ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

Εισαγωγή στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

2η ΟΣΣ /10.12.2022

Τμήμα ΗΛΕ.41 / Νίκος Δημητρίου

2022-2023

Σχόλια για τη ΓΕ1

Ερώτημα 1ζ

224.65.74.118 ← destination

11100000.01000001.01001010.01110110

Σύγκριση IP διεύθυνσης προορισμού με network part των διευθύνσεων που είναι καταχωρημένες στο router

A) 224.0.0.0/10

11100000.00

x

B) 224.64.0.0/16

11100000.01000000

x

Γ) 224.192.0.0/16

11100000.11000000

x x

224.128.0.0/10

11100000.10

x x

Δ) →

Μόνη επιλογή εφόσον δεν ανήκει ο προορισμός σε κανένα από τα υποδίκτυα που αντιστοιχούν στα Α,Β,Γ

Θέμα 3

ABP με σφάλματα

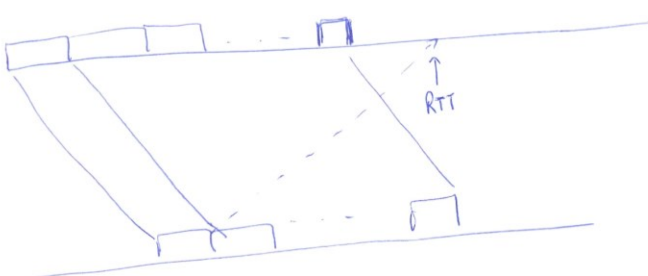
$$\eta = \frac{TRANSP}{\underbrace{p \cdot RTT + (1-p)T}_{E(x)}} = \frac{TRANSP}{p \cdot RTT + (1-p)\, 1.1 \cdot RTT}$$

ρυθμός ροής = Ρυθμαπόδοση = Th

$$Th = \eta \cdot R \Rightarrow \eta = \frac{Th}{R}$$

GBN με σφάλματα

$$\eta_{GBN} = \frac{TRANSP}{p \cdot TRANSP + (1-p)\, W \cdot TRANSP\, (1.1)}$$



Βασικές Σχέσεις

Θέμα 4

$$TRANSP \geq 2\,PROP$$

$$\Rightarrow \frac{PROP}{TRANSP} \leq 0{,}5$$

$$\alpha_{max} = 0{,}5$$

Ελάχιστη απόδοση CSMA/CD

$$\eta_{min} = \frac{1}{1+5\,a_{max}} = \frac{1}{1+5\cdot 0{,}5} = \frac{1}{3{,}5} = 0{,}285$$

$$\eta_{min} = 28{,}5\%$$

Θέμα 6

Διάταξη Δικτύων σε φθίνουσα σειρά απαιτούμενων διευθύνσεων

Χρήστες+ network+broadcast (2) +router interface (1)

		Εύρος Διευθύνσεων		Μάσκα Υποδικτύου
Η.Μ	$1500+2+1 \to 2048 \to 2^{11}$	195.254.0.0/21 ~ 195.254.7.255/21	⇨ $8 \times 256 = 2^{11}$	255.255.248.0
Πλ.	$1000+2+1 \to 1024 \to 2^{10}$	195.254.8.0/22 ~ 195.254.11.255/22	⇨ $4 \times 256 = 2^{10}$	255.255.252.0
Δκ.	$200+2+1 \to 256 \to 2^{8}$	195.254.12.0/24 ~ 195.254.12.255/24	⇨ $1 \times 256 = 2^{8}$	255.255.255.0
$ΔΡ_1$	$2+2 \to 4 \to 2^{2}$	195.254.13.0/30 ~ 195.254.13.3/30	⇨ $1 \times 4 = 2^{2}$	255.255.255.252
$ΔΡ_2$	$2+2 \to 4 \to 2^{2}$	195.254.13.4/30 ~ 195.254.13.7/30	⇨ $1 \times 4 = 2^{2}$	
$ΔΡ_3$	$2+2 \to 4 \to 2^{2}$	195.254.13.8/30 ~ 195.254.13.11/30	⇨ $1 \times 4 = 2^{2}$	

Υπόλοιπο αδιάθετων διευθύνσεων

195.254.13.12 ~ 195.254.15.255

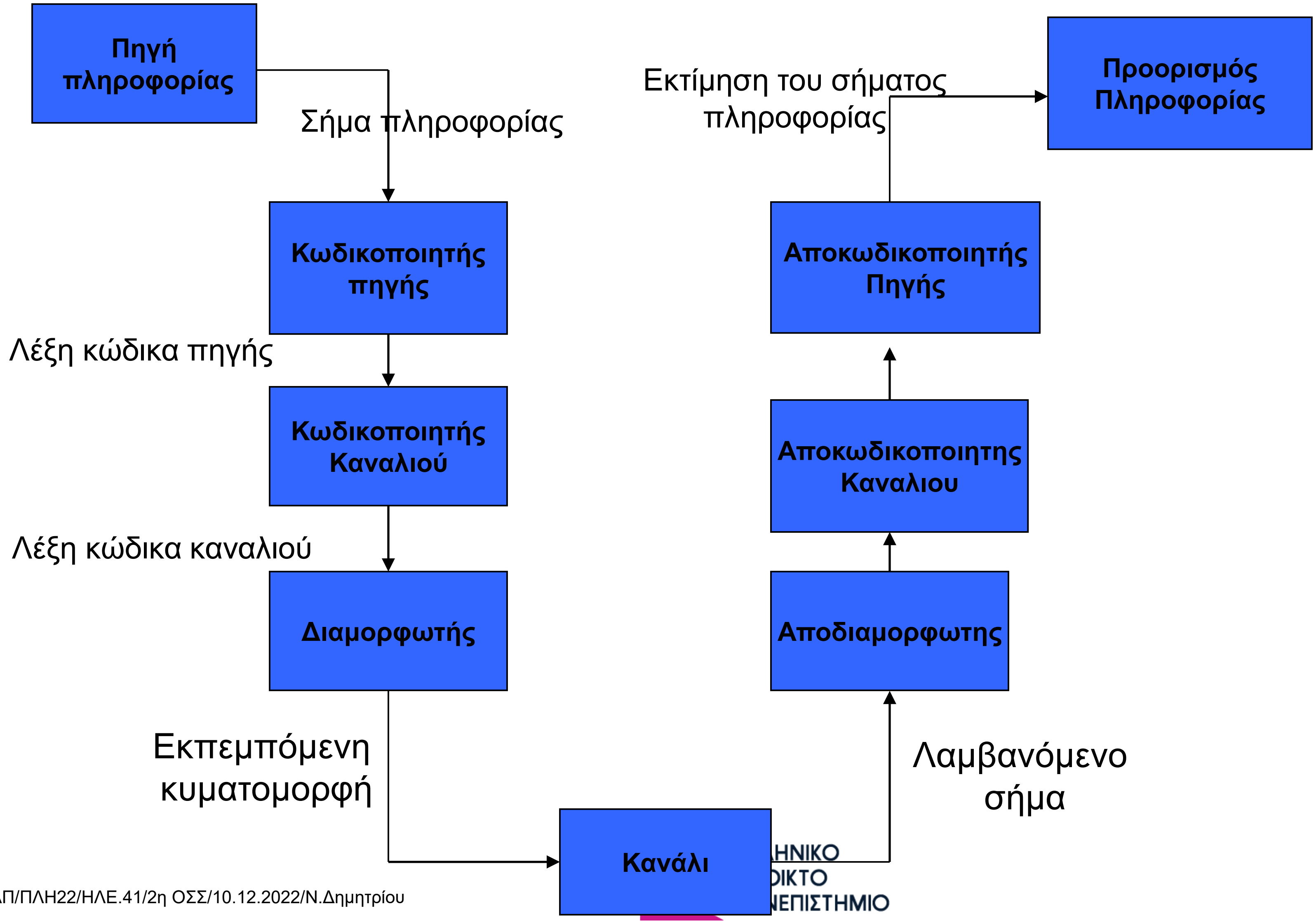
⇨ $244 + 2 \times 256 = 756$ διευθύνσεις

Στόχοι Μελέτης

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
  - Μαθηματική Εισαγωγή
  - Τύποι Σημάτων
  - Εκφράσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου
  - Περιοδικότητα Σημάτων
  - Εκφράσεις σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων
  - Μετασχηματισμός Fourier
  - Χαρακτηριστικά Συστημάτων
  - Ιδανικά Φίλτρα

Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



Μαθηματική Εισαγωγή

Διακριτά σύνολα αριθμών

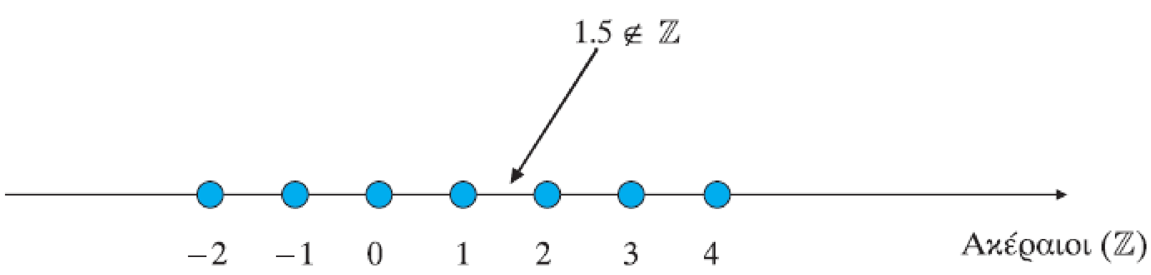
- Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
- Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$
- Ρητοί αριθμοί, που ορίζονται ως το πηλίκο ακεραίων:

$$z \in \mathbb{Q} \text{ όταν } \exists x, y \in \mathbb{Z} \ (y \neq 0) \text{ ώστε } z = \frac{x}{y}$$

- Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή πηλίκου ακεραίων. Είναι οι δεκαδικοί με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία.

Παραδείγματα άρρητων: $\pi = 3.1415927\ldots$, οι ρίζες μη τελείων τετραγώνων $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ κ.λπ.

Τα παραπάνω σύνολα είναι διακριτά, δηλαδή αποτελούνται από διακριτές τιμές και είναι δυνατό μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών τους να υπάρχει αριθμός που να μην ανήκει στο σύνολο.

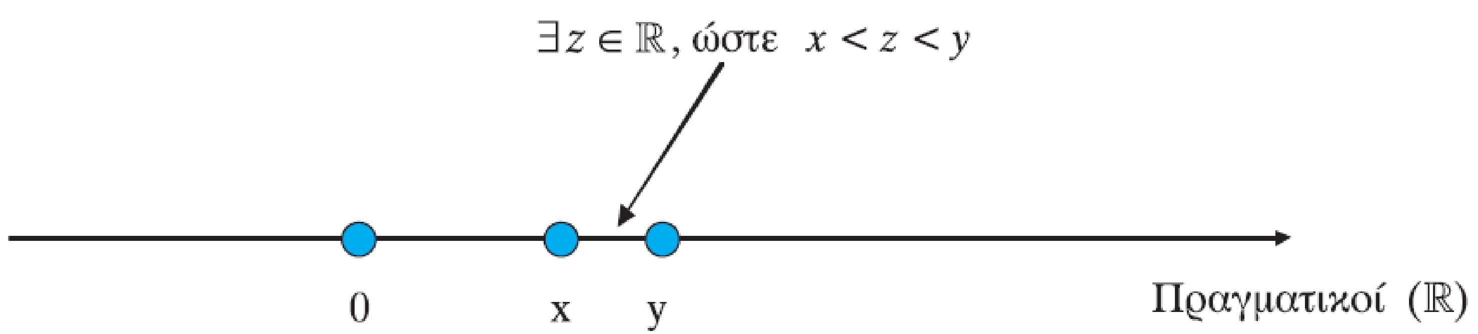


Συνεχή σύνολα αριθμών

- Οι πραγματικοί αριθμοί ($\mathbb{R}$) συμπεριλαμβάνουν ρητούς και άρρητους.

Αποτελούν ένα συνεχές σύνολο αριθμών, δηλαδή για κάθε ζεύγος πραγματικών υπάρχει πραγματικός που να βρίσκεται ανάμεσά τους:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \text{με } x<y,\ \exists\, z \in \mathbb{R},\ \text{ώστε } x<z<y$$



Σχήμα 2.2

Παράδειγμα συνεχούς συνόλου

Εισαγωγή στα Σήματα

Σήμα

- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
  – Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα

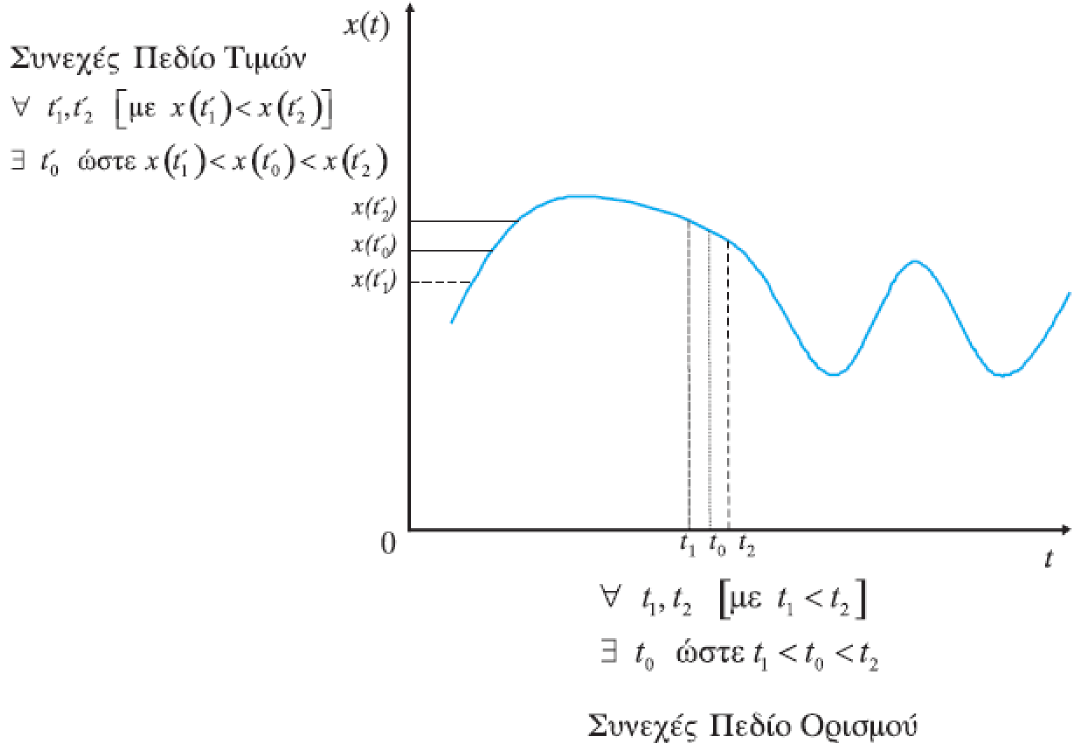
Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Κατηγορίες Σημάτων

- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
  - Περιοδικά Σήματα
  - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
    - Ημιτονοειδή Σήματα
    - Ορθογώνιος Παλμός
    - Τριγωνικός Παλμός
    - Κρουστικά Σήματα
    - Σήμα Βήματος

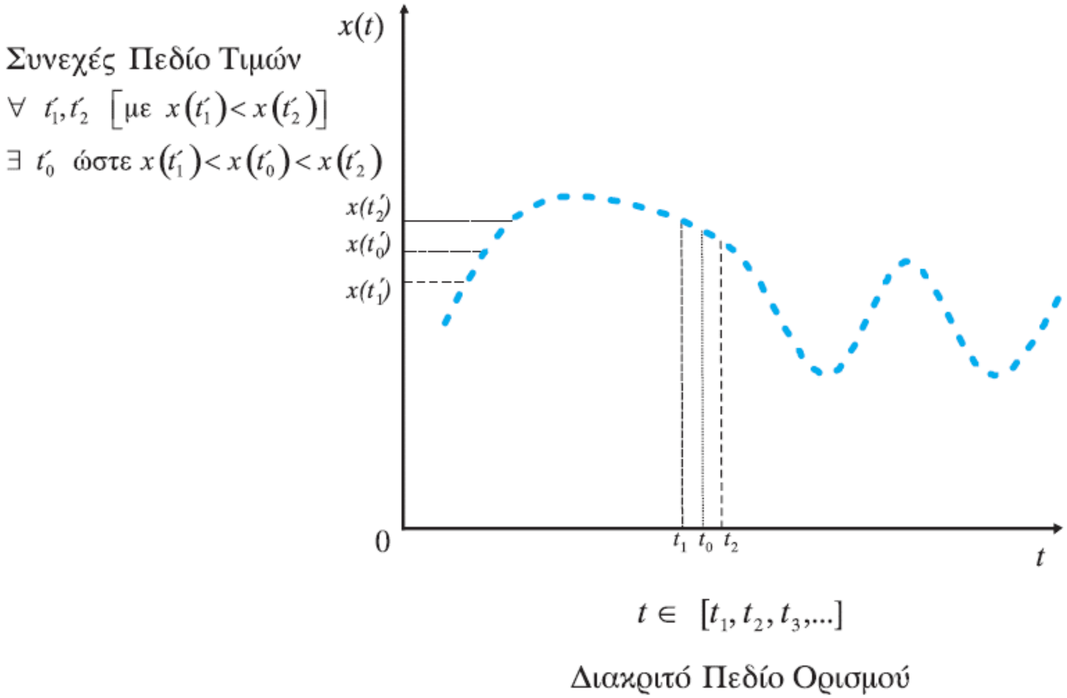
Σήματα συνεχούς χρόνου - αναλογικά



Τα σήματα συνεχούς χρόνου (αναλογικά) έχουν συνεχές πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$, $t \in \mathbb{R}$ είναι συνεχούς χρόνου.

Σήματα διακριτού χρόνου

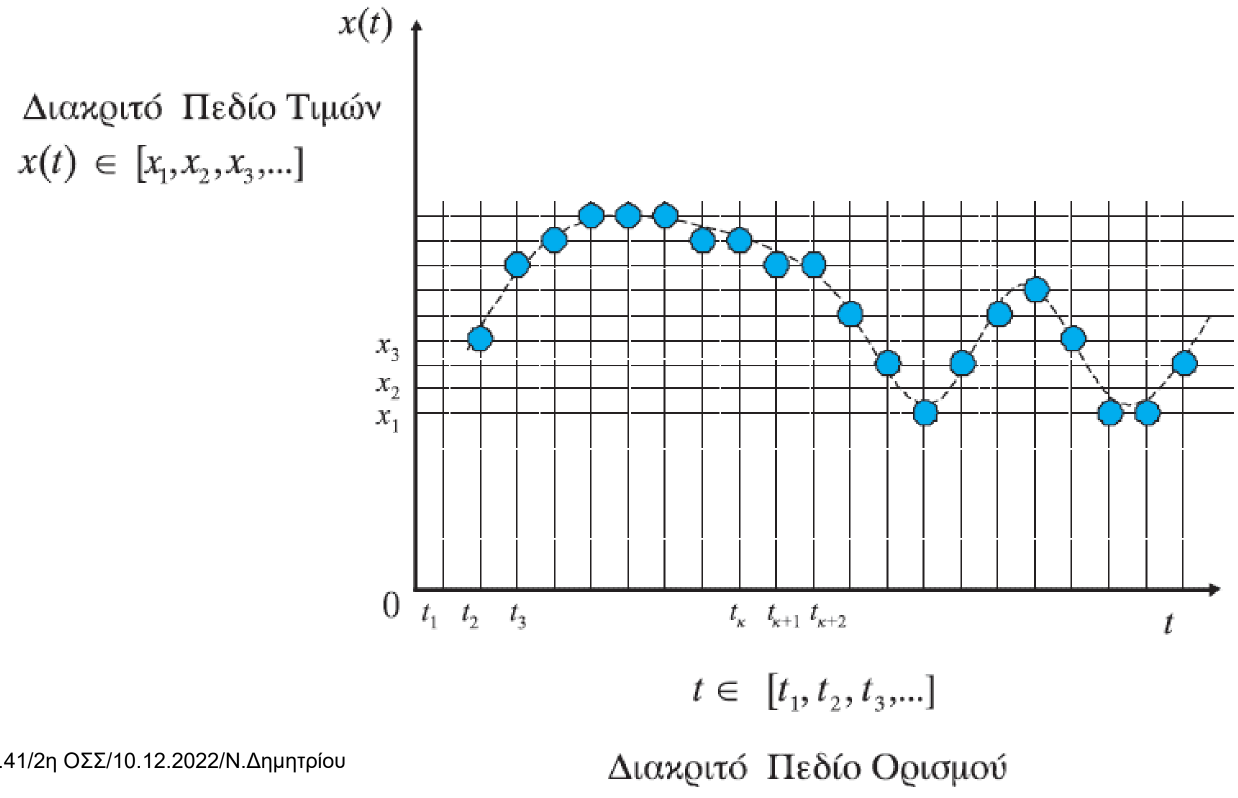
Τα σήματα διακριτού χρόνου έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών.



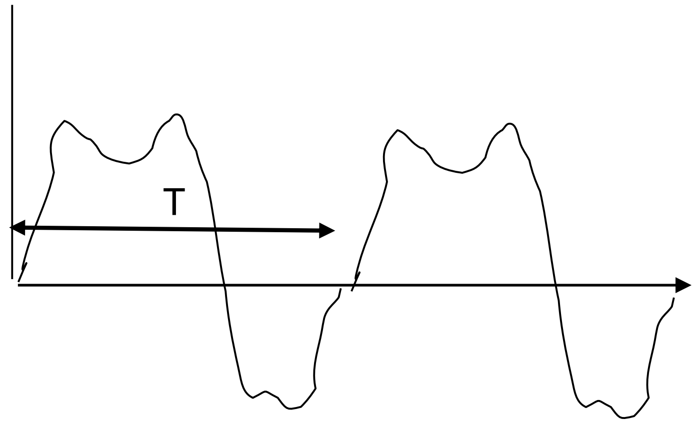
Για παράδειγμα, το σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} n\right)$, όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$ και T_0 άρρητος $\left(\text{π.χ. } T_0 = \sqrt{5}\right)$, είναι διακριτού χρόνου, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα συνεχές σύνολο [το $(-1,1)$] $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Ψηφιακά σήματα

Τα ψηφιακά σήματα έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και διακριτό πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n=0,1,2,...$ και T_0 ρητός, είναι ψηφιακό, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα διακριτό σύνολο [π.χ. για $T_0=5$, το $x(n)$ παίρνει τις τιμές $\{0.309,-0.809,1\}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$].



Περιοδικά Σήματα



Ένα σήμα $x(t)$ ορίζεται ως περιοδικό αν ισχύει ότι:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT) = x(t)\ \text{για}\ k = 1,2,\ldots$$

(Συν)ημιτονοειδή Σήματα

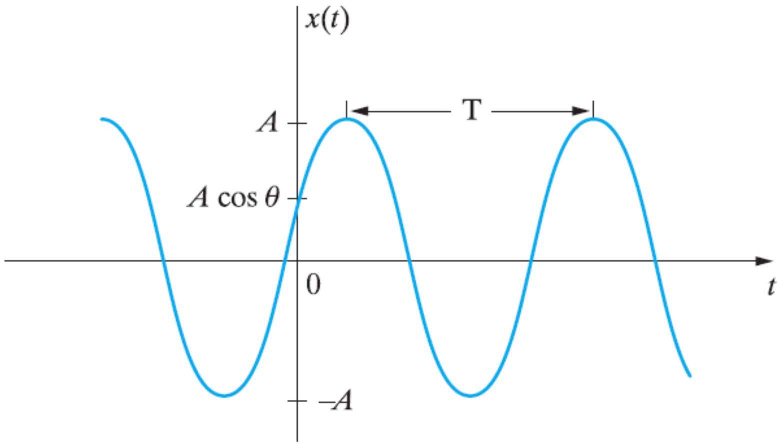
$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t+\theta) = A\cdot\cos(2\pi f\cdot t+\theta) = A\cdot\sin\left(2\pi f\cdot t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

ω: κυκλική συχνότητα (μετράται σε rad/sec)

θ: φάση (μετράται σε rad)

f: συχνότητα (μετράται σε Hertz)

A: πλάτος (μετράται σε Volt)



Υπολογισμός περιόδου

Αναζητείται θετικό $T\in\mathbb{R}_+^*$ τέτοιο ώστε $\forall t\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x(t+T)=x(t) \Leftrightarrow A\cdot\cos(2\pi f(t+T)+\theta) = A\cdot\cos(2\pi ft+\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi ft+2\pi fT+\theta)=\cos(2\pi ft+\theta) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ισχύει ότι αν } \cos(x)=\cos(y), \\ \text{τότε } x=2k\pi+y,\ k=1,2,...\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi ft+2\pi fT+\theta = 2\pi ft+\theta+2k\pi, k=1,2,...$$

$$2\pi fT = 2k\pi \Leftrightarrow T=\frac{k}{f}, k=1,2,...$$

Η θεμελιώδης περίοδος λαμβάνεται για k=1 και ισούται με $T=\dfrac{1}{f}=\dfrac{2\pi}{2\pi f}=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Περιοδικότητα Αθροίσματος Περιοδικών Σημάτων

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν:

$\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις).

Δηλαδή, θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 .$$

Γενίκευση

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2,..., T_N θα είναι περιοδικό εάν:

$\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N$$

Παράδειγμα Περιοδικότητας Σύνθετων Σημάτων

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

Παράδειγμα Περιοδικότητας Σύνθετων Σημάτων

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5\pi t)$ η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}\sec$

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=1,β=10 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \beta T_1 = \alpha T_2 = 4\sec$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25$ Hz

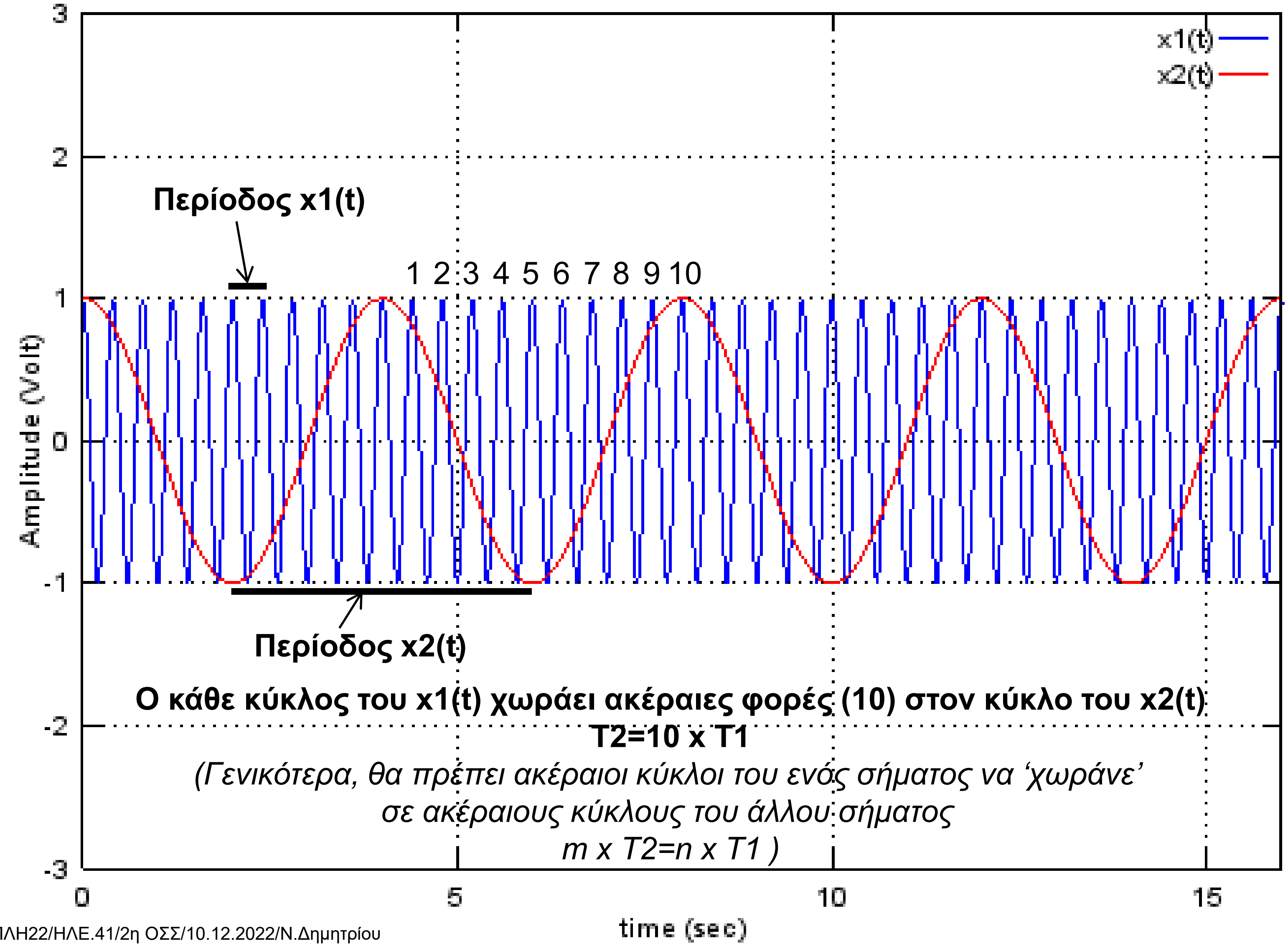
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Example 1a

- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*pi.*t); % 1st signal with frequency 2.5Hz
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal ‘b’ is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal ‘r’ is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

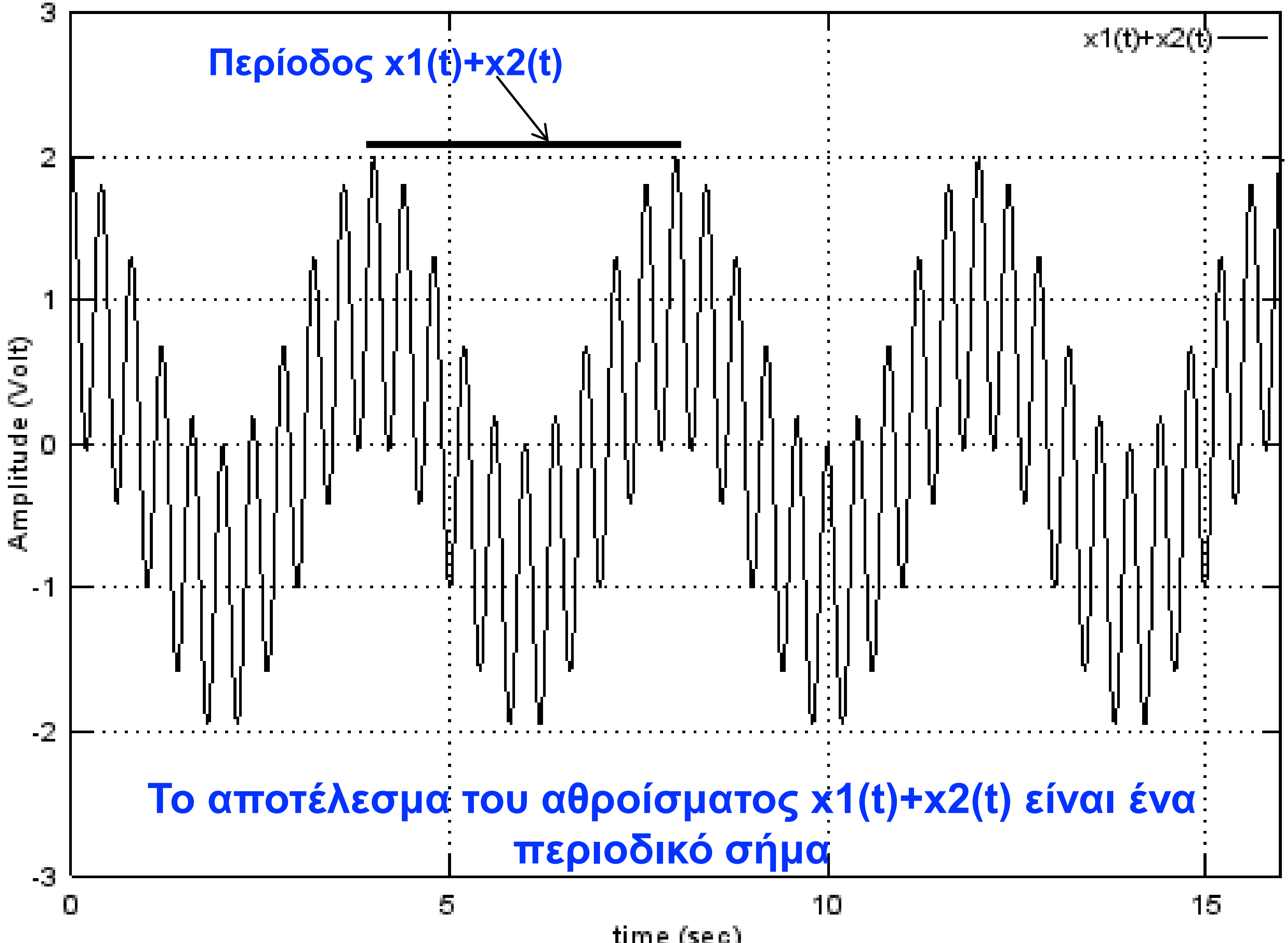
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Example 1a



x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) χωράει ακέραιες φορές (10) στον κύκλο του x2(t)
T2=10 x T1
(Γενικότερα, θα πρέπει ακέραιοι κύκλοι του ενός σήματος να 'χωράνε'
σε ακέραιους κύκλους του άλλου σήματος
m x T2=n x T1)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Example 1a


Περίοδος x1(t)+x2(t)
x1(t)+x2(t)
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) είναι ένα περιοδικό σήμα
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15

Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

Είναι $s_1(t) = \boxed{f(5t/\pi)+} \; f\left(\frac{t}{2}\right) = \boxed{\cos(5t)} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5t)$ η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5}$ **sec**

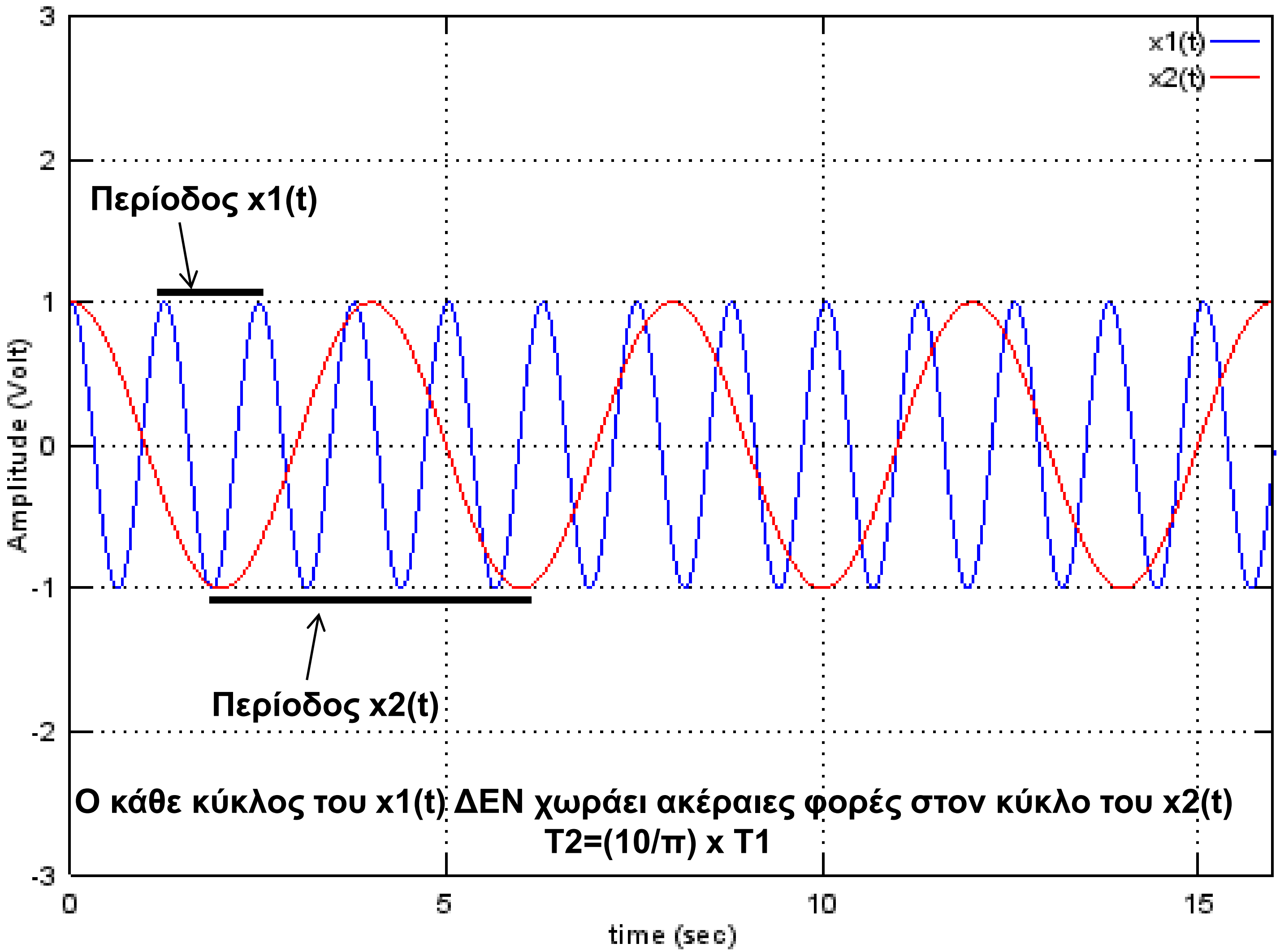
Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι, $T_1/T_2 = \pi/10$ Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

Example 1b

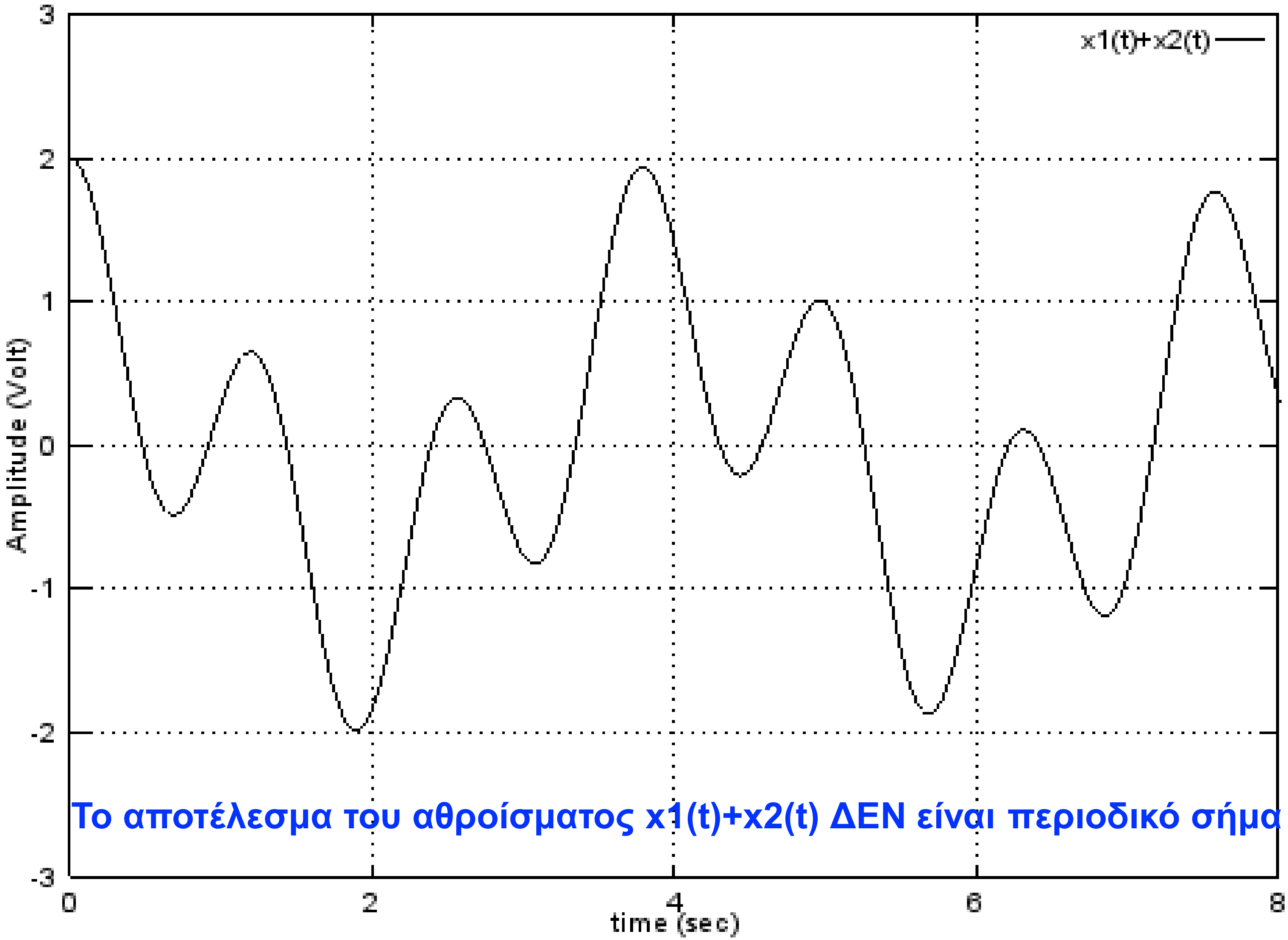
- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz   **Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a**
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal 'b' is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1b



x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
Περίοδος x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15
Ο κάθε κύκλος του x1(t) ΔΕΝ χωράει ακέραιες φορές στον κύκλο του x2(t)
T2=(10/π) x T1

Example 1b



x1(t)+x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) ΔΕΝ είναι περιοδικό σήμα

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Το άθροισμα περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό σήμα αν και μόνο αν ο λόγος της περιόδου των επιμέρους σημάτων είναι ρητός αριθμός (μπορεί να γραφεί ως κλάσμα ακεραίων).
- Πως υπολογίζεται η περίοδος του σύνθετου σήματος?

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Η βασική περίοδος του σύνθετου σήματος N περιοδικών σημάτων υπολογίζεται ως εξής:
  - Γράψε το λόγο των περιόδων T_{o1}/T_{oi}, $2 \leq i \leq N$ ως λόγο ακεραίων, όπου T_{o1} η περίοδος του 1^{ου} σήματος και T_{oi} η περίοδος των υπολοίπων N-1 σημάτων. Αν ένας από τους λόγους είναι άρρητος το άθροισμα δεν είναι περιοδικό σήμα.
  - Απαλείψτε τους κοινούς όρους σε αριθμητή και παρονομαστή κάθε λόγου ακεραίων.
  - Η βασική περίοδος του σύνθετου σήματος είναι $T_o = k_o T_{o1}$, όπου k_o είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των επιμέρους λόγων.

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Θεωρείστε σήμα *v(t)* ως άθροισμα των περιοδικών σημάτων

$$v(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$x_1(t) = \cos(3.5t)$$

$$x_2(t) = \cos(2t)$$

$$x_3(t) = \cos(\frac{7}{6}t)$$

- Είναι περιοδικό το σύνθετο σήμα και αν ναι ποια η περίοδος?

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Υπολογίστε τους λόγους των περιόδων των επιμέρους σημάτων

$$T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3.5}$$

$$T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2}$$

$$T_{03} = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{\frac{2\pi}{3.5}}{\frac{2\pi}{2}} = \frac{2}{3.5} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{T_{01}}{T_{03}} = \frac{\frac{2\pi}{3.5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}} = \frac{\frac{7}{6}}{3.5} = \frac{7}{21}$$

- Οι λόγοι είναι ρητοί αριθμοί και άρα το σύνθετο σήμα περιοδικό.

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Απαλοιφή κοινών παραγόντων:
  - $T_{01}/T_{02} = 4/7$
  - $T_{01}/T_{03} = 7/21=1/3$
- Υπολογισμός ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου των παρονομαστών των λόγων:
  - $n_1= 3*7=21$
- Βασική περίοδος του σύνθετου σήματος:
  - $T_0= n_1\, T_{01} = 21*2\pi/3.5=12\pi$

Εναλλακτική λύση

- Αναζητούμε ελάχιστους ακέραιους m_1, m_2, m_3 ώστε να ισχύει

$$m_1 T_{01} = m_2 T_{02} = m_3 T_{03} \Leftrightarrow$$

$$m_1 \frac{2\pi}{3.5} = m_2 \frac{2\pi}{2} = m_3 \frac{2\pi}{\frac{7}{6}} \Leftrightarrow \{\text{διαίρεση κατά μέλη με } 2\}$$

$$m_1 \frac{1}{3.5} = m_2 \frac{1}{2} = m_3 \frac{1}{\frac{7}{6}} \Leftrightarrow \{\text{διαίρεση κατά μέλη με } 6\}$$

$$m_1 \frac{1}{21} = m_2 \frac{1}{12} = m_3 \frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 21 \\ m_2 = 12 \\ m_3 = 7 \end{cases}$$

Άρα σήμα περιοδικό με περίοδο $T_0 = m_1 T_{01} = m_2 T_{02} = m_3 T_{03} = 12\pi \text{ sec}$

Θέμα Εξετάσεων 2022Α

1.	**Δίνονται τα παρακάτω σήματα** $$x(t) = cos(\frac{2\pi}{10}t)$$ $$y(t) = 4sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$ **Να εξεταστεί ως προς την περιοδικότητα το σήμα** $w(t) = x(t) + y(t)$ **και να υπολογιστεί η περίοδος του (εάν υπάρχει)**

1	$\boxed{\text{Έχει περίοδο 10 sec}}$	2	Έχει περίοδο 5sec
3	Δεν είναι περιοδικό	4	Έχει περίοδο 0.5 sec

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

$$w(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\cos\left(2\pi\cdot\frac{1}{10}t\right) \qquad\qquad \sin\left(2\pi\frac{1}{5}t\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$f_1 = \frac{1}{10}\ Hz \qquad\qquad f_2 = \frac{1}{5}\ Hz$$

$$T_1 = 10sec \ (1/f_1) \qquad\qquad T_2 = \frac{1}{f_2} = 5\ sec$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{10\ sec}{5\ sec} = \frac{2}{1} \text{ ρητός}$$

Περίοδος $w(t)$: $T_0 = T_1 = 2T_2 = 10 sec.$

1) **Ποιο από τα παρακάτω σήματα, δεν είναι περιοδικό:**

Α) $x1(t) = cos(2\pi 100t) + 3cos(2\pi 200t)$

Β) $x2(t) = cos(100t) + 3cos(200t))$

$\boxed{\text{Γ) } x3(t) = cos(100t) + 3cos(2\pi 200t)}$

Δ) και τα τρία σήματα, x1(t), x2(t), και x3(t) είναι περιοδικά

$$\cos(2\pi \underbrace{100}_{} t) + 3\cos(2\pi \underbrace{200}_{} t)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$f_1 = 100\ Hz$ $\qquad$ $f_2 = 200\ Hz$

$T_1 = \frac{1}{100} sec$ $\qquad$ $T_2 = \frac{1}{200}\ sec$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1/100\ sec}{1/200\ sec} = \frac{2}{1}$$ ρητός , περιοδικό

$$T_{ολ} = T_1 = 2T_2 = \frac{1}{100} sec$$

$$\cos(100t) + 3\cos(200t)$$

$$= \cos\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) + 3\cos\left(2\pi \frac{200}{2\pi} t\right)$$

$f_1 = \frac{100}{2\pi} Hz$ $\qquad$ $f_2 = \frac{200}{2\pi} Hz$ $\qquad$ $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/100\ sec}{2\pi/200\ sec} = \frac{2}{1}$

$T_1 = \frac{2\pi}{100} sec$ $\qquad$ $T_2 = \frac{2\pi}{200}\ sec$ $\qquad$ $T_{ολ} = T_1 = 2T_2 = \frac{2\pi}{100} sec$

$$x_3(t) = \cos(100t) + 3\cos(2\pi\, 200 t)$$

$$= \cos\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) + 3\cos(2\pi\, 200 t)$$

$f_1 = \frac{100}{2\pi}\,Hz$

$T_1 = \frac{2\pi}{100}\,sec$

$f_2 = 200\,Hz$

$T_2 = \frac{1}{200}\,sec$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{100}\,sec}{\frac{1}{200}\,sec} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{ άρρητος}$$

άρα συνολικό σήμα απεριοδικό

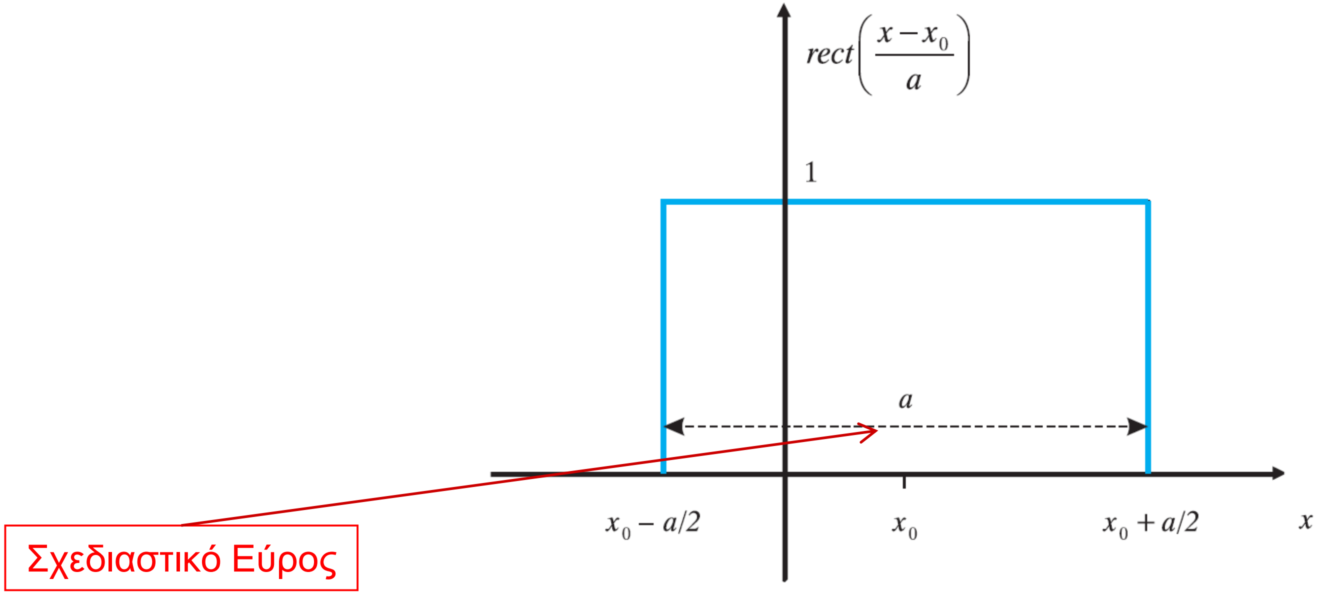
Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, \text{ όταν } |x-x_0|<\frac{a}{2}, \text{ δηλ. } x_0-\frac{a}{2}<x<x_0+\frac{a}{2}\\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>\frac{a}{2}, \text{ δηλ. } \begin{cases}x<x_0-\frac{a}{2}\\ \text{ή}\\ x>x_0+\frac{a}{2}\end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$

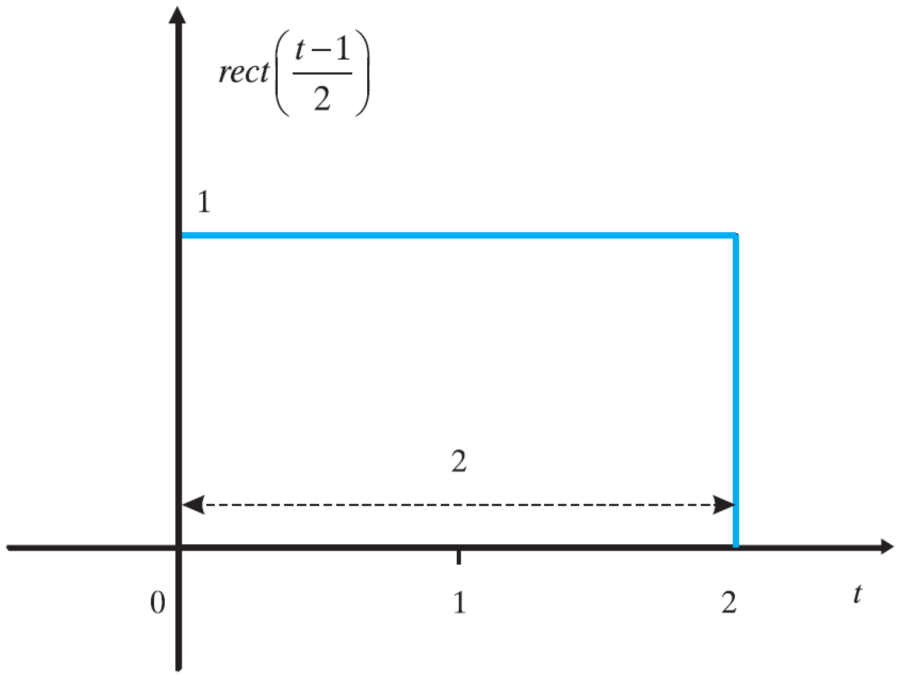


Σήμα Ορθογώνιος Παλμός (2)

- Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0,2)$.

- $x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$

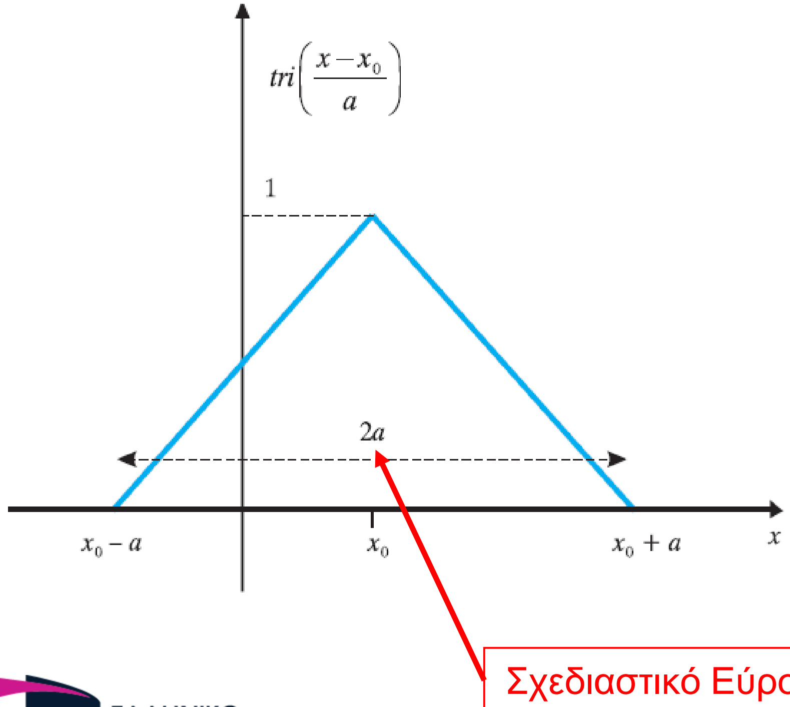


Σήμα Τριγωνικός Παλμός (1)

- Ορισμό

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-x_0|}{a}, \text{ όταν } |x-x_0|<a, \text{ δηλ.} x_0-a<x<x_0+a\\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>a, \text{ δηλ.} \begin{cases}x<x_0-a\\ \text{ή}\\ x>x_0+a\end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$



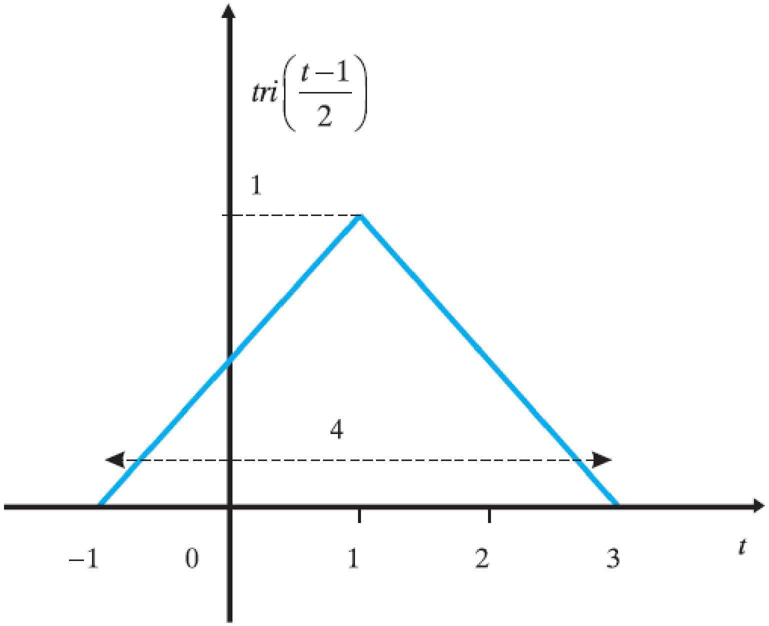
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (2)

- Παραδείγματα

- $x(t) = tri\left(\frac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2},\ t_0 + \frac{4}{2}) = (-1, 3)$.



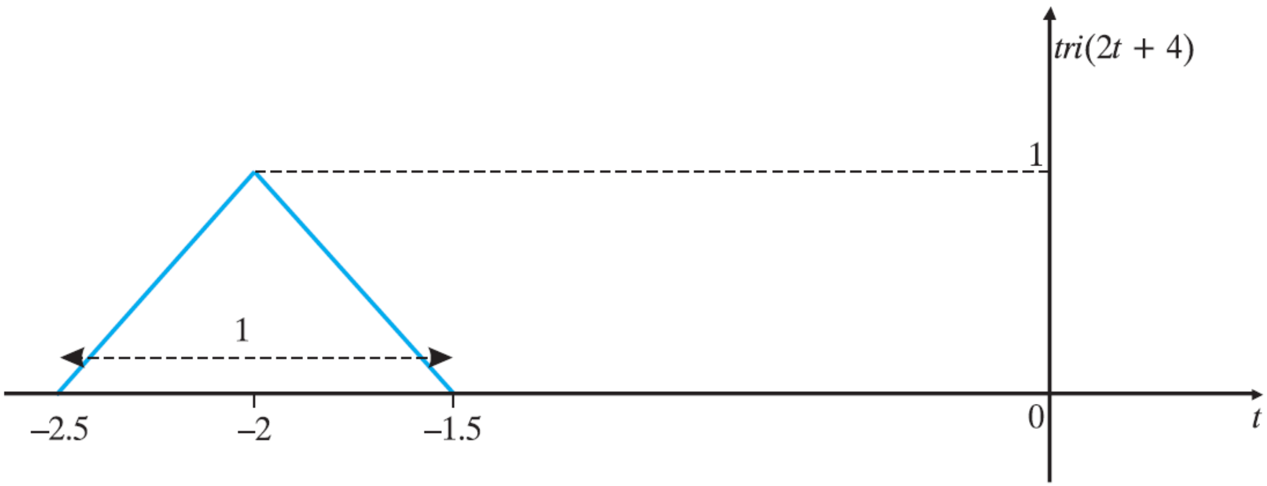
Σήμα Τριγωνικός Παλμός (3)

- $x(t) = tri(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι: $x(t) = tri(2t+4) = tri\left(2(t+2)\right) = tri\left(\frac{t+2}{1/2}\right) = tri\left(\frac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \frac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}) = (-2.5, -1.5)$.



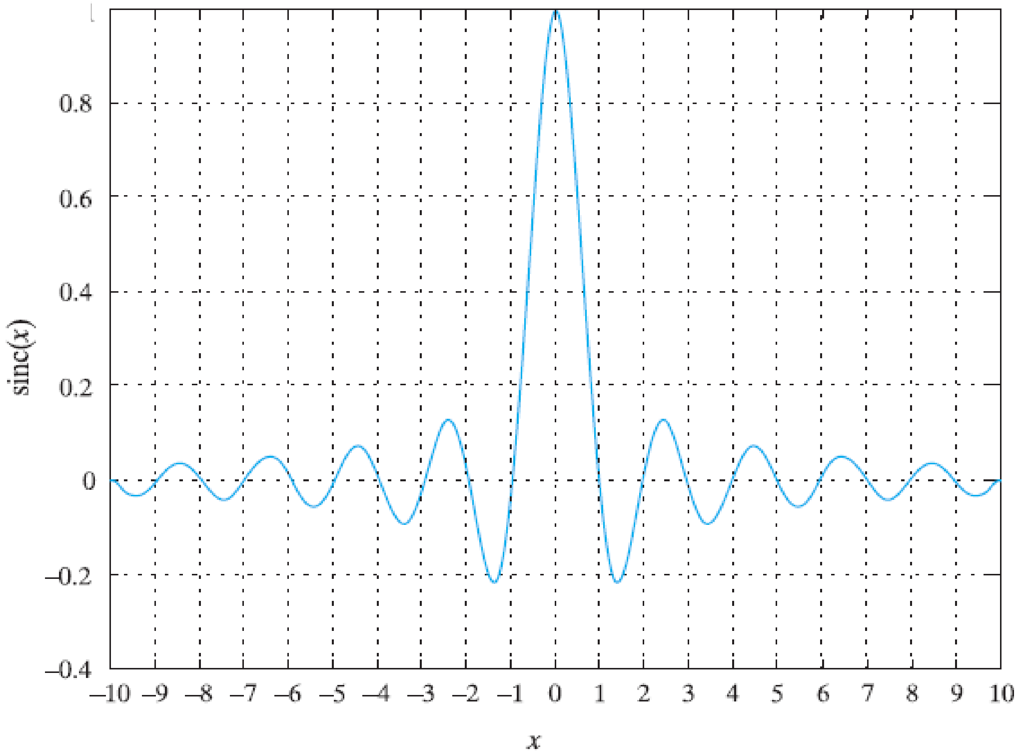
Συνάρτηση sinc(x)

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

Κρουστική Συνάρτηση δ(x) Dirac (I)

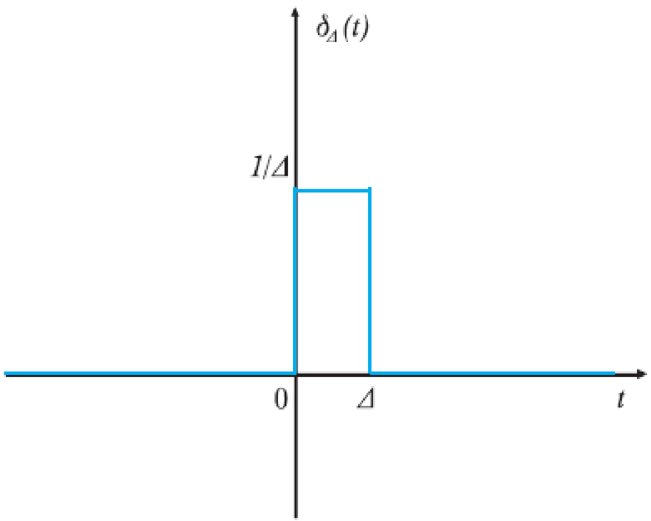
Έστω ένας ορθογωνικός παλμός μοναδιαίου εμβαδού με την εξής μορφή:

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}0, \text{ όταν } t<0\\ \dfrac{1}{\Delta}, \text{ όταν } 0<t<\Delta\\ 0, \text{ όταν } t>\Delta\end{cases}$$

όπου $\Delta>0$.

Δηλαδή, ισχύει ότι:

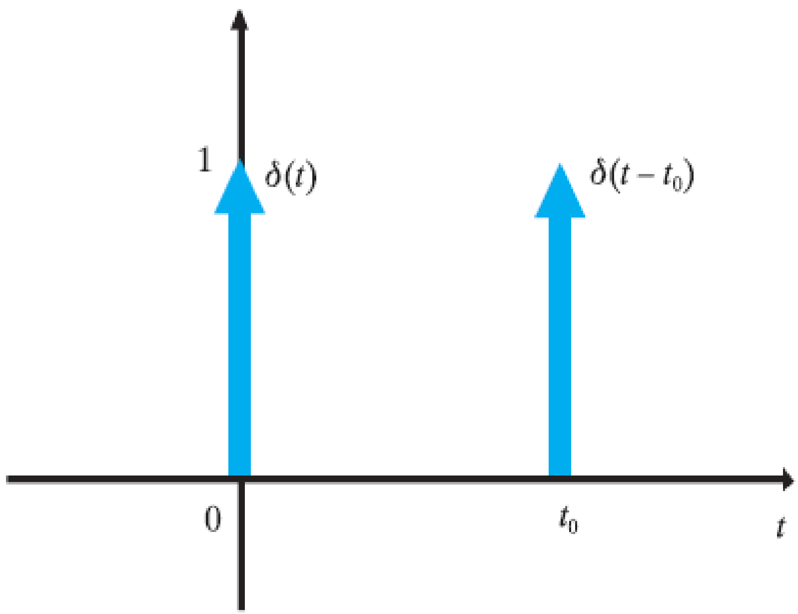
$$\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}rect\left(\frac{t-\frac{\Delta}{2}}{\Delta}\right)$$



Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού

Κρουστική Συνάρτηση δ(x) Dirac (II)

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \to 0$), η χρονική διάρκεια του παλμού μηδενίζεται και το πλάτος του «απειρίζεται», ενώ το εμβαδόν του παραμένει ίσο με 1. Η κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0}\left[\delta_\Delta(t)\right]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης δ(x)

- $\delta(t) = 0$, οταν $t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0$, οταν $t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)\,dt = 1$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0)$
- $f(t)\,\delta(t - t_0) = f(t_0)\,\delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

*f(x)*g(x)=g(x)*f(x) αντιμεταθετική*

*[f(x)*g(x)]*h(x)=f(x)*[g(x)*h(x)] προσεταιριστική*

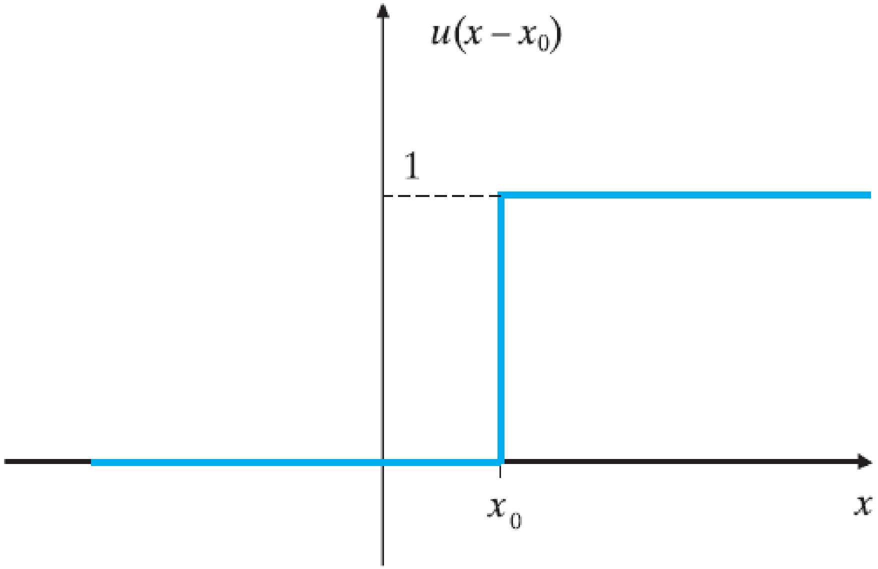
f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)*g(x)+f(x)*h(x) επιμεριστική*

Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα

Το μοναδιαίο βηματικό σήμα ορίζεται ως εξής:

$$u(x-x_0)=\begin{cases}0, & \text{όταν } x<x_0\\ 1, & \text{όταν } x>x_0\end{cases}$$

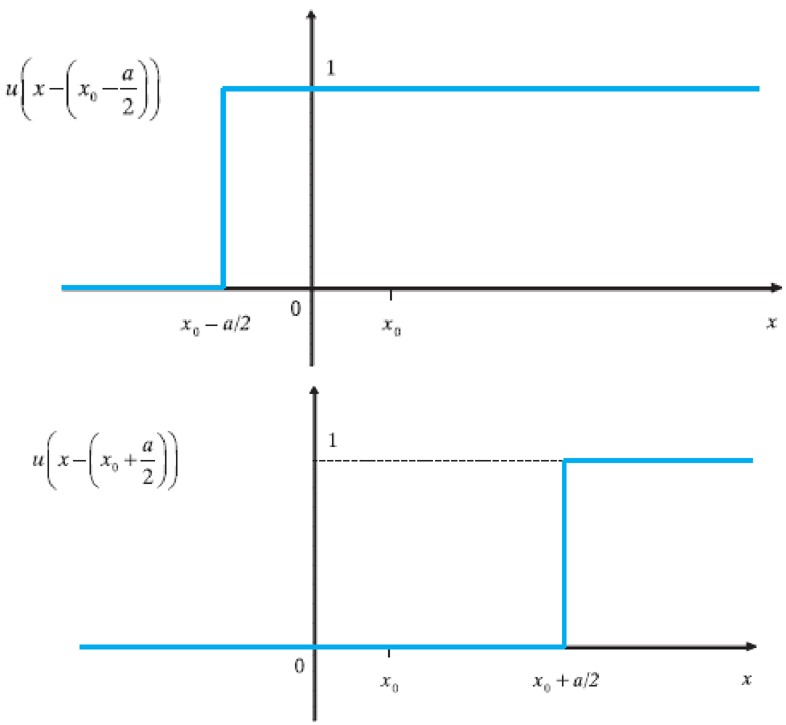
και παριστάνεται γραφικά ως εξής:

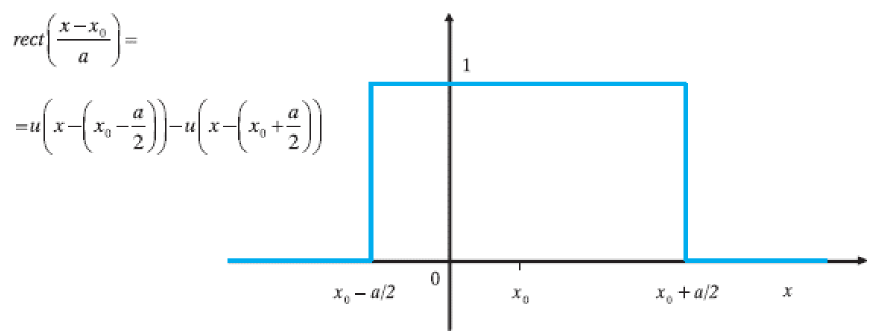


Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα – Ορθογωνικός Παλμός

Η συνάρτηση ορθογωνικού παλμού μπορεί να περιγραφεί με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση ως εξής:

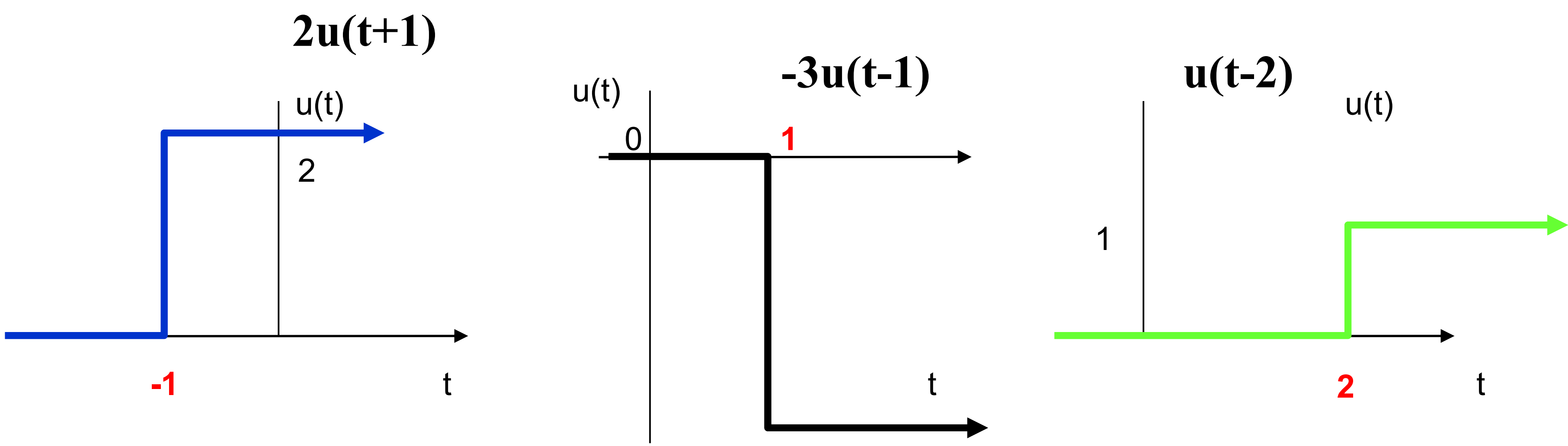
$$rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=u\left(x-\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right)-u\left(x-\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right)$$





Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (3)

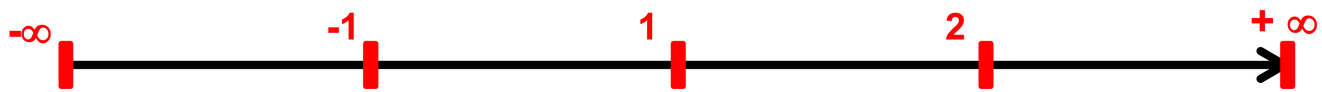
- Παραδείγματα
  - Να σχεδιαστεί το σήμα x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)
- Μέθοδος
- Βήμα 1: Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους



- Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1** και **2**

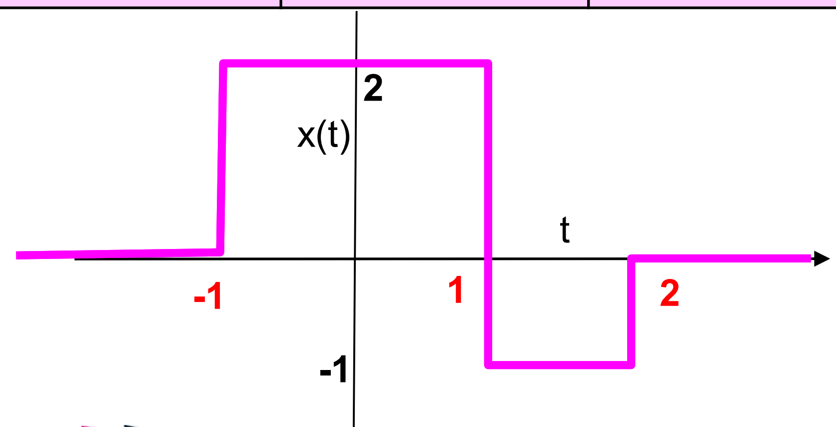
Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (4)

- <u>Βήμα 3:</u> Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



2u(t+1)	0	2	2	2
-3u(t-1)	0	0	-3	-3
u(t-2)	0	0	0	1
x(t)	0	2	-1	0

  - <u>Βήμα 4:</u>
  - Γραφική Παράσταση



Υπέρθεση Σημάτων (1)

- <u>Εργασία 1η, (2009), Θέμα 4</u>

- Δίνεται το σήμα

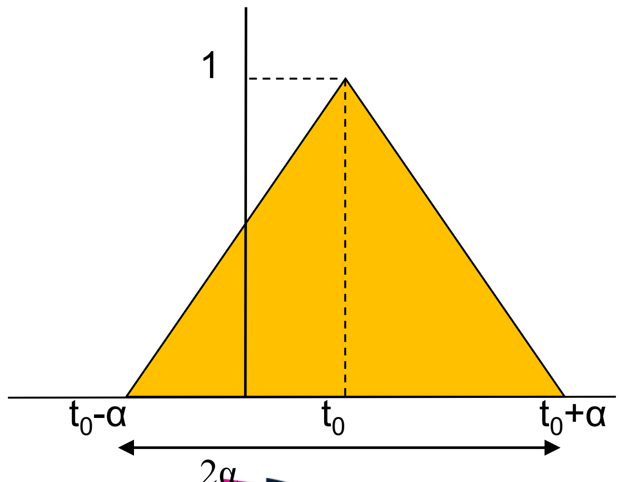
$$x(t) = -2\Lambda(\frac{t+2}{2}) + 2\Lambda(\frac{t}{2}) - 2\Lambda(\frac{t-2}{2})$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα *x(t)*.

Υπέρθεση Σημάτων (2)

- Βήμα 1ο: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

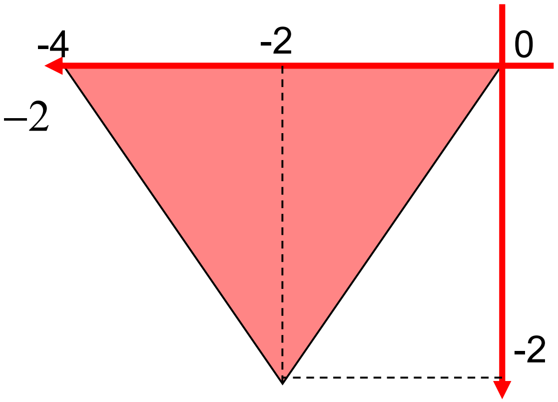
$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases} 1-\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad t_0<t<a+t_0 \\ 1-\dfrac{-(t-t_0)}{a}=1+\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad -a+t_0<t<t_0 \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad |t-t_0|>a \quad \acute{\eta} \quad -a+t_0>t \;\&\; t>t_0+a \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (3)

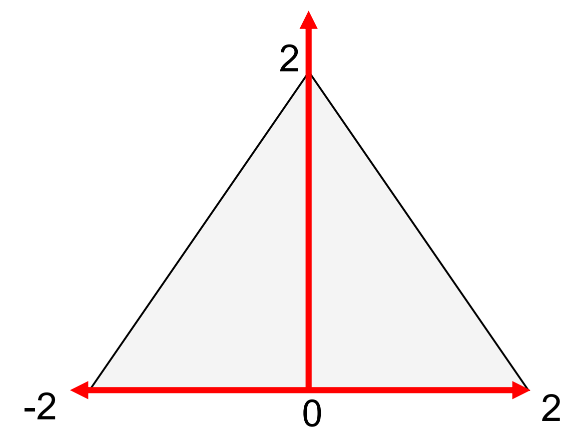
- Αρα 1ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right)=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t+2)}{2}\right]=-4-t, \text{όταν } -2<t+2<0 \Rightarrow -4<t<-2\\ -2\left[1-\frac{(t+2)}{2}\right]=t, \text{όταν } 0<t+2<2 \Rightarrow -2<t<0\\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0\end{cases}$$



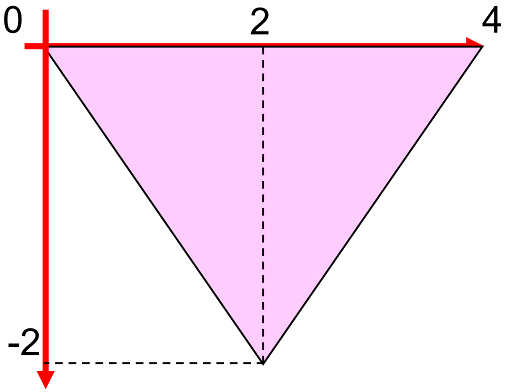
2ο σήμα

$$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)=\begin{cases}2\left[1-\frac{-(t)}{2}\right]=2+t, \text{όταν } -2<t<0\\ 2\left[1-\frac{(t)}{2}\right]=2-t, \text{όταν } 0<t<2\\ 0, \text{όταν } t<-2 \text{ ή } t>2\end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (4)

$$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t-2)}{2}\right]=-t,\text{όταν -2<}t-2<0\Rightarrow 0<t<2\\ -2\left[1-\frac{(t-2)}{2}\right]=t-4,\text{όταν 0<}t-2<2\Rightarrow 2<t<4\\ 0,\text{όταν } t<0 \text{ ή } t>4\end{cases}$$



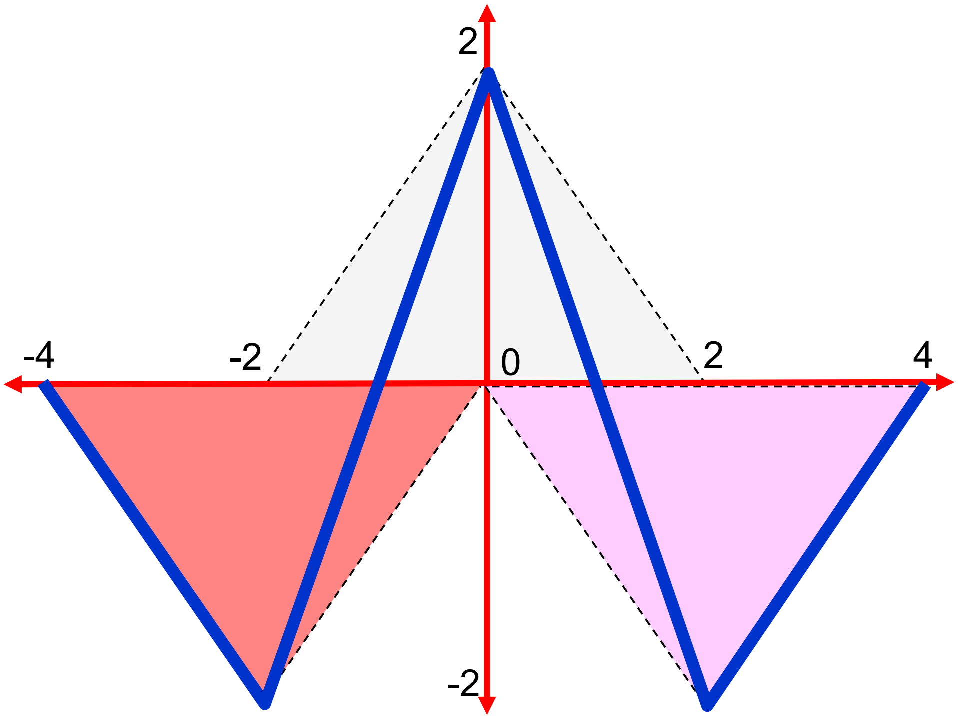
Υπέρθεση Σημάτων (5)

- Βήμα 2ο: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα

	$-\infty$ … -4	-4 … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … 4
$-2\Lambda(\frac{t+2}{2})$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda(\frac{t}{2})$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})$	0	0	0	-t	t-4
x(t)	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

Υπέρθεση Σημάτων (6)

- <u>Βήμα 3ο</u>: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Υπέρθεση Σημάτων (7)

- Από Εργασία 1η, (2009), Θέμα 6(β)

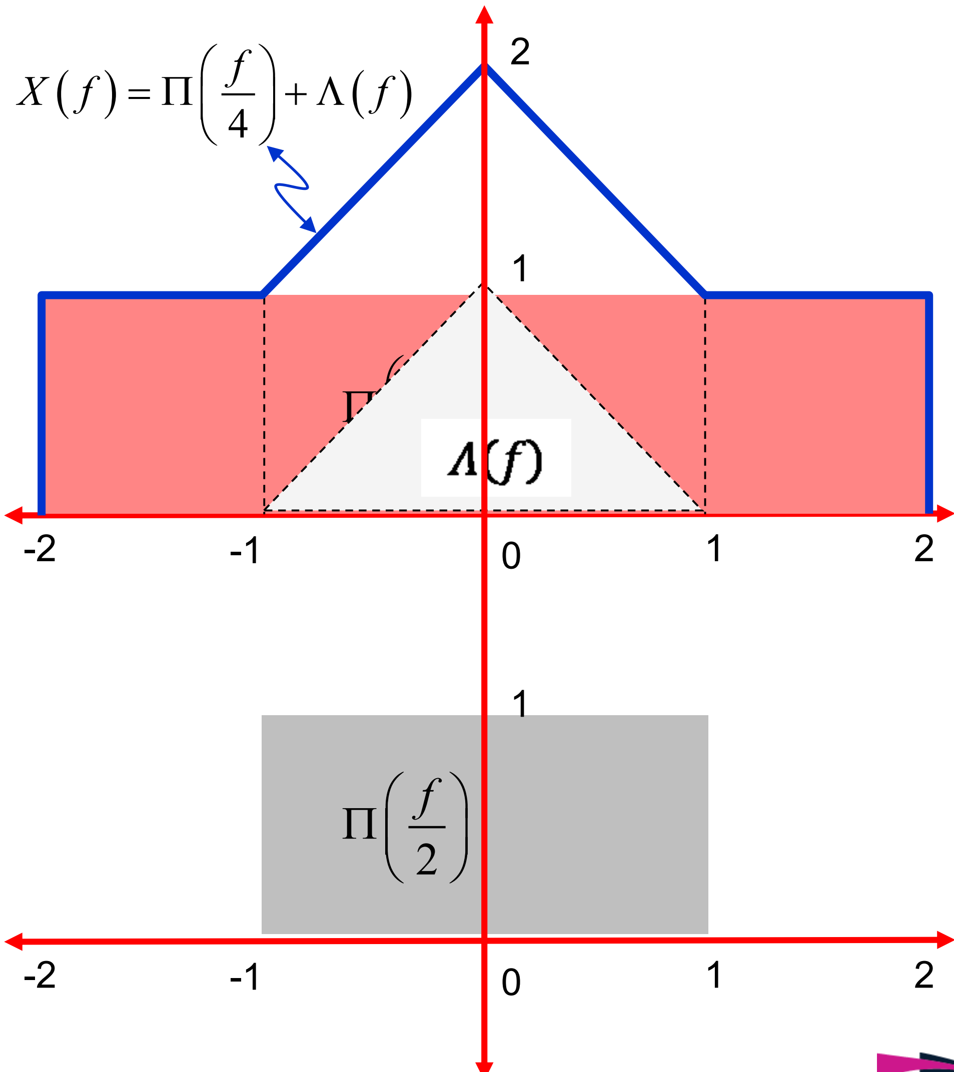
- Δίνεται το X(f) και H(f) που είναι
- $$X(f)=\Pi\left(\frac{f}{4}\right)+\Lambda(f) \quad \text{και} \quad \mathrm{H}(f)=\Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

$$Y(f)=X(f)\cdot H(f)$$

Υπέρθεση Σημάτων (8)

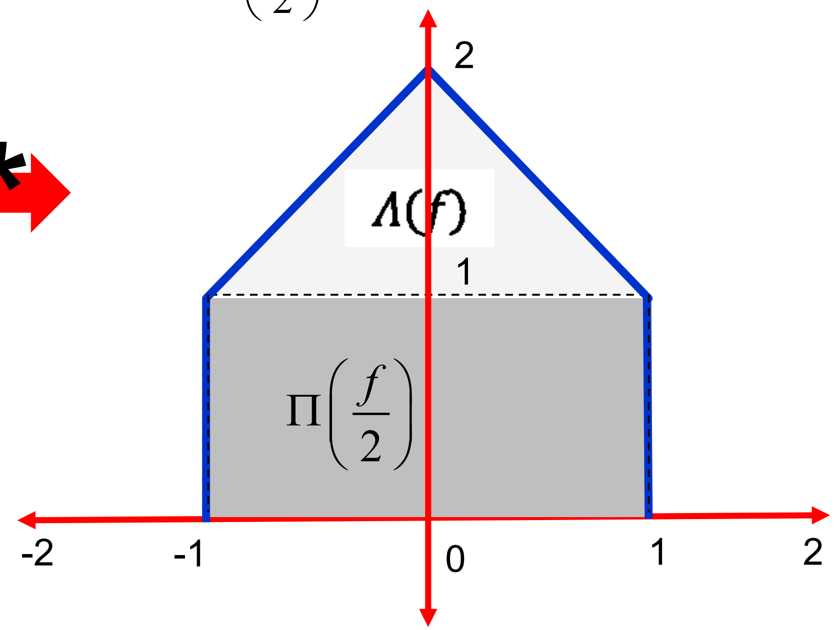
$$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)$$



$$\mathrm{Y}(f) = \left[\Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)\right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$= \Pi\left(\frac{f}{4}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$= \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f)$$

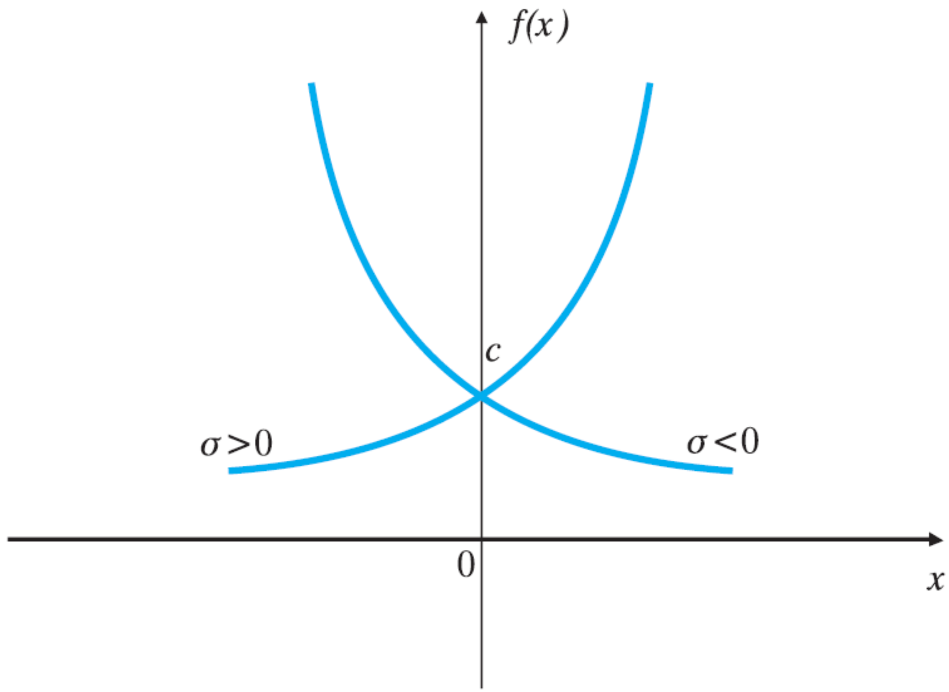


Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (1)

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\sigma x}, \text{ όπου } c, \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

1) **Ποιο από τα παρακάτω σήματα, η έκφραση των οποίων δίνεται στο πεδίο του χρόνου t ή των συχνοτήτων f, δεν είναι περιοδικό:**

Α) $x(t) = cos(2\pi f t)$

Β) $Y(f) = \delta(f - f_o) + \delta(f + f_o))$

$\boxed{\text{Γ) } \boldsymbol{z(t) = \delta(t)}}$

Δ) και τα τρία σήματα, x(t), Y(f), z(t), δεν είναι περιοδικά

Μιγαδικοί Αριθμοί (Ι)

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

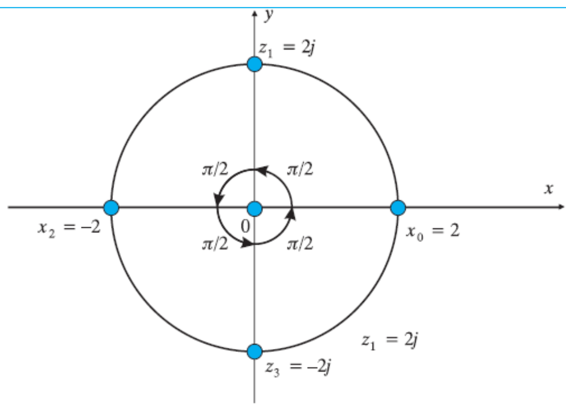
Ο μιγαδικός αριθμός «*j*» ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

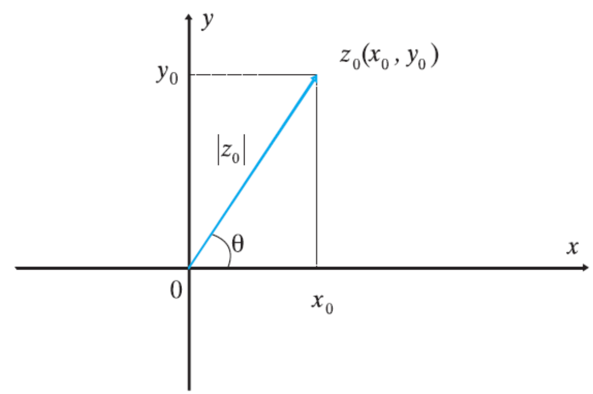
Ο πολλαπλασιασμός του «*j*» επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.



Σχήμα 2.3

Πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού επί «j»

Ο άξονας των *x* ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών και ο άξονας των *y* ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών.



Σχήμα 2.7

Δισδιάστατη απεικόνιση μιγαδικού αριθμού

Μιγαδικοί Αριθμοί (II)

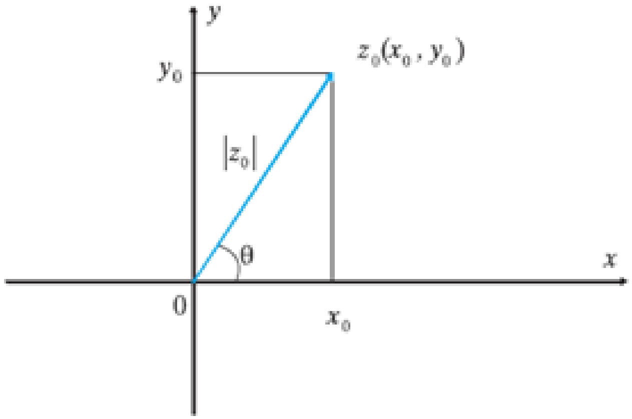
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0|\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0|\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0|\left[\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0|e^{j\theta}$$

Εξισώσεις Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Εξισώσεις Euler

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$\left|e^{j\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) + \cos(\theta) - j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) - \cos(\theta) + j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

και

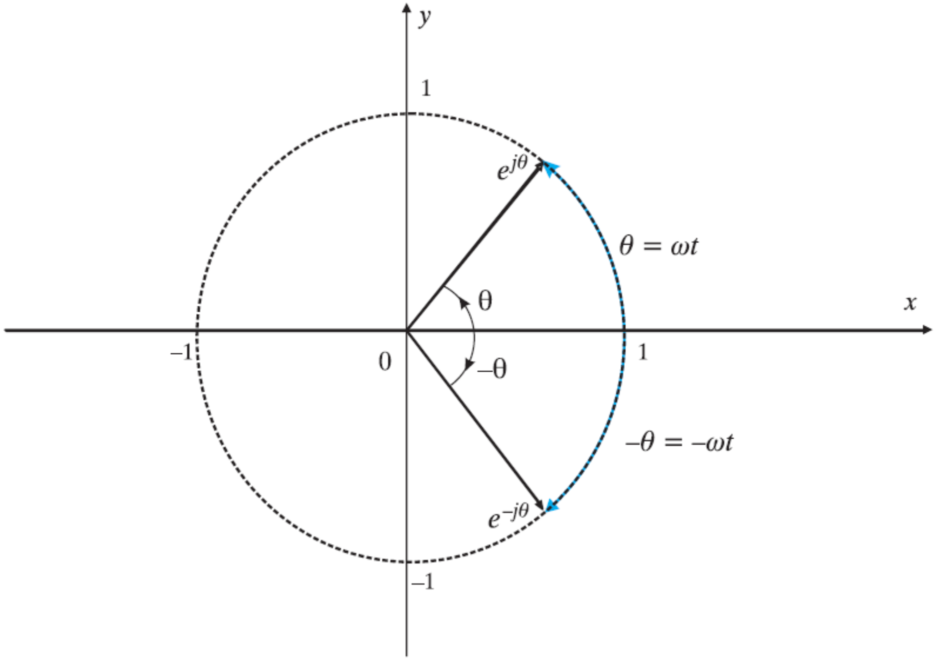
$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (2)

- Έκφραση περιοδικών σημάτων με τη χρήση εκθετικών όρων
- Με χρήση σχέσεων Euler $\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Χαρακτηριστικά Σήματος

- Στην πράξη, κάθε ηλεκτρομαγνητικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σε (περισσότερα από ένα) περιοδικά αναλογικά σήματα διαφορετικής συχνότητας, πλάτους και φάσης
- Ανάλυση Fourier
  – Ανάπτυξη περιοδικών σημάτων σε Σειρές Fourier
  – Μετασχηματισμός Fourier σημάτων ενέργειας

Μετασχηματισμός Fourier

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

Φάσμα πλάτους Σημάτων – Μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων

Παράδειγμα.

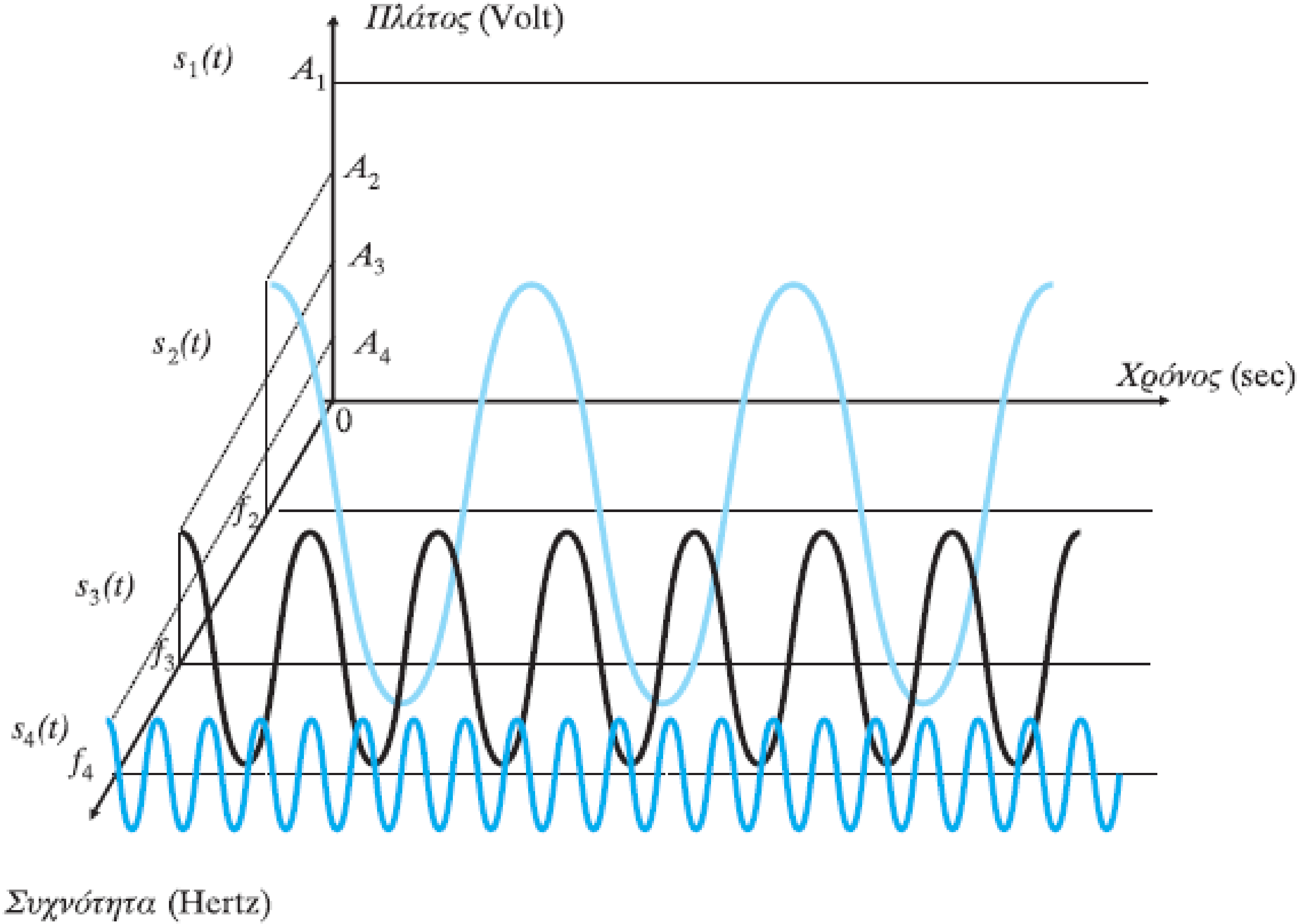
Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$
$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$
$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$
$$f_2 < f_3 < f_4$$
$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:

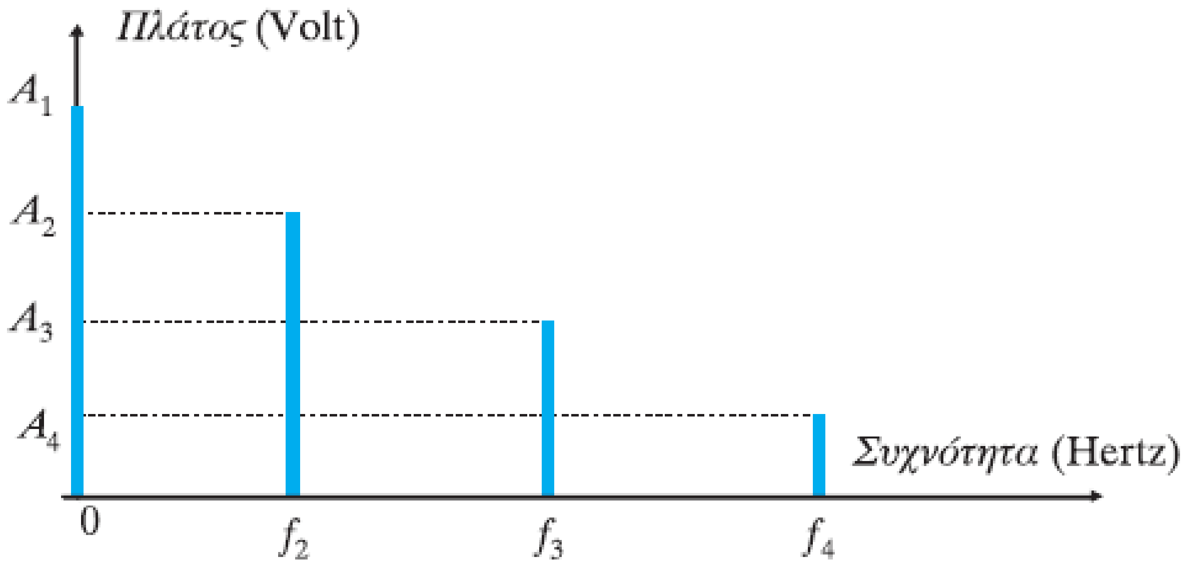


Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Μονόπλευρο Φάσμα πλάτους

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

Μιγαδικοί Αριθμοί (Ι)

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

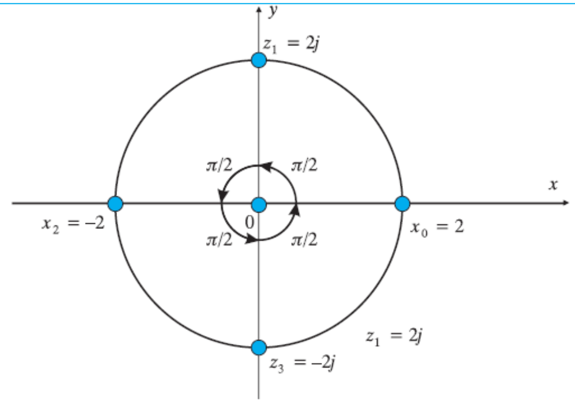
Ο μιγαδικός αριθμός «j» ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy)\cdot(x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

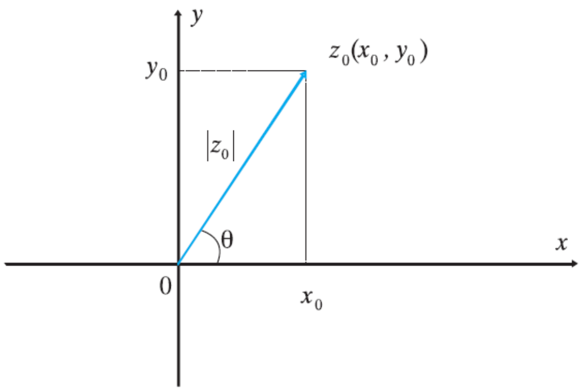
Ο πολλαπλασιασμός του «j» επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.



Σχήμα 2.3

Πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού επί «j»

Ο άξονας των x ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών και ο άξονας των y ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών.



Σχήμα 2.7

Δισδιάστατη απεικόνιση μιγαδικού αριθμού

Μιγαδικοί Αριθμοί (II)

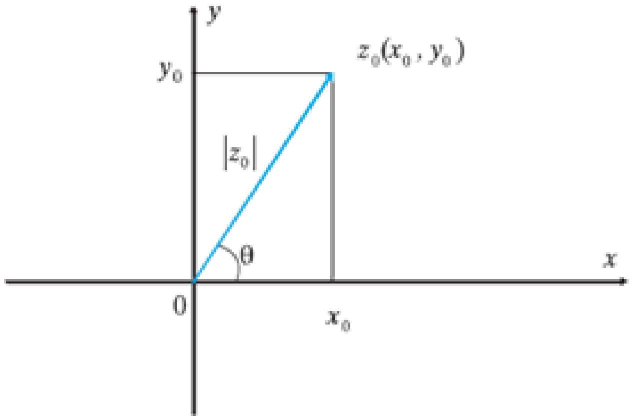
Ισχύει ότι:

$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0|\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0|\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$



Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0|\left[\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0|e^{j\theta}$$

Εξισώσεις Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Εξισώσεις Euler

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι

$$\left|e^{j\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) + \cos(\theta) - j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) - \cos(\theta) + j\sin(\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

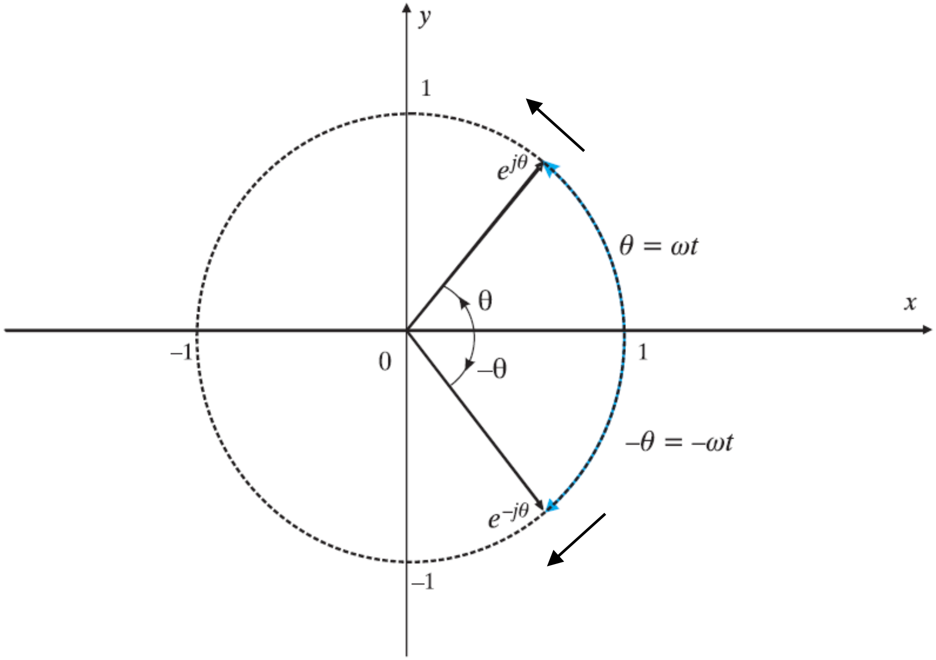
Μετάβαση στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους

- Έκφραση περιοδικών σημάτων με τη χρήση εκθετικών
- Με χρήση σχέσεων Euler

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



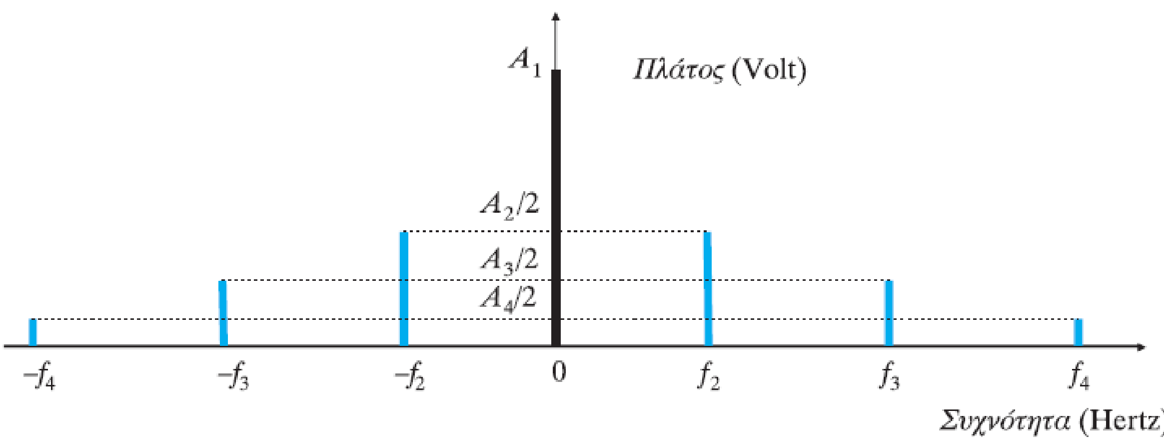
Αμφίπλευρο Φάσμα πλάτους

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

$$s(t) = A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} =$$

$$= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t}$$

Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



Υπολογισμός πλάτους ανά συχνότητα

$$V_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j2\pi f_k t}, k = 1, 2, 3, 4$$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.

- Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων:
  - Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_+^*,\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT) = x(t)\ \text{για}\ k = 1,2,\ldots$$

  - Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση
  - Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από διακριτό σύνολο συχνοτήτων που ικανοποιούν τη σχέση

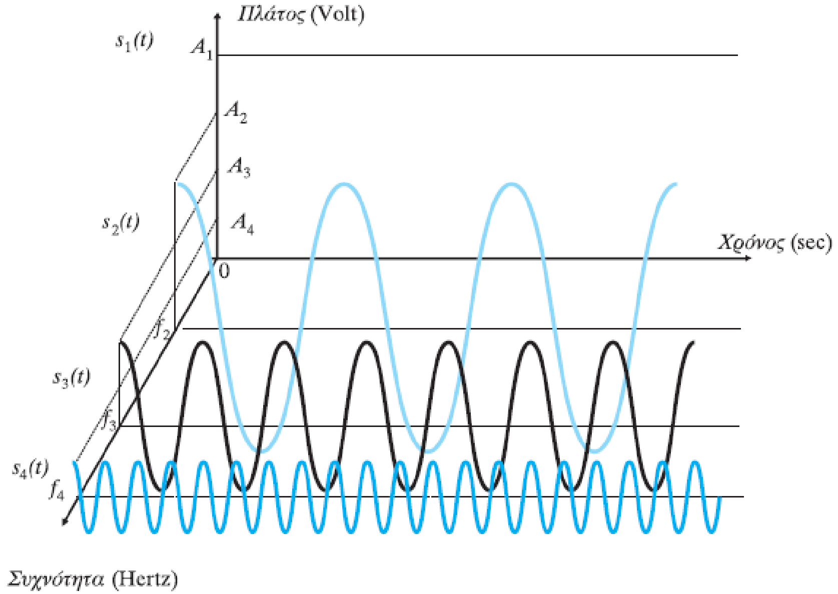
$$f = f_1/m_1 = f_2/m_2 = \ldots = f_N/m_N\ ,\ m_1, m_2 \ldots m_N \in \mathbb{N}^*$$

  - Υπολογισμός πλάτους ανά συχνότητα (Συντελεστές Fourier)

$$V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j2\pi kft}\, dt$$

Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα εργαλείο με το οποίο βλέπουμε ένα σήμα από μια άλλη οπτική γωνία:



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σήματος:

- Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολές συναρτήσει του χρόνου
- Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

Επέκταση Ανάλυσης Fourier και για μη περιοδικά σήματα

- Το πλάτος ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ συχνότητας f σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k=kf$ προσδιορίζεται από τον αντίστοιχο συντελεστή Fourier

$$V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot e^{-j2\pi \cdot kf \cdot t} dt, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η περίοδος μπορεί να υποτεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \to \infty$) και το φάσμα του σήματος θα αποτελείται από ένα συνεχές (και όχι διακριτό) σύνολο συχνοτήτων ($kf \to f$).
- Με τη γενίκευση αυτή προκύπτει ο Μετασχηματισμός Fourier, δηλ. η έκφραση του φάσματος $X(f)$ με βάση τη χρονική έκφραση του σήματος $x(t)$ (που συμπεριλαμβάνει και μη περιοδικά σήματα)

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier, δηλ. η έκφραση της χρονικής έκφρασης του σήματος $x(t)$, με βάση το φάσμα $X(f)$ είναι:

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Άλλη Μορφή Μ/Σ Fourier

- Ισοδύναμες αναφορές με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Η κυκλική συχνότητα $\omega=2\pi f$ μετριέται σε radians/sec και dω=2πdf

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (1)

Σημείωση: δείτε τον πίνακα Α, σελ. 54-55 (τόμος Β, μέρος Β)

- Γραμμικότητα

$$x_1(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_1(f), \quad x_2(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_2(f) \Leftrightarrow a x_1(t) + b x_2(t) \leftrightarrow a\mathrm{X}_1(f) + b\mathrm{X}_2(f)$$

- Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου και Συχνότητας

$$x_1(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \qquad \frac{1}{|a|} x_1\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow X_1(af)$$

- Χρονική καθυστέρηση

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f)\exp(-j2\pi f t_0)$$

- Δυϊσμός

Αν *x*(t) ⇔ X(f) => X(-t) ⇔ *x*(f) & X(t) ⇔ *x*(-f)

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (2)

- Συνδυασμός Αλλαγής Κλίμακας & Χρονικής Ολίσθησης

$$x_1\left(at-t_0\right) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \exp\left(-j2\pi\, f\, \frac{t_0}{a}\right)$$

- Ολίσθηση Συχνότητας

$$\exp\left(j2\pi\, f_c t\right) x(t) \leftrightarrow X\left(f-f_c\right)$$

- Συνέλιξη σημάτων στο πεδίο του χρόνου

$$\mathrm{y(t)}=\mathrm{x(t)} * \mathrm{g(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$\mathrm{y(t)}=\mathrm{x(t)} * \mathrm{g(t)} \xleftrightarrow{F} Y(f)=X(f) G(f)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (3)

- Παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)X(f)$$

- Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

- Διαμόρφωση

$$x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f-f_c) + \frac{1}{2}X(f+f_c)$$

- Θεώρημα Parseval $\quad E = \int_{-\infty}^{\infty}(x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2 df$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1
$x(t)=1$	$\delta(f)$

Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t} x(t) = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(f)\delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(f)H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$\left[X(f) * Y(f)\right]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$ ή $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$	$y(t) = X(t)$	$Y(f) = x(-f)$

Παράδειγμα
Ιδιότητας
Δυϊσμού

A πραγματικός αριθμός

$$x(t) = \cos(2\pi A t)$$

$$\Updownarrow F$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\{\delta(f-A) + \delta(f+A)\}$$

$$X(t) = \frac{1}{2}\{\delta(t-A) + \delta(t+A)\}$$

$$\Updownarrow F$$

$$x(-f) = \cos(2\pi A(-f)) = \cos(2\pi A f)$$

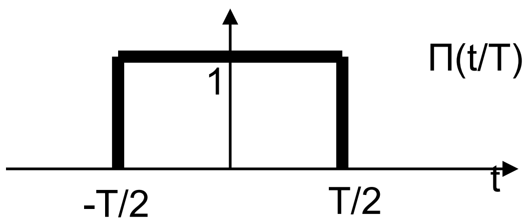
$\cos(-x) = \cos(x)$

ισχύει

άρτια συνάρτηση

Παραδείγματα (1)

- Τετραγωνικός Παλμός



$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

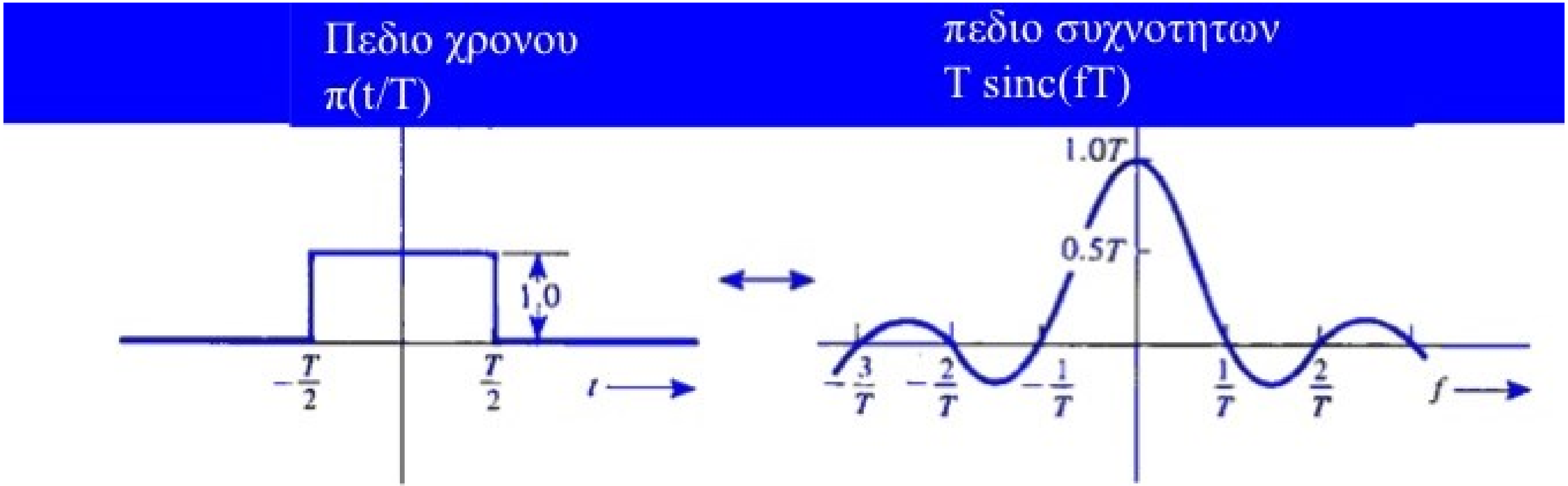
$$F[\Pi(t)] = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft}\,dt = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f}$$

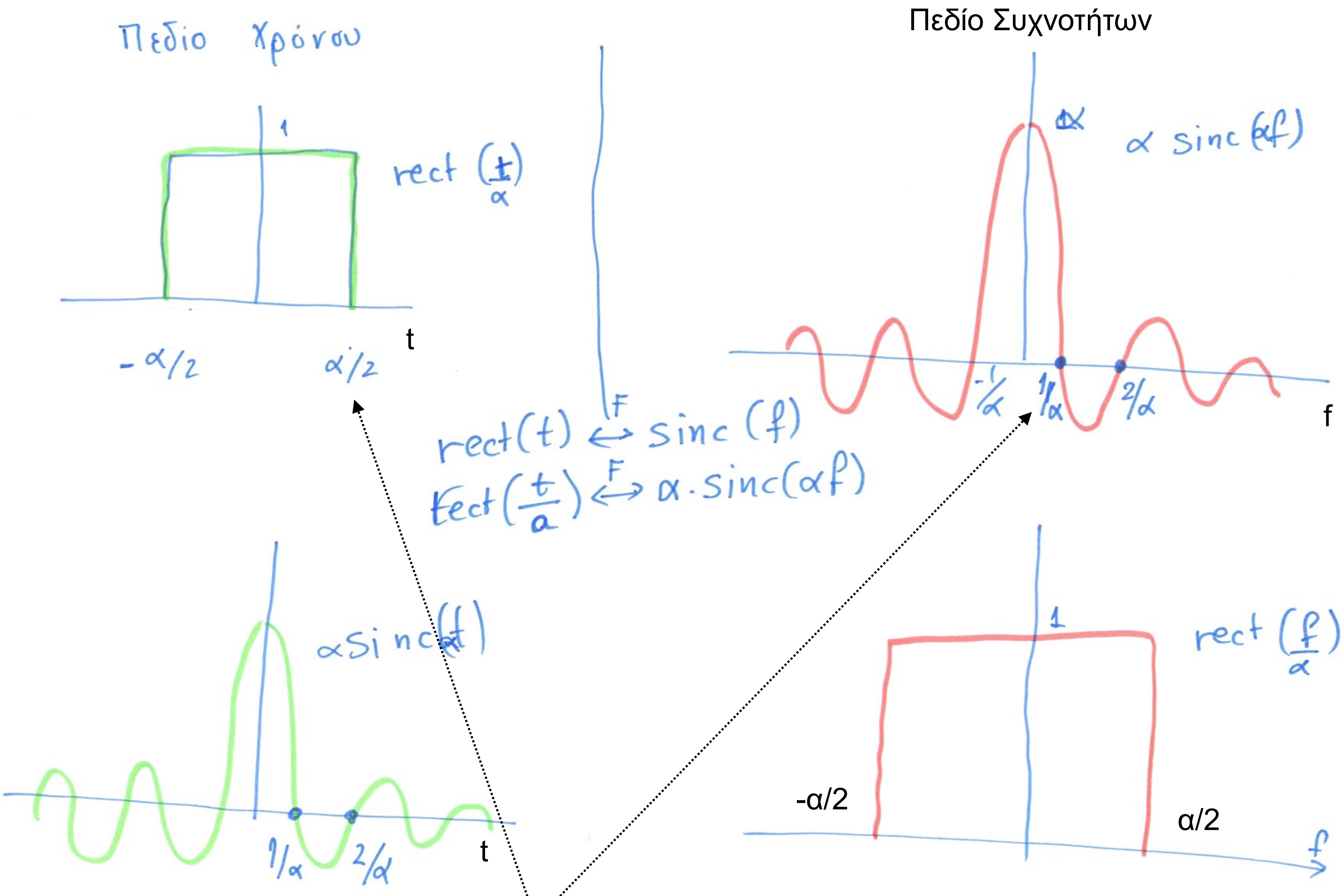
- Αλλά $\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)/2j = \sin(x)$
- Αποτέλεσμα:

$$\Pi(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \cdot \sin c(fT)$$

Παραδείγματα (2)

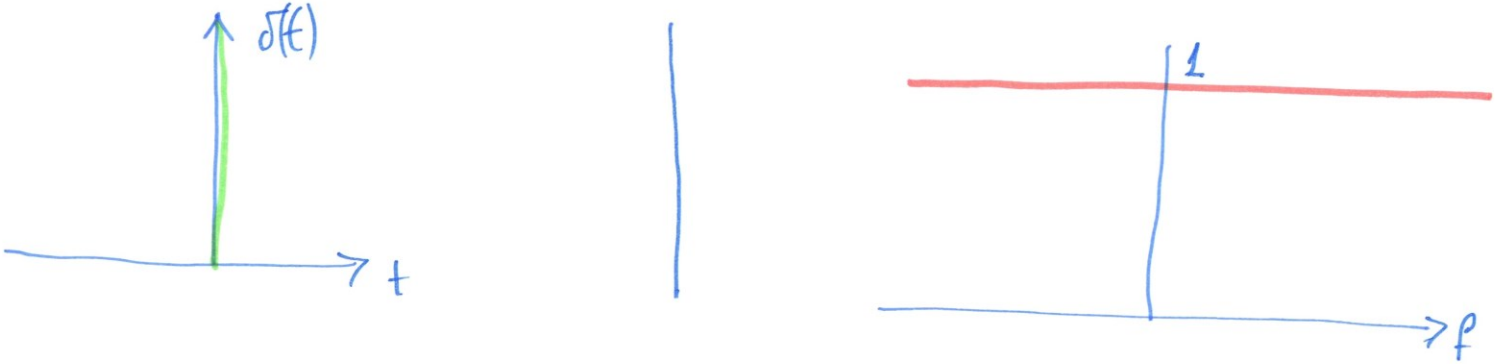
- Είδαμε ότι   Π(t/T) ⇔ Tsinc(f·T)
- Παρατηρήσεις:
  - Η διάρκεια του παλμού είναι αντιστρόφως ανάλογη του εύρους του φάσματος





Όσο αυξάνει το εύρος του (κύριου) παλμού στο ένα πεδίο (χρόνου / συχνότητας), τόσο μειώνεται στο άλλο πεδίο (συχνότητας / χρόνου)

Πεδίο Χρόνου $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$ Πεδίο Συχνότητας



$$1 \longleftrightarrow \delta(f)$$

Οριακά, αν στην προηγούμενη διαφάνεια το α τείνει στο άπειρο καταλήγουμε στην αντιστοίχιση μοναδιαίου σήματος στο χρόνο – παλμού Dirac στο πεδίο των συχνοτήτων ή χρονικού παλμού Dirac – μοναδιαιου φάσματος

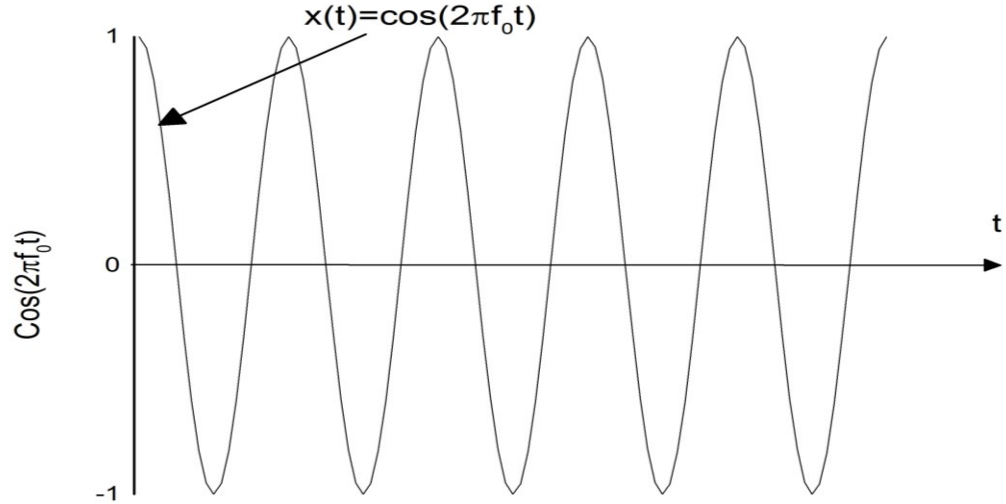
Παραδείγματα (3)

- Μερικές φορές ειναι ευκολότερο να βρουμε ενα σήμα στο χρόνο υπολογιζοντας τον αντιστροφο Μ/Σ
  - Δίνεται $X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-f_c)+\frac{1}{2}\delta(f+f_c)$
  - Βρίσκουμε

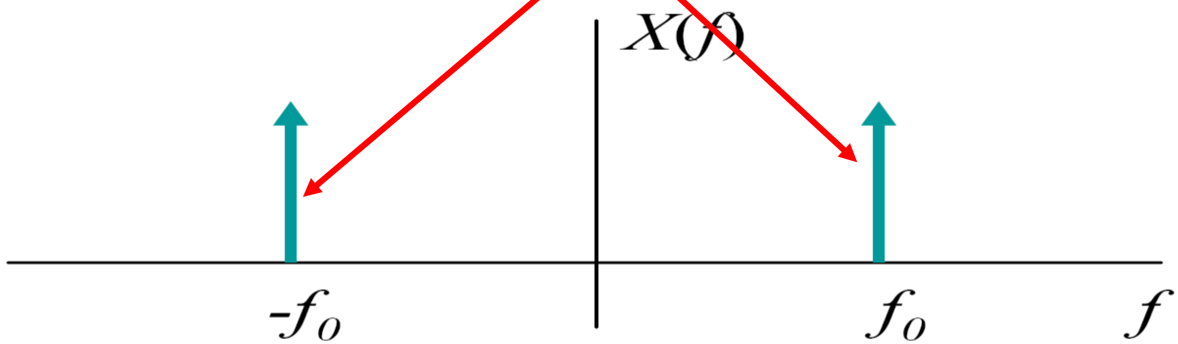
$$x(t)=F^{-1}\{X(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(f-f_c)e^{j2\pi ft}df+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(f+f_c)e^{j2\pi ft}df$$

$$=\frac{e^{j2\pi f_c t}+e^{-j2\pi f_c t}}{2}=\cos(2\pi f_c t)$$

Παραδείγματα (4)

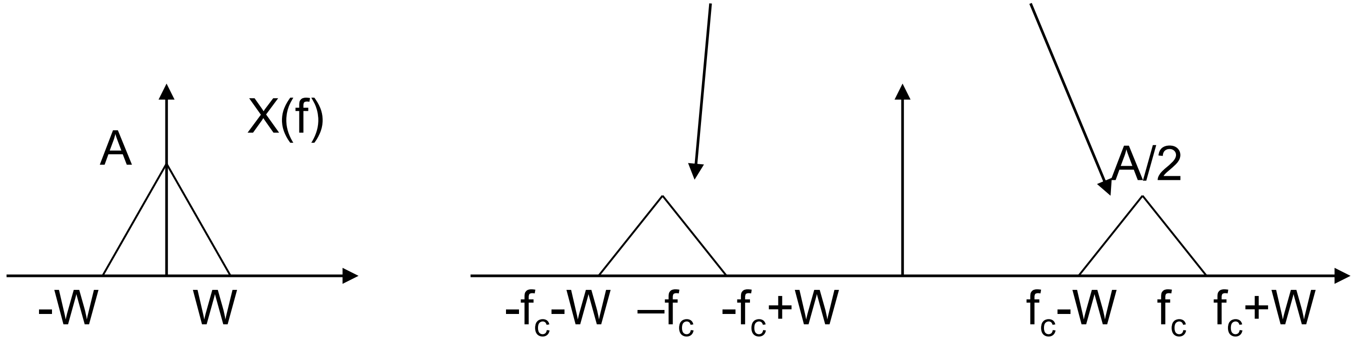


$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



Παραδείγματα (5)

- $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$



Μετατόπιση φάσματος

γινόμενο

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

γινόμενο

συνέλιξη

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f)$$

ΜΣ Fourier

ΜΣ Fourier

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

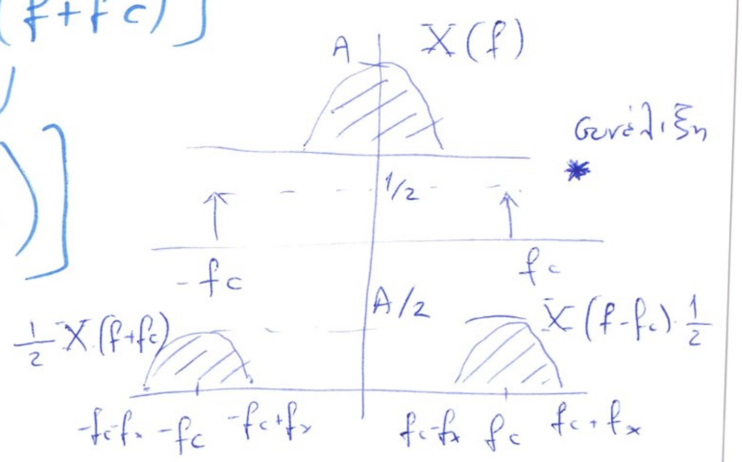
$$\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]$$

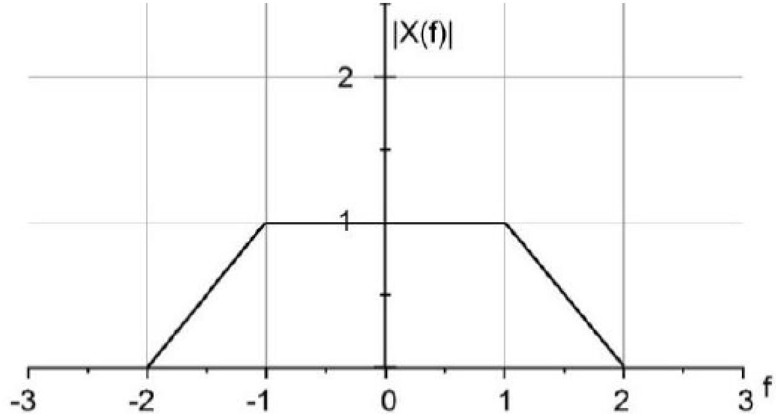
συνέλιξη

$$\xleftrightarrow{F} X(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]$$

ΜΣ Fourier

$$\frac{1}{2}\left[X(f-f_c) + X(f+f_c)\right]$$



5	**Ποιά είναι η μαθηματική έκφραση του φάσματος του σήματος X(f) με φάσμα πλάτους όπως το παρακάτω;** 

1	$X(f) = tri\left(\frac{f}{2}\right) - 2tri(f)$	2	$X(f) = tri\left(\frac{f}{2}\right) - tri(f)$
3	$X(f) = tri(f) - 2tri\left(\frac{f}{2}\right)$	4	$\boxed{X(f) = 2tri\left(\frac{f}{2}\right) - tri(f)}$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

2) Ποια από τις παρακάτω ιδιότητες του Μ/Σ Fourier είναι λάθος;

Α) Όλες είναι σωστές.

Β) $a\,sinc(at) \overset{F}{\leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$

Γ) $a\,sinc^2(at) \overset{F}{\leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$

$\boxed{\textbf{Δ) } \boldsymbol{e^{-j2\pi at} sinc(t) \overset{F}{\leftrightarrow} rect(f-a)}}$

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t) \xleftrightarrow{F} \underline{X}(f-f_0)$$

άρα $\quad e^{-j2\pi a t} \operatorname{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{rect}(f+\alpha)$

αφού $\underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{\operatorname{sinc}(t)} \xleftrightarrow{F} \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{X}(f)}}{\operatorname{rect}(f)}$

6	Ποιος είναι το εύρος ζώνης του σήματος $x(t) = 12sinc(6t) + 2sinc^2(2t)$;

1	$\boxed{\text{3 Hz}}$	2	**5 Hz**
3	**4 Hz**	4	**2 Hz**

$$x(t) = 12\,\mathrm{sinc}(6t) + 2\,\mathrm{sinc}^2(2t)$$

$$\underline{X}(f) = \;?$$

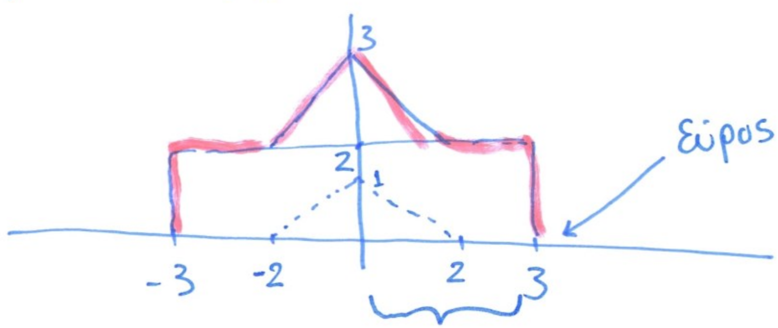
- $\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}(f) \Leftrightarrow \mathrm{sinc}(6t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{6}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 12\,\mathrm{sinc}(6t) \xleftrightarrow{F} \frac{12}{6}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{6}\right)$$

- $\mathrm{sinc}^2(t) \longleftrightarrow \mathrm{tri}(f) \Leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(2t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\,\mathrm{tri}\left(\frac{f}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{sinc}^2(2t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{tri}\left(\frac{f}{2}\right)$$

· Άρα $\underline{X}(f) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{6}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f}{2}\right)$



Εύρος ζώνης = 3Hz

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΘΕΜΑ 3	ΓΕ2/1920

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις πράξεις σημάτων και την πράξη της συνέλιξης. Επίσης στόχος είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier.*

Σχετικές ασκήσεις*: ΓΕ2/18-19/Θ6.*

Έστω τα παρακάτω σήματα συνεχούς χρόνου: $x(t) = rect(t)$, $y(t) = rect(\frac{t}{3})$ και $z(t) = tri(\frac{t}{2})$ (όπου rect η συνάρτηση τετραγωνικού παλμού και όπου tri η συνάρτηση τριγωνικού παλμού).

Να υπολογίσετε και στη συνέχεια να απεικονίσετε τα παρακάτω σήματα:

(α) k(t)=x(t)+y(t)

(β) l(t)=x(t)+y(t)+z(t)

(γ) m(t)=x(t)*x(t)

(δ) n(t)=y(t)*y(t)

(ε) p(t)=x(t)*y(t)

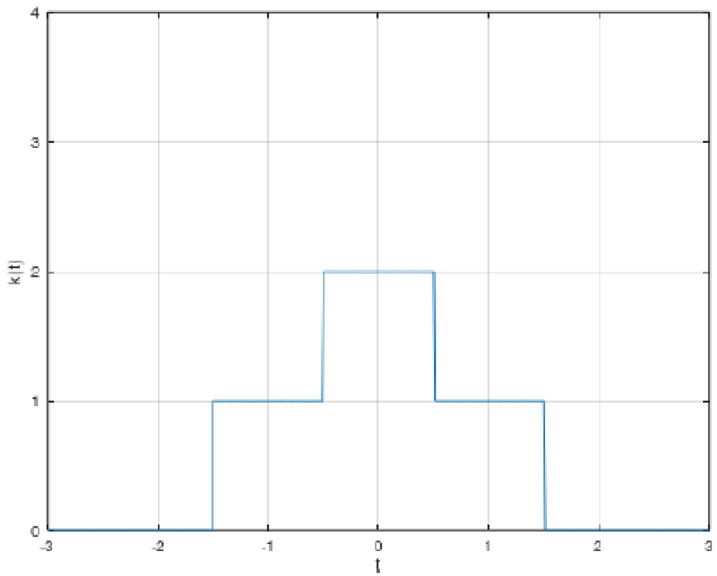
<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Σε κάθε ερώτημα, να υπολογίσετε αναλυτικά τις ζητούμενες εκφράσεις ως αθροίσματα βασικών παλμών (π.χ ορθογωνικών ή/και τριγωνικών) και να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα ζητούμενα διαγράμματα. Στα ερωτήματα (γ), (δ), (ε) το σύμβολο '*' αντιστοιχεί στην πράξη της συνέλιξης. Μπορείτε να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της συνέλιξης μεταβαίνοντας στο πεδίο της συχνότητας (με μετασχηματισμό Fourier) -όπου θα κάνετε κατάλληλούς υπολογισμούς- και στη συνέχεια να επιστρέψετε στο πεδίο του χρόνου (με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier). Για το ερώτημα (ε) προσπαθήστε να εκφράσετε το σήμα y(t) ως άθροισμα περισσότερων ορθογωνικών παλμών, κάποιοι από τους οποίους θα είναι χρονικές μετατοπίσεις του x(t).*

Στο θέμα αυτό η χρήση Octave/Matlab για τη σχεδίαση των διαγραμμάτων είναι προαιρετική

Σημείωση: Τα ερωτήματα απαιτούσαν απλή σχεδίαση των ζητουμένων φασμάτων με οποιοδήποτε τρόπο. Η ενδεικτική λύση περιέχει τα σχήματα σχεδιασμένα στο Octave/Matlab (παρατίθενται και οι αντίστοιχοι κώδικες για λόγους πληρότητας).

(α)

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του τετραγωνικού παλμού: $k(t) = x(t) + y(t) = rect(t) + rect(\frac{t}{3})$



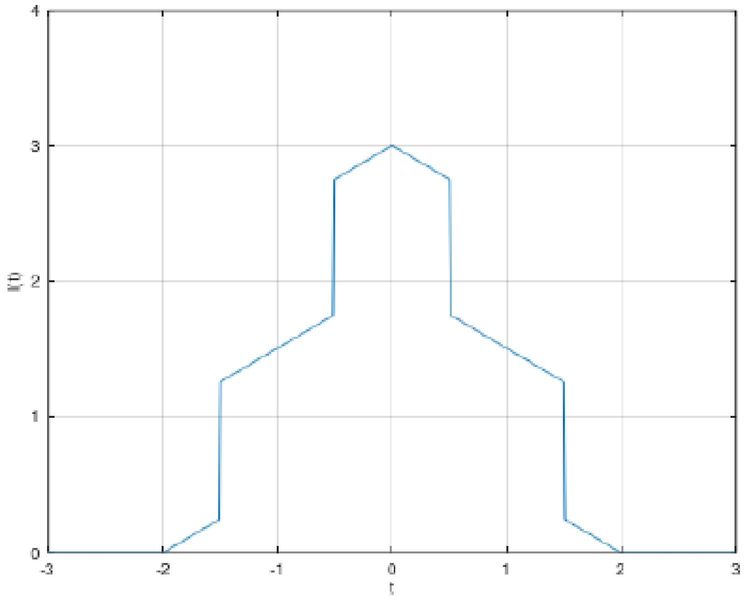
Ακολουθεί ο σχετικός κώδικας σε Octave/Matlab:

```
ts = 0.01; % βήμα ανάλυσης
tx = -3:ts:3; % εύρος χρόνου
h = rectpulse(tx,0,1)+rectpulse(tx,0,3); %υπολογισμός συνάρτησης
plot(tx, h); % σχεδιασμός αποτελέσματος
axis([-3 3 0 4]) % διαστάσεις διαγράμματος
xlabel('t'); % λεζάντα άξονα x
ylabel('k(t)'); %% λεζάντα άξονα y
grid; % εμφάνιση πλέγματος
```

(β)

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του τετραγωνικού παλμού και τριγωνικού παλμού:

$$l(t) = x(t) + y(t) + z(t) = rect(t) + rect(\frac{t}{3}) + tri(\frac{t}{2})$$



Ακολουθεί ο σχετικός κώδικας σε Octave/Matlab:

```
ts = 0.01; % βήμα ανάλυσης
tx = -3:ts:3; % εύρος χρόνου
h = rectpulse(tx,0,1)+rectpulse(tx,0,3)+triangular(tx,0,2); %υπολογισμός συνάρτησης
plot(tx, h); % σχεδιασμός αποτελέσματος
axis([-3 3 0 4]) % διαστάσεις διαγράμματος
xlabel('t'); % λεζάντα άξονα x
ylabel('l(t)'); %% λεζάντα άξονα y
grid; % εμφάνιση πλέγματος
```

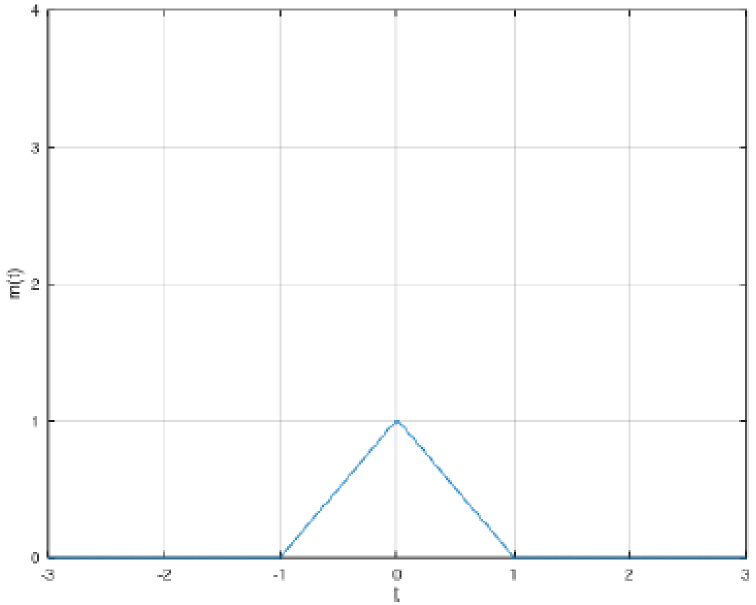
(γ)

Υπολογίζουμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης μεταβαίνοντας με χρήση του μετασχηματισμού Fourier στο πεδίο της συχνότητας, κάνοντας κατάλληλούς υπολογισμούς και επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$m(t) = x(t) * x(t) \Leftrightarrow m(t) = rect(t) * rect(t) \Leftrightarrow M(f) = sin\,c\,(f)\,sin\,c\,(f)$$

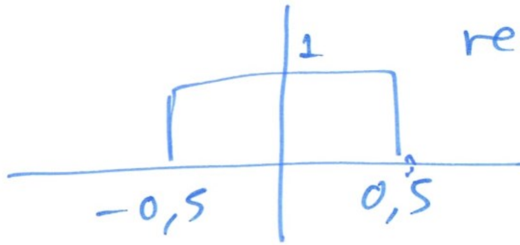
$$\Leftrightarrow M(f) = sin\,c^2\,(f) \Leftrightarrow m(t) = tri(t)$$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του τριγωνικού παλμού:



Ακολουθεί ο σχετικός κώδικας σε Octave/Matlab:ts = 0.01; % βήμα ανάλυσης

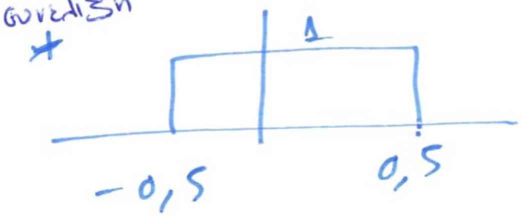
```
tx = -3:ts:3; % εύρος χρόνου
h = triangular(tx,0,1); %υπολογισμός συνάρτησης
plot(tx, h); % σχεδιασμός αποτελέσματος
axis([-3 3 0 4]) % διαστάσεις διαγράμματος
xlabel('t'); % λεζάντα άξονα x
ylabel('m(t)'); %% λεζάντα άξονα y
grid; % εμφάνιση πλέγματος
```



rect(t)

συνέλιξη

$*$



rect(t)

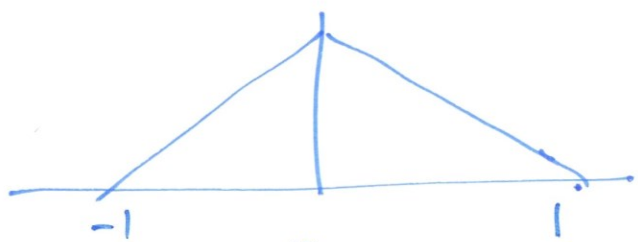
Συνέλιξη

$$\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \mathrm{tri}(t)$$

$$F \updownarrow \qquad \updownarrow F^{-1}$$

$$\mathrm{sinc}(f)\cdot \mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$$

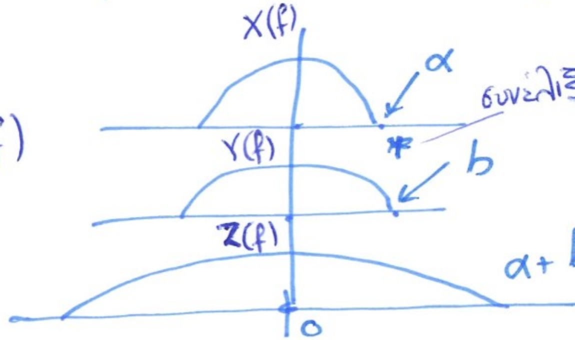
↓



tri(t)

Διπλάσιο εύρος

$Z(f)=X(f)*Y(f)$



⇐

Γενικά το εύρος του αποτελέσματος της συνέλιξης υπολογίζεται αθροίζοντας τα εύρη των αρχικών φασμάτων

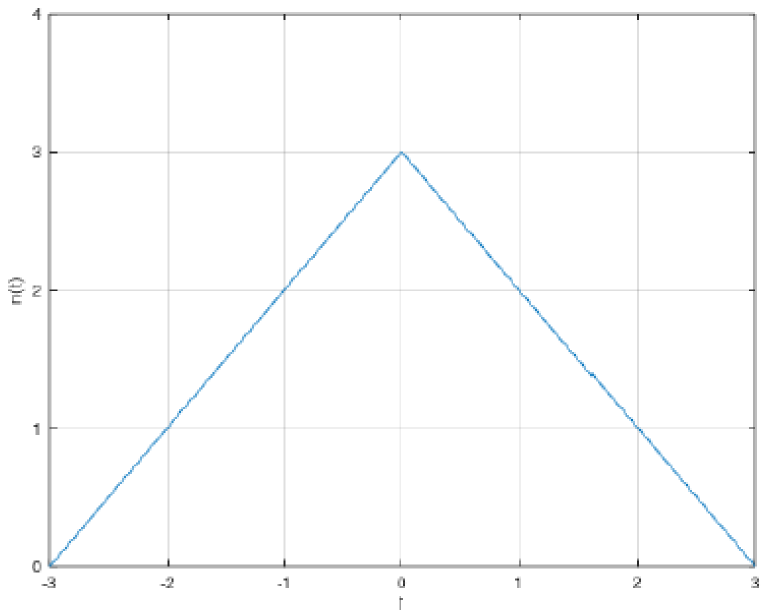
(δ)

Υπολογίζουμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης μεταβαίνοντας με χρήση του μετασχηματισμού Fourier στο πεδίο της συχνότητας, κάνοντας κατάλληλούς υπολογισμούς και επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$n(t) = y(t) * y(t) \Leftrightarrow n(t) = rect(\frac{t}{3}) * rect(\frac{t}{3}) \Leftrightarrow N(f) = 3\, sin\, c\,(3f) 3\, sin\, c\,(3f)$$

$$\Leftrightarrow N(f) = 9\, sin\, c^2\,(3f) \Leftrightarrow m(t) = 9\frac{1}{3} tri(\frac{t}{3}) \Leftrightarrow m(t) = 3tri(\frac{t}{3})$$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του τριγωνικού παλμού:



Ακολουθεί ο σχετικός κώδικας σε Octave/Matlab:

```
ts = 0.01; % βήμα ανάλυσης
tx = -3:ts:3; % εύρος χρόνου
h = 3*triangular(tx,0,3); %υπολογισμός συνάρτησης
plot(tx, h); % σχεδιασμός αποτελέσματος
axis([-3 3 0 4]) % διαστάσεις διαγράμματος
xlabel('t'); % λεζάντα άξονα x
ylabel('n(t)'); %% λεζάντα άξονα y
grid; % εμφάνιση πλέγματος
```

(ε)

Υπολογίζουμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης μεταβαίνοντας με χρήση του μετασχηματισμού Fourier στο πεδίο της συχνότητας, κάνοντας κατάλληλούς υπολογισμούς και επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

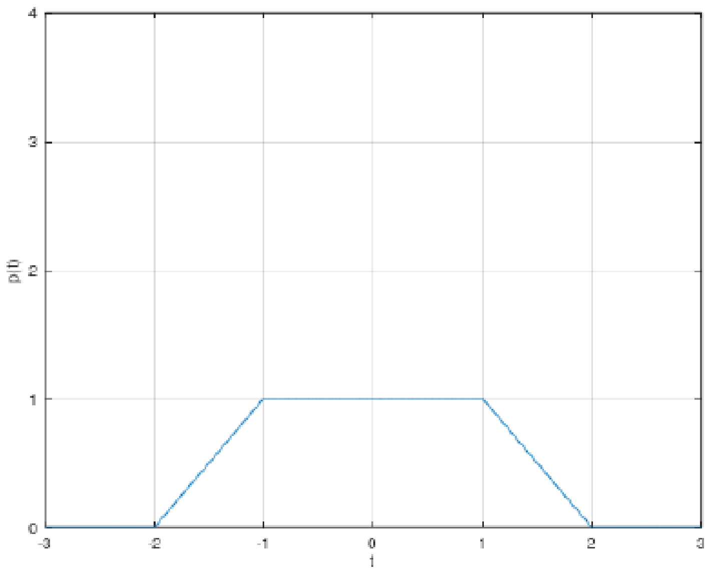
$$p(t) = x(t) * y(t) \Leftrightarrow p(t) = rect(t) * rect\left(\frac{t}{3}\right) \Leftrightarrow p(t) = rect(t) * (rect(t-1) + rect(t) + rect(t+1))$$

$$\Leftrightarrow P(f) = sin\,c\,(f)(sin\,c\,(f)e^{-j2\pi f} + sin\,c\,(f) + sin\,c\,(f)e^{j2\pi f}) \Leftrightarrow P(f) = sin\,c^2\,(f)(1 + e^{-j2\pi f} + e^{j2\pi f})$$

$$\Leftrightarrow P(f) = sin\,c^2\,(f)(1 + 2\cos(2\pi f)) \Leftrightarrow p(t) = tri(t) * (\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t+1))$$

$$\Leftrightarrow p(t) = tri(t) + tri(t-1) + tri(t+1)$$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του τριγωνικού παλμού:



Ακολουθεί ο σχετικός κώδικας σε Octave/Matlab:

```
ts = 0.01; % βήμα ανάλυσης
tx = -3:ts:3; % εύρος χρόνου
h = triangular(tx,0,1)+triangular(tx,-1,1)+triangular(tx,1,1); %υπολογισμός συνάρτησης
plot(tx, h); % σχεδιασμός αποτελέσματος
axis([-3 3 0 4]) % διαστάσεις διαγράμματος
xlabel('t'); % λεζάντα άξονα x
ylabel('p(t)'); %% λεζάντα άξονα y
grid; % εμφάνιση πλέγματος
```

ΘΕΜΑ 4

Στόχος της άσκησης είναι *η εξοικείωση με το μετασχηματισμό Fourier βασικών σημάτων, τη χρήση φίλτρων και τη γραφική αναπαράσταση φασμάτων πλάτους.*

Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ2/1819/Θ4, ΓΕ2/1718/Θ2, ΓΕ2/1617/Θ2, ΓΕ2/1516/Θ4*

Δίνεται το σήμα:

$$x(t) = 200sinc(100t) + 100sinc^2(50t) + 8cos(200\pi t) + 100e^{j2\pi 100t}sinc(50t) + 100e^{-j2\pi 100t}sinc(50t) - 50e^{j2\pi 100t}sinc^2(25t) - 50e^{-j2\pi 100t}sinc^2(25t)$$

(α) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $X(f)$.

(β) Το σήμα $x(t)$ περνά από ιδανικό υψιπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $2\left[1 - rect\left(\frac{f}{50}\right)\right]$. Σχεδιάστε και υπολογίστε το φάσμα πλάτους της εξόδου του φίλτρου.

(γ) Σχεδιάστε και υπολογίστε το φάσμα πλάτους της εξόδου του φίλτρου, αν στο αρχικό σήμα $x(t)$ εφαρμοστεί βαθυπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H_{LP}(f) = rect\left(\frac{f}{50}\right)$. Επίσης, υπολογίστε το σήμα εξόδου στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας.

(δ) Αν στο σήμα $x(t)$ εφαρμοστεί ένα ζωνοπερατό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H_{BP}(f) = 2rect\left(\frac{f-100}{60}\right) + 2rect\left(\frac{f+100}{60}\right)$, να υπολογίσετε την αντίστοιχη κρουστική απόκριση $h_{BP}(t)$ και να σχεδιάσετε την έξοδο του σήματος στο πεδίο της συχνότητας.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Υπολογίστε την αναλυτική έκφραση του σήματος που σας δίνεται και κατόπιν το ΜΣ Fourier. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τα σήματα που βρήκατε στο πεδίο συχνοτήτων χρησιμοποιώντας κατάλληλα φίλτρα όπως ορίζει το κάθε ερώτημα. Προσοχή χρειάζεται στον τρόπο υπολογισμού της υπέρθεσης σημάτων.*

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

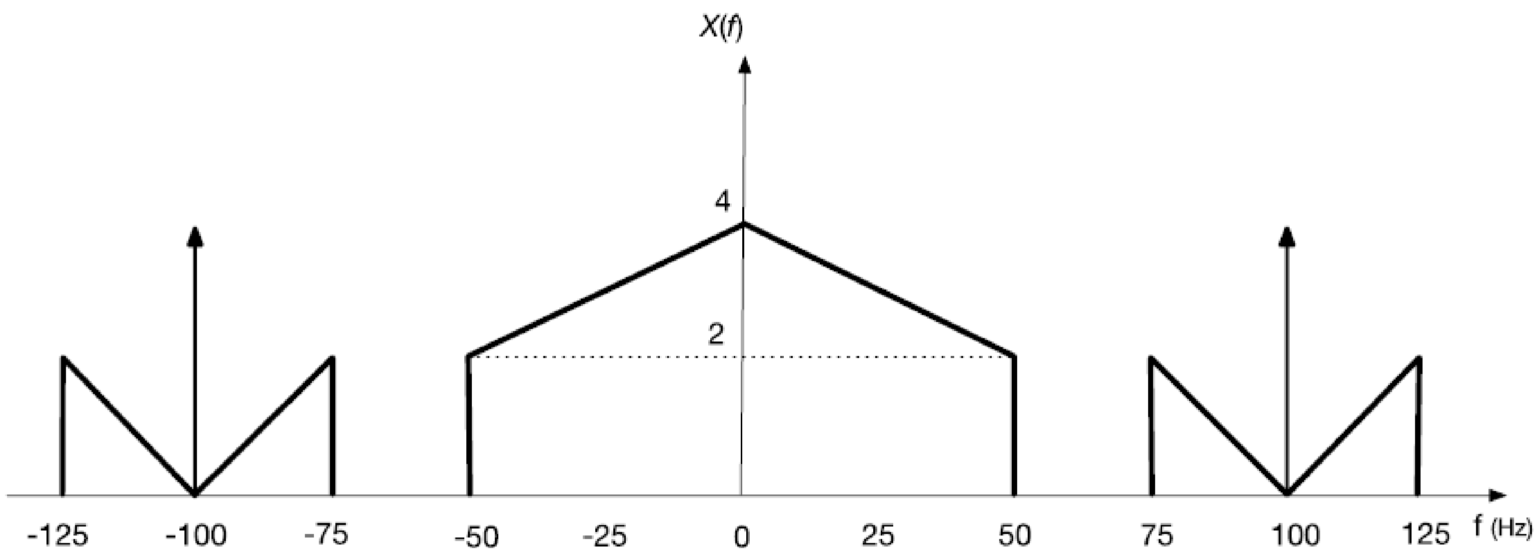
(α) Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$2cos(2\pi\alpha t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f+\alpha) + \delta(f-\alpha)$$
$$asinc(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$
$$asinc^2(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$
$$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$
$$e^{\pm j2\pi at}sinc^2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} tri(f \mp a)$$
$$e^{\pm j2\pi at}sinc(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect(f \mp a)$$

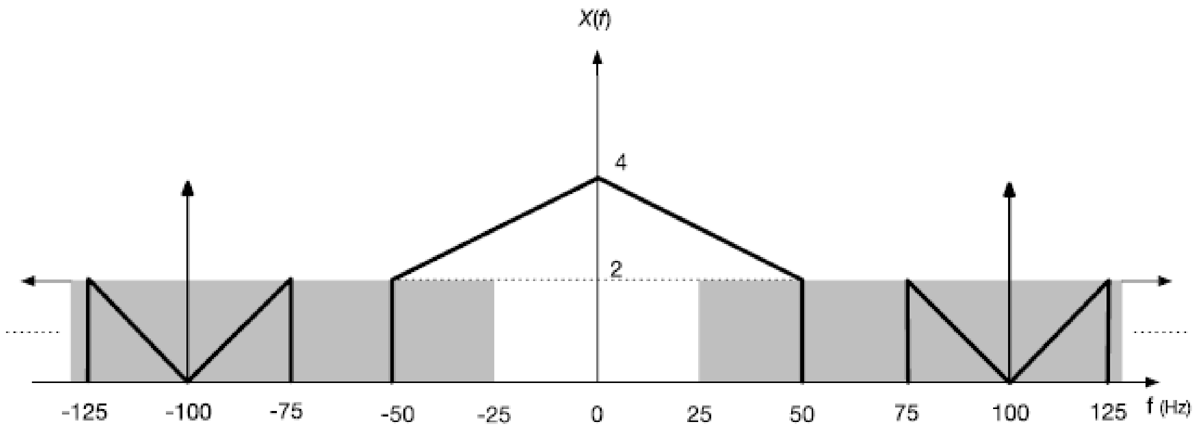
Μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα πλάτους $X(f)$ για το σήμα $x(t)$ με Μ/Σ Fourier:

$$X(f) = 2rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2tri\left(\frac{f}{50}\right) + 4\delta(f-100) + 4\delta(f+100) + 2rect\left(\frac{f-100}{50}\right) + 2rect\left(\frac{f+100}{50}\right) - 2tri\left(\frac{f-100}{25}\right) - 2tri\left(\frac{f+100}{25}\right)$$

Το οποίο απεικονίζεται παρακάτω.



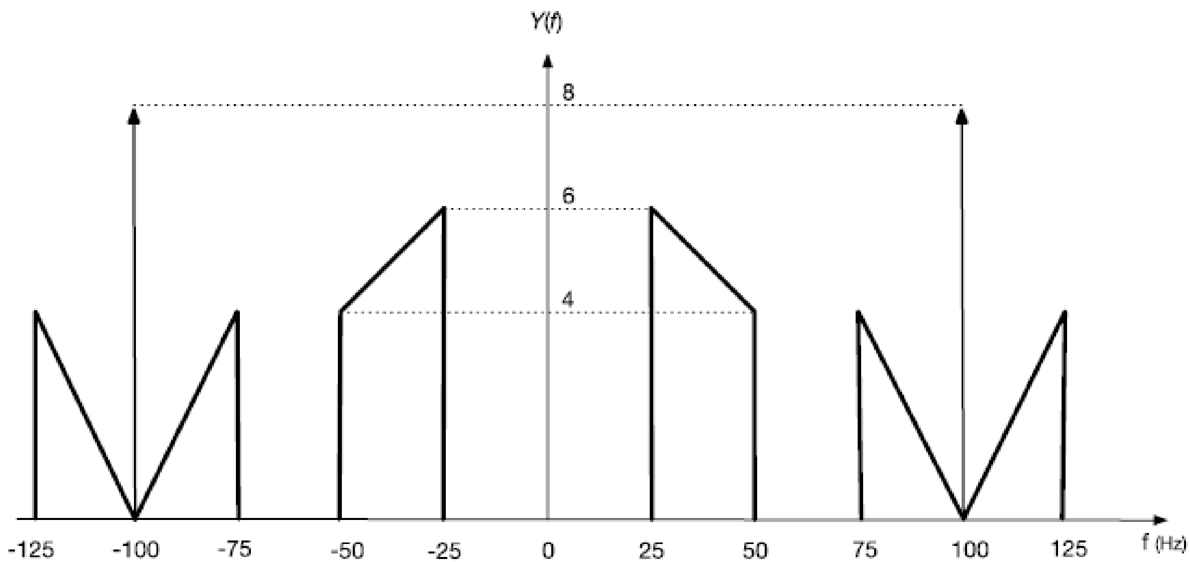
(β) Το $X(f)$ περνά από το υψιπερατό φίλτρο $H_{HP}(f) = 2 - 2rect\left(\frac{f}{50}\right)$



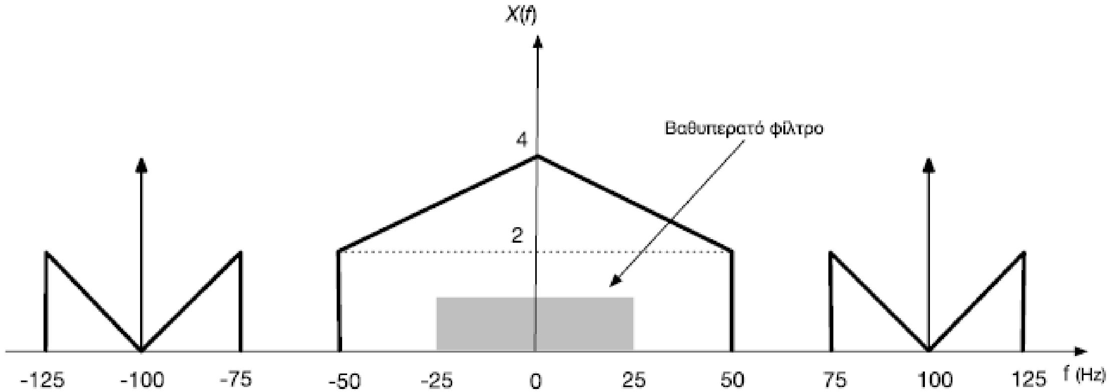
και η έξοδος είναι σύμφωνα με την ιδιότητα $Y(f) = X(f) \times H(f)$:

$$Y(f) = \left[2rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2tri\left(\frac{f}{50}\right) + 4\delta(f-100) + 4\delta(f+100) + 2rect\left(\frac{f-100}{50}\right) + 2rect\left(\frac{f+100}{50}\right) - 2tri\left(\frac{f-100}{25}\right) - 2tri\left(\frac{f+100}{25}\right)\right] \times \left[2 - 2rect\left(\frac{f}{50}\right)\right]$$

και απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



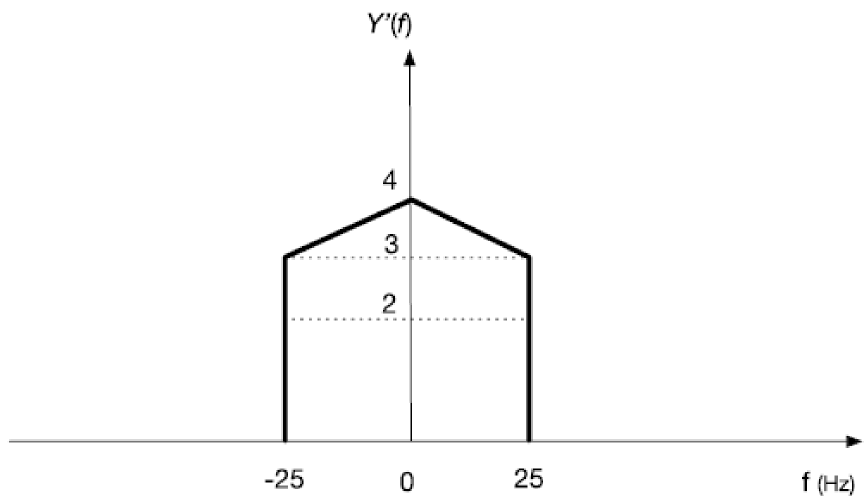
(γ) Το $X(f)$ περνά από το βαθυπερατό φίλτρο $H_{LP}(f) = rect\left(\frac{f}{50}\right)$



και η έξοδος είναι σύμφωνα με την ιδιότητα $Y'(f) = X(f) \times H(f)$:

$$Y'(f) = \left[2rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2tri\left(\frac{f}{50}\right) + 4\delta(f-100) + 4\delta(f+100) + 2rect\left(\frac{f-100}{50}\right) + 2rect\left(\frac{f+100}{50}\right) - 2tri\left(\frac{f-100}{25}\right) - 2tri\left(\frac{f+100}{25}\right)\right] \times rect\left(\frac{f}{50}\right)$$

και απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Το σήμα εξόδου $y'(t)$ προκύπτει με αντίστροφο Μ/Σ Fourier του $Y'(f)$, και είναι:

$$\boxed{Y'(f) = 3rect\left(\frac{f}{50}\right) + tri\left(\frac{f}{25}\right) \overset{F^{-1}}{\Longleftrightarrow} y'(t) = 150sinc(50t) \mp 25sinc^2(25t)}$$

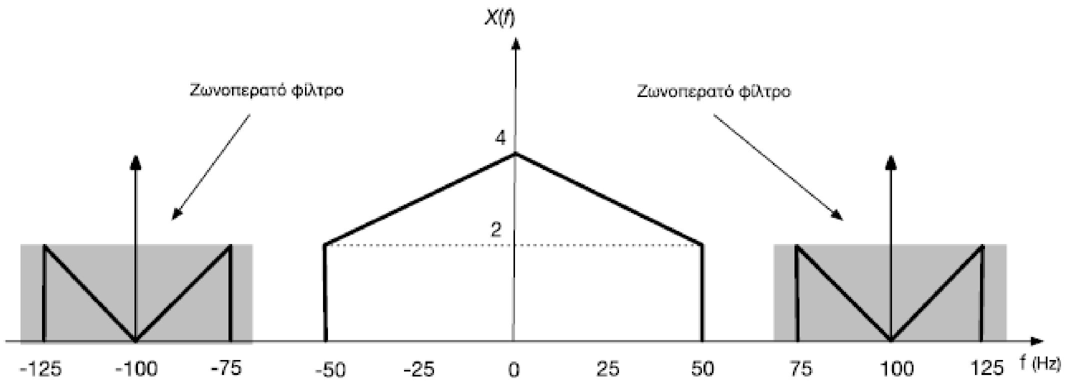
(δ) Για να βρούμε την κρουστική απόκριση γίνεται χρήση της σχέσης:

$$e^{\pm j2\pi f_o t} a\,sinc(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect\left(\frac{f \mp f_o}{a}\right)$$

και με αντίστροφο Μ/Σ Fourier στη συνάρτηση μεταφοράς $H_{BP}(f) = 2rect\left(\frac{f-100}{60}\right) + 2rect\left(\frac{f+100}{60}\right)$, προκύπτει:

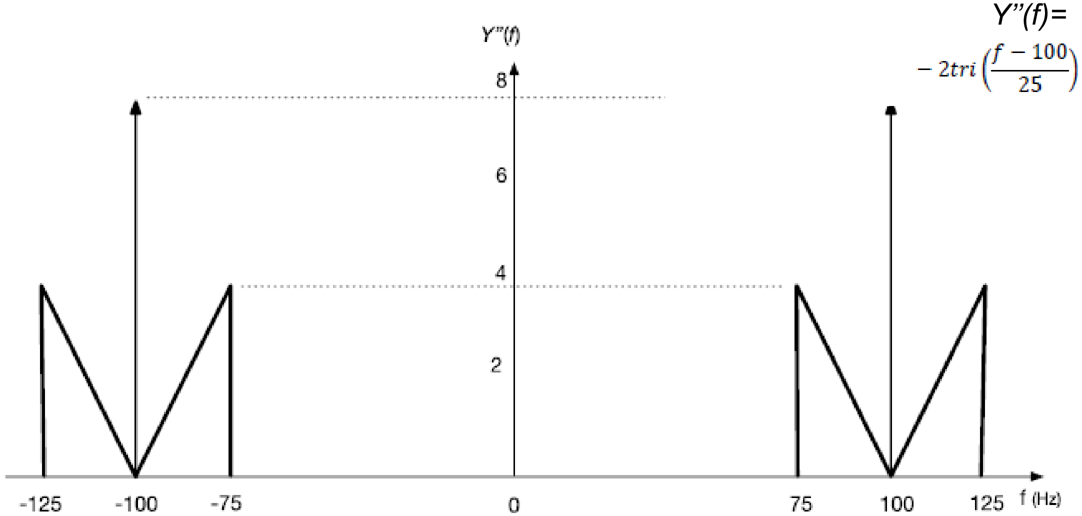
$$\boxed{h_{BP}(t) = 120e^{j2\pi 100t} sinc(60t) + 120e^{-j2\pi 100t} sinc(60t) = 240\mathrm{sinc}(60\mathrm{t})\cos(2\pi 100\mathrm{t})}$$

Το $X(f)$ περνά από το ζωνοπερατό φίλτρο $H_{BP}(f)$



και η έξοδος στο πεδίο της συχνότητας προκύπτει σύμφωνα με την ιδιότητα $Y(f) = X(f) \times H(f)$ και απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

$$Y''(f) = 4\delta(f-100) + 4\delta(f+100) + 2rect\left(\frac{f-100}{50}\right) + 2rect\left(\frac{f+100}{50}\right) - 2tri\left(\frac{f-100}{25}\right) - 2tri\left(\frac{f+100}{25}\right)$$



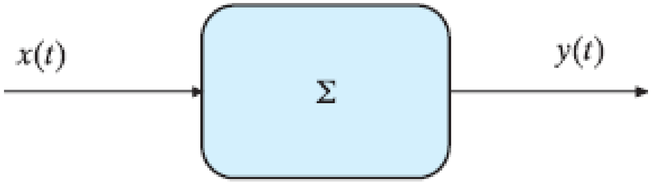
Εισαγωγή στα Συστήματα

Ορισμοί (Ι)

Ως σύστημα χαρακτηρίζεται οποιαδήποτε διαδικασία μετασχηματισμού ενός αρχικού σήματος x(t) σε ένα άλλο σήμα y(t) το οποίο και χαρακτηρίζεται ως απόκριση του συστήματος

Γενικά τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα λαμβάνουν, επεξεργάζονται, μεταβάλλουν και μεταδίδουν σήματα.

Στο παρακάτω σχήμα το σύστημα Σ λαμβάνει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ και μεταδίδει ως έξοδο το σήμα $y(t)$.



Η σχέση εισόδου–εξόδου μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$y(t) = S\big(x(t)\big)$$

Ορισμοί (ΙΙ)

Ένα σύστημα ονομάζεται γραμμικό εάν ισχύουν τα εξής:

Αν

$y_1(t)=S(x_1(t))$

και

$y_2(t)=S(x_2(t))$

τότε

$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)=S(a_1x_1(t)+a_2x_2(t))$

Γενικότερα, για k εισόδους ισχύει ότι:

αν

$y_1(t)=S(x_1(t)),y_2(t)=S(x_2(t)),...,y_k(t)=S(x_k(t))$

τότε

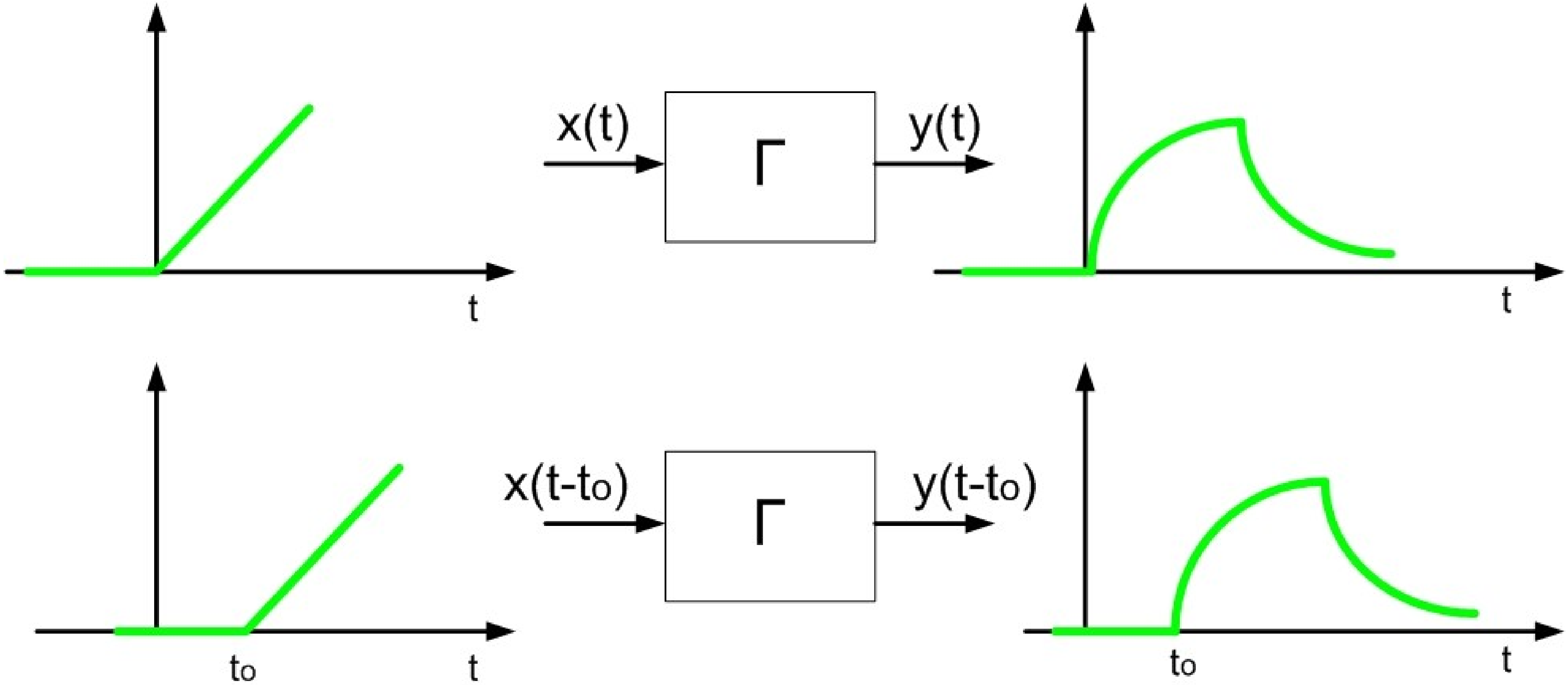
$$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)+...+a_ky_k(t)=\sum_{i=1}^{k}a_iy_i(t)=$$

$$=S(a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+...+a_kx_k(t))=S\left(\sum_{i=1}^{k}a_ix_i(t)\right)$$

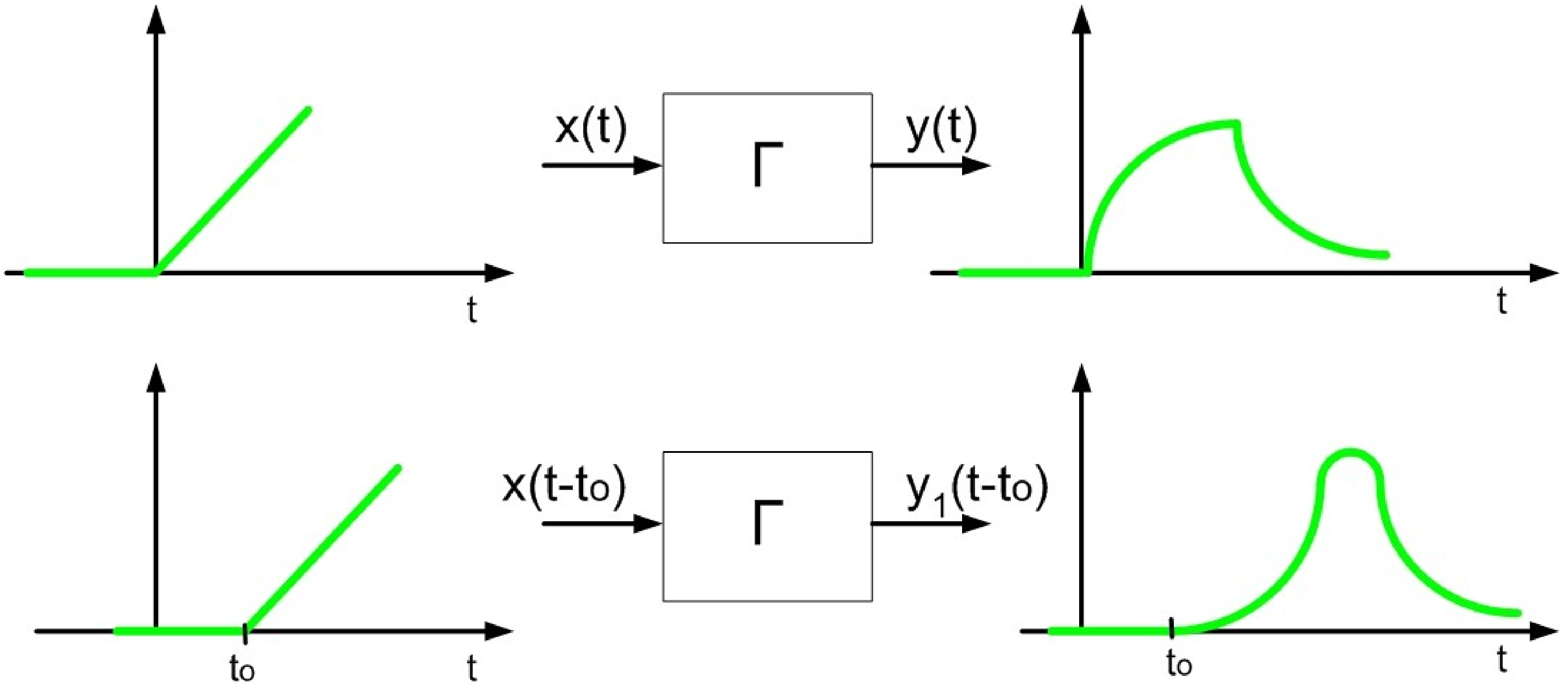
Ένα σύστημα ονομάζεται χρονικά αναλλοίωτο όταν η έξοδος είναι ανεξάρτητη από το χρόνο εφαρμογής της εισόδου. Δηλαδή, αν μετατοπιστεί χρονικά το σήμα εισόδου κατά χρόνο t_0, το σήμα εξόδου θα μετατοπιστεί και αυτό χρονικά κατά χρόνο t_0.

Δηλαδή, αν $y(t)=S[x(t)]$, τότε $y(t-t_0)=S[x(t-t_0)]$.

Παράδειγμα Χρονικά Αμετάβλητου Συστήματος

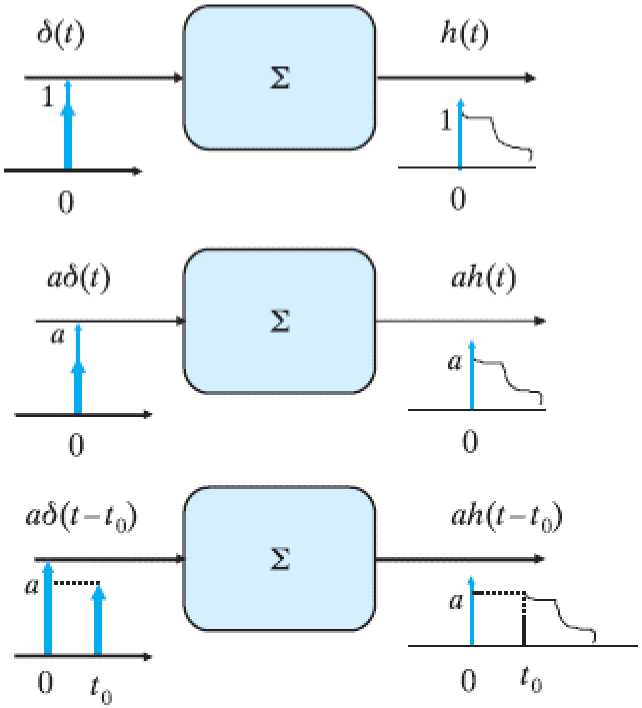


Παράδειγμα Χρονικά Μεταβαλλόμενου Συστήματος



Κρουστική Είσοδος / Απόκριση

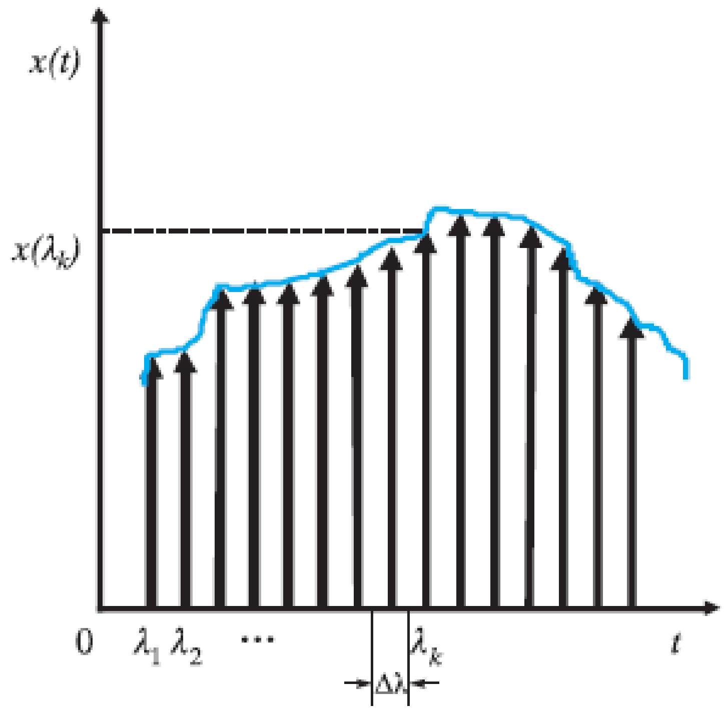
Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος $h(t)$ είναι η έξοδος που παρατηρείται όταν το σήμα εισόδου στο σύστημα αυτό είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Στο ακόλουθο σχήμα απεικονίζεται η έξοδος που αντιστοιχεί όταν εφαρμόζεται στην είσοδο ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ένα κρουστικό σήμα.



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Συνέλιξη (Ι)

Ένα σήμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα παλμών δ:



οπότε μπορεί να γραφεί ως εξής: $x(t)=\sum_{i=1}^{+\infty} x(\lambda_i)\cdot\delta(t-\lambda_i)\cdot\Delta\lambda$

Συνέλιξη (II)

Για ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα θα ισχύουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες για τη σχέση εισόδου–εξόδου, οπότε η έξοδος μπορεί να προσεγγιστεί ως ένα άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων (ενισχυμένων με τις αντίστοιχες τιμές του σήματος και μετατοπισμένων κατάλληλα στο πεδίο του χρόνου).

$$y(t)=\sum_{i=1}^{+\infty}x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\Delta\lambda \xrightarrow{\Delta\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(t)*h(t)$$

Η πράξη $x(t)*h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t),h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και, αντιστρόφως, η συνέλιξη δύο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου).

Δηλαδή, αν $x(t)\xleftrightarrow{F}X(f)$ και $y(t)\xleftrightarrow{F}Y(f)$

τότε

$$x(t)*y(t)\xleftrightarrow{F}X(f)\cdot Y(f) \qquad \text{(A)}$$

και

$$x(t)\cdot y(t)\xleftrightarrow{F}X(f)*Y(f) \qquad \text{(B)}$$

Κρουστική Απόκριση – Συνάρτηση μεταφοράς

Η πράξη $x(t)*h(t)$ ονομάζεται συνέλιξη των σημάτων $x(t),h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στο πεδίο των συχνοτήτων η συνέλιξη των δύο σημάτων αντιστοιχεί στο γινόμενο των αντίστοιχων φασμάτων (και αντιστρόφως, η συνέλιξη δυο σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε γινόμενο των δύο σημάτων στο πεδίο του χρόνου)).

Ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(f)$$

αντιστοιχεί στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος οπότε ισχύει:

$$\begin{array}{ccccc} y(t) = & x(t) & * & h(t) \\ \updownarrow F & \updownarrow F & & \updownarrow F \\ Y(f) = & X(f) & \cdot & H(f) \end{array}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Ιδανικά Φίλτρα

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Φίλτρα

- Το φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η απόκριση συχνότητας ή συνάρτηση μεταφοράς H(f) παίρνει σημαντικές τιμές μόνο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων
- Κατηγορίες Φίλτρων
  - Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο (LPF): επιτρέπει τη διέλευση όλων των συνιστωσών του σήματος εισόδου με συχνότητες κάτω από ένα όριο b
  - Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο (HPF): Το ιδανικό HPF αποκόπτει όλες τις συνιστώσες του σήματος εισόδου με συχνότητες μικρότερες από b και αφήνει τη διέλευση όλων των συνιστωσών πάνω από b χωρίς παραμόρφωση
  - Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (BPF): Διέλευση μιας συγκεκριμένης ζώνης συχνότητας

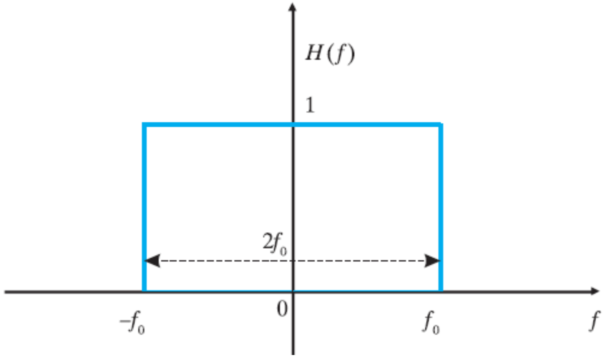
Φίλτρα

- Βαθυπερατά
  - Χαμηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Υψιπερατό
  - Υψηλές συχνότητες (με σημείο αναφοράς το 0)
- Ζωνοπερατό
  - Συγκεκριμένη ζώνη συχνοτήτων
- Ζωνοφρακτικό
  - Αποκοπή συγκεκριμένης ζώνης συχνοτήτων
- Ζώνες διέλευσης και αποκοπής

Τύποι Φίλτρων

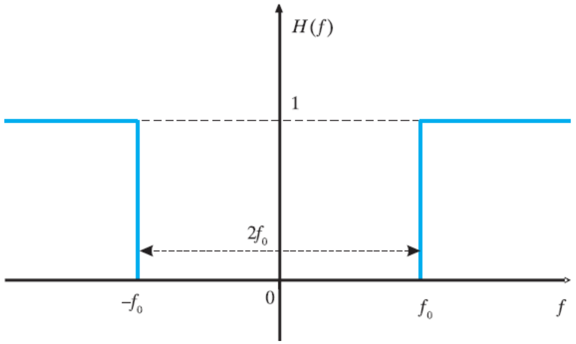
- Ιδανικό Βαθυπερατό (Low Pass)

$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|\le f_0\\ 0, & |f|>f_0\end{cases}$$



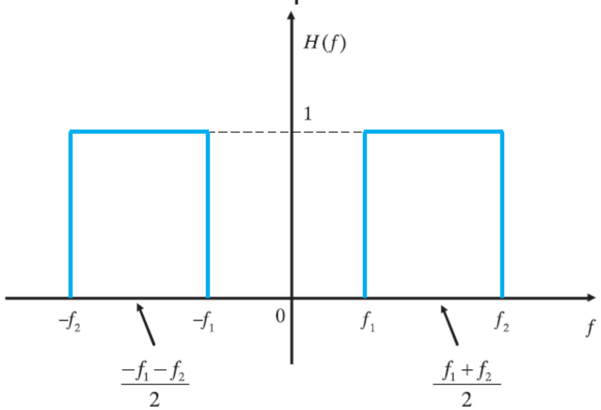
- Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}0, & |f|\le f_0\\ 1, & |f|>f_0\end{cases}$$



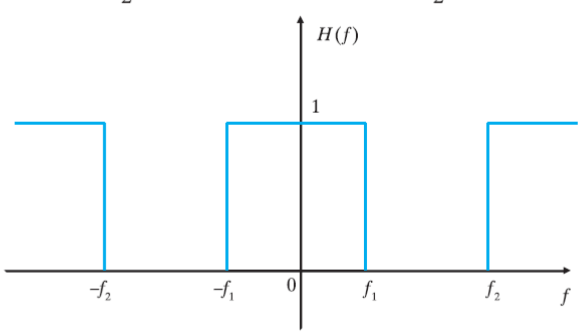
- Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}1, & f_1\le|f|\le f_2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

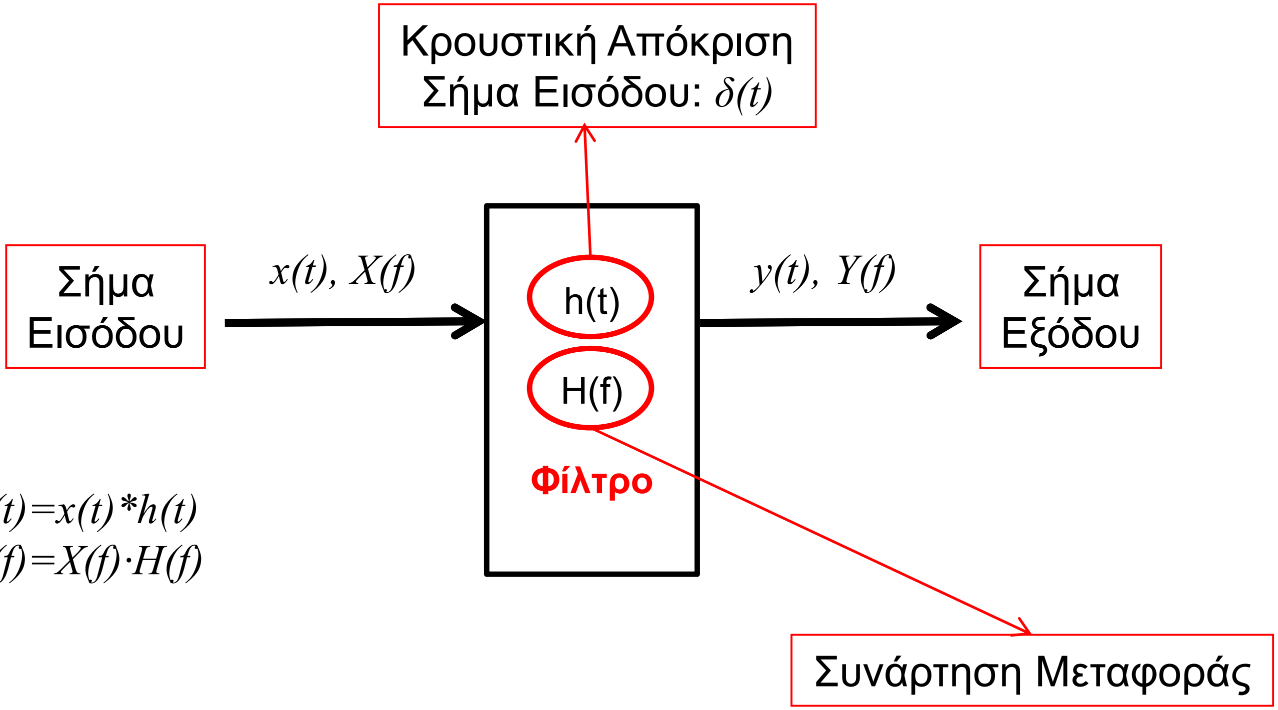


- Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

$$H(f)=\begin{cases}0, & f_1\le|f|\le f_2\\ 1, & \text{αλλού}\end{cases}$$



Ορολογία Φίλτρων

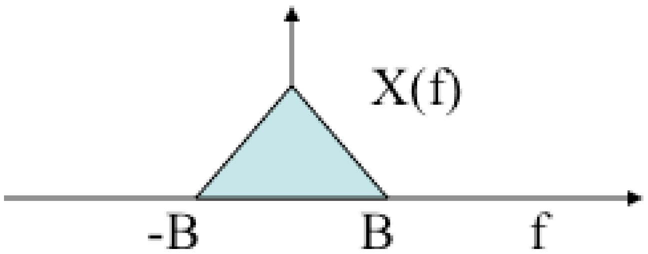


$y(t)=x(t)*h(t)$

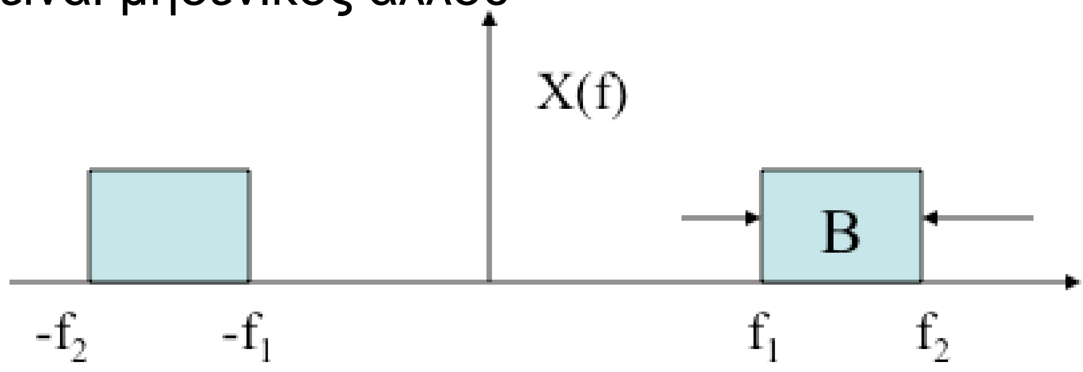
$Y(f)=X(f)\cdot H(f)$

Σήματα Βασικής Ζώνης και Ζωνοπερατά Baseband and Bandpass Signals

- ‘Ενα σήμα x(t) Βασικής Ζώνης με **<u>εύρος ζώνης</u>** (φάσματος) B είναι ένα σήμα για το οποίο ο Μ/Σ Fourier X(f) είναι μη μηδενικός για $|f| \le B$, και είναι μηδενικός X(f) = 0 για |f| > B.

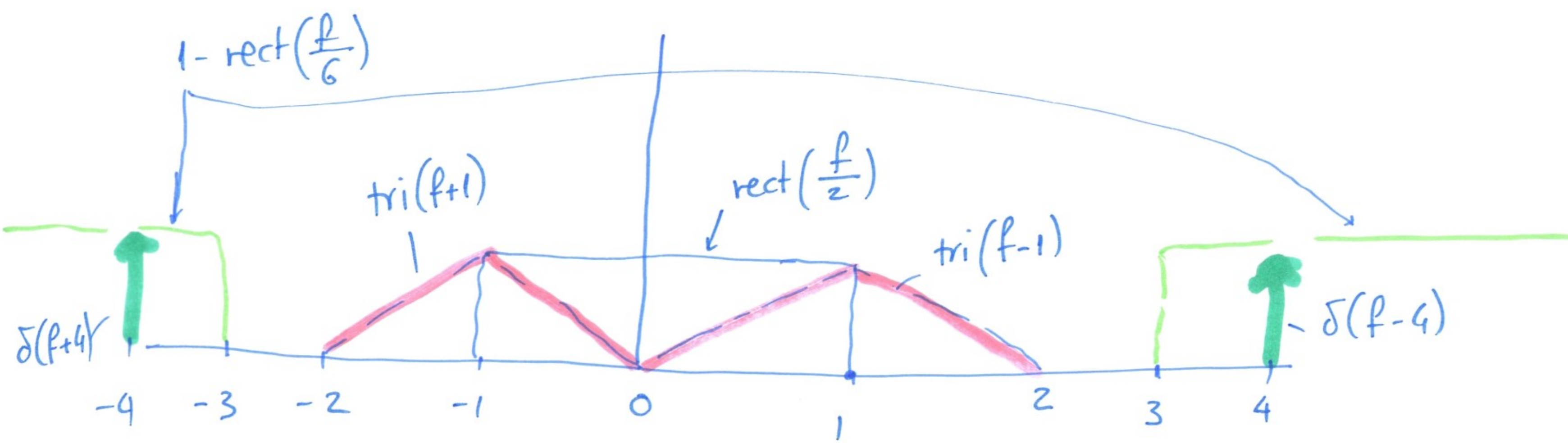


- Ένα ζωνοπερατό σήμα x(t) με **<u>εύρος ζώνης</u>** (φάσματος) B = f2 – f1 είναι ένα σήμα για το οποίο ο X(f) είναι μη μηδενικός για $0 < f_1 < |f| < f_2$, και είναι μηδενικός αλλού



7	**Δίνεται το παρακάτω φάσμα πλάτους ενός σήματος** $$X(f)=\delta(f-4)+\delta(f+4)+tri(f+1)+tri(f-1)+rect\left(\frac{f}{2}\right)$$ **το οποίο διέρχεται από φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς** $H(f)=1-rect\left(\frac{f}{6}\right)$ **. Ποιο είναι το φάσμα πλάτους** $Y(f)$ **στην έξοδο του φίλτρου.**		
1	$Y(f)=tri(f+1)+tri(f-1)+rect\left(\frac{f}{2}\right)$	2	$\boxed{Y(f)=\delta(f-4)+\delta(f+4)}$
3	$Y(f)=0{,}5\big(\delta(f-4)+\delta(f+4)\big)$	4	$Y(f)=2tri(f+1)+2tri(f-1)$

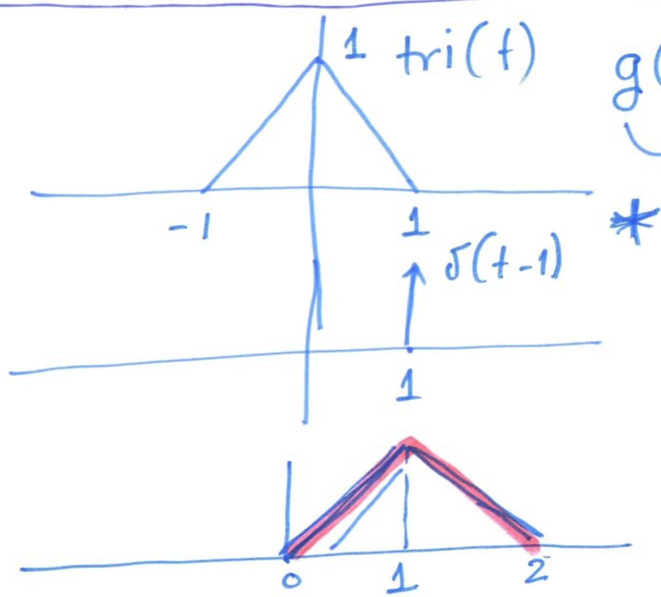
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ



$$r(f) = \delta(f-4) + \delta(f+4)$$

Παράδειγμα συνέλιξης

$$\underbrace{g(f) * \delta(f-f_0) = g(f-f_0)}$$

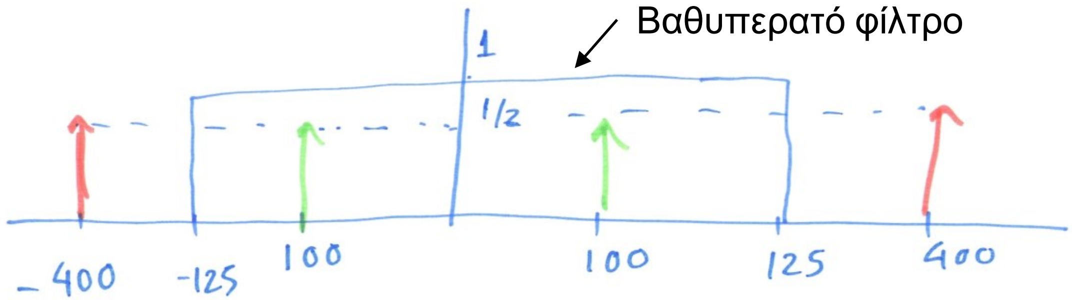


3.	**Δίνεται το σήμα με την παρακάτω χρονική κυματομορφή** $$x(t) = \sin(2\pi 100t) + \cos(2\pi 400t)$$ **το οποίο διέρχεται από φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς** $H(f) = rect\left(\frac{f}{250}\right)$. **Να υπολογιστεί το σήμα y(t) στην έξοδο του φίλτρου.**

1	$\boxed{y(t) = \sin(2\pi 100t)}$	2	$y(t) = \sin(2\pi 100t) + \cos(2\pi 400t)$
3	$y(t) = 0$	4	$y(t) = \sin(2\pi 100t)\, rect\left(\frac{t}{250}\right)$

$$x(t) = \sin(2\pi\, 100t) + \cos(2\pi\, 400t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2j}\left\{\delta(f-100) - \delta(f+100)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\delta(f-400) + \delta(f+400)\right\}$$



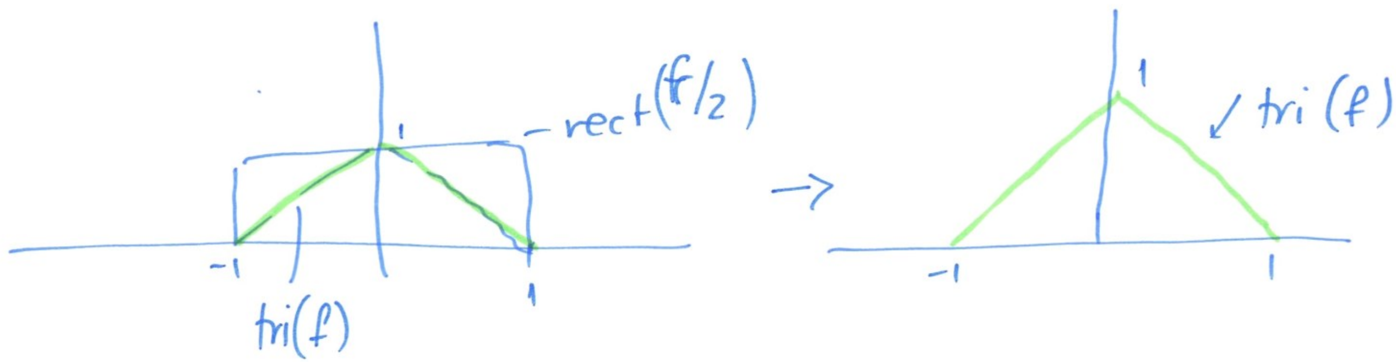
$$Y(f) = \frac{1}{2j}\left\{\delta(f-100) + \delta(f+100)\right\}$$

$$y(t) = \sin(2\pi\, 100t)$$

7	**Να υπολογιστεί η συνέλιξη του σήματος z(t) =x(t) * y(t), όπου x(t)=$2\boldsymbol{sinc}^2(\boldsymbol{t})$ και y(t)=$\boldsymbol{sinc}(2\boldsymbol{t})$**		
1	$z(t) = 2sinc^2(t) \cdot \boldsymbol{sinc}(\boldsymbol{2t})$	2	$\boxed{\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{sinc}^2(\boldsymbol{t})}$
3	$z(t) = sinc(t)$	4	$z(t) = sinc^2(2t)$

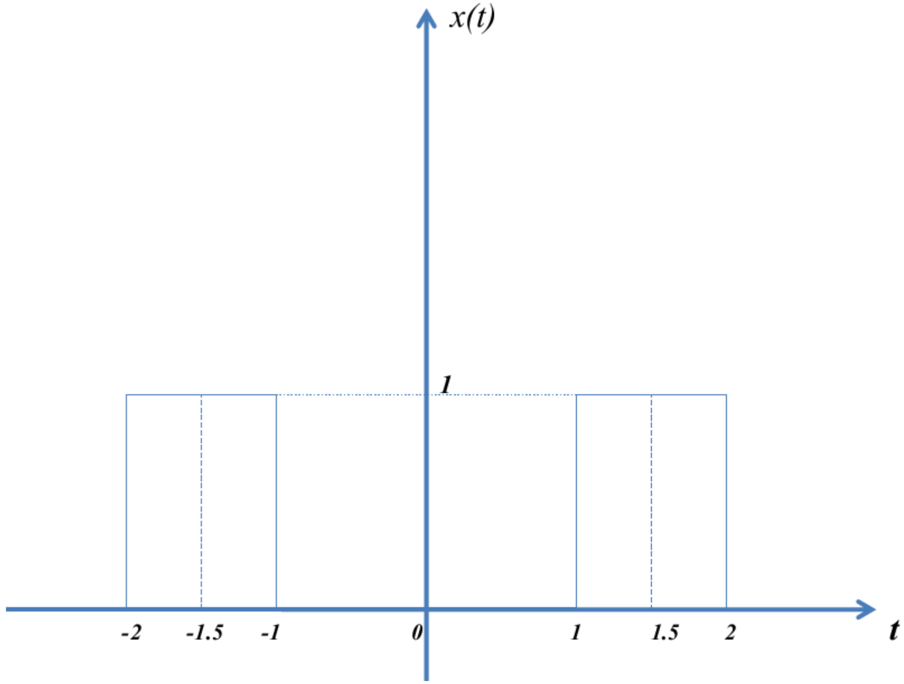
$$2\,\mathrm{sinc}^2(t) * \mathrm{sinc}(2t) \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F} \left[\cancel{2}\,\mathrm{tri}(f)\right] \cdot \left[\frac{1}{\cancel{2}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\right] = \mathrm{tri}(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} \mathrm{sinc}^2(t)$$



ΘΕΜΑ 4 /ΓΕ1/1112

Δίνεται ένα σύστημα, που έχει ως είσοδο το σήμα $x(t)$ με χρονική κυματομορφή που απεικονίζεται παρακάτω:



και ως έξοδο το σήμα με έκφραση στο πεδίο του χρόνου που υπολογίζεται από την εξής συνέλιξη: $y(t)=\left\{\delta(t)+\frac{1}{2}\left[\delta(t-3)+\delta(t+3)\right]\right\}*rect(t)$.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εισόδου $X(f)$

(β) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους του σήματος εξόδου $Y(f)$

(γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με $H(f)=\cos(3\pi f)$.

(α)

Από το δεδομένο σχήμα το σήμα $x(t)$ ισούται με:

$$x(t) = rect(t-1.5) + rect(t+1.5) \ .$$

Συνεπώς το φάσμα πλάτους ισούται με:

$$X(f) = e^{-j2\pi f 1.5}\text{sinc}(f) + e^{j2\pi f 1.5}\text{sinc}(f) = 2\cos(3\pi f)\text{sinc}(f) \ .$$

(β)

Δίνεται ότι

$$y(t) = \left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} * rect(t)$$

Στο πεδίο των συχνοτήτων, ο ΜΣ Fourier της συνέλιξης θα αντιστοιχεί στο γινόμενο των ΜΣ Fourier των επιμέρους όρων της:

$$Y(f) = \Im\left\{\delta(t) + \frac{1}{2}\left[\delta(t-3) + \delta(t+3)\right]\right\} \cdot \Im\left[rect(t)\right] =$$

$$= \left[1 + \cos(6\pi f)\right] \cdot \text{sinc}(f) = \text{sinc}(f) + \cos(6\pi f) \cdot \text{sinc}(f)$$

(γ)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{\left[1+\cos(6\pi f)\right]\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)}.$$

Κι επειδή ισχύει ότι

$$1+\cos(6\pi f)=2\cos^2(3\pi f)$$

τελικά έχουμε:

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{2\cos^2(3\pi f)\cdot \mathrm{sinc}(f)}{2\cos(3\pi f)\mathrm{sinc}(f)}=\cos(3\pi f)$$

Ερωτήσεις

Επιπλέον Παραδείγματα – Λυμένες Ασκήσεις

ΠΛΗ22_Εξέταση 1η_3-7-2019

ΘΕΜΑ 1 (20 Μονάδες)

Δίνεται το σήμα $x(t) = cos(2\pi 100t)$. Να υπολογιστεί η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (αν υπάρχουν) για τα παρακάτω σήματα:

Ερώτηση 1η (5 Μονάδες): $\mathrm{y_a(t) = x(t) + x(2t)}$

Ερώτηση 2η (5 Μονάδες): $y_\beta(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]^2$

Ερώτηση 3η (5 Μονάδες): $y_\gamma(t) = [x(t)\cdot x(5t)] * sinc(1000t) + 1$, όπου ο τελεστής '*' αντιστοιχεί στη συνέλιξη

Ερώτηση 4η (5 Μονάδες): $y_\delta(t) = [x(t)\cdot 10sinc^2(10t)] + \delta(t)$

Ερώτηση 1η :

$$y_a(t) = x(t) + x(2t) = cos(2\pi 100t) + cos(2\pi 200t)$$

Οι περίοδοι των 2 όρων είναι αντίστοιχα

$$T_1 = \frac{1}{100} sec, T_2 = \frac{1}{200} sec.$$

Ο λόγος τους είναι:

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{200}} = 2$, ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο

$$T = T_1 = 2T_2 = \frac{1}{100} sec$$

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 200Hz άρα το σήμα έχει συχνότητα δειγματοληψίας ίση με 400Hz

Ερώτηση 2η :

$$y_\beta(t) = \left[x\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]^2 = cos^2(200t) = \frac{1 + cos(400t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\left(2\pi \frac{400}{2\pi} t\right)$$

Έχουμε έναν σταθερό και έναν περιοδικό όρο με συχνότητα $\frac{200}{\pi} Hz$
Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{\pi}{200} sec$ και έχει ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $\frac{400}{\pi} Hz$

Ερώτηση 3η :

$$y_\gamma(t) = [x(t) \cdot x(5t)] * sinc(1000t) + 1$$

$$x(t) \cdot x(5t) = cos(2\pi 100t) \cdot cos(2\pi 500t) = \frac{1}{2}cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2}cos(2\pi 400t)$$

Άρα

$$y_\gamma(t) = \left[\frac{1}{2}cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2}cos(2\pi 400t)\right] * sinc(1000t) + 1 \overset{F}{\leftrightarrow}$$

$$\overset{F}{\leftrightarrow} \quad F\left\{\frac{1}{2}cos(2\pi 600t) + \frac{1}{2}cos(2\pi 400t)\right\} \cdot \frac{1}{1000} rect\left(\frac{f}{1000}\right) + \delta(f)$$

Στην ανωτέρω έκφραση ο τετραγωνικός παλμός αποκόπτει τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από 500Hz οπότε τελικά έχουμε το σήμα :

$$y_\gamma(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{1000}cos(2\pi 400t) + 1$$

που είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{1}{400}$ sec και συχνότητα 400Hz .

Η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 800Hz

Ερώτηση 4η :

$$y_\delta(t) = [x(t) \cdot 10sinc^2(10t)] + \delta(t)$$
$$= cos(2\pi 100t) \cdot 10sinc^2(10t) + \delta(t) \overset{F}{\leftrightarrow}$$
$$\overset{F}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\left\{tri\left(\frac{f-100}{10}\right) + tri\left(\frac{f+100}{10}\right)\right\} + 1$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
Επίσης, το σήμα δεν είναι περιορισμένου εύρους ζώνης άρα δεν δειγματίζεται με το κριτήριο Nyquist.

ΘΕΜΑ 1 ΓΕ2 2020/21

Στόχος της άσκησης: είναι η εξοικείωση με τα περιοδικά σήματα και με την έννοια της περιοδικότητας.

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ2/19-20/Θ1, ΓΕ2/18-19/Θ2

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα να εξετάσετε αν είναι περιοδικό ή όχι και να υπολογίσετε την περίοδό του (αν υπάρχει)

(α) $x_1(t) = 3sin(3\pi t) + 2sin(4\pi t)$

(β) $x_2(t) = 4cos(100t) + 5sin(70\sqrt{2}\, t)$

(γ) $x_3(t) = \sqrt{2}cos(12t) + 1{,}5\, cos(2\pi t)$

(δ) $x_4(t)$ με φάσμα $X_4(f) = 3\cos(5f + \pi/4)$

(ε) $x_5(t) = \{cos(7\pi t) + 3\, sin(8\pi t)\} \cdot rect\left(\frac{t}{1000}\right)$.

(στ) $w(t) = x(t) + x(-t)$, όπου $x(t) = e^{4\pi jt}$

(ζ) $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5x(t-2n)$ όπου $x(t) = rect(4t)$

(α)

Σχετικά με την συχνότητα κάθε συνιστώσας του σήματος, ισχύει $2\pi f_1 = 3\pi => f_1 = 3/2$ και $2\pi f_2 = 4\pi => f_2 = 2$ και αφού το πηλίκο $f_2/f_1 \ = \ 4/3$ είναι ένας ρητός αριθμός, προκύπτει ότι το σήμα $x_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T=2sec

(β) Ισχύει ότι $2\pi f_1 \ = 100 => f_1 = \frac{100}{2\pi}$ και $2\pi f_2 = 70\sqrt{2} \ => f_2 = 70\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$. Επομένως ισχύει

$\frac{f_2}{f_1} = 70\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{2\pi}{100} = \ \sqrt{2}\,\frac{7}{10}$. Το αποτέλεσμα είναι άρρητος αριθμός, άρα το $x_2(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(γ) Ισχύει ότι $2\pi f_1 \ = 12 => f_1 = 6/\pi$ και $2\pi f_2 = 2\pi => f_2 = 1$, άρα $(f_2/f_1) = \pi/6$. Το αποτέλεσμα είναι άρρητος αριθμός, άρα το σήμα $x_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(δ)

Το φάσμα του σήματος είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό

(ε)

Το σήμα $x_5(t)$ έχει περιορισμένη διάρκεια επειδή εμπεριέχει τον πολλαπλασιαστικό όρο $rect\left(\frac{t}{1000}\right)$ συνεπώς δεν είναι περιοδικό

(στ)

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

$$x(t) = e^{4\pi jt}$$

Είναι $w(t) = e^{4\pi jt} + e^{-4\pi jt} = 2\cos(4\pi t) = 2\cos(2\pi 2t)$

Το σήμα είναι συν ημιτονοειδές άρα περιοδικό με συχνότητα f=2Hz και περίοδο ½ sec

(ζ)

$$x(t) = rect(4t)$$

Είναι $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5x(t-2n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5rect\big(4(t-2n)\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5rect\left(\frac{t-2\,n}{1/4}\right)$

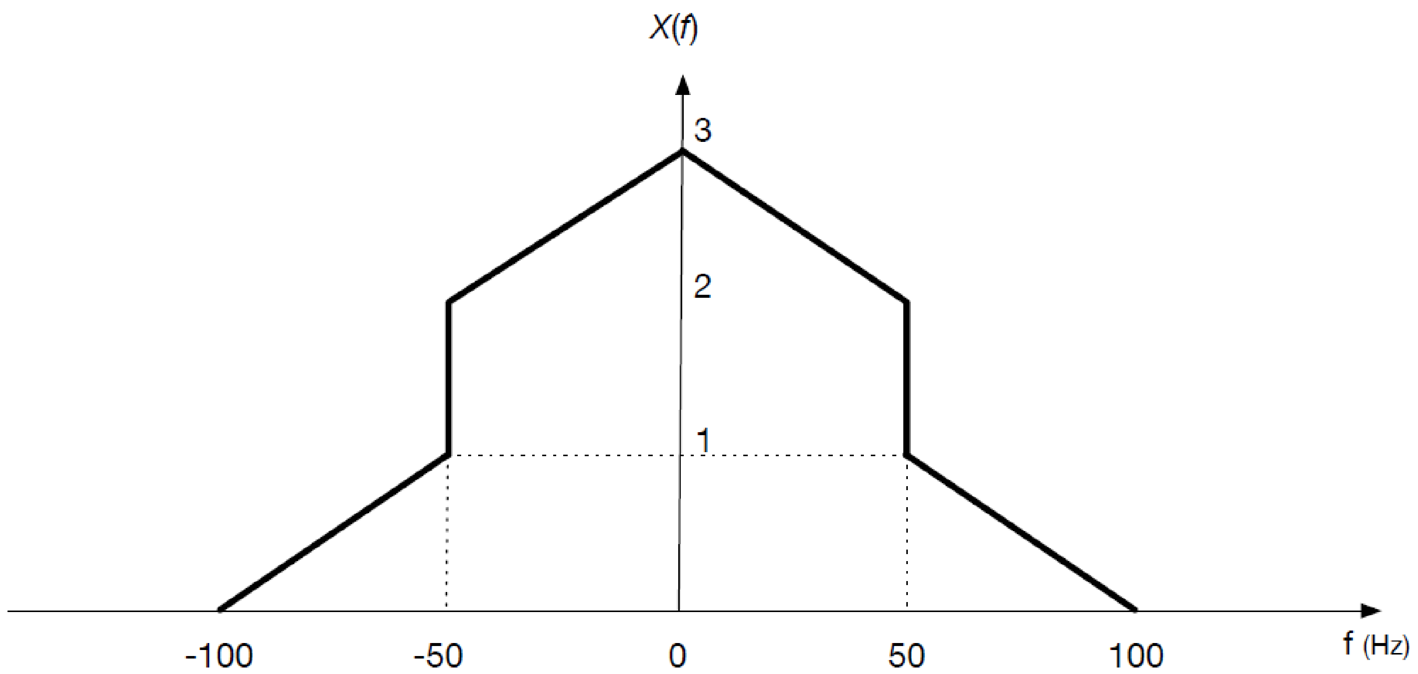
Το σήμα αποτελείται από άπειρους ορθογωνικούς παλμούς στο πεδίο του χρόνου εύρους $^1/_4$ sec με κέντρα στα …, -4, -2, 0, 2, 4, … sec

Δηλαδή οι παλμοί επαναλαμβάνονται ανά 2sec, οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 2sec.

ΠΛΗ22_Εξέταση 1η_3-7-2019

ΘΕΜΑ 2 (20 Μονάδες)

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



Ερώτηση 1η (5 Μονάδες): Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

<u>Ερώτηση 1η :</u> Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2\, tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$a sinc(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$a sinc^2(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100 sinc(100t) + 2 \cdot 100 sinc^2(100t)$$

ΘΕΜΑ 2 ΓΕ2/ 2019-20

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνοτήτων για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων.*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ2/17-18/Θ7, ΓΕ2/18-19/Θ1.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *X(f)* του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω σημάτων: $x(t) = u(t-3) - u(t-7) + tri(t-5)$ (όπου u η μοναδιαία βηματική συνάρτηση και όπου tri η συνάρτηση τριγωνικού παλμού).

Με μία προσεκτική απεικόνιση του σήματος προκύπτει ότι οι δύο βηματικοί παλμοί σχηματίζουν ένα τετραγωνικό παλμό:

$$x(t) = u(t-3) - u(t-7) + tri(t-5) = rect\left(\frac{t-5}{4}\right) + tri(t-5)$$

Ισχύουν τα παρακάτω σύμφωνα με την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier για αλλαγή κλίμακας & χρονικής ολίσθησης:

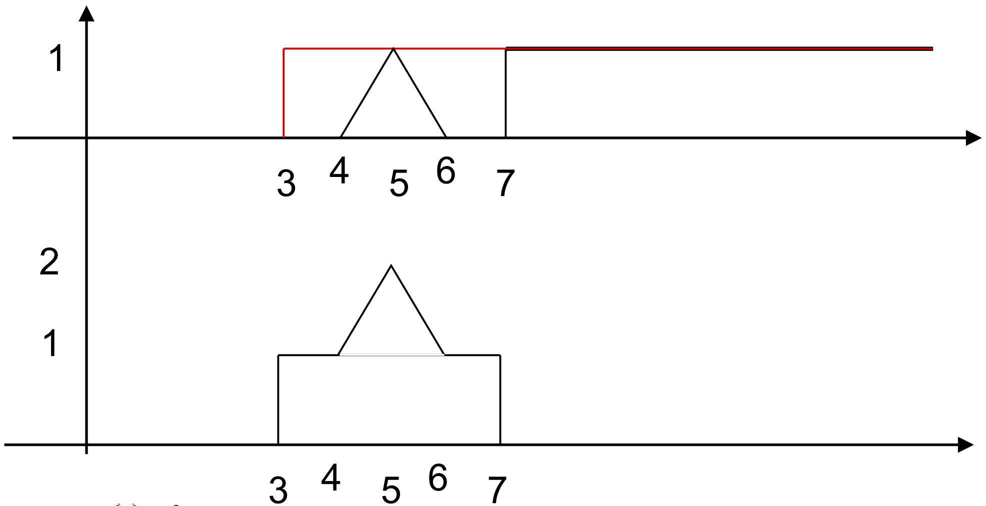
$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{sinc}(f)$$

$$rect\left(\frac{t}{4}\right) \xleftrightarrow{F} 4\operatorname{sinc}(4f)$$

$$rect\left(\frac{t-5}{4}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f5} 4\operatorname{sinc}(4f)$$

$$tri(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{sinc}^2(f)$$

$$tri(t-5) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f5} \operatorname{sinc}^2(f)$$



Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) είναι:

$$X(f) = e^{-j2\pi f5} 4\operatorname{sinc}(4f) + e^{-j2\pi f5} \operatorname{sinc}^2(f)$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = 4\cos(800\pi t)$ και $X_2(f) = tri\left(\frac{f}{100}\right)$.

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

(α). Να υπολογιστεί η έκφραση $x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t)\right]$

(β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $x_3(t)$.

1/

(α), (β)

$$x_1(\frac{t}{2}) = 4\cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{t}{2}\right) = 4\cos(2\pi 200t) \leftrightarrow 2\left[\delta(f-200)+\delta(f+200)\right] \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{2}x_1(\frac{3t}{2}) = \frac{1}{2}4\cos\left(2\pi 400 \cdot \frac{3t}{2}\right) = 2\cos(2\pi 600t) \leftrightarrow \delta(f-600)+\delta(f+600) \qquad \text{(B)}$$

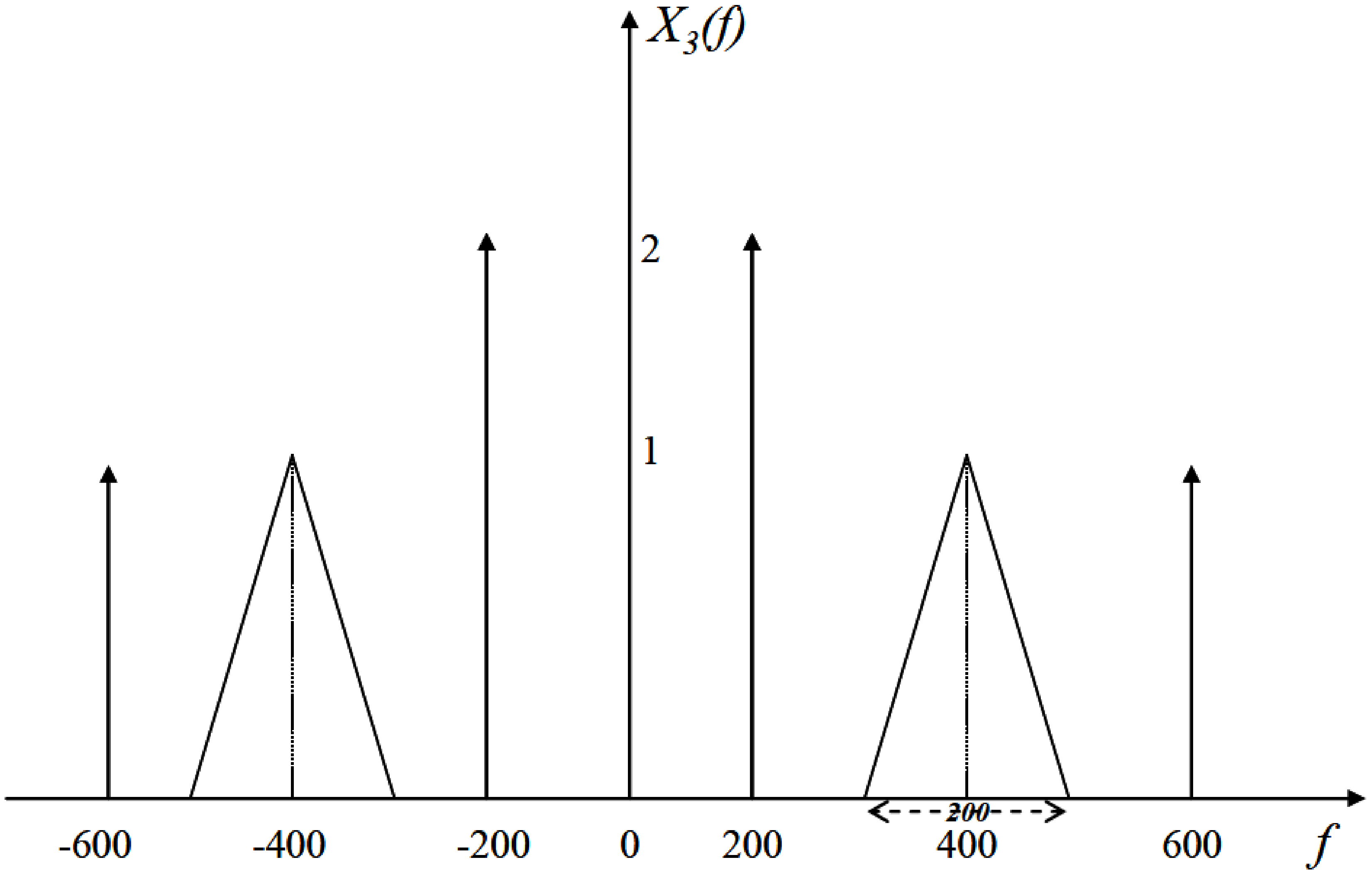
$$\frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) = 2\cos(2\pi 400t)100\sin c^2(100t) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left\{\delta(f-400)+\delta(f+400)\right\} * tri\left(\frac{f}{100}\right) = tri\left(\frac{f-400}{100}\right) + tri\left(\frac{f+400}{100}\right) \qquad \text{(Γ)}$$

Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t) \right] = 4\cos(2\pi 200t) + 2\cos(2\pi 600t) + 200\cos(2\pi 400t)\sin c^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2\left[\delta(f-200) + \delta(f+200)\right] + \left[\delta(f-600) + \delta(f+600)\right] + \left[tri\left(\frac{f-400}{100}\right) + tri\left(\frac{f+400}{100}\right) \right]$$



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΘΕΜΑ 1 ΓΕ2/1819

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνοτήτων για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων. Επίσης, μόνο στο ερώτημα (ε) απαιτείται χρήση OCTAVE MATLAB*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/2010-11/Θ6, ΓΕ1/2011-12/Θ5,6, ΓΕ1/2012-13/Θ1,3

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *X(f)* του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω μοναδιαίων βηματικών σημάτων: $x(t) = u(t+4) - u(t+2) + u(t-2) - u(t-4)$

(β) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους *Y(f)* του σήματος με χρονική έκφραση

$$y(t) = 8\operatorname{sinc}(8t) - 4\operatorname{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$$

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *Z(f)* του σήματος με χρονική έκφραση

$z(t) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(t - \frac{1}{8}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{8}\right)\right]$. Επίσης να διερευνηθεί η περιοδικότητα του σήματος και να υπολογιστεί η περίοδός του (αν υπάρχει).

(δ) Να προσδιοριστούν και να σχεδιαστούν πρόχειρα τα φάσματα που προκύπτουν από τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των φασμάτων που υπολογίστηκαν στα ερωτήματα (β), (γ):

(i) $W(f) = Y(f)Z(f)$

(ii) $V(f) = Y(f) * Y(f)$ (το σύμβολο * αντιστοιχεί στην πράξη της συνέλιξης)

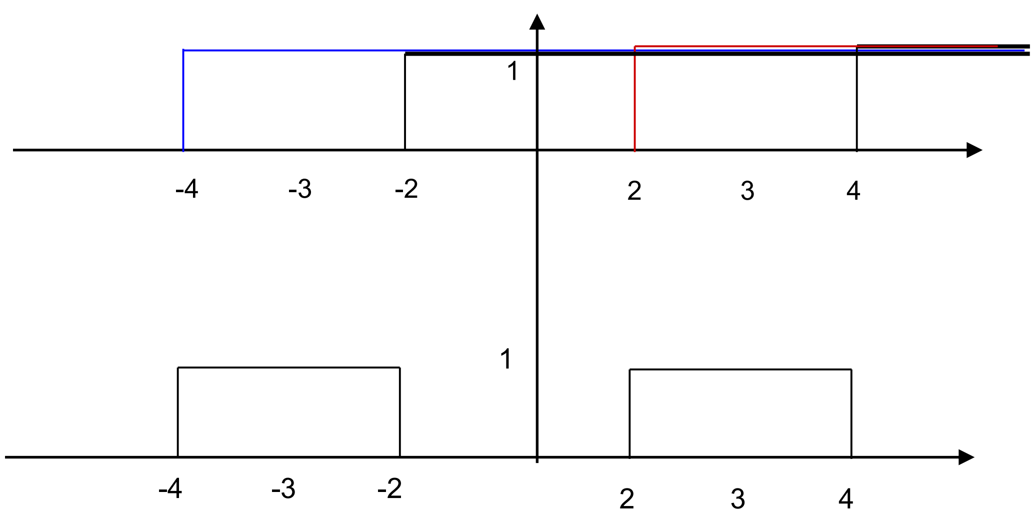
(α)
Έχουμε διαδοχικά:

$$x(t)=u(t+4)-u(t+2)+u(t-2)-u(t-4)=rect\left(\frac{t+3}{2}\right)+rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

$$rect(t)\xleftrightarrow{F}\sin c(f)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect\left(\frac{t}{2}\right)\xleftrightarrow{F}2\text{sinc}(2f)\Leftrightarrow\begin{cases}rect\left(\frac{t+3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}e^{j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)\\ rect\left(\frac{t-3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}e^{-j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(f)=e^{j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)+e^{-j2\pi f3}2\text{sinc}(2f)=2\text{sinc}(2f)\left[e^{j2\pi f3}+e^{-j2\pi f3}\right]=2\text{sinc}(2f)2\cos(6\pi f)$$



(β)

Εφόσον στο προηγούμενο ερώτημα προέκυψε ότι $rect\left(\frac{t+3}{2}\right)+rect\left(\frac{t-3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}2\mathrm{sinc}(2f)2\cos(6\pi f)$

με βάση την ιδιότητα του δυϊσμού θα ισχύει:

$$4\mathrm{sinc}(2t)\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{-f+3}{2}\right)+rect\left(\frac{-f-3}{2}\right)=rect\left(\frac{f-3}{2}\right)+rect\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

Εναλλακτικά,

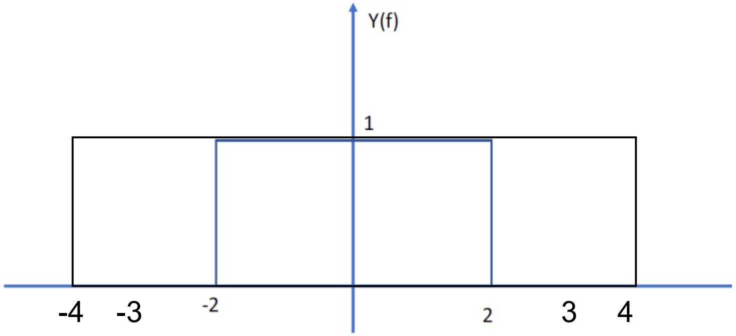
$$4\mathrm{sinc}(2t)\cos(6\pi t)=2\mathrm{sinc}(2t)2\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{f}{2}\right)*\left[\delta(f-3)+\delta(f+3)\right]=$$

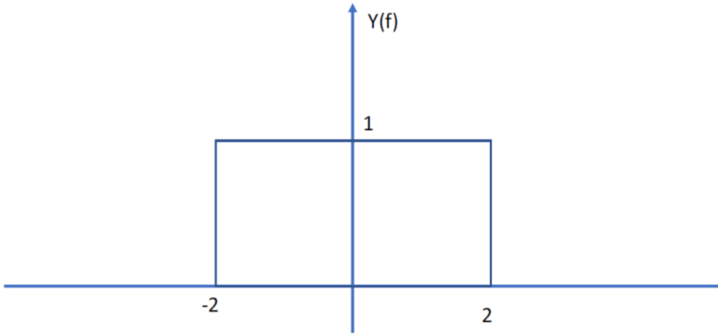
$$=rect\left(\frac{f-3}{2}\right)+rect\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$y(t)=8\mathrm{sinc}(8t)-4\mathrm{sinc}(2t)\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{f}{8}\right)-rect\left(\frac{f-3}{2}\right)-rect\left(\frac{f+3}{2}\right)=$$

$$=rect\left(\frac{f}{4}\right)$$





Εφόσον ισχύει $\cos\left(2\pi f_0 t\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$,

με την ιδιότητα του δυϊσμού θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-t_0\right)+\delta\left(t+t_0\right)\right] \overset{F}{\longleftrightarrow} \cos\left(2\pi t_0 f\right)$$

Συνεπώς

$$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right] \overset{F}{\longleftrightarrow} \cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$$

Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Εναλλακτικά

$$\delta\left(t-\frac{1}{8}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j2\pi f/8}$$

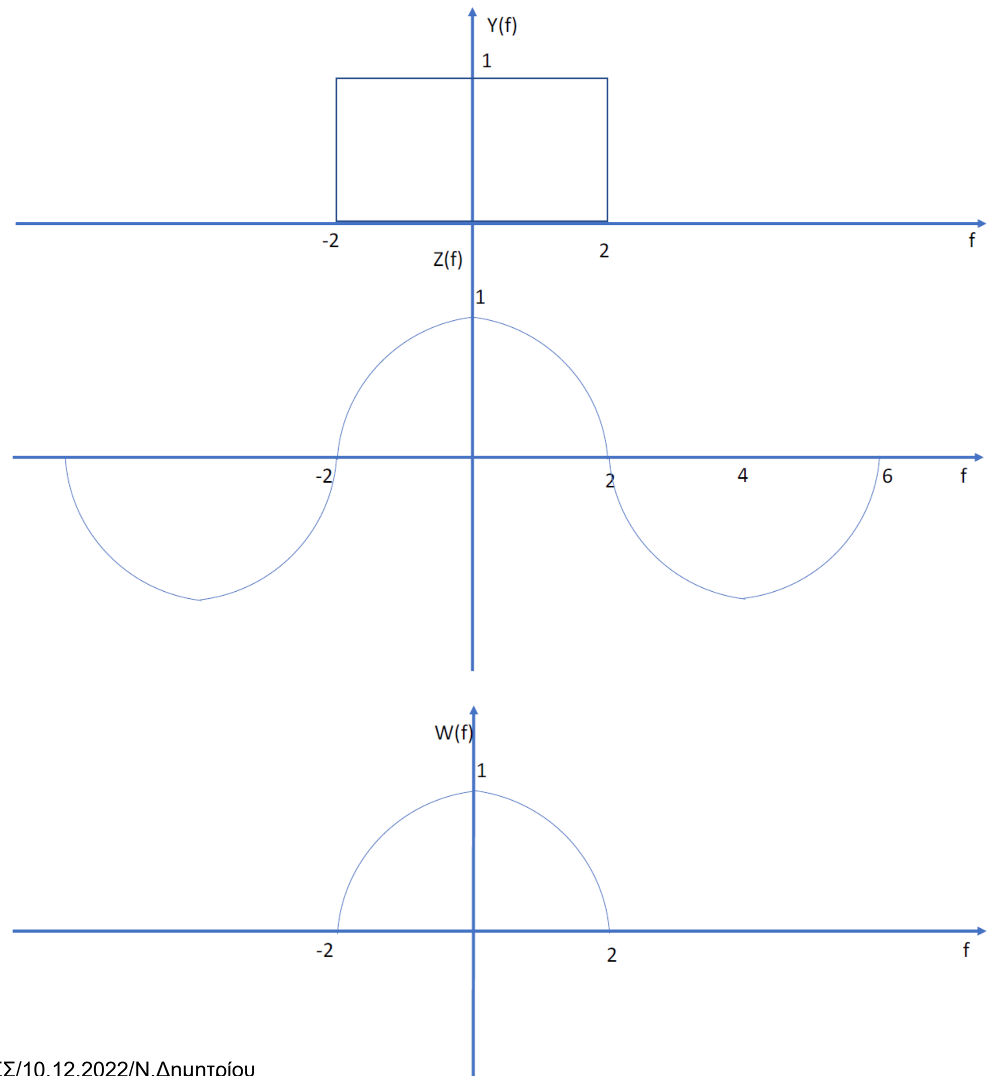
$$\delta\left(t+\frac{1}{8}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{j2\pi f/8}$$

Και με χρήση του κανόνα του Euler

$$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right] \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi f/8}+e^{j2\pi f/8}\right]=\cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$$

(δ)

(i) $W(f) = Y(f)Z(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right)\cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$



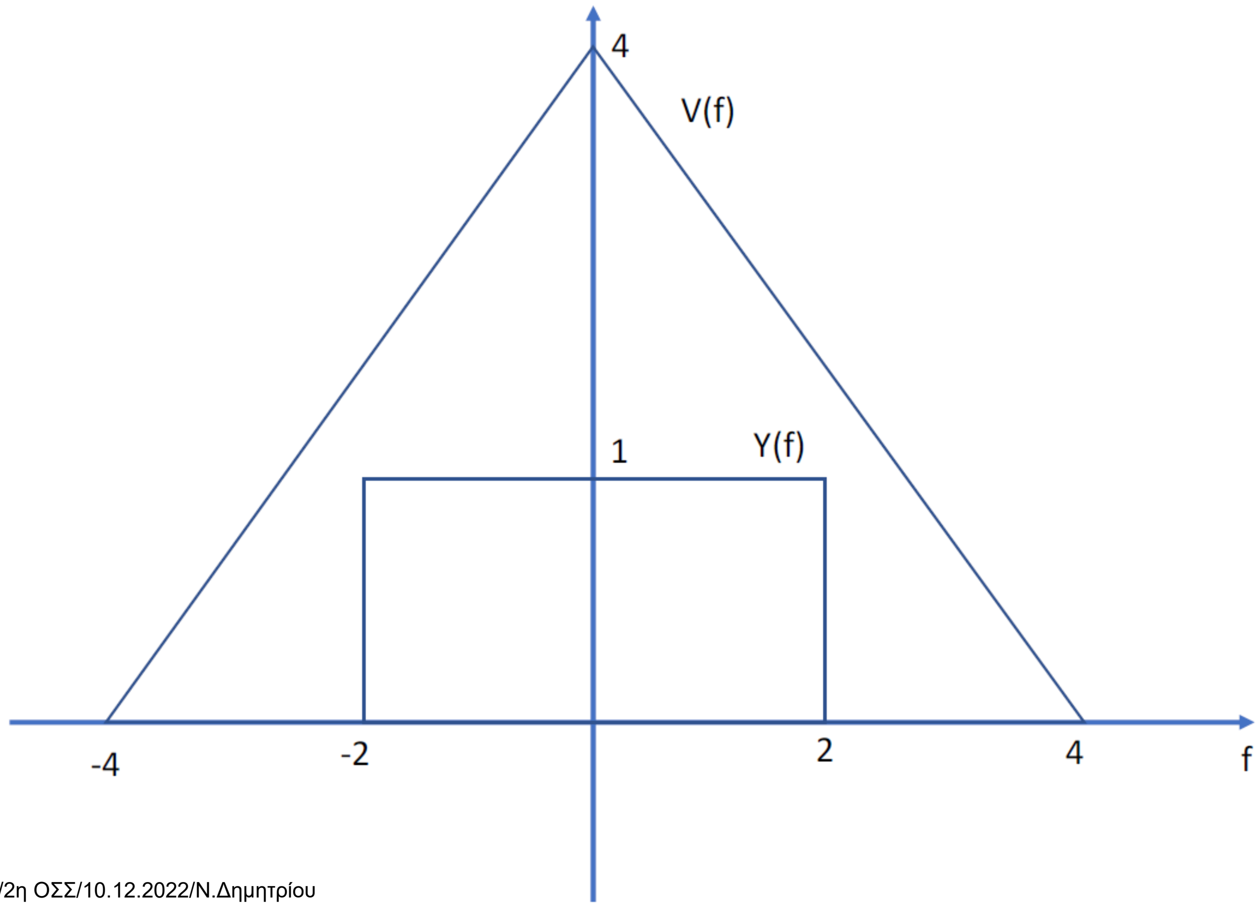
(ii) $V(f)=Y(f)*Y(f)=rect\left(\frac{f}{4}\right)*rect\left(\frac{f}{4}\right)$

Στο πεδίο του χρόνου έχουμε:

$$v(t)=4\sin c(4t)\cdot 4\sin c(4t)=16\sin c^2(4t)$$

Επιστρέφοντας στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε:

$$v(t)=16\sin c^2(4t)\xleftrightarrow{F}16\frac{1}{4}tri\left(\frac{f}{4}\right)=4tri\left(\frac{f}{4}\right)$$



ΓΕ1/0809/Θ4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, με περίοδο $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστεί η περίοδος των παρακάτω σημάτων (αν είναι περιοδικά):

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$ και το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

(ε) $x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$, όπου $\alpha > f_0$

Θα εργαστούμε στο πεδίο των συχνοτήτων . Ισχύει ότι:

$$x_6(t) = x(t) * \left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right] \xleftrightarrow{F} X(f) \cdot \Im\left[2a \cdot \mathrm{sinc}(2at)\right]$$

Από πίνακες ΜΣ Fourier γνωρίζουμε ότι:

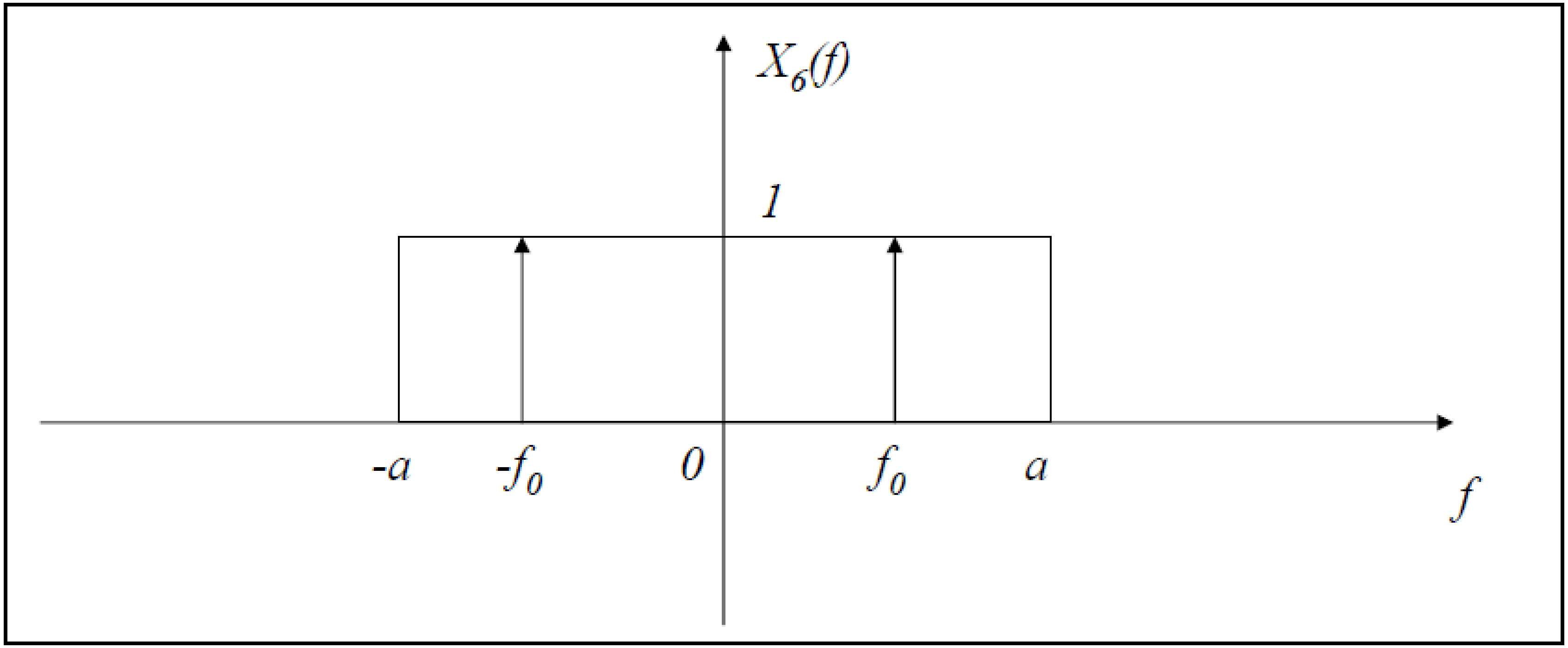
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] = X(f)$$

$$\mathrm{sinc}(t) \xleftrightarrow{F} rect(f) \Leftrightarrow$$

και $\Leftrightarrow \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2a} rect\left(\frac{f}{2a}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot \mathrm{sinc}(2at) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{2a}\right)$$

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τα δύο σήματα στο πεδίο των συχνοτήτων.



Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη του $x(t)$ με το $\left[2a \cdot \text{sinc}(2at)\right]$ ισοδυναμεί με διέλευση του $x(t)$ από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\alpha > f_0$, συνεπώς το σήμα $x(t)$ εξέρχεται αυτούσιο από το φίλτρο (δηλ. $x_6(t) = x(t)$) άρα το σήμα $x_6(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο ίση με $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

ΘΕΜΑ 6 ΕΞ2016Α

Δίνεται το σήμα $x(t) = sin(100t)$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και η ικανότητα δειγματοληψίας (με το κριτήριο Nyquist) των παρακάτω σημάτων. Επίσης για κάθε σήμα να υπολογίσετε –αν υπάρχουν- την περίοδο και την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας:

(α) $y(t) = [x(t)]^2$

(β) $z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]$

(γ) $w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]^2$

(δ) $r(t) = x(5.5 \cdot t) \cdot x(2.5 \cdot t)$

(α)

$$y(t) = [x(t)]^2 = sin^2(100t) = \frac{1-cos(200t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{cos\left(2\pi\frac{200}{2\pi}t\right)}{2}$$

Το σήμα έχει έναν συνημιτονικό όρο άρα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_y = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi} Hz$, με περίοδο $T_y = \frac{\pi}{100} sec$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,y} = \frac{200}{\pi} Hz$

(β)

$$z(t) = x(t) * \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right] = sin(100t) * \frac{sin(100\pi t)}{100\pi t} = sin(100t) * sinc(100t) =$$

$$=sin\left(2\pi \frac{100}{2\pi} t\right) * sinc(100t)$$

Το φάσμα πλάτους είναι

$$Z(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right)\right] \cdot \frac{1}{100} rect\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το τελικό σήμα περιλαμβάνει τους 2 παλμούς δ στις συχνότητες $\pm\frac{100}{2\pi}Hz = \pm\frac{50}{\pi}Hz$ (εφόσον στην ανωτέρω πράξη ο τετραγωνικός παλμός δρα ως βαθυπερατό φίλτρο με μεγαλύτερη συχνότητα αποκοπής, ίση με 50 Hz.

Άρα το σήμα είναι περιοδικό με συχνότητα $f_z = \frac{50}{\pi}Hz$,

με περίοδο $T_z = \frac{\pi}{50}sec$ και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,z} = \frac{100}{\pi}Hz$

$$(\gamma)\ w(t) = x(t) + \left[\frac{x(\pi t)}{100\pi t}\right]^2 = sin(100t) + \left[\frac{sin(100\pi t)}{100\pi t}\right]^2 = sin(100t) + sinc^2(100t) =$$

$$= sin\left(2\pi\frac{100}{2\pi}t\right) + sinc^2(100t)$$

Το σήμα έχει φάσμα πλάτους :

$$W(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{100}{2\pi}\right) - \delta\left(f + \frac{100}{2\pi}\right)\right] + \frac{1}{100}tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές, άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι 100Hz, άρα η ελάχιστη συχνότητα Nyquist είναι $f_{s,w} = 200Hz$.

(δ) $r(t) = x(5.5t) \cdot x(2.5t) = sin(550t) \cdot sin(250t) = \frac{1}{2}[cos(550t - 250t) - cos(550t + 250t)] =$
$= \frac{1}{2}[cos(300t) - cos(800t)]$
Οι περίοδοι των 2 συνημιτονικών όρων είναι οι εξής:
$T_1 = \frac{2\pi}{300} sec$
$T_2 = \frac{2\pi}{800} sec$
και ο λόγος τους είναι
$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{300}}{\frac{2\pi}{800}} = \frac{8}{3}$, ρητός , οπότε το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_r = 3T_1 = 8T_2 = \frac{\pi}{50} sec$
, έχει συχνότητα $f_r = \frac{50}{\pi} Hz$,
και ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,r} = 2\frac{400}{\pi} Hz = \frac{800}{\pi} Hz$

ΘΕΜΑ 4 ΓΕ1/1314

Στόχος της άσκησης *Η εξοικείωση με τη διερεύνηση της περιοδικότητας σημάτωντόσο στο πεδίο του χρόνου όσο στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως επίσης και η εφαρμοφή του κριτηρίου Nyquist για την εύρεση της ελάχιστης συχνότητας δειγματοληψίας.*

Σχετικές ασκήσεις: *Άσκηση 1 (σελ.1), Άσκηση 5 (σελ.8) - Επεξεργασία Σημάτων και Φάσμα και Άσκηση 4 (σελ.27)-Διαμόρφωση από το plh22_oss1-final.pdf*

Δίνονται τα σήματα $x_1(t)=\cos(10\pi t)$, $x_2(t)=\sin(t)$.

Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να υπολογιστούν οι αντίστοιχες περίοδοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(α) $y_1(t)=x_1(t)-x_2(t)$

(β) $y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(\pi t)$

Δίνονται τα σήματα $x_3(t)=\delta(t-100)+\delta(t+100)$, $x_4(t)=\dfrac{1}{200}\sin c\left(\dfrac{t}{200}\right)$

Να βρεθούν η περίοδος και η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Nyquist (αν υπάρχουν) των παρακάτω σημάτων:

(γ) $y_3(t)=x_3(t)+x_4(t)$

(δ) $y_4(t)=x_3(t)*x_4(t)$

(α)

$$y_1(t) = x_1(t) - x_2(t) = \cos(10\pi t) - \sin(t)$$

$\cos(10\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \dfrac{1}{5}\sec$

$\sin(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = 2\pi\sec$

Λόγος περιόδων $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{\frac{1}{5}}{2\pi} = \dfrac{1}{10\pi}$ άρρητος, άρα το $y_1(t)$ απεριοδικό

(β)

$$y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(\pi t) = \cos(10\pi t) \cdot \sin(\pi t) = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi t + 10\pi t) + \sin(\pi t - 10\pi t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(11\pi t) - \sin(9\pi t)\right]$$

$\sin(11\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_A = \frac{2}{11}\sec$

$\sin(9\pi t)$ περιοδικό με περίοδο $T_B = \frac{2}{9}\sec$

Λόγος περιόδων $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$ ρητος, άρα το $y_2(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_2 = 11T_A = 9T_B = 2\sec$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

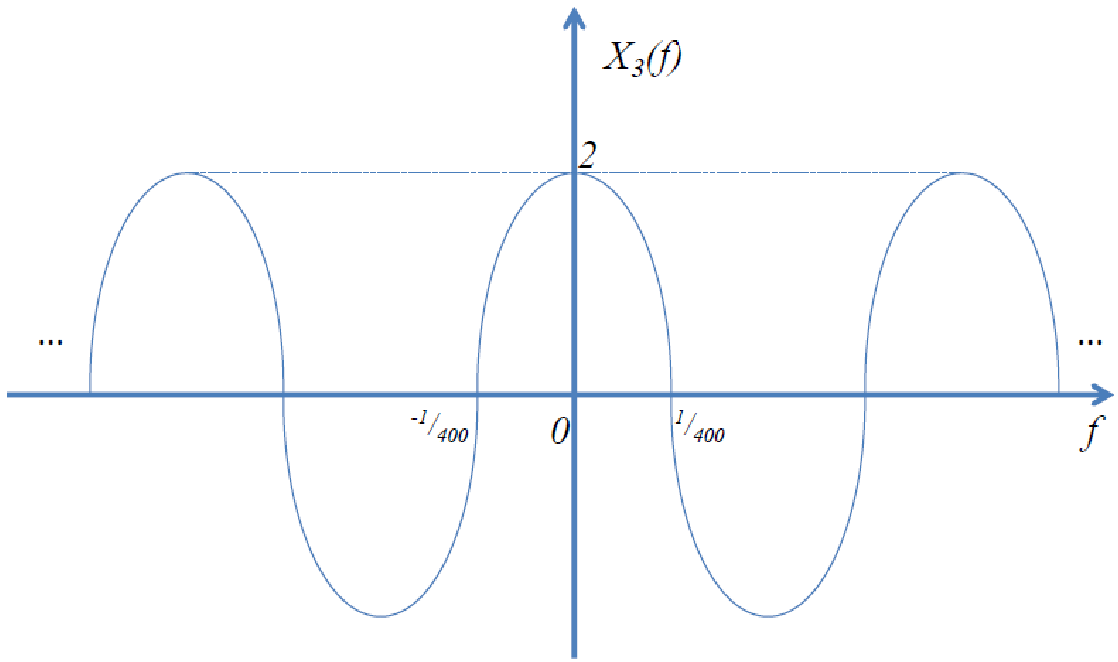
(γ)

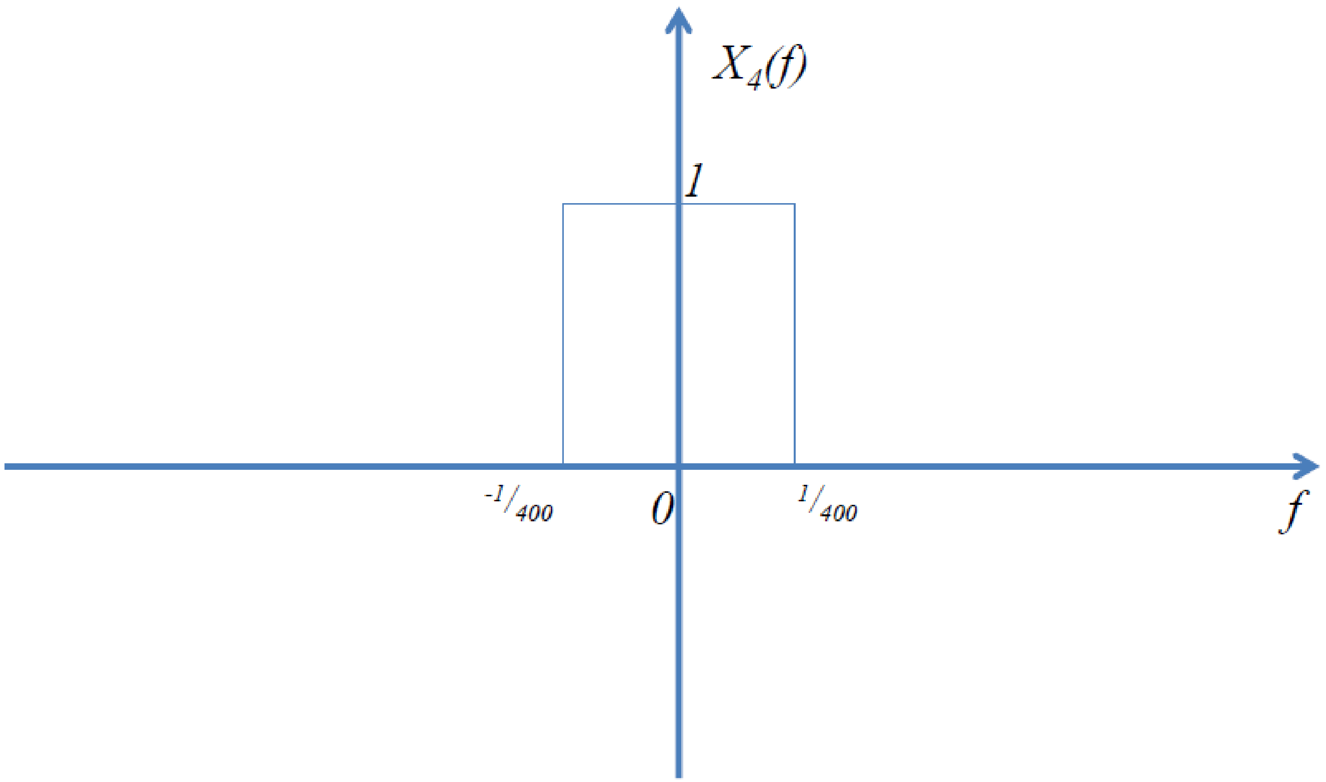
$$y_3(t) = x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_3(t) \xleftrightarrow{F} 2\cos(2\pi f 100) = X_3(f)$$

$$x_4(t) \xleftrightarrow{F} rect\left(\frac{f}{1/200}\right) = X_4(f)$$

Τα φάσματα πλάτους των ανωτέρω σημάτων απεικονίζονται παρακάτω

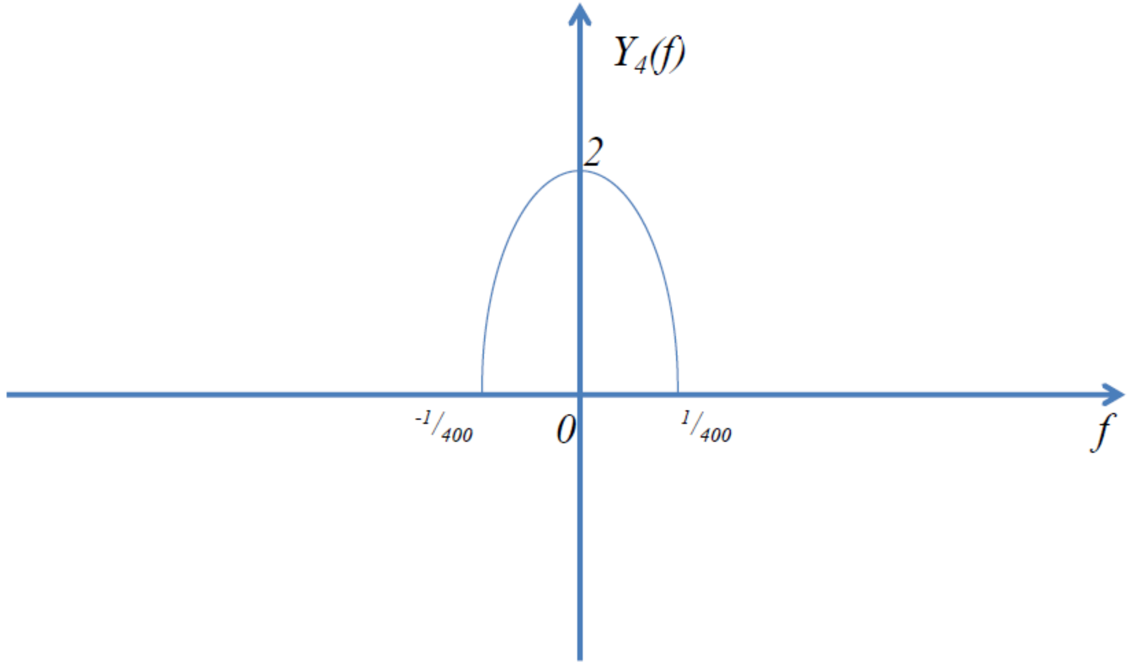




Το φάσμα $Y_3(f) = X_3(f) + X_4(f)$ είναι συνεχές συνεπώς το σήμα $y_3(t)$ δεν είναι περιοδικό.

(δ) $y_4(t) = x_3(t) * x_4(t) \xleftrightarrow{F} X_3(f) \cdot X_4(f) = 2\cos(2\pi f 100) \cdot rect\left(\dfrac{f}{1/200}\right)$

Το φάσμα $Y_4(f)$ απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα:



Το φάσμα είναι συνεχές, συνεπώς το σήμα $y_4(t)$ δεν είναι περιοδικό.

ΘΕΜΑ 1 2018Β

Δίνεται το σήμα $x(t) = cos(2\pi 200t)$

Να διερευνήσετε την περιοδικότητα για τα ακόλουθα σήματα:

(α) $a(t) = \left[x(t\sqrt{2})\right]^2$

(β) $b(t) = x(t) + sinc(400t)$

(γ) $c(t) = [x(4t) + sinc^2(100t)] * [\delta(t) - 300sinc(300t)]$ (όπου το '*' υποδηλώνει τη συνέλιξη).

(δ) $e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot sinc(400t)$

(α) $a(t) = x^2\left(t\sqrt{2}\right) = \dfrac{1+\cos(2\pi 400\sqrt{2}\cdot t)}{2}$ με τη βοήθεια της ιδιότητας $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(\theta)}{2}$)

Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \dfrac{1}{400\sqrt{2}}\sec = \dfrac{\sqrt{2}}{800}\sec$

Συχνότητα $f = 400\sqrt{2}Hz$

(β)

$$b(t)=x(t)+\sin c(400t)=\cos(2\pi 200t)+\sin c(400t)\xleftrightarrow{F}c(t)=\frac{1}{2}\{\delta(f-200)+\delta(f+200)\}+\frac{1}{400}rect\left(\frac{f}{400}\right)$$

Το φάσμα πλάτους είναι συνεχές άρα το σήμα μη περιοδικό

(γ)

$$c(t) = \left[x(4t) + \sin c^2(100t)\right] * \left[\delta(t) - 300\sin c(300t)\right] =$$

$$= \left[\cos(2\pi 800t) + \sin c^2(100t)\right] * \left[\delta(t) - 300\sin c(300t)\right] \xleftrightarrow{F}$$

$$\xleftrightarrow{F} \left\{\frac{1}{2}\left\{\delta(f-800) + \delta(f+800)\right\} + \frac{1}{100} tri\left(\frac{f}{100}\right)\right\} \cdot \left\{1 - rect\left(\frac{f}{300}\right)\right\}$$

Εδώ έχουμε υψιπερατό φίλτρο που αφήνει να περάσουν οι παλμοί δ στα +/- 800Hz

Σήμα Περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \frac{1}{800}\sec$

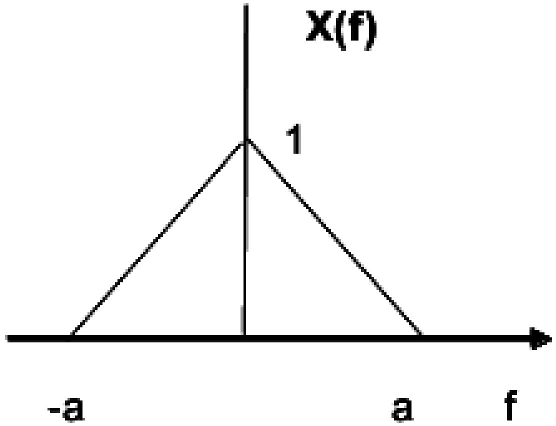
(δ)

$$e(t) = 1 + x(t) \cdot t \cdot \sin c(400t) = 1 + \cos(2\pi 200t) \cdot t \cdot \frac{\sin(400\pi t)}{400\pi t} = 1 + \frac{1}{800\pi} \sin\left(2\pi 400t\right)$$ (με βάση την ιδιότητα sin(2θ)=2sin(θ)cos(θ))

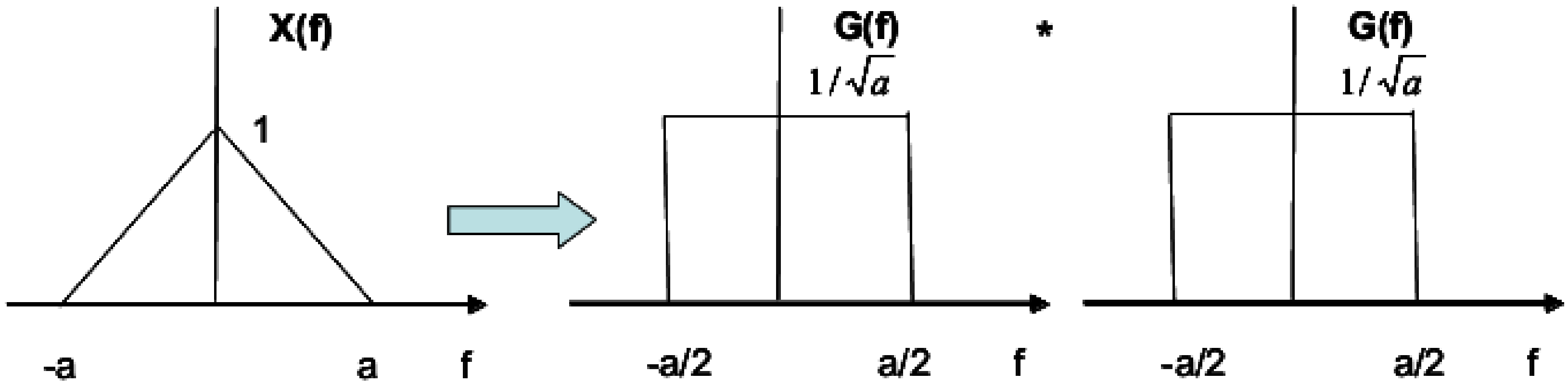
Σήμα Περιοδικό με περίοδο $T = \dfrac{1}{400}\,\text{sec}$

Θέμα 5 ΓΕ1/0405

(β) Να βρεθεί το σήμα x(t) στο πεδίο του χρόνου λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) [X(f)] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι το σήμα x(t) προκύπτει από τη συνέλιξη ενός τετραγωνικού παλμού με τον εαυτό του).



(β) Ο μετασχηματισμός Fourier X(f) προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος G(f) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα



Η συνάρτηση g(t) με βάση την Άσκηση Αξιολόγησης 2.4 του βιβλίου είναι η ακόλουθη:

$$g(t) = \sqrt{a}\,\sin c(at)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης ισχύει

$$x(t) = g(t)g(t) = a \cdot \sin c^2(at)$$