ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.41

5^{η} ΟΣΣ

23.04.2023

Συμπληρωματικές Διαφάνειες
στους Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

Νίκος Δημητρίου

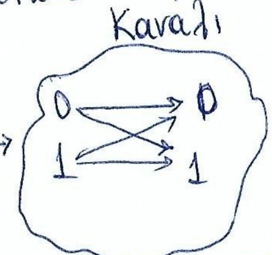
Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

- Οι διαφάνειες αυτές είναι συμπληρωματικές της παρουσίασης που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr και περιέχουν παραπομπές σε συγκεκριμένα τμήματά της.
- Σκοπός είναι μέσω απλών παραδειγμάτων να γίνουν κατανοητές οι βασικές αρχές κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης, καθώς και να αναδειχθεί η μεθοδολογία που ακολουθείται σε αντίστοιχες ασκήσεις.

Κωδικοποίηση: Γραμμικοί κώδικες

Μήνυμα   Πλεονασμός(parity)

$$\underbrace{[d_1\, d_2 \cdots d_k][p_1 p_2 \cdots p_{n-k}]}_{\text{Κωδικολέξη } n \text{ bits}}$$ (στοιχείο κώδικα) ⟶



⟶ ληφθείσα λέξη

$\oplus$ $\underbrace{[0\,0\,1\,0\,0\,1 \ldots 0]}_{\text{πρότυπο σφάλματος}}$

χρήση πλεονασμού για ανίχνευση ή διόρθωση σφαλμάτων

Ρυθμός πληροφορίας $r = \frac{k}{n}$

Γραμμικός κώδικας $\mathbb{C}$: {σύνολο κωδικολέξεων}

Βλ. αρχείο
PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2022_2023
Διαφάνειες 14-35

Μήκος Κώδικα: n
Διάσταση κώδικα: k

ιδιότητες

1) $\forall\, x,y \in \mathbb{C}$, $x+y \in \mathbb{C}$

2) $\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ bits}} \in \mathbb{C}$

3) $p_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i$ Κάθε ψηφίο ισοτιμίας είναι γραμμικός συνδυασμός των ψηφίων μηνύματος ($\alpha_i = 0$ ή 1)

: βάρος κωδικολέξης: Πλήθος των '1' που έχει η κωδικολέξη π.χ wt(1011) "3"

απόσταση γραμμικού κώδικα: ελάχιστη απόσταση μεταξύ 2 κωδικολέξεων

⟶ ελάχιστο μη μηδενικό βάρος κωδικολέξης

Κωδικοποίηση / Πλεονασμός

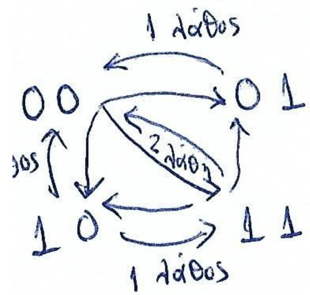
Μήνυμα

d_1	d_2	$p_1=d_1+d_2$	$p_2=d_1$	$p_3=d_2$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

$2^k = 2^2$ κωδικολέξεις

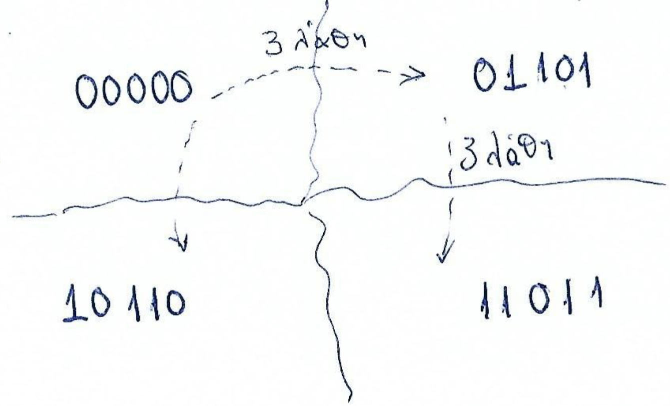
Κώδικας $(5,2)$

Απόσταση κώδικα: ελάχιστο βάρος $d=3$ (από 2η κωδικολέξη 01101 ή την 3η -"- 10110)



Κωδικοποίηση

Δημιουργία "απόστασης ασφαλείας" μεταξύ διαφορετικών μηνυμάτων



Ικανότητες διόρθωσης/ανίχνευσης σφαλμάτων

Κώδικας $\mathcal{C}$ απόστασης d

$\Rightarrow$ Ανιχνεύει όλα τα σφάλματα ε με $wt(\varepsilon) < d-1$

$\Rightarrow$ Δεν ανιχνεύει ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με $wt(\varepsilon) = d$

$\Rightarrow$ Διορθώνει όλα τα σφάλματα ε με

$$wt(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$ ← ακέραιο μέρος

$\Rightarrow$ Δεν διορθώνει ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με

$$wt(\varepsilon) = 1 + \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

Κώδικας $\{00000, 01101, 10110, 11011\} = C$

Απόσταση $d=3$. Διορθώνει όλα τα $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor = 1$ bit λάθη

π. χ.

Αποστολή $01|101 \longrightarrow$ λήψη 00101

? έλεγχος σφαλμάτων

Σύγκριση ληφθείσας λέξης με όλες τις κωδικές λέξεις

00101 →	00000	απόσταση	2
	01101	— " —	1
	10110	— " —	3
	11011	— " —	4

$\xrightarrow{\text{ελάχιστη}}$ απόσταση άρα σωστή λέξη 01101 (σφάλμα στο 2ο bit)

Άρα μήνυμα '01'

Ισοδύναμη Μέθοδος

_Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2022_2023_
Διαφάνειες 52-57

Αθροίζουμε τη ληφθείσα λέξη 00101 με όλες τις λέξεις του κώδικα:

$$00101 + \{00000, 01101, 10110, 11011\} =$$

$$= \{00101, 01000, 10011, 11110\} \longrightarrow \text{συνομάδα } C + 00101$$

Ελάχιστο ~~βάρος~~ βάρος άρα επιλέγουμε την αντίστοιχη 2η κωδικολέξη 01101

συνομάδα $C + 00101$ = συνομάδα $C + 01000$

$$01000 + C = \{01000, 00101, 11110, 10011\}$$

Αν καταλήγαμε σε 2 υποψήφιες λέξεις με την ίδια απόσταση από η ληφθείσα:
- → Επιλέγουμε τυχαία μια από τις 2 (Πλήρης Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΠΑΜΠ)
- → Δεν επιλέγουμε και ζητείται επανεκπομπή (Ατελής Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΑΑΜΠ)

Πλήθος συνομάδων ενός γραμμικού κώδικα $C(n,k) = 2^{n-k}$

$C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

η 1 συνομάδα είναι η $C + 00000$ (ο ίδιος ο κώδικας)

οι υπόλοιπες $2^{5-2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ συνομάδες προκύπτουν

προσθέτοντας στον κώδικα τις λέξεις

00001, 00010, ..., 00111 (γιατί?)

Βάση Κώδικα: Εύρεση γεννήτορα πίνακα Διαστάσεων $k \times n$

Μορφή Περιορισμένης Κλιμακωτής Διάταξης Γραμμών (ΠΚΔΓ)

$$G_{k\times n} = \left[\, I_k \;\vdots\; M_{k,n-k} \,\right] \leftarrow$$ οι γραμμές αντιστοιχούν σε κωδικολέξεις

π.χ. $C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

Βλ. αρχείο
PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2022_2023
Διαφάνειες 36-51, 58-64

$k=2, \quad n=5$

$$\underbrace{G = \left[\, I_2 \;\vdots\; M_{2,3} \,\right]}_{5 \text{ στήλες}} \Big\}\ 2 \text{ γραμμές}$$

Επιλογή 2 στοιχείων του C για το 'χτίσιμο' του I_2 (2η, 3η κωδ/λέξη)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

άρα βάση του C: $\{10110, 01101\}$

Χρήση G:

μήνυμα × G = κωδικολέξη

π.χ. για το μήνυμα 11:

$$11 \times \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = 1 \cdot 10110 + 1 \cdot 01101 =$$

$$= 11 \vdots 011$$

Για την αποκωδικοποίηση:

Κατασκευή πίνακα ισοτιμίας H.

$$H = \begin{bmatrix} M_{k,n-k} \\ \hline I_{n-k} \end{bmatrix}$$

ιδιότητα: $G \cdot H = [0]_{k,n-k}$

Για τον κώδικα C με $G = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

M

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} I_3$$

$$G \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2022_2023 : Διαφάνειες 43-64

Αποκωδικοποίηση ληφθείσας λέξης C_0

- πολλαπλασιασμός $C_0 \cdot H$
- Αν $C_0 \cdot H = 0$, τότε C_0 ανήκει στον κώδικα.
- Αν $C_0 \cdot H \neq 0$, τότε το αποτέλεσμα συγκρίνεται με πίνακα ΤΔΑ.

8

Κατασκευή πίνακα Τοπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ)

Πρότυπα Σφάλματος ελαχίστου βάρους x_i	Σύνδρομο $x_i H$
10000	110
01000	101
00100	100
00010	010
00001	001
00011 ή 11000	011
10001 ή 01010	111

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

εαν υπολογιστεί ένα από αυτά τα σύνδρομα

- στην ΠΑΜΠ επιλέγεται τυχαία ένα από τα υποψήφια πρότυπα σφάλματος
- στην ΑΑΜΠ ζητείται επανεκπομπή άρα στα πρότυπα σφάλματος βάζουμε

/-/

π.χ. λήψη 1 0000

$10000 \times H = 110$

από πίνακα ΤΔΑ πρότυπο σφάλματος → 10000

άρα σωστή λέξη $10000 + 10000 = \underbrace{00}_{\text{μήνυμα}}000$

λήψη 1 1 1 1 1

$$11111 \times H = 11111 \cdot \begin{bmatrix} 110 \\ 101 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} = 100 \longrightarrow \text{πρότυπο σφάλματος } 00100$$

άρα σωστή λέξη: $11111 + 00100 = \underbrace{11}_{\text{μήνυμα}}011$

10

Εύρεση Απόστασης Κώδικα.

- $d-1 \le n-k$ (όριο Singleton)
- Αν έχουμε όλες τις λέξεις του κώδικα: ελάχιστο βάρος μη μηδενικό
-

$$\mathcal{C} = \{\underset{0}{00000},\ \underbrace{\underset{3}{01101},\ \underset{3}{10110}}_{d=3},\ \underset{4}{11011}\}$$

- Από τους G, H:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ελάχιστος αριθμός γραμμών που αθροιζόμενες δίνουν '000' (ελάχιστες γραμμικά εξαρτημένες γραμμές)

2 ίσες γραμμές ? όχι

3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές ? ΝΑΙ

π.χ. η 1η, 3η, 4η αθροιζόμενες δίνουν '000'

Δυικός Κώδικας ενός κώδικα $\mathbb{C}:(n,k)$

Συμβολίζεται με $\mathbb{C}^{\perp}(n, n-k)$

Ιδιότητα: Για κάθε στοιχείο α_i του $\mathbb{C}$ και b_j στοιχείο του $\mathbb{C}^{\perp}$

ισχύει $\alpha_i \cdot b_j = 0$

οι στήλες του πίνακα H για τον $\mathbb{C}$ δίνουν μια βάση

για τον $\mathbb{C}^{\perp}$

$\mathbb{C}_{(5,2)} = \{00000,\ 01101,\ 10110,\ 11011\}$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

άρα μια βάση $\mathbb{C}^{\perp} = \{11100, 10010, 01001\}$

Ιδιότητα ορθογωνιότητας $\mathbb{C}, \mathbb{C}^{\perp}$

π.χ $(01101) \times (10010) = 0\cdot1 + 1\cdot0 + 1\cdot0 + 0\cdot1 + 1\cdot0$
$= 0$

$11011 \times 11100 = 1\times1 + 1\times1 + 0\times1 + 1\times0 + 1\times0 =$
$= 1+1+0+0+0 = 0$

Κατασκευή γεννήτορα πίνακα $C^{\perp}$ από τα στοιχεία της βάσης που υπολογίστηκαν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 1}_{} & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν έχει μορφή I_3

ακολουθούν γραμμοπράξεις

- πρόσθεση γραμμών
- εναλλαγή γραμμών

μορφή ΠΚΔΓ

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

+ +

άρα μια άλλη βάση $C^{\perp} = \{10010, 01001, 00111\}$

$$H_{C^{\perp}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απόσταση ?

d-1≤n-k

ο $H_{C^{\perp}}$ έχει 2 ίσες γραμμές (1η, 4η ή 2η, 5η)

άρα $d = 2$

Αντιπαράδειγμα υπολογισμού απόστασης κώδικα από το ελάχιστο βάρος του γεννήτορα πίνακα

ΘΕΜΑ 6 ΓΕ5/0304

Δίνεται ένα σύνολο S={1100011, 1010000, 1001011, 0100101, 0001101} και ο κώδικας C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμά του, δηλαδή C=<S>.

1. Ζητείται ένας γεννήτορας πίνακας του C.
2. Ζητούνται οι παράμετροι (n, k, d) του κώδικα C, δηλαδή το μήκος των κωδικών λέξεων, η διάσταση του κώδικα και η απόστασή του.
3. Ζητείται μια βάση του $C^{\perp}$.
4. Να κωδικοποιηθούν τα μηνύματα Α=«0011», Β=«1001», Γ=«1011» και Δ=«1111».
5. Να διακρίνετε τις κωδικές λέξεις '1101110' και '0011011,' στα ψηφία μηνύματος και τα αντίστοιχα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας.
6. Ζητείται το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, καθώς και ο προσδιορισμός της συνομάδας C+1111011.

$$\begin{vmatrix}1&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\\1&1&0&0&0&1&1\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας προκύπτει, από τον 1^{ο} στον 2^{ο} πίνακα ως εξής (όπου α η 1^{η} γραμμή του 1^{ου} πίνακα, β η 2^{η} γραμμή, γ η 3^{η} γραμμή, δ η 4^{η} και ε η 5^{η} γραμμή του 1^{ου} πίνακα): η 1^{η} γραμμή του 2^{ου} πινακα είναι (α+δ), η 2^{η} γραμμή είναι η (δ), η 3^{η} γραμμή είναι η (β+γ), η 4^{η}

γραμμή είναι η (ε) και η 5^{η} γραμμή είναι η (α). Η 1^{η} γραμμή του 3^{ου} πίνακα είναι η (α+δ), η 2^{η} είναι η (δ), η 3^{η} είναι η (β+γ)+(ε), η 4^{η} είναι η (ε) και η τελευταία είναι η (α+δ)+δ+α που είναι η 0000000. Επομένως, ο γεννήτορας πίνακας αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του 3^{ου} πίνακα.

$$G = \begin{vmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0&1\end{vmatrix}.$$

Σχόλιο: τα 3 ψηφία πλεονασμού υπολογίζονται από τα 4 ψηφία μηνύματος με τις εξής σχέσεις XOR: p1=d1+d2+d3+d4. p2=d1+d3, p3=d2+d4

2. (7, 4, 2)

3.

$$H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Επομένως, μια βάση του $C^{\perp}$ είναι το σύνολο $\{1111100, 1010010, 0101101\}$.

Σχόλιο: Η απόσταση είναι 2 διότι ο Η έχει 2 όμοια στοιχεία (και το 110 και το 101 επαναλαμβάνονται) Όμως, ((βλ. προηγούμενη διαφάνεια) το ελάχιστο βάρος των γραμμών του G είναι 3.

Από το αντιπαράδειγμα αυτό φαίνεται ότι δεν είναι σωστός ο προσδιορισμός της απόστασης βάσει του ελάχιστου βάρους του G.

4.
Α.G=[0011].G=0011011,
Β.G=[1001].G=1001011,
Γ.G=[1011].G=1011101,
Δ.G=[1111].G=1111000.

5.

Η κωδική λέξη ‘1101110’ διακρίνεται στα πρώτα k=4 ψηφία πληροφορίας ‘1101’ και τα υπόλοιπα n-k=d=3 ψηφία ελέγχου ισοτιμίας ‘110’ και
Η κωδική λέξη ‘0011011’ στα ψηφία πληροφορίας ‘0011’ και στα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας ‘011’.

6. Οι συνομάδες είναι 8 (2^(7-4))
Πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε τον κώδικα C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμα του συνόλου S, δηλαδή C=<S>.
C={0000000, $\boxed{1000110}$, $\boxed{0100101}$, 1100011, $\boxed{0010110}$, 1010000, 0110011, 1110101, $\boxed{0001101}$, 1001011, 0101000, 1101110, 0011011, 1011101, 0111110, 1111000}.

Προσθέτοντας (xor) σε κάθε κωδική λέξη τη λέξη ‘1111011’ λαμβάνουμε τη ζητούμενη συνομάδα.
C+1111011={1111011, 0111101, 1011110, 0011000, 1101101, 0101011, 1001000, 0001110, 1110110, 0110000, 1010011, 0010101, 1100000, 0100110, 1000101, 0000011}

Σχόλιο: Εάν γνωρίζαμε τον κώδικα (υπολογίζεται στο (6)) θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τον ίδιο γεννήτορα με το 2ο, 3^{o}, 5^{o} και 9^{o} στοιχείο. Ο γεννήτορας σε τυπική μορφή είναι μοναδικός και δεν έχει σημασία ο τρόπος προσδιορισμού του.

ΘΕΜΑ 3	ΓΕ4/1718

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων ελέγχου σφάλματος.
Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ4/1617/Θ4,5, ΓΕ4/1516/Θ6

(α) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={ $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$} κάθε κωδική λέξη του οποίου προκύπτει από το προς κωδικοποίηση μήνυμα m={m1, m2, m3} σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$c_1 = m_1$$
$$c_2 = m_2$$
$$c_3 = m_3$$
$$c_4 = m_1 + m_2$$
$$c_5 = m_2 + m_3$$
$$c_6 = m_1 + m_3$$

Ζητούνται τα εξής:
i). Το πλήθος των κωδικών λέξεων του συγκεκριμένου κώδικα και ο ρυθμός πληροφορίας του.
ii). Ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H του κώδικα
iii) Να υπολογιστεί η απόσταση του κώδικα και να υπολογιστεί το πλήθος των σφαλμάτων που μπορεί να διορθώσει.
iv) Να υπολογιστεί η ΤΔΑ του κώδικα και να αποκωδικοποιηθεί η ληφθείσα λέξη r=[110000]

(β) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={000000, 001110, 010111, 011001, 100101, 101011, 110010, 111100}
Ζητούνται τα εξής:
i). Να υπολογιστεί το πλήθος ψηφίων μηνύματος του συγκεκριμένου κώδικα και το πλήθος των συνομάδων του.
ii). Να υπολογιστούν ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H του κώδικα.
iii) Να υπολογιστεί η απόσταση του κώδικα καθώς και το πλήθος των σφαλμάτων που μπορεί να διορθώσει.
iv) Να βρεθεί η κωδικοποίηση του μηνύματος [110] με τον παραπάνω κώδικα και να αποκωδικοποιηθεί η ληφθείσα λέξη r=[110011] με τη μέθοδο των συνομάδων.

(α) i). Το πλήθος των κωδικών λέξεων εξαρτάται από το μήκος των αρχικών μηνυμάτων και όχι από το μήκος των κωδικοποιημένων μηνυμάτων, και δίνεται από τι σχέση 2^k, όπου $k=3$ το μήκος του μηνύματος πληροφορίας. Επομένως, το πλήθος των κωδικών λέξεων είναι 8.
Ο ρυθμός πληροφορίας κάθε κώδικα δίνεται από τη σχέση

$$R = \frac{k}{n}$$

Δεδομένου ότι $k=3$ και n=6 ο ρυθμός πληροφορίας είναι

$$R = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Ο **ρυθμός πληροφορίας** ενός κώδικα είναι το ποσοστό της κωδικής λέξης που μεταφέρει το μήνυμα. Ο ρυθμός πληροφορίας ενός δυαδικού κώδικα C μήκους n είναι ίσος με $(1/n)\log_2|C|$. Αφού $1 \le |C| \le 2^n$, ο ρυθμός πληροφορίας παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1, την τιμή 1 αν $|C| = 2^n$ δηλαδή κάθε λέξη n δυαδικών ψηφίων είναι κωδική λέξη και την τιμή 0 αν $|C| = 1$.

Τόμος Α, σελ.117

.

ii). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα γεννήτορα G και τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, θα πρέπει να σχηματίσουμε τον πίνακα M.
Παρατηρώντας τις μαθηματικές εκφράσεις, ο πίνακας γεννήτορας G διαστάσεων [3 x 6] θα είναι της μορφής [I M]

Ο πίνακας M είναι διαστάσεων [3 x 3] και ο μοναδιαίος I είναι [3 x 3]
Τα στοιχεία του M προκύπτουν εφαρμόζοντας τις δεδομένες σχέσεις XOR που δίνουν τα αντίστοιχα ψηφία c_4, c_5, c_6 συναρτήσει των m_1, m_2, m_3.
Επομένως

$$G = [I_k \quad M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & M \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως $\begin{bmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{I}_{n-k} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

iii).Με βάση το όριο του Singleton για την απόσταση του κώδικα ισχύει d-1≤n-k, άρα d≤4

Δεν υπάρχουν 2 κοινές (γραμμικά εξαρτημένες) γραμμές στον πίνακα ισοτιμίας άρα d>2

Μπορούμε να βρούμε 3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές στον Η π.χ. η 1η, η 4η, η 6η που αθροιζόμενες δίνουν αποτέλεσμα 000 άρα η απόσταση του κώδικα είναι d=3.

Ο κώδικας διορθώνει όλα τα σφάλματα $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ =1 bit.

(iv) Ο πίνακας ΤΔΑ για τον κώδικα καταστρώνεται ως εξής:

Οδηγός συνομάδας	**Σύνδρομο**
000000	000
100000	101
010000	110
001000	011
000100	100
000010	010
000001	001
010001 ή 100010	111*

* Στην ΠΑΜΠ διαλέγουμε τυχαία ένα από τα πιθανά πρότυπα σφάλματος.
Στην ΑΑΜΠ αγνοούνται τα πρότυπα σφάλματος και ζητείται επανεκπομπή

Αποκωδικοποίηση **r=[110000]:**
Έχουμε ότι

$$r \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Το σύνδρομο 011 αντιστοιχεί με βάση τον πίνακα ΤΔΑ στο πρότυπο σφάλματος 001000 οπότε η ληφθείσα λέξη διορθώνεται στην 110000+001000=111000

(β)

i) Εάν συμβολίσουμε με k το πλήθος των ψηφίων μηνύματος των κωδικών λέξεων, δηλ. το μήκος των αρχικών μηνυμάτων, τότε ο κώδικας θα περιέχει συνολικά 2^k κωδικές λέξεις, συνεπώς έχουμε $2^k=8$ οπότε $k=3$.
Επίσης αν επιπλέον συμβολίσουμε ως n το μέγεθος της κάθε κωδικής λέξης, το πλήθος των συνομάδων του κώδικα είναι ίσο με $2^{n-k}=8$.

ii). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα γεννήτορα G επιλέγουμε κατάλληλες λέξεις του κώδικα:
Επομένως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας M είναι διαστάσεων [3 x 3] και ο μοναδιαίος I είναι [3 x 3]

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως [M I]

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(**β**) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={000000, $\boxed{001110}$, $\boxed{010111}$, 011001, $\boxed{100101}$, 101011, 110010, 111100} iii). Με βάση το όριο του Singleton για την απόσταση του κώδικα ισχύει $d-1 \leq n-k$, άρα $d \leq 4$

Δεν υπάρχουν 2 κοινές (γραμμικά εξαρτημένες) γραμμές στον πίνακα ισοτιμίας άρα $d>2$

Μπορούμε να βρούμε 3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές στον H π.χ. η 1η, η 2η, η 5η που αθροιζόμενες δίνουν αποτέλεσμα 000 άρα η απόσταση του κώδικα είναι $d=3$.

Ο κώδικας διορθώνει όλα τα σφάλματα $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ =1 bit.

iv)
Η κωδικοποίηση του μηνύματος γίνεται ως εξής:

$$C = m \cdot G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αποκωδικοποίηση **r=[110011]:**
Προσθέτουμε τη ληφθείσα λέξη σε όλες τις λέξεις του κώδικα και σχηματίζουμε την αντίστοιχη συνομάδα:

C+**110011=110011**+{000000,
001110,010111,011001,100101,101011,110010,111100}=
={110011, 110001, 100100,101010,010110,011000,000001,001111}
Η λέξη ελαχίστου βάρους είναι η 000001 που αντιστοιχεί και στο ζητούμενο πρότυπο σφάλματος, οπότε η σωστή λέξη είναι
110011+000001=110010

ΕΞ2016Α

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γραμμικός κώδικας C με πίνακα ελέγχου ισοτιμίας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

α). Ο γεννήτορας πίνακας G.

β). i. Η διάσταση και η απόσταση του κώδικα, δηλαδή οι παράμετροι (7, k, d), καθώς και

ii. Το πλήθος των διαφορετικών συνομάδων του κώδικα.

γ). Να δείξτε ότι η λέξη $s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ δεν είναι κωδική λέξη του γραμμικού κώδικα C

δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

ε) Το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$, η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη $z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

α) Δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας H είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

β). i. Η διάσταση του πίνακα είναι k=4 και η απόστασή του μπορεί να *προσδιορισθεί με τη βοήθεια του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, υπολογίζοντας τον ελάχιστο αριθμό γραμμών του πίνακα των οποίων το άθροισμα είναι 0.*
Οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο αυτό στις γραμμές 1η ,4η ,6η παρατηρούμε ότι το άθροισμα είναι μηδέν επομένως η ταυτότητα του κώδικα είναι (7,4,3)
ii. Σύμφωνα με το βιβλίο «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 142, το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, διάστασης k=4 και μήκους n=7 ισούται με $2^{7-4} = 8$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη s στον κώδικα C θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.
Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.
Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$

$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζετε και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

Κώδικας Hamming:

_Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2022_2023 Διαφάνειες 80-86_

Χαρακτηριστικά:

→ Μήκος της μορφής $n = 2^r - 1 \quad r \geq 2$

→ Πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H με όλες τις μη μηδενικές λέξεις μήκους r

→ Διάσταση $k = n - r = 2^r - 1 - r$

→ Απόσταση $d = 3$

→ Ικανότητα διόρθωσης 1 σφάλματος $\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1\right)$

→ Στην ΤΔΑ ο πίνακας συνδρόμων περιλαμβάνει όλες τις γραμμές του H [όλες τις δυνατές λέξεις μήκους r]

· Όριο Hamming.

Αν έχουμε κώδικα C με πλήθος κωδικών λέξεων $|C|$ μήκος κωδικολέξης n και απόσταση $d=2t+1$ ή $d=2t+2$ τότε ισχύει ότι

$$|C|\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{t}\right]\leq 2^n$$

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Τέλειοι κώδικες

Αν $d=2t+1$ και ισχύει η ανωτέρω σχέση με το σύμβολο της ισότητας, ο κώδικας είναι <u>Τέλειος</u>

Παράδειγμα κώδικα Hamming

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

← όλες οι δυνατές μη μηδενικές λέξεις 3 bit

$n = 7$

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$k = 4$

d-1≤n-k (όριο Singleton)

$d = 3$ (ιδιότητα Hamming)

Πλήθος κωδικολέξεων

$$|C| = 2^k = 2^4$$

Υπολογισμός ορίου Hamming $\quad d = 2\cdot 1 + 1$

$t = 1$

$$|C| \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{t}\right] =$$

$$= 2^4 \cdot \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1}\right] = 2^4 \cdot \left[\frac{7!}{0!\,7!} + \frac{7!}{1!\cdot 6!}\right] =$$

$$= 2^4 \left[1 + 7\right] = 2^4 \cdot 8 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7 = 2^n.$$

∴ Άρα, <u>τέλειος κώδικας</u>

Πρόσθετα παραδείγματα

ΘΕΜΑ 2/ΓΕ5/2012-13

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με έννοιες και αλγόριθμους που εφαρμόζονται σε γραμμικούς κώδικες ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις: *Θ3/ΓΕ5/2011-12, Θ4/ΓΕ5/2010-11, Θ4/ΓΕ5/2009-10, Θ5/ΕΞ2009Α και Θ5/ΕΞ2010Β*

Δίνεται κώδικας Hamming μήκους 7 με πίνακα ισοτιμίας τον ακόλουθο:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Να προσδιοριστούν τα α_1, α_2, α_3,

(β). Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

(γ). Δείξτε ότι η λέξη

$s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

δεν είναι κωδική λέξη του κώδικα.

(δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

(ε).Να βρεθούν το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη

$$z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

α). Επειδή ο κώδικας είναι Hamming μήκους n=7, ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H πρέπει να απαρτίζεται από όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3 (βλ. τον ορισμό κώδικα Hamming, σελ. 151 βιβλίου, Ορισμός 4.6) αφού ισχύει

$$n = 2^r - 1 = 7$$

Επομένως η απόστασή του είναι d=3 και η διάστασή του είναι k=4.

Α! τρόπος.

Με απλή παρατήρηση των γραμμών του H βλέπουμε ότι οι παραμετρικές γραμμές αντιστοιχούν στις λέξεις 101 και 110 οπότε, λόγω και της θέσης των παραμέτρων α_1, α_2, α_3 στις παραμετρικές λέξεις θα έχουμε:

$\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$.

Τελικά ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β). Όπως γνωρίζω δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας H είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη **s** στον κώδικα, θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.

Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.

Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$
\begin{aligned}
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot H &= [0 \quad 0 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 1] \\
[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 1]
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

Παρατηρούμε ότι για κώδικες Hamming οι Τυπικές Διατάξεις Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ "συμπίπτουν"

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$
$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζεται και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

<u>ΘΕΜΑ 5</u> ΕΞ2012Β

Δίνονται οι συστηματικοί γραμμικοί κώδικες C1={00000, 10010, 01101, 11111} και C2={000000, 100101, 011010, 111111} και C3= {0000000, 1001011, 0110110, 1111101}. Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Ο ρυθμός πληροφορίας του κάθε κώδικα,
2. Μια βάση σε μορφή ΠΚΔΓ,
3. Τη διάσταση και την απόσταση καθενός από τους κώδικες C1, C2 και C3.
4. Ο αριθμός των σφαλμάτων που ανιχνεύει και διορθώνει καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.
5. Δείξτε από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν ανιχνεύει και από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν διορθώνει σωστά καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.

<u>Απάντηση</u>

1. Αφού όλοι οι κώδικες έχουν 4 κωδικές λέξεις, δηλαδή τα διαφορετικά μηνύματα είναι 4, αρκούν 2 bits για την παράστασή τους. Επομένως, ο ρυθμός πληροφορίας για τον κώδικα C1 είναι 2/5, για τον κώδικα C2 είναι 2/6 και για τον κώδικα C3 είναι 2/7.
2. Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε τις βάσεις των δεδομένων κωδίκων: για τον C1 η βάση είναι {10010, 01101}, για τον C2 {100101, 011010} και για τον C3 {1001011, 0110110}
3. Η διάσταση όλων των κωδίκων είναι 2 και οι αποστάσεις τους 2, 3 και 4, αντίστοιχα διότι είναι οι λέξεις με το ελάχιστο βάρος.
4. Ο κώδικας C1 ανιχνεύει 1 και δεν διορθώνει κανένα σφάλμα, ο κώδικας C2 ανιχνεύει 2 και διορθώνει 1 και C3 ανιχνεύει 3 και διορθώνει 1 σφάλματα.
5. Ο κώδικας C1 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘10010’ γιατί το βάρος του συμπίπτει με την απόσταση και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘10000’ γιατί το βάρος του είναι μικρότερο της απόστασης d-1/2. Ομοίως, ο κώδικας C2 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘100101’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘100001’, και ο C3 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘1001011’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘1000001’.

ΘΕΜΑ 4

ΓΕ5/1314

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις*: Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3-4/ΓΕ5/2008-09, Θ3/ΓΕ5/2010-11, Θ*

Θεωρείστε κωδικοποιητή γραμμικού κώδικα *μπλοκ* ελέγχου ισοτιμίας, C_1, τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ με επταψήφιες κωδικές λέξεις $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, οι οποίες ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

a) $x_1=u_1$, b) $x_2=u_2$, c) $x_3=u_3$, d) $x_4=u_4$,

e) $x_5=u_1\oplus u_2\oplus u_4$, f) $x_6=u_1\oplus u_2\oplus u_3$ και g) $x_7=u_2\oplus u_3\oplus u_4$.

Ο κωδικοποιητής χρησιμοποιείται για κωδικοποίηση και μετάδοση δυαδικής πληροφορίας.

Ζητείται:

(α) Να ελέγξετε κατά πόσο ότι ο γραμμικός κώδικας ελέγχου ισοτιμίας είναι συστηματικός.

(β) Να βρείτε τον Γεννήτορα και έναν Πίνακα Ελέγχου Ισοτιμίας του κώδικα.

(γ) Να χαρακτηρίσετε τη δυνατότητα «ανίχνευσης» & «διόρθωσης» λαθών του κώδικα. Επίσης, σχολιάσετε αν ο κώδικας είναι «τέλειος».

(δ) Να σχηματίσετε πίνακες Τυπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ.

(ε) Να βρείτε για την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης ΠΑΜΠ, πόσοι συνδυασμοί των 1, 2, και 3 σφαλμάτων αποκωδικοποιούνται σωστά.

(στ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος ε < ½ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου.

(α). Επειδή από τις σχέσεις των τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ με τις επταψήφιες κωδικές λέξεις $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, έχουμε ότι: 1) $x_1 = u_1$, 2) $x_2 = u_2$, 3) $x_3 = u_3$, 4) $x_4 = u_4$, καθώς και ότι 5) όλα τα ψηφία, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, των κωδικών λέξεων είναι Γραμμικοί Συνδυασμοί των ψηφίων u_1, u_2, u_3, u_4 της πληροφορίας, ο κώδικας είναι Συστηματικός Κώδικας Ελέγχου Ισοτιμίας.

β) Από τις παραπάνω σχέσεις ψηφίων πληροφορίας με ψηφία κωδικών λέξεων, έχουμε ότι ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H είναι:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ) Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H εμπεριέχει ως σειρές όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3. Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6 (βλ., σελ. 151 του βιβλίου «Θεωρίας της Πληροφορίας & Κωδικοποίησης) ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming. Επομένως, ο κώδικας είναι «Τέλειος» και έχει «απόσταση» d=3 (βλ. Άσκηση αυτό-αξιολόγησης 4.15). Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 (βλ. σελ. 4.2) είναι σε θέση να ανιχνεύει όλα τα «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 2, καθώς και να διορθώνει κάθε μεμονωμένο σφάλμα ή «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1.

δ) Αφού ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming, όλα τα δυνατά «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1, θα περιέχονται ως οδηγοί των συνομάδων. Τα αντίστοιχα σύνδρομα είναι η γραμμές του Η, όπως πολλαπλασιάζονται με το μοναδικό 1 του οδηγού. Επειδή, οι γραμμές του Η (σύνδρομα) είναι όλες διαφορετικές, οι τυπικές διατάξεις αποκωδικοποίησης του κώδικα για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ συμπίπτουν και είναι:

ΣΥΝΔΡΟΜΟ			ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

ε) Σύμφωνα με τη τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, αποκωδικοποιούνται χωρίς σφάλμα, ή ο κώδικας έχει τη δυνατότητα διόρθωσης

a) όλων (επτά) των διατάξεων μεμονωμένων σφαλμάτων μετάδοσης,
b) καμίας διάταξης διπλού σφάλματος,
c) καμίας διάταξης τριπλού σφάλματος.

στ) Σύμφωνα με την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, η πιθανότητα σφάλματος, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος $\varepsilon < ½$ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου, είναι:

$$\mathbf{P_I}(\varepsilon) = 1 - (1-\varepsilon)^7 - 7\varepsilon(1-\varepsilon)^6$$

Όπου ο όρος $(1-\varepsilon)^7$ προκύπτει από την διάταξη μηδενικού (0000000) λάθους, και ο όρος $7\varepsilon(1-\varepsilon)^6$ από τις 7 πλήρως διορθώσιμες διατάξεις μεμονωμένου σφάλματος που υιοθετούνται στη ΤΔΑ για ΠΑΜΠ.

ΘΕΜΑ 6 ΓΕ4/1617

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*
Σχετικές ασκήσεις*: Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3/ΓΕ5/2010-11*

Δίδεται ο κώδικας C={ $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$} κάθε κωδική λέξη του οποίου προκύπτει από το προς κωδικοποίηση μήνυμα u={u1, u2, u3, u4} σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$c_1 = u_1 + u_2 + u_4$

$c_2 = u_1 + u_3 + u_4$

$c_3 = u_2 + u_3 + u_4$

$c_4 = u_1$

$c_5 = u_2$

$c_6 = u_3$

$c_7 = u_4$

Ζητείται

α). Το πλήθος των κωδικών λέξεων του συγκεκριμένου κώδικα.
β). Ο ρυθμός πληροφορίας του κώδικα.
γ). Ο γεννήτορας πίνακας **G** και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας **H** του κώδικα.
δ). Να βρεθεί η κωδικοποίηση του μηνύματος [1001] σύμφωνα με τον παραπάνω κώδικα.
ε). Υποθέστε ότι ο συστηματικός κώδικας εκπέμπεται μέσα από κανάλι και ο δέκτης λαμβάνει τη λέξη **r=[1100001]**, να ελεγχθεί η ύπαρξη σφάλματος στη ληφθείσα λέξη.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να υπολογίσετε πρώτα τα βασικά μεγέθη του κώδικα σύμφωνα με τη θεωρία. Επίσης να σχηματισθεί ο γεννήτορας πίνακας σύμφωνα με τη θεωρία και να υπολογισθεί ο πίνακας ισοτιμίας. Επίσης εφαρμόζοντας τις αρχές της κωδικοποίησης να υπολογισθούν τα ερωτήματα (δ) και (ε).*

α). Το πλήθος των κωδικών λέξεων εξαρτάται από το μήκος των αρχικών μηνυμάτων και όχι από το μήκος των κωδικοποιημένων μηνυμάτων, και δίνεται από τι σχέση 2^k , όπου $k=4$ το μήκος του μηνύματος πληροφορίας. Επομένως, το πλήθος των κωδικών λέξεων είναι 16.

β). Ο ρυθμός πληροφορίας κάθε κώδικα δίνεται από τη σχέση

$$R=\frac{k}{n}$$

Δομένου ότι $k=4$ και $n=7$ ο ρυθμός πληροφορίας είναι

$$R=\frac{k}{n}=\frac{4}{7}=0.57$$

γ). Για να υπολογίσω τον πίνακα γεννήτορα G και τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, θα πρέπει να σχηματίσω τον πίνακα M.

Παρατηρώντας τις μαθηματικές εκφράσεις, ο πίνακας γεννήτορας G διαστάσεων [4 x 7] θα είναι της μορφής [M I] και όχι όπως συνήθως [I M] καθότι τα ψηφία πληροφορίας καταλαμβάνουν τις 4 τελευταίες θέσεις της κάθε κωδικής λέξης.

Ο πίνακας M είναι διαστάσεων [4 x 3] και ο μοναδιαίος I είναι [4 x 4]

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Επομένως

$$G=\begin{bmatrix}M & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M & \begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως [I M] και όχι ως [M I]

$$H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

δ) Η κωδικοποίηση του μηνύματος δίνεται από

$$C = u \cdot G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ε). Δεδομένου ότι λήφθηκε το κωδικοποιημένο μήνυμα r=[1100001], για την αποκωδικοποίηση θα έχουμε

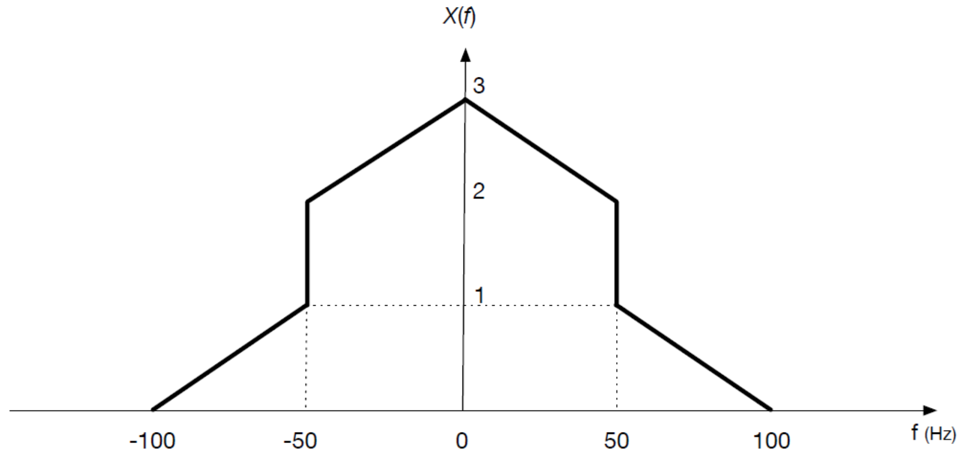
$$y = r . H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως υπάρχει σφάλμα.

Ασκήσεις Ψηφιακών Επικοινωνιών και Δικτύων Η/Υ

ΘΕΜΑ 2 (20 Μονάδες) 2019Α

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



<u>Ερώτηση 1η (5 Μονάδες):</u> Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

<u>Ερώτηση 2η (5 Μονάδες):</u> Να προσδιοριστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας $f_{s,min}$ κατά Nyquist του $x(t)$ και η αντίστοιχη περίοδος δειγματοληψίας. Αν το σήμα $x(t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα διπλάσια της ελάχιστης κατά Nyquist, να δοθεί η έκφραση του δειγματισμένου σήματος $x_s(n)$ στο πεδίο του χρόνου.

<u>Ερώτηση 3η (5 Μονάδες):</u> Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB-SC συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 10 kHz. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το πλάτος φάσματος του διαμορφωμένου σήματος.

<u>Ερώτηση 4η (5 Μονάδες):</u> Το x(t) διαμορφώνει κατά FM συνημιτονικό φέρον συχνότητας 100 kHz και μοναδιαίου πλάτους με σταθερά απόκλισης συχνότητας $k_f = 4\pi$. Να δοθεί η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου και να υπολογιστεί το εύρος ζώνης του. <u>Σημείωση</u>: Το σήμα $x(t)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του για t = 0.

<u>Ερώτηση 1η :</u> Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2\ tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$asinc(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$asinc^2(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100sinc(100t) + 2 \cdot 100sinc^2(100t)$$

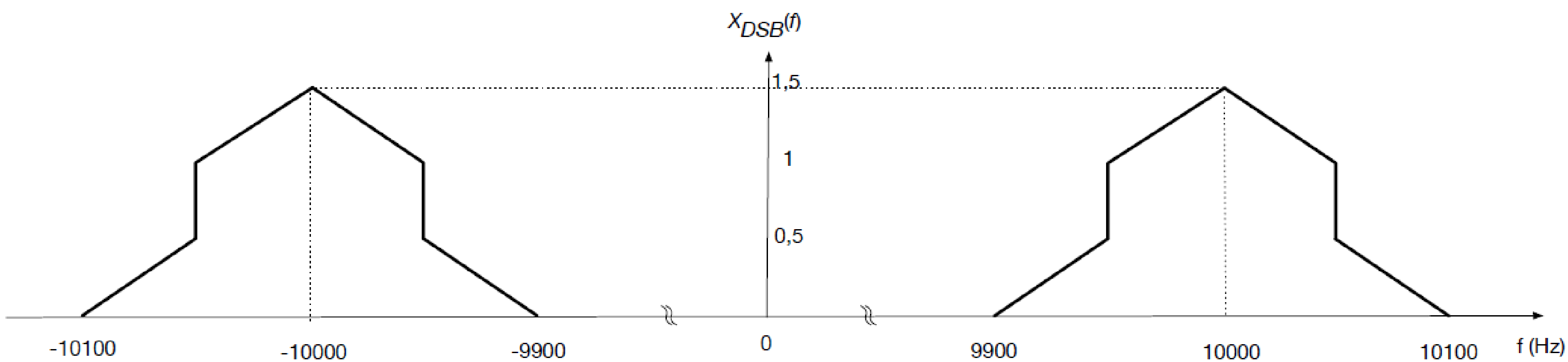
<u>Ερώτηση 2η :</u> Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος του x(t) είναι f_{max} = 100Hz. Συνεπώς η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας κατά Nyquist είναι $f_{s,min}$ = $2f_{max}$ = 200Hz και η περίοδος δειγματοληψίας είναι T_s = 1/200 = 0.005 sec.
Για συχνότητα δειγματοληψίας $2f_{s,min}$ = 400Hz, η περίοδος δειγματοληψίας είναι T_s = 1/400 = 0.0025 sec, και το δειγματισμένο σήμα στο πεδίο του χρόνου γράφεται:

$$
\begin{aligned}
x_s(n) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) \\
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \\
= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[100sinc\left(100\frac{n}{400}\right)+2\cdot 100sinc^2\left(100\frac{n}{400}\right)\right]\delta(t-nT_s)
\end{aligned}
$$

όπου *n* ακέραιος αριθμός.

Ερώτηση 3η : Το $x(t)$ διαμορφώνει κατά DSB-SC συνημιτονικό φέρον μοναδιαίου πλάτους και συχνότητας 10kHz. Η έκφραση στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας για το διαμορφωμένο σήμα είναι:

$$x_{DSB-SC}(t) = x(t) \cdot cos(2\pi 10000t) \overset{F}{\Leftrightarrow} X_{DSB-SC}(f)$$
$$= \frac{1}{2}[X(f-10000) + X(f+10000)]$$
$$= \frac{1}{2}\left\{rect\left(\frac{f-10000}{100}\right) + 2\ tri\left(\frac{f-10000}{100}\right) + rect\left(\frac{f+10000}{100}\right) + 2\ tri\left(\frac{f+10000}{100}\right)\right\}$$



Ερώτηση 4η : Η έκφραση του διαμορφωμένου σήματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$x_{FM}(t) = cos\left(2\pi100000t + 4\pi \int_{-\infty}^{t} [100sinc(100\lambda) + 2 \cdot 100sinc^2(100\lambda)]d\lambda\right)$$

Ο λόγος απόκλισης είναι: $D = \frac{\Delta f_{max}}{f_x} = \frac{\frac{k_f}{2\pi}max(|x(t)|)}{f_x} = \frac{\frac{4\pi}{2\pi}300}{100} = 6$

Και το εύρος ζώνης είναι: $W = 2(D+1)f_x = 2(6+1)100 = 1.4\ kHz$

ΘΕΜΑ 3

ΓΕ3/1415/Θ3

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις τεχνικές πολυπλεξίας σημάτων και την παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM).*
Σχετικές Ασκήσεις: *ΓΕ2/0910/Θ7, ΓΕ2/1011/Θ7, ΓΕ2/1112/Θ7*

Σε ένα στούντιο εγγραφής τα δύο ακουστικά σήματα, από το δεξιό και το αριστερό μικρόφωνο (Left (L) ,Right (R)), δειγματοληπτούνται και τα δείγματα ψηφιοποιούνται από έναν αναλογικο/ψηφιακό μετατροπέα. Θεωρείστε ότι το εύρος ζώνης των ακουστικών σημάτων περιορίζεται περίπου στα 20 kHz. Η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist.

(α) Υπολογίστε το ρυθμό δειγματοληψίας των δύο ακουστικών σημάτων

(β) Αν απαιτείται σηματοθορυβικός λόγος μεγαλύτερος από 92 dB υπολογίστε το πλήθος των σταθμών κβάντισης. Υποθέστε ότι τα δείγματα των δύο ακουστικών σημάτων κβαντίζονται με ομοιόμορφο κβαντιστή PCM.

(γ) Ποια η επιδείνωση του σηματοθορυβικού λόγου αν χρησιμοποιηθούν οι μισές στάθμες από εκείνες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα; Παρατηρήστε τι γίνεται για διαδοχικούς υποδιπλασιασμούς και σχολιάστε το αποτέλεσμα σε σχέση με τον αριθμό των bits που χρησιμοποιούνται.

(δ) Υπολογίστε τον συνολικό αριθμό των bits και bytes και για τα δύο ακουστικά σήματα (L,R) που προκύπτουν για ένα μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών.

(ε) Αν τα δύο ακουστικά σήματα πολυπλεχθούν κατά TDM (πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου) και μεταδοθούν από τον ίδιο δίαυλο, υπολογίστε το ελάχιστο εύρος ζώνης του διαύλου για την τεχνική PCM και υποδείξτε το ρυθμό μετάδοσης στο δίαυλο.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να θεωρήσετε ότι για τη μετάδοση σήματος με PCM (που προϋποθέτει τη δειγματοληψία του και την ομοιόμορφη κβάντισή του σε L στάθμες) ο απαιτούμενος σηματοθορυβικός λόγος (εκφρασμένος σε decibel) ισούται με* $SNR = 10 \cdot \log_{10}\left(L^2\right)$.

(α) Τα δύο ακουστικά σήματα δειγατοληπτούνται το καθένα χωριστά. Επειδή η μέγιστη συχνότητα των ακουστικών σημάτων είναι τα 20 kHz, σύμφωνα με τον Nyquist ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι τουλάχιστο 40 kHz. Επιπλέον, στην εκφώνηση αναφέρεται ότι η δειγματοληψία πραγματοποιείται με ρυθμό κατά 10,25% μεγαλύτερο από αυτόν του Nyquist, συνεπώς για κάθε ακουστικό κανάλι έχουμε

Ρυθμός Δειγματοληψίας = 40 kHz * 1,1025 = 44,1 kHz

(β) Προκειμένου κάθε σήμα να μεταδοθεί με PCM με σηματοθορυβικό λόγο SNR > 92 dB, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον απαραίτητο αριθμό σταθμών κβάντισης.

Έχουμε $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(L^2\right) = 20\log_{10} L$

Άρα ο αριθμός απαιτούμενων σταθμών κβάντισης θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$SNR = 20\log_{10} L \geq 92 \Rightarrow L \geq 10^{92/20} \approx 39,811$$

Άρα επειδή θα πρέπει το πλήθος των σταθμών να είναι δύναμη του 2, τελικά θα έχουμε $2^{16} = 65.536$ στάθμες.

(γ) Χρησιμοποιώντας $2^{16} = 65.536$ στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος

$$SNR = 20\log_{10} L = 20\log_{10}\left(65.536\right) = 96,3\ dB$$

Αν υποδιπλασιάσουμε τις στάθμες τότε θα χρησιμοποιήσουμε 15 bits για την κάθε κωδική λέξη και θα έχουμε $2^{15} = 32.768$ στάθμες. Άρα ο σηματοθορυβικός λόγος θα είναι

$$SNR = 20\log_{10} L = 20\log_{10}\left(32.768\right) = 90,3\ dB$$

Άρα η επιδείνωση με τη μείωση ενός bit είναι 6 dB.

Το ίδιο ισχύει για κάθε μείωση κατά 1 bit (π.χ. με 16.384 στάθμες προκύπτει σηματοθορυβικός λόγος 84.3 dB, κλπ.)

(δ) Με συχνότητα δειγματοληψίας 44.100 Hz, έχουμε 44.100 δείγματα/sec. Με 16 bits/δείγμα προκύπτει ρυθμός 44.100 x 16 = 705.600 bits/sec από κάθε ακουστικό σήμα. Για μουσικό κομμάτι διάρκειας 3 λεπτών δηλαδή 180 sec προκύπτουν ανά κανάλι

705.600 bits/sec x 180 sec = 127,008 x 10^6 bits = 15,876 Mbytes

Συνολικά για τα δύο κανάλια

2 x 705.600 bits/sec x 180 sec = 254,016 x 10^6 bits = 31,752 Mbytes

(ε) Αν χρησιμοποιηθεί πολυπλεξία με διαίρεση χρόνου, τότε το πλαίσιο θα περιέχει δύο χρονοθυρίδες και ο ελάχιστος ρυθμός που πρέπει να μπορεί να υποστηρίζει ο δίαυλος είναι το άθροισμα των επιμέρους ρυθμών δειγματοληψίας, δηλαδή 2 x 44.100 samples/sec = 88.200 samples/sec.

Επειδή όμως θα χρησιμοποιηθεί τεχνική PCM με κβαντοποίηση σε 65.536 στάθμες, το απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} f_s \log_2 L = \frac{1}{2} \times 88.200 \times \log_2 65.536 = 44.100 \times 16 = 705600\ Hz = 705,6\ kHz$$

Ο ρυθμός μετάδοσης είναι $705,6 \times 2 = 1411,2\ kbps = 1,4112\ Mbps$

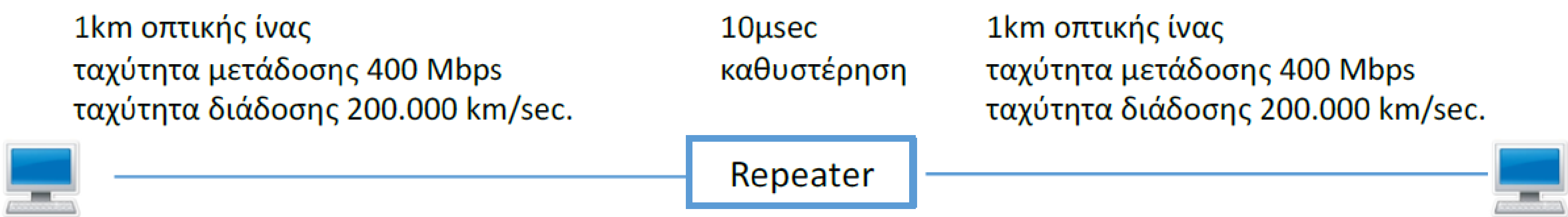
ΘΕΜΑ 5 (20 Μονάδες) ΕΞ 2019Α

Ένα δίκτυο τύπου CSMA/CD αποτελείται από δύο τμήματα οπτικής ίνας το καθένα μήκους 1km. Τα δύο τμήματα ενώνονται με αναμεταδότη (repeater) που εισάγει καθυστέρηση 10 μsec. Οι σταθμοί που συνδέονται στο δίκτυο παράγουν πλαίσια, μήκους διπλάσιου του επιτρεπόμενου ελαχίστου, με ταχύτητα μετάδοσης 400 Mbps.

Ερώτηση $1^{η}$ (10 Μονάδες): Ποια θα είναι η ρυθμαπόδοση του δικτύου, αν η επιβάρυνση (overhead) που εισάγει το Επίπεδο Σύνδεσης Δεδομένων ανά μεταδιδόμενο πλαίσιο είναι 500 bits;

Ερώτηση $2^{η}$ (10 Μονάδες): Θέλουμε να επιτύχουμε απόδοση του CSMA/CD δικτύου 80%, χωρίς όμως να μεταβάλλουμε το μήκος των πλαισίων και το μήκος του δικτύου. Τι πρέπει να αλλάξουμε στο δίκτυο μας; Ποια η νέα ρυθμαπόδοση?

Θεωρείστε ότι η ταχύτητα διάδοσης στην οπτική ίνα είναι 200.000 km/sec.

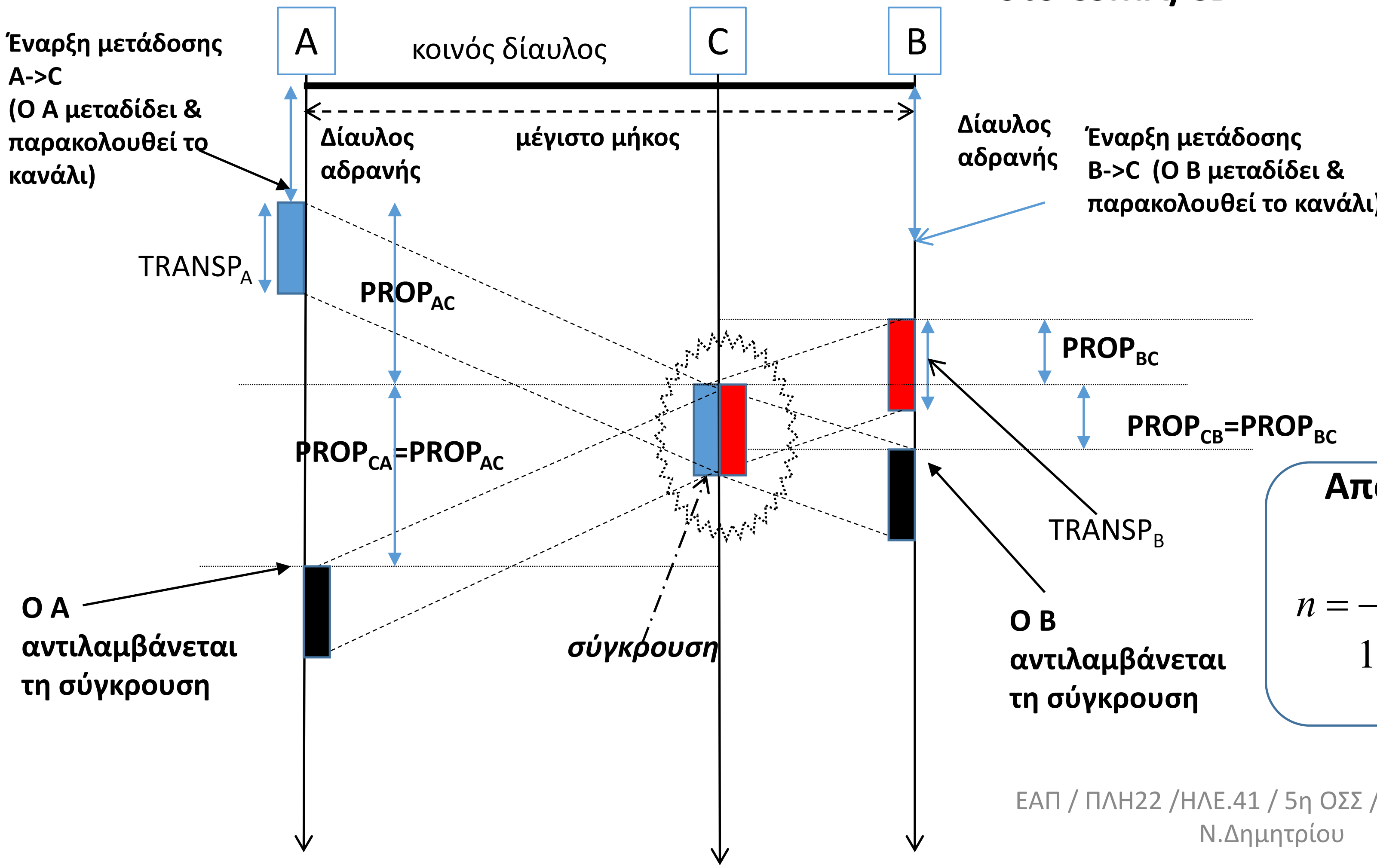


Ερώτηση 1^{η}: Το μέγιστο μήκος του δικτύου είναι 2 km και αποτελείται από 1 επαναλήπτη που ενώνει τα δύο τμήματα.
Η καθυστέρηση διάδοσης PROP είναι ίση με 2km / (200.000 km ⁄ sec) = 0.00001sec = 10 μsec. Σε αυτήν την τιμή πρέπει να προστεθεί και η καθυστέρηση που εισάγει ο αναμεταδότης. Ως εκ τούτου η συνολική καθυστέρηση είναι DELAY = 20μsec.

Γνωρίζουμε ότι στα δίκτυα CSMA/CD, το ελάχιστο μήκος πλαισίου αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα μετάδοσης διπλάσιο της συνολικής καθυστέρησης διάδοσης (DELAY). Επειδή 2*DELAY = 40 μsec, το ελάχιστο μέγεθος πλαισίου είναι ίσο με 2*DELAY*R = 40 μsec * 400 Mbps = 16.000 bits.
Εφόσον μεταδίδονται πλαίσια μήκους διπλάσιου του ελαχίστου, κάθε ένα τέτοιο πλαίσιο θα έχει μέγεθος ίσο με 32.000 bits με χρόνο μετάδοσης TRANSP = 32.000/(400*10^6) sec = 80μsec.
Επίσης, κάθε ένα τέτοιο πλαίσιο θα μεταφέρει 32.000-500 = 31.500 bits πληροφορίας με αποτέλεσμα το ποσοστό μεταφοράς ωφέλιμης πληροφορίας ανά πλαίσιο να είναι ίσο με 31.500/32.000 = 0.98435.
Εφόσον PROP = 20 μsec, TRANSP = 80μsec, σύμφωνα με τον γνωστό από τη θεωρία τύπο που δίνει την απόδοση ενός CSMA/CD δικτύου (n=1/(1+5β), όπου β = DELAY/TRANSP), προκύπτει ότι η απόδοση του δικτύου θα είναι ίση με n=0.444.
Η ρυθμαπόδοση του δικτύου θα είναι ίση με n*R = 0.444*400 Mbps = 177.6 Mbps.

Ερώτηση 2^{η}: Η παράμετρος που μένει να αλλάξουμε είναι ο ρυθμός μετάδοσης, κάτι που θα μεταβάλει τον χρόνο μετάδοσης σε TRANSP’.
Θα πρέπει συνεπώς n’ = 1/(1+5β) = 0.8 => β = 0.05 => TRANSP’ = DELAY / β
=> TRANSP’ = 20*20 = 400 μsec.
Έτσι, για τη νέα ταχύτητα μετάδοσης R’ θα ισχύει R’*400 μsec = 32.000 bits => R’ = 80 Mbps.
Εφόσον η απόδοση του δικτύου είναι n’ = 0.8, η ρυθμαπόδοση του δικτύου θα ισούται με n’*R’ = 0.8*80 Mbps = 64 Mbps.

Συνθήκη ανίχνευσης συγκρούσεων στο CSMA/CD



Αποδοτικότητα CSMA/CD

$$n = \frac{1}{1 + 5\dfrac{PROP}{TRANSP}}$$

Για να μπορέσει ο αποστολέας να αντιληφθεί τη σύγκρουση (ενώ μεταδίδει το πλαίσιο) θα πρέπει TRANSP ≥ 2 PROP

Χειρότερη περίπτωση: Ο C ταυτίζεται με το B (είναι στη μέγιστη δυνατή απόσταση από τον A)
$TRANSP \geq 2PROP_{MAX}$ (μέγιστος χρόνος διάδοσης ενός bit end-end)