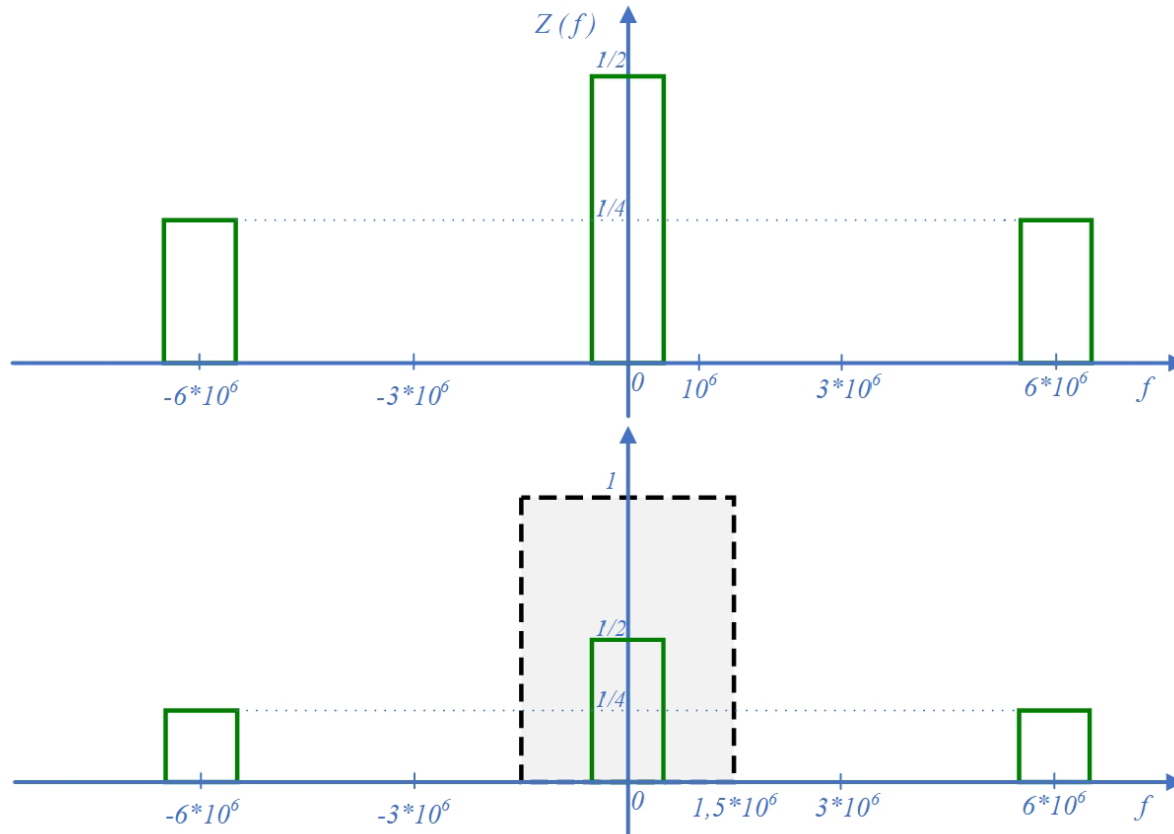
Το γινόμενο μπορεί να υπολογισθεί εύκολα και γραφικά



Ερώτηση 2^η: Το φάσμα του σήματος $z(t)$ στην έξοδο του πολλαπλασιαστή είναι

$$Z(f) = Y(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - 3 \cdot 10^6) + \delta(f + 3 \cdot 10^6)] = \frac{1}{2} Y(f - 3 \cdot 10^6) + \frac{1}{2} Y(f + 3 \cdot 10^6)$$

Το σήμα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου υπολογίζεται εύκολα γραφικά αν απεικονίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου στο ίδιο σχήμα με το φάσμα του σήματος στην έξοδο του πολλαπλασιαστή ως εξής:



Άρα στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου έχουμε το φάσμα

$$S(f) = \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{f}{10^6}\right) \text{ και άρα το σήμα στο πεδίο του χρόνου είναι } s(t) = \frac{10^6}{2} \text{sinc}(10^6 t).$$



Ερώτηση 3^η:

Ο ρυθμός δειγματοληψίας κατά Nyquist για μεν το $x(t)$ είναι 7 MHz, για δε το $s(t)$ είναι 1 MHz.

Ερώτηση 4^η:

Αν δειγματοληπτήσουμε το σήμα με συχνότητα διπλάσια του Nyquist, τότε $f_s = 2 \text{ MHz}$. Επειδή απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος $SNR \geq 40 \text{ dB} \Rightarrow 20 \log_{10} L \geq 40 \Rightarrow L \geq 10^2 = 100$. Όμως στην PCM έχουμε στάθμες που είναι δυνάμεις του 2, και άρα $L = 128$, δηλαδή απαιτούνται 7 bits/sample.

$$\text{Άρα } B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} 2 \cdot 7 = 7 \text{ MHz}$$

Πρόσθετα Θέματα

Τυχαία Σήματα και Μέσες Τιμές

Αν το αναλογικό σήμα είναι τυχαίο με πεδίο τιμών $[a,b]$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) που δίνεται από την $f(x)$, τότε η μέση τιμή του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$E[x] = \int_a^b xf(x)dx$$

Αντίστοιχα η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος δίνεται από τη σχέση

$$E[x^2] = \int_a^b x^2f(x)dx$$

Παράδειγμα Υπολογισμού Μέσης Τιμής

Δίνεται το σήμα $x(t)$ που σε κάθε χρονική στιγμή είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο διάστημα $[-V, V]$. Υπολογίστε τη μέση τιμή του σήματος.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η $f(x)=1/2V$ ώστε όταν ολοκληρωθεί στο διάστημα $[-V, V]$ να δώσει την ολική πιθανότητα, δηλαδή 1.

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_{-V}^V x f(x) dx = \int_{-V}^V x \frac{1}{2V} dx = \frac{1}{2V} \int_{-V}^V x dx \\ &= \frac{1}{2V} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-V}^V = \frac{1}{2V} \left[\frac{V^2}{2} - \frac{(-V)^2}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Η μέση τετραγωνική τιμή του σήματος υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} E[x^2] &= \int_{-V}^V x^2 f(x) dx = \int_{-V}^V x^2 \frac{1}{2V} dx = \frac{1}{2V} \int_{-V}^V x^2 dx \\ &= \frac{1}{2V} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-V}^V = \frac{1}{2V} \left[\frac{V^3}{3} - \frac{(-V)^3}{3} \right] = \frac{1}{2V} \frac{2V^3}{3} = \frac{V^2}{3} \end{aligned}$$

Εφαρμογή στον Κβαντισμό

Για τον υπολογισμό του λόγου της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου κβαντισμού (SNR) χρειαζόμαστε στον αριθμητή την ισχύ του σήματος (μέση τετραγωνική τιμή του σήματος) και στον παρονομαστή το μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού,

$$\text{που ισούται με: } E[(x - x_q)^2] = \frac{\Delta^2}{12}$$

όπου Δ είναι το εύρος της ζώνης κβαντισμού.

Στην άσκηση αυτοαξιολόγησης 4.7 του Τόμου Β', Μέρος Α', αποδεικνύεται ότι αν ένα τυχαίο σήμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο πεδίο τιμών, ο λόγος SNR (συμβολίζεται και ως SQNR σε κάποια βιβλία) δίνεται από τη σχέση

$$SNR (dB) = 10\log_{10}L^2 = 20\log_{10}L$$

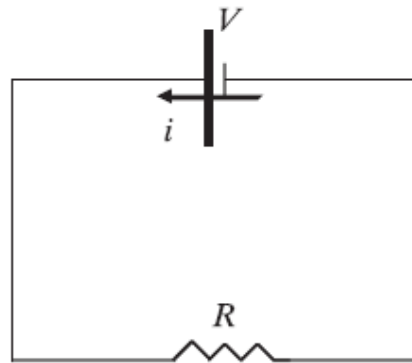
Τόμος Β/Μέρος Α

| | | |
|-------|--|----|
| 2.4 | Ισχύς/ενέργεια σημάτων | 58 |
| 2.4.1 | Στιγμιαία ισχύς/ενέργεια | 58 |
| 2.4.2 | Μέση ισχύς | 59 |
| 2.4.3 | Σήματα ενέργειας – ισχύος..... | 59 |
| 2.4.4 | Ταυτότητα Parseval – Μέση ισχύς περιοδικών σημάτων..... | 60 |
| 2.4.5 | Θεώρημα Parseval – Φασματική πυκνότητα ενέργειας/ισχύος..... | 62 |
| 2.4.6 | Συσχέτιση ενεργειακών σημάτων | 63 |

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (1)

2.4.1 Στιγμιαία ισχύς/ενέργεια

Θεωρούμε καταρχήν το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος:



Σχήμα 2.27

Ηλεκτρικό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος

Υποθέτουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση V είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το χρόνο. Η ισχύς που παράγεται στο κύκλωμα και καταναλώνεται στην αντίσταση ισούται με:

$$P = V \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (2)

Και η αντίστοιχη ενέργεια που έχει παραχθεί στο κύκλωμα και έχει καταναλωθεί στην αντίσταση σε χρόνο t ισούται με το γινόμενο της ισχύος επί τον αντίστοιχο χρόνο, δηλαδή:

$$E(t) = P \cdot t = V \cdot i \cdot t = i^2 \cdot R \cdot t = \frac{V^2}{R} \cdot t$$

Οι μονάδες ισχύος είναι τα Watt ($1\text{W} = 1\text{Joule/sec}$) και ενέργειας είναι τα Joule ή οι Wh ($1\text{Wh} = 1\text{Watt} \times 1\text{hour} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \times 3.600\text{sec} = 3.600\text{Joule}$)

Εάν στο παραπάνω σχήμα υποθέσουμε ότι η εφαρμοζόμενη τάση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε οι ανωτέρω σχέσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R = \frac{V^2(t)}{R}$$

$$E(t) = \int_0^t P(t) \cdot dt = \int_0^t V(t) \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^t i^2(t) \cdot R \cdot dt = \int_0^t \frac{V^2(t)}{R} \cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (3)

Για τηλεπικοινωνιακά συστήματα θεωρούμε ότι $R = 1\Omega$, οπότε το τηλεπικοινωνιακό σήμα $x(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί εξίσου με την εφαρμοζόμενη τάση ή το ρεύμα στις ανωτέρω σχέσεις, οι οποίες μετασχηματίζονται ως εξής:

Στιγμιαία ισχύς πραγματικού σήματος $P(t) = x^2(t)$

Ενέργεια πραγματικού σήματος $E(t) = \int_0^t x^2(t) \cdot dt$

Προκειμένου οι ανωτέρω ορισμοί να ισχύουν και για μιγαδικά σήματα $x(t)$ (των οποίων η ισχύς εξαρτάται μόνο από το μέτρο τους), οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

Στιγμιαία ισχύς σήματος $P(t) = |x(t)|^2$

Ενέργεια σήματος $E(t) = \int_0^t |x(t)|^2 \cdot dt$

Σημείωση: Για πραγματικά σήματα $x(t)$ ισχύει ότι $|x(t)|^2 = x^2(t)$.

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (4)

2.4.2 Μέση ισχύς

Γενικά, για ένα μέγεθος $m(t)$ που μεταβάλλεται με το χρόνο, η χρονική μέση τιμή του μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ($t_1 < t_2$) ορίζεται ως:

$$\overline{m(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} m(t) \cdot dt$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να εκφράσουμε τη μέση ισχύ ενός σήματος $x(t)$ λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβολή του καθ' όλη τη διάρκειά του (ή ισοδύναμα από $-\infty$ έως $+\infty$) ως εξής:

$$\overline{P(t)} = P_x = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} \stackrel{t_1 \rightarrow -T}{t_2 \rightarrow T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 \cdot dt \right\}$$

Αντίστοιχα, η ενέργεια αυτού του σήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$E_x = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \left\{ (t_2 - t_1) \cdot P_x \right\} = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \cdot dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \cdot dt$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (5)

2.4.3 Σήματα ενέργειας – ισχύος

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$0 < E_x < +\infty$$

ονομάζονται ενεργειακά. Παραδείγματα σημάτων ενέργειας είναι διάφοροι παλμοί (τετραγωνικός, τριγωνικός), δηλαδή σήματα πεπερασμένης διάρκειας. Τα σήματα αυτά έχουν μηδενική ισχύ.

Τα σήματα που έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ

$$0 < P_x < +\infty$$

ονομάζονται σήματα ισχύος. Παραδείγματα σημάτων ισχύος είναι τα περιοδικά και τα σήματα άπειρης διάρκειας (π.χ. το σήμα $x(t) = c$, $0 < t < +\infty$). Τα σήματα αυτά έχουν άπειρη ενέργεια.

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (6)

2.4.4 Ταυτότητα Parseval – Μέση ισχύς περιοδικών σημάτων

Για τα περιοδικά σήματα η σχέση υπολογισμού της μέσης ισχύος μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

Έστω σήμα $x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 τέτοια ώστε να ισχύει $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$x(t+nT_0) = x(t), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Στον υπολογισμό της μέσης ισχύος μπορούμε να περιορίσουμε το διάστημα ολοκλήρωσης στη διάρκεια μιας περιόδου:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{(t_2-t_1) \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} \stackrel{t_2 \rightarrow t_1+nT_0}{=} \lim_{nT_0 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{nT_0} \int_{t_1}^{t_1+nT_0} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{nT_0} \left[n \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt \right\} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt \end{aligned}$$

Ισχύς/Ενέργεια Σημάτων (7)

Για τα περιοδικά σήματα που γράφονται με τη μορφή μιγαδικής σειράς Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi nft}, \text{ όπου } V_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi nft} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j2\pi nft} dt$$

και έχουν ΜΣ Fourier:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n \cdot \delta(f - nf_0), \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

η μέση ισχύς μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ V_n^* \cdot V_n \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |V_n|^2 \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται ταυτότητα Parseval για περιοδικά σήματα.

Δηλαδή, βρίσκοντας την έκφραση του περιοδικού σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέση ισχύ του υπολογίζοντας το άθροισμα των τετραγώνων των πλατών των όρων που περιλαμβάνει το σήμα στο πεδίο των συχνοτήτων.

Παράδειγμα (1)

Να υπολογιστεί η μέση ισχύς του σήματος $x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

Α' τρόπος: Υπολογισμοί με ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Το $x(t)$ έχει περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Η μέση ισχύς, σύμφωνα με την παραπάνω ενότητα, θα ισούται με:

τητα, θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |A_0 \cos(2\pi f_0 t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} [A_0 \cos(2\pi f_0 t)]^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t) \cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(2\pi f_0 t) \cdot dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} \cdot dt = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[\int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{1}{2} \cdot dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{2} \cdot dt \right] = \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{1}{2} [t]_{t_1}^{t_1+T_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} (\sin(4\pi f_0 t))' \cdot dt \right] = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{1}{2} [t_1 + T_0 - t_1] + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 t)]_{t_1}^{t_1+T_0} \right] = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} [\sin(4\pi f_0 (t_1 + T_0)) - \sin(4\pi f_0 (t_1))] \right] = \\ &= \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi f_0} \left[\sin\left(4\pi f_0 t_1 + 4\pi f_0 \frac{1}{f_0}\right) - \sin(4\pi f_0 t_1) \right] \right] = \frac{A_0^2}{T_0} \left[\frac{T_0}{2} + 0 \right] = \frac{A_0^2}{2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα (2)

Β' τρόπος: Υπολογισμοί από τη σειρά Fourier – με την ταυτότητα Parseval

Το $x(t)$ μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς Fourier με τη χρήση της σχέσης Euler:

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{A_0}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

Επίσης, ο ΜΣ Fourier του $x(t)$ ισούται με: $X(f) = \frac{A_0}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2} \delta(f + f_0)$

οπότε η μέση ισχύς υπολογίζεται (με χρήση της ταυτότητας Parseval) ως εξής:

$$P_x = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{A_0^2}{4} + \frac{A_0^2}{4} = \frac{A_0^2}{2}.$$

Μέσα μετάδοσης – Κανάλι - Θόρυβος

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (1)

- Κάθε πληροφορία, προκειμένου να μεταδοθεί από την πηγή στον προορισμό της, πρέπει να χρησιμοποιήσει ένα ελαστικό μέσο, το μέσο μετάδοσης.
- Κάθε πηγή εκπέμπει σε ορισμένες συχνότητες, οι οποίες καθορίζουν τη ζώνη εκπομπής ή φάσμα (spectrum): η μέγιστη και ελάχιστη συχνότητα που μπορεί να εκπέμψει).
 - Spectrum σήματος: Το εύρος των συχνοτήτων που περιέχει το σήμα
- Εύρος ζώνης (bandwidth): Το «μέγεθος» του spectrum
 - Εύρος ζώνης= Μέγιστη Συχνότητα – Ελάχιστη Συχνότητα
- Εύρος ζώνης και μέσο μετάδοσης
 - Κάθε μέσο μετάδοσης είναι κατάλληλο για συγκεκριμένα εύρη (ώστε το σήμα να μεταδίδεται ικανοποιητικά – χωρίς σημαντικά σφάλματα)

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (2)

- Κατά τη μετάδοση φωνής (και δεδομένων) στο τηλεφωνικό δίκτυο, τα τηλεφωνικά καλώδια χαλκού υποστηρίζουν συχνότητες από 300 ως 3.300 Hz, Εύρος ζώνης = 3 KHz.
- Εύρος ζώνης και Ρυθμός Μετάδοσης
 - Το Εύρος Ζώνης σχετίζεται άμεσα με την «ποσότητα» πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διατρέχει το μέσο.

Χαρακτηριστικά Μέσων Μετάδοσης (3)

- Το φυσικό μέσο μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών σημάτων / η ζεύξη μεταξύ πομπού και δέκτη
- Τύποι καναλιών
 - Ενσύρματα : Καλώδια Χαλκού
 - Ενσύρματα : Οπτικές Ίνες
 - Ασύρματα : Αέρας, Κενό
- Προβλήματα
 - περιορισμένο εύρος ζώνης
 - παραμόρφωση πλάτους ή και φάσης
 - χρονική μεταβολή
 - θόρυβος
 - πολυδιαδρομική (multi-path) μετάδοση και διαλείψεις

Κανάλι Μετάδοσης (1)

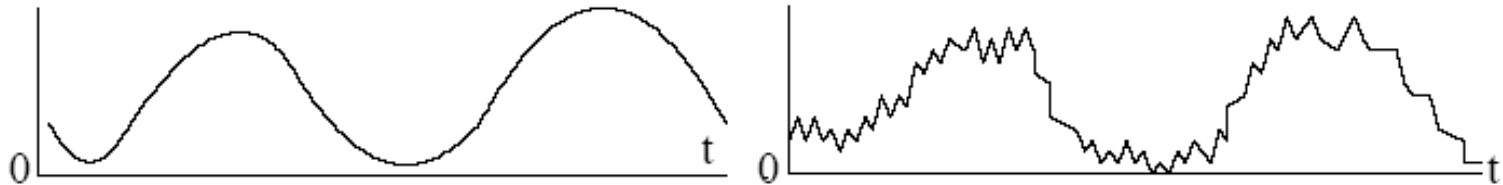
- Χαρακτηριστικά καναλιού
 - Διαθέσιμο εύρος ζώνης συχνοτήτων
 - Απόκριση πλάτους και φάσης
 - Ευαισθησία σε θόρυβο
- Επηρεάζουν
 - Μέγιστο ρυθμό μετάδοσης
 - Εξασθένιση σήματος - μέγιστη απόσταση
 - Παραμόρφωση πλάτους, φάσης
 - Πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος

Κανάλι Μετάδοσης (2)

- Κάθε κανάλι αλλοιώνει τα μεταδιδόμενα σήματα
 - Εξασθένιση: Είναι η απώλεια της ισχύος καθώς το σήμα διαδίδεται και μετράται σε dB. Ο λογαριθμικός λόγος της ισχύος του σήματος εισόδου προς την έξοδο $10\log(P_{out}/P_{in})$
 - Στα ενσύρματα μέσα το σήμα εξασθενεί λογαριθμικά με την απόσταση
 - Η απώλεια εκφράζεται σε decibel ανά χιλιόμετρο
 - Η ποσότητα της απωλεσθείσας ισχύος εξαρτάται από τη συχνότητα
 - Εάν η εξασθένιση είναι πολύ μεγάλη ο δέκτης πιθανόν να μη μπορεί να ανιχνεύσει το σήμα
 - Παραμόρφωση καθυστέρησης: Προκαλείται από το γεγονός ότι διαφορετικές συνιστώσες οδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες

Κανάλι Μετάδοσης (3)

- Εισαγωγή θορύβου
 - Εσωτερικός θόρυβος (π.χ, θερμικός θόρυβος ηλεκτρονικών κυκλωμάτων)
 - Εξωτερικός θόρυβος (π.χ, παρεμβολές, κοσμική ακτινοβολία)
 - Επίδραση του θορύβου στην ισχύ του σήματος-Signal-to-Noise Ratio:
 $SNR=(\text{Average Signal Power}/\text{Noise Power})=10\log(P/N)$



Κανάλι Μετάδοσης (4)

- Τα τηλεπικοινωνιακά σήματα μεταδίδονται δια μέσου του αέρα με τη χρήση κεραιάς κατάλληλου μεγέθους
- Στο κενό όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα ανεξάρτητα από τη συχνότητά τους
 - Ισχύει η σχέση $\lambda=c/f$
 - c : ταχύτητα του φωτός 300000 Km/sec, λ : μήκος κύματος
- Η ποσότητα πληροφορίας που μπορεί να μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα σχετίζεται με το εύρος ζώνης του
- Για να αποτραπεί το πλήρες χάος, υπάρχουν διεθνείς συμφωνίες που αφορούν το ποιος χρησιμοποιεί ποιες συχνότητες
 - Οργανισμός ITU-R

Θόρυβος

- Ανεπιθύμητη ενέργεια που προέρχεται από πηγές εκτός πομπού
- Αφορά όλα τα συστήματα επικοινωνίας (Ασύρματα-Ενσύρματα)
- Εσωτερικός Θόρυβος
 - Θερμικός θόρυβος (thermal noise, white noise)
 - Κίνηση ηλεκτρονίων
 - Θόρυβος Ενδοδιαμόρφωσης (inter-modulation noise)
 - Συνύπαρξη σημάτων διαφορετικών συχνοτήτων στο ίδιο μέσο
 - Συνακρόαση (crosstalk)
 - Παρεμβολές μεταξύ μεταδόσεων κοντινών μεταξύ τους
 - Παλμικός θόρυβος (impulse)
 - Αστάθειες ηλεκτρικού ρεύματος
 - Εξωτερικοί Θόρυβοι
 - Βιομηχανικά και Ατμοσφαιρικά παράσιτα

Χωρητικότητα κατά Shannon

- Με δεδομένο έναν δίαυλο εύρους ζώνης B Hz και ένα σηματοθορυβικό λόγο (SNR) S/N , όπου S η ισχύς του σήματος και N η ισχύς του θορύβου, η χωρητικότητα (μέγιστος ρυθμός μετάδοσης) του διαύλου είναι

$$C = B \log_2 (1 + SNR) \quad (bps)$$

- Άρα για δίαυλο 4 kHz και $S/N = 1000$ (= 30 dB), ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί είναι $C = 4000 * \log_2(1+1000) \approx 40$ kbps