ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ-41

5η Τηλεδιάσκεψη

06.04.2023

Ν.Δημητρίου

Αναλυτική Επίλυση παραδείγματος (διαφάνεια 153)

Παραδείγματα Καναλιών (9)

- Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα x_i, $i=1, 2,$ με πιθανότητα εμφάνισης του x_1, $p(x_1)=a$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα y_j, $j=1, 2, 3,$ όπου οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}=p(y_j/x_i)=p(x_i/y_j)= q_{ji}$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

- ***(i)*** Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου, *H(Y)*.
- ***(ii)*** Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα *H(Y/X)*.
- ***(iii)*** Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

Παραδείγματα Καναλιών (10)

- **i)** Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες λήψης των κωδικών συμβόλων y_j, $j=1, 2, 3$. Είναι
- $p(y_1)= p(y_1,x_1)+ p(y_1,x_2)=p(x_1)\ p(y_1/x_1)+ p(x_2)\ p(y_1/x_2)=a(1/2)+(1-a)(1/2)=1/2.$
- Κατά ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε
- $p(y_2)= p(y_2,x_1)+ p(y_2,x_2)=p(x_1)\ p(y_2/x_1)+ p(x_2)\ p(y_2/x_2)=(1+α)/4$ και
- $p(y_3)= p(y_3,x_1)+ p(y_3,x_2)=p(x_1)\ p(y_3/x_1)+ p(x_2)\ p(y_3/x_2)=(1-α)/4.$
- Από τις πιθανότητες αυτές, των οποίων το άθροισμα είναι 1, υπολογίζουμε τη μέση πληροφορία της εξόδου του καναλιού.
- $H(Y)=-p(y_1)log\ p(y_1)-p(y_2)logp(y_2)-p(y_3)log\ p(y_3)=$
- $=-(1/2)log(1/2)-((1+a)/4)log((1+a)/4)\ -((1-a)/4)log((1-a)/4)$
- $=(1/2)-[((1+a)/4)(log(1+a)\ -2)]\ –[((1-a)/4)(log((1-a)-2)$, *αφού ισχύει* $log(x/y)=logx-logy.$
- **=**(3/2)-(1/4)(1+a)log(1+a)-(1/4)(1-a)log(1-a).

Παραδείγματα Καναλιών (11)

- **ii)** Πρώτα υπολογίζουμε τις συνδυασμένες πιθανότητες των συμβόλων εισόδου και εξόδου του καναλιού (δείτε και το ερώτημα 1).
- Είναι $p(x_1,y_1)= p(y_1,x_1)= p(x_1)\ p(y_1/x_1)=\alpha(1/2)$,
- $p(x_1,y_2)= p(y_2,x_1)= p(x_1)\ p(y_2/x_1)=\alpha(1/2)$,
- $p(x_1,y_3)= p(y_3,x_1)= p(x_1)\ p(y_3/x_1)=0$,
- $p(x_2,y_1)= p(y_1,x_2)= p(x_2)\ p(y_1/x_2)=(1-a)(1/2)$,
- $p(x_2,y_2)= p(y_2,x_2)= p(x_2)\ p(y_2/x_2)=(1-a)(1/4)$,
- $p(x_2,y_3)= p(y_3,x_2)= p(x_2)\ p(y_3/x_2)=(1-a)(1/4)$.
- Τώρα υπολογίζουμε την αβεβαιότητα του καναλιού
- $H(Y/X)=- p(x_1,y_1)\log p(y_1/x_1) - p(x_1,y_2\log p(y_2/x_1) - p(x_1,y_3)\log p(y_3/x_1) - p(x_2,y_1) \log p(y_1/x_2) - p(x_2,y_2)\log p(y_2/x_2) - p(x_2,y_3)\log p(y_3/x_2)=$
- $=(a/2)+(a/2)+0+[(1/2)-(a/2)]+ [(1/2)-(a/2)]+ [(1/2)-(a/2)]=$
- $=(3/2)-(a/2)$.

Παραδείγματα Καναλιών (12)

- **iii)** Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή *α.*
- Είναι

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}[H(Y) - H(Y/X)]$$

$$= \max_{p(x)}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{4}(1+a)\log(1+a) - \frac{1}{4}(1-a)\log(1-a) - (\frac{3}{2} - \frac{a}{2})\right]$$

$$= \max_{p(x)}\left[\frac{a}{2} - \frac{1}{4}(1+a)\log(1+a) - \frac{1}{4}(1-a)\log(1-a)\right]$$

- Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του a που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο. Επομένως,

Παραδείγματα Καναλιών (13)

- Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του *a*, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού

$$\frac{dI(X;Y)}{da} = \left[\frac{a}{2} - \frac{1}{4}(1+a)\log(1+a) - \frac{1}{4}(1-a)\log(1-a)\right]'$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[(1+a)'\log(1+a) + (1+a)(\log(1+a))'\right]$$

$$- \frac{1}{4}\left[(1-a)'\log(1-a) + (1-a)(\log(1-a))'\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\log(1+a) + (1+a)\frac{1}{(1+a)}\log e\right] - \frac{1}{4}\left[(-1)\log(1-a) + (1-a)\frac{1}{(1-a)}(-1)\log e\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\log(1+a) + \log e\right] + \frac{1}{4}\left[\log(1-a) + \log e\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\log(1+a) - \log(1-a)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1+a}{1-a} = 0 \Rightarrow$$

$$\log\frac{1+a}{1-a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1+a}{1-a}\right) = 2^2 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

- ***C=0,162 bits***.
- *Παρατηρείστε επίσης ότι για α=0,5, $p(x_1)= p(x_2)=1/2$, ΔΕΝ επιτυγχάνεται η μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού. Απλά <u>η ποσότητα που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι</u> είναι η αμοιβαία πληροφορία **I(X,Y)=0,156 bits**, δηλαδή μεταδίδουμε κάτω από την χωρητικότητα του καναλιού.*

$$P(Y/X) = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ x_2 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$

$$C_{MAX} \leq \log_2(2) = 1$$

Διοτι

$$H_{max}(X) = \log 2 = 1 < H_{max}(Y) = \log 3$$

Χωρητικότητα

$$C = \max\left[I(X;Y) \right] = \max\left[H(Y) - H(Y/X) \right]$$

Μη συμμετρικό κανάλι Υποθέτουμε $P(x_1) = a$

$P(x_2) = 1 - a$

Υπολογισμός $H(Y) = -\sum_j P(y_j)\log(P(y_j))$

$$P(y_1) = \frac{1}{2}P(x_1) + \frac{1}{2}P(x_2) = \frac{1}{2}\left(P(x_1) + P(x_2)\right) = 1/2$$

$$P(y_2) = \frac{1}{2}P(x_1) + \frac{1}{4}P(x_2) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(1-a) = \frac{a}{2} + \frac{1-a}{4} = \frac{1+a}{4}$$

$$P(y_3) = \frac{1}{4}P(x_2) = \frac{1-a}{4}$$

$$H(Y) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1+a}{4}\right)\log\left(\frac{1+a}{4}\right) - \left(\frac{1-a}{4}\right)\log\left(\frac{1-a}{4}\right)$$

$$H(Y/X) = \sum_i p(x_i)\, H(Y/X_i) = p(X_1)\, H(Y/X_1) + p(X_2)\, H(Y/X_2) =$$

$$= a \cdot \left[-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)\right] + (1-a)\left[-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - 2\cdot\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \alpha\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] + (1-a)\left[\frac{1}{2} + 1\right] = a + (1-a)\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{a}{2}$$

$$I(X;Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1+a}{4}\right)\log\left(\frac{1+a}{4}\right) - \left(\frac{1-a}{4}\right)\log\left(\frac{1-a}{4}\right) - \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2} =$$

$$= -1 + \frac{a}{2} - \left(\frac{1+a}{4}\right)\log\left(\frac{1+a}{4}\right) - \frac{1-a}{4}\log\left(\frac{1-a}{4}\right)$$

Θα υπολογίσουμε το $\frac{dI(X;Y)}{da}$ και θα το θέσουμε ίσο με μηδέν

Βασική σχέση $$\frac{d[\log_\alpha(f(x))]}{dx} = \frac{1}{f(x)} \log_\alpha(e) \frac{df(x)}{dx}$$

$\rightarrow e = 2.7183 \ldots$ νεπέρειος αριθμός

$$\frac{dI(X;Y)}{da} = \Big[-1 + \frac{a}{2} - \underbrace{\left(\frac{1+a}{4}\right)}_{f(a)} \underbrace{\log\left(\frac{1+a}{4}\right)}_{g(a)} - \left(\frac{1-a}{4}\right)\log\left(\frac{1-a}{4}\right)\Big]'$$

$$[f(a)g(a)]' = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1+a}{4}\right)'\log\left(\frac{1+a}{4}\right) - \left(\frac{1+a}{4}\right)\frac{1}{\left(\frac{1+a}{4}\right)}\log(e)\left(\frac{1+a}{4}\right)' -$$

$$-\left(\frac{1-a}{4}\right)'\log\left(\frac{1-a}{4}\right) - \left(\frac{1-a}{4}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{1-a}{4}\right)}\log(e)\left(\frac{1-a}{4}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{0+1}{4}\right)\cdot\log\left(\frac{1+a}{4}\right) - \log(e)\cdot\left(\frac{0+1}{4}\right) - \left(\frac{0-1}{4}\right)\log\left(\frac{1-a}{4}\right) - \log(e)\left(\frac{0-1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+a}{4}\right) - \frac{\log(e)}{4} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1-a}{4}\right) + \frac{\log(e)}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\log\left(\frac{1+a}{4}\right) - \log\left(\frac{1-a}{4}\right)\right] = 0 \iff$$

$\log(A) - \log(B) = \log(A/B)$

$$\iff -\frac{1}{4}\left[\log\left(\frac{\frac{1+a}{4}}{\frac{1-a}{4}}\right)\right] = -\frac{1}{2} \iff \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right) = 2 \iff$$

$\log_\alpha x = y \iff$

$\iff x = \alpha^y$

$$\iff \frac{1+a}{1-a} = 2^2 = 4 \iff 1+a = 4-4a \iff 5a = 3 \iff a = 3/5$$

$$\frac{d^2 I(X;Y)}{d\,a^2} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+a}{4}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1-a}{4}\right)\right]'$$

$$= 0 - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{1+a}{4}\right)}\log(e)\left(\frac{1+a}{4}\right)' + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{1-a}{4}}\log(e)\left(\frac{1-a}{4}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{4}{1+\alpha}\log(e)\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{4}{1-a}\log(e)\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{-4\log(e)}{1+a} - \frac{4\log(e)}{1-a} = -4\log(e)\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}\right) =$$

$$= -4\log(e)\left[\frac{1+\alpha+1-a}{(1-a)(1+a)}\right] = -4\log(e)\left(\frac{2}{1-a^2}\right)$$

Αν $\alpha = 3/5 \rightarrow \frac{d^2 I}{da^2} = -4\log(e)\left(\frac{2}{1-\frac{9}{25}}\right) = -4\log(e)\,\frac{2}{\frac{16}{25}} = \underbrace{\frac{-25}{2}\log(e)}_{\text{ΑΡΝΗΤΙΚΟ}}$

άρα $I(3/5)$ μέγιστο

$$C = I(3/5) = -1 + \frac{3/5}{2} = \left(\frac{1+3/5}{4}\right)\log\left(\frac{1+3/5}{4}\right) -$$

$$-\left(\frac{1-3/5}{4}\right)\log\left(\frac{1-3/5}{4}\right) = 0{,}161$$

Επαλήθευση στο Octave

κώδικας

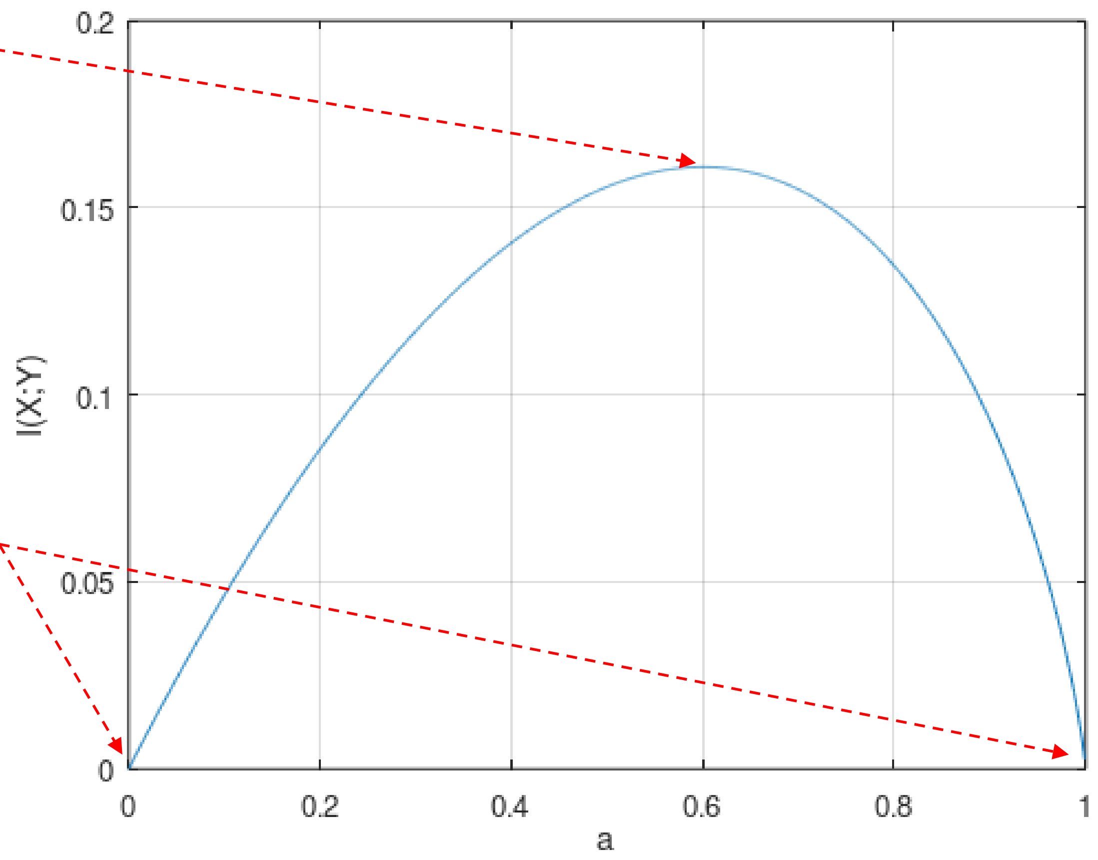
Διάνυσμα τιμών πιθανότητας a (δεν συμπεριλαμβάνει την τιμή 1 διότι το αποτέλεσμα της I(X;Y) στο octave απειρίζεται (λάθος, διότι η ποσότητα πληροφορίας μηδενικής πιθανότητας στον τύπο θεωρείται 0)

```
a=0:0.01:0.999;
I=(1./2)+(a./2)-((1+a)./4).*log2((1+a)./4)-((1-a)./4).*log2((1-a)./4)-(3./2);
plot(a,I)
grid
hold
[xx x]=max(I)
a(60)
ylabel('I(X;Y)')
xlabel('a')
```

Διάνυσμα τιμών αμοιβαίας πληροφορίας I(X;Y) (τύπος διαφάνειας 8)

μέγιστο

ελάχιστα



εκτέλεση

```
>> a=0:0.001:0.999;
>> I=(1./2)+(a./2)-((1+a)./4).*log2((1+a)./4)-((1-a)./4).*log2((1-a)./4)-(3./2);
>> plot(a,I)
>> grid
>> hold
>> ylabel('I(X;Y)')
>> xlabel('a')
>> [xx x]=max(I)
xx = 0.1610
x = 601
>> I(601)
ans = 0.1610
>> a(601)
ans = 0.6000
```

Εύρεση μεγίστου (αντιστοιχεί στο 601ο στοιχείο του διανύσματος a)

```
>> a(501)
ans = 0.5000
>> I(501)
ans = 0.1556
```

Εύρεση αμοιβαίας πληροφορίας για a=0.5 (αντιστοιχεί στο 501ο στοιχείο του διανύσματος a)