ΕΑΠ ΘΕ ΠΛΗ-22/ΗΛΕ.46
2η ΟΣΣ
10/12/2023

1. Δίκτυα Η/Υ
2. Ψηφιακές Επικοινωνίες

Νίκος Δημητρίου

1. Δίκτυα Η/Υ

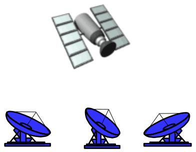
Έλεγχος Πρόσβασης Διαμοιραζόμενης Ζεύξης / πρόσβασης στο μέσο (Medium access control)

- βλ. διαφάνειες 184-214 της παρουσίασης PLH22_OSS1_Networks_2023_2024_v2 που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr

Παραδείγματα Διαμοιραζόμενων ζεύξεων

διαμοιραζόμενο καλώδιο
(π.χ., Ethernet καλωδίου)

διαμοιραζόμενη ραδιοζεύξη
(π.χ., 802.11 WiFi)



διαμοιραζόμενη
ραδιοζεύξη
(δορυφορική)

άνθρωποι σε πάρτυ κοκτέηλ
(διαμοιραζόμενος άερας
ακουστική ζεύξη)

Κατηγοριοποίηση πρωτοκόλλων MAC

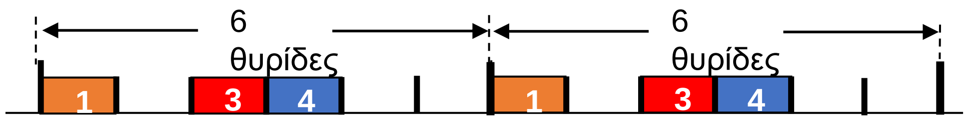
- Διαμοιρασμού καναλιού
  - χωρισμός καναλιού σε μικρότερα κομμάτια (χρονοθυρίδες, συχνότητες)
  - δέσμευση τμήματος από τον κόμβο για αποκλειστική χρήση
- Τυχαίας Πρόσβασης (random access)
  - το κανάλι δεν χωρίζεται, επιτρέπονται συγκρούσεις
  - Διαδικασία “ανάκαμψης” από τις συγκρούσεις
- Χρήσης προτεραιότητας
  - οι κόμβοι χρησιμοποιούν το κανάλι εκ περιτροπής, με δυνατότητα για προτεραιοδότηση (π.χ. κόμβοι που έχουν περισσότερα δεδομένα να στείλουν μπορούν να χρησιμοποιήσουν το κανάλι για περισσότερη ώρα)

Πρωτόκολλα διαμοιρασμού καναλιού: TDMA

TDMA: time division multiple access (GSM) (*ανά συχνότητα)

- Το δικαίωμα πρόσβασης στο μέσο δίνεται σε γύρους
- Κάθε σταθμός λαμβάνει μια χρονοθυρίδα σταθερού μήκους, που συνήθως είναι κάποιο πολλαπλάσιο του χρόνου εκπομπής ενός πλαισίου σε κάθε γύρο
- Χρονοθυρίδες που δε χρησιμοποιούνται από κάποιο χρήστη απλά χάνονται για το σύστημα

Παράδειγμα: τοπικό δίκτυο 6 σταθμών, οι σταθμοί 1,3,4 έχουν πλαίσιο προς εκπομπή, οι σταθμοί 2,5,6 είναι αδρανείς

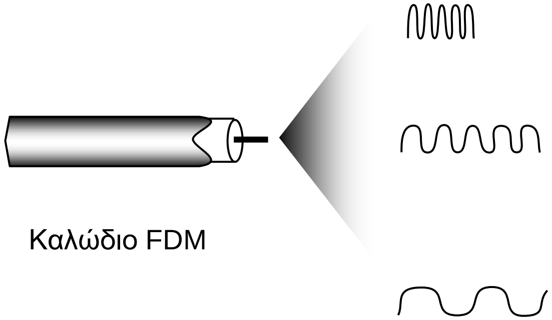


Πρωτόκολλα διαμοιρασμού καναλιού: FDMA

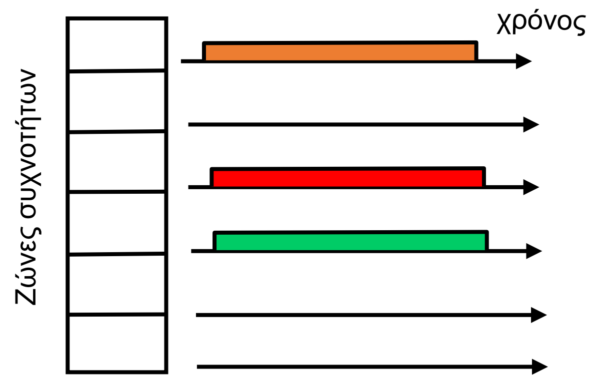
FDMA: frequency division multiple access (FM ραδιόφωνο)

- Το φάσμα καναλιού διαιρείται σε ζώνες (μπάντες) συχνοτήτων
- Σε κάθε σταθμό αποδίδεται σταθερή ζώνη συχνοτήτων
- Χρόνος εκπομπής που δε χρησιμοποιείται σε καθεμιά ζώνη πάει χαμένος

Παράδειγμα: τοπικό δίκτυο 6 σταθμών, οι σταθμοί 1,3,4 έχουν πλαίσιο προς εκπομπή, οι σταθμοί 2,5,6 είναι αδρανείς



Καλώδιο FDM



Πρωτόκολλα τυχαίας πρόσβασης

- ‘Οταν ο κόμβος έχει πλαίσιο να στείλει
  - εκπέμπει σε πλήρη ρυθμό R
  - δεν υπάρχει εκ των προτέρων συντονισμός μεταξύ των κόμβων
- Αν εκπέμψουν δύο ή περισσότεροι κόμβοι ➜ “σύγκρουση” (collision)

- ‘Ενα πρωτόκολλο τυχαίας πρόσβασης καθορίζει :
  - Πώς ανιχνεύονται οι συγκρούσεις
  - Πώς αντιμετωπίζονται οι συγκρούσεις collisions, π.χ. με επανεκπομπές, που μπορεί να υποβάλλονται σε μηχανισμούς καθυστέρησης (backoff mechanisms)

- Παραδείγματα πρωτοκόλλων MAC τυχαίας πρόσβασης:
  - slotted ALOHA, ALOHA, CSMA, CSMA/CD, CSMA/CA

Aloha motivation

The Aloha protocol was implemented in '70 also in a satellite network, named ALOHAnet.

The Aloha protocol was proposed at the beginning of '70 by Professor Norman Abramson who needed to connect terminals dispersed among different islands and a central host (= controller) at the Hawaii University in Honolulu (Oahu island).

The main idea is **allowing terminals to transmit to the central controller as soon as they need to do so**.

- Collisions
- Mechanism to reveal collisions (The Aloha protocol is reliable: ACK and timer based on the round trip propagation delay or use of a broadcast channel)
- Retransmission attempts after a collision are rescheduled using a random **backoff** time

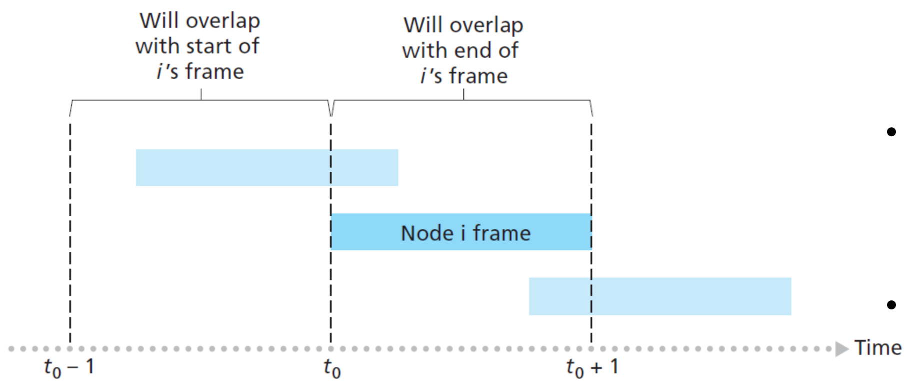
Note: Aloha is not an acronym, but the classical Hawaiian welcome expression.

N. Abramson, "The ALOHA System-Another Alternative for Computer Communications", *Fall Joint Computer Conference*, 1970.

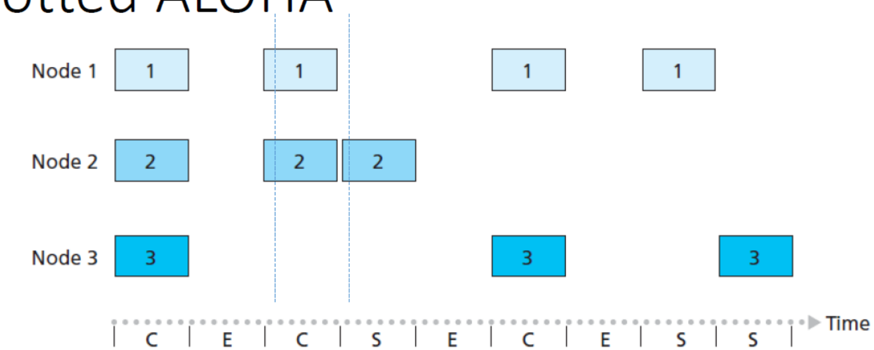
Figure 1. *ALOHA TCU 1971.*

Figure 2. *ALOHA PCU 1973.*

pure ALOHA



slotted ALOHA



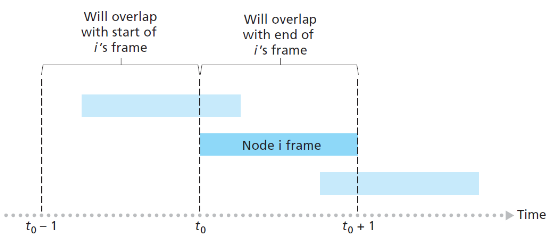
- Αποστολή πακέτου σε τυχαίο χρόνο/τυχαία χρονοθυριδα
- Ανίχνευση σύγκρουσης με τη βοήθεια του δέκτη
- Επανάληψη αποστολής μετά από τυχαίο διάστημα (backoff)

Απόδοση του pure ALOHA

Πιθ (επιτυχής μετάδοση 1 συγκεκριμένου κόμβου) = Πιθ(ο κόμβος εκπέμπει) •
Πιθ(δεν εκπέμπει άλλος κόμβος στο $[t_0\text{-}1, t_0]$ •
Πιθ(δεν εκπέμπει άλλος κόμβος στο $[t_0, t_0\text{+}1]$

$$= p \cdot (1\text{-}p)^{N\text{-}1} \cdot (1\text{-}p)^{N\text{-}1} = p \cdot (1\text{-}p)^{2(N\text{-}1)}$$

pure ALOHA



Πιθ (επιτυχής μετάδοση 1 οποιουδήποτε κόμβου)=N p $\cdot$ $(1\text{-}p)^{2(N\text{-}1)}$

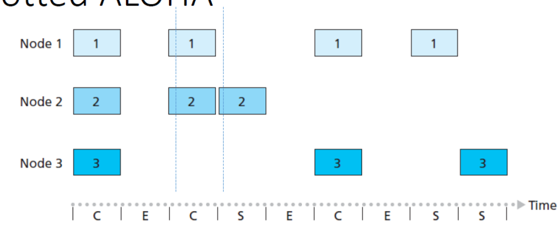
Μέγιστη απόδοση: βρες το p* που μεγιστοποιεί την έκφραση
N $\cdot$ **p(1-p)**$^{2(N\text{-}1)}$ **->** p* =**1/2N**

Βελτιστοποιώντας ως προς p και αφήνοντας το N → oo

απόδοση = 1/(2e) ~ 0.18

Απόδοση του slotted ALOHA

slotted ALOHA

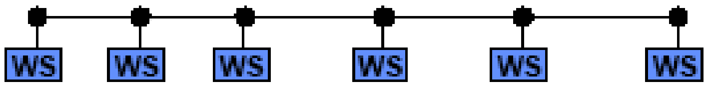


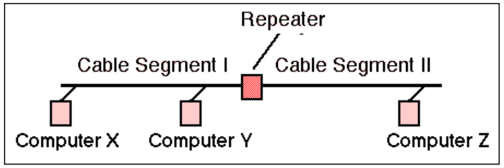
Πιθ (επιτυχής μετάδοση 1 συγκεκριμένου κόμβου) =
Πιθ(ο κόμβος εκπέμπει) • Πιθ(δεν εκπέμπει άλλος κόμβος στο $[t_0, t_0\text{+}1] = p \cdot (1\text{-}p)^{N\text{-}1}$
Πιθ (επιτυχής μετάδοση 1 οποιουδήποτε κόμβου)=N p $\cdot$ $(1\text{-}p)^{N\text{-}1}$
Μέγιστη απόδοση: βρες το p* που μεγιστοποιεί την έκφραση
$Np(1\text{-}p)^{N\text{-}1}$ **->** p* =**1/N**
Βελτιστοποιώντας ως προς p και αφήνοντας το N → oo
απόδοση = 1/(e) ~ 0.36

Τοπολογίες αρτηρίας και αστέρα

"Παραδοσιακό" Ethernet

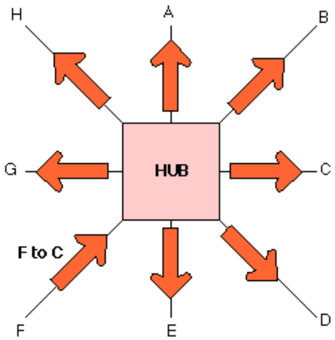
Όλοι οι κόμβοι είναι πάνω σε ένα bus (αρτηρία), πράγμα που σημαίνει μακρύ καλώδιο. Το πρωτόκολλο είναι το CSMA/CD.





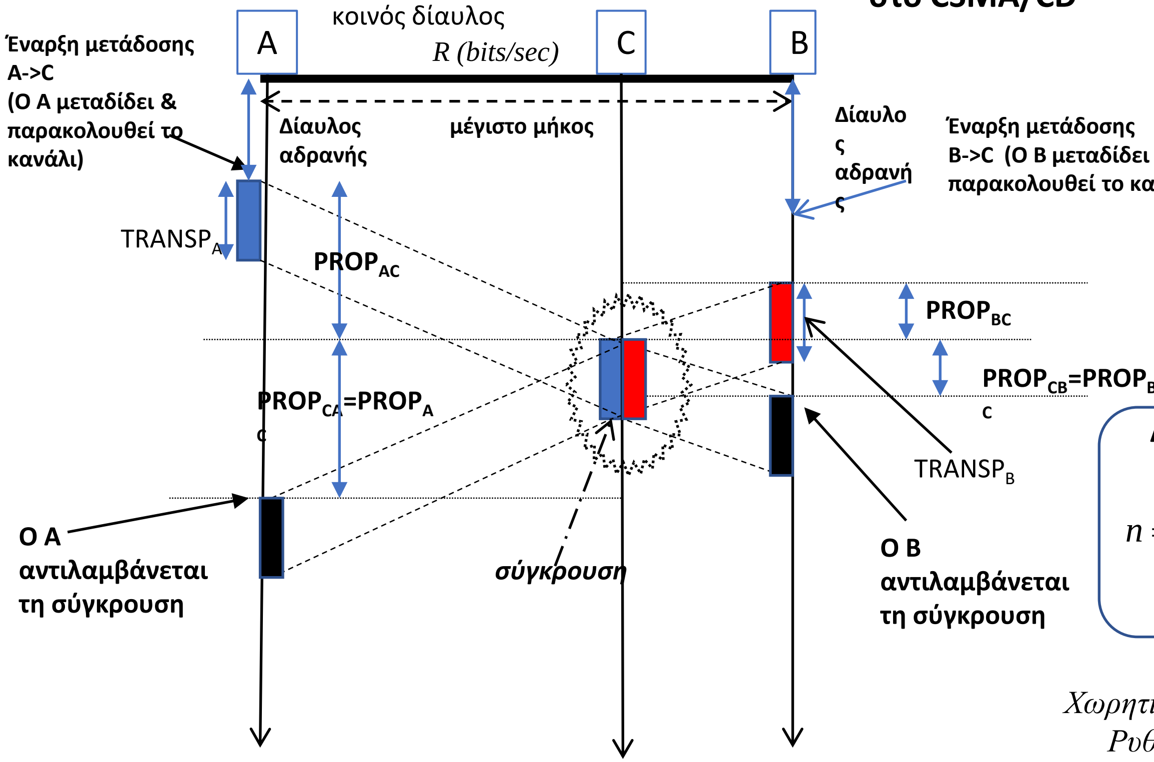
"Hub" Ethernet

Οι κόμβοι συνδέονται στο hub (συγκεντρωτής), το οποίο λειτουργεί ως επαναλήπτης προς όλους.



12

Συνθήκη ανίχνευσης συγκρούσεων στο CSMA/CD



Αποδοτικότητα CSMA/CD

$$n = \frac{1}{1 + 5\frac{PROP}{TRANSP}}$$

Χωρητικότητα Διαύλου = Ρυθμαπόδοση=nR

Για να μπορέσει ο αποστολέας να αντιληφθεί τη σύγκρουση (ενώ μεταδίδει το πλαίσιο) θα πρέπει TRANSP ≥ 2 PROP

Χειρότερη περίπτωση: Ο C ταυτίζεται με το B (είναι στη μέγιστη δυνατή απόσταση από τον A)
$TRANSP \geq 2PROP_{MAX}$ (μέγιστος χρόνος διάδοσης ενός bit end-end)

ΘΕΜΑ 5	ΓΕ1/2122 **Τοπικά δίκτυα και πρωτόκολλο CSMA/CD**

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τα τοπικά δίκτυα και την απόδοσή τους κατά τη χρήση του πρωτοκόλλου CSMA/CD κατά την ανίχνευση συγκρούσεων.

Σχετικές ασκήσεις: Παράδειγμα 5.1, σελ. 146, Τόμου Γ', ΓΕ1/1920/Θ5

(2) Ένα τοπικό δίκτυο LAN τοπολογίας διαύλου (bus) έχει μήκος 1000 m, η χωρητικότητά του είναι 100 Mbps, η ταχύτητα διάδοσης των πακέτων είναι $2 \cdot 10^8\ m/s$ και χρησιμοποιεί το πρωτόκολλο Ethernet με πακέτα μήκους 1500 bytes.

(α) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του διαύλου λόγω της χρήσης του πρωτοκόλλου Ethernet.

(β) Να υπολογιστεί ο ρυθμός διέλευσης των ωφέλιμων bits, αν στα πακέτα των 1500 bytes τα ωφέλιμα bytes είναι 1460 (λάβετε υπόψη το σύνολο των σταθμών).

(γ) Ποιο είναι το ελάχιστο επιτρεπτό μήκος των πακέτων Ethernet;

(2)

(α) Η χωρητικότητα του διαύλου λόγω της χρήσης του Ethernet είναι ποσοστό της διαθέσιμης χωρητικότητας (100 Mbps) του διαύλου, το οποίο καθορίζεται από την απόδοση του πρωτοκόλλου Ethernet, που δίνεται από τη σχέση:

$$\eta = \frac{1}{1 + 5\, d_{prop}/d_{trans}}$$

όπου: d_{prop} είναι η μέγιστη καθυστέρηση διάδοσης και d_{trans} είναι η καθυστέρηση μετάδοσης ενός πακέτου. Υπολογίζουμε τις τιμές αυτές:

$$d_{prop} = 1000\, m \,/\, (2 \cdot 10^8)\, m/s = 0{,}5 \ \cdot 10^{-5} s \ = 5\, \mu s$$

$$d_{trans} = 1500 \cdot 8\, bits \,/\, (100 \cdot 10^6\, bits/s) = 120\, \mu s$$

Επομένως $\alpha = 5/120 = 0{,}04167$ και η απόδοση του Ethernet είναι:

$$\eta \ = \frac{1}{1 + 5 \cdot 0{,}04167} = 82{,}76\ \%$$

Άρα η χωρητικότητα του διαύλου είναι το 82,76% της χωρητικότητας του ίδιου διαύλου χωρίς Ethernet, δηλαδή 82,76 Mbps.

(β) Σε κάθε πακέτο το ποσοστό των ωφέλιμων bytes προς τα συνολικά δίνεται από το κλάσμα 1460/1500 = 97,33%. Άρα, ο ρυθμός διέλευσης των ωφέλιμων bits είναι 82,76 Mbps · 0,9733 = 80,55 Mbps.

(γ) Στο πρωτόκολλο Ethernet για να μπορεί να γίνει από τον αποστολέα αντιληπτή μια σύγκρουση πακέτων, απαιτείται να ικανοποιείται η σχέση:

$$d_{trans} > 2\, d_{prop}$$

Επομένως το ελάχιστο μήκος πακέτου Ethernet υπολογίζεται από:

$$d_{trans} > 2x5\ \mu s \ \Rightarrow d_{trans} > 10\ \mu s \Rightarrow \frac{L}{100x10^6\ bits/s} > 10x10^{-6} s \Rightarrow L > 1000\ bits$$

CSMA/CD exp.backoff (I)

Όταν υλοποιείται ο μηχανισμός CSMA/CD, τότε ο κόμβος του τοπικού δικτύου, που έχει δεδομένα προς μετάδοση, ακολουθεί την ακόλουθη διαδικασία:

1. Περιμένει μέχρις ότου το κανάλι καταστεί αδρανές.
2. Όταν διαπιστώσει ότι το κανάλι είναι αδρανές, τότε μεταδίδει τα δεδομένα του και ταυτόχρονα παρατηρεί το μέσο πολλαπλής πρόσβασης.
3. Στην περίπτωση που ανιχνεύσει σύγκρουση, τότε σταματάει τη μετάδοση δεδομένων, περιμένει για ένα τυχαίο χρονικό διάστημα και ξεκινά πάλι από το βήμα 1.

CSMA/CD exp.backoff (II)

Πόσος είναι ο τυχαίος χρόνος που ένας κόμβος περιμένει μετά την ανίχνευση σύγκρουσης; Η τιμή του υπολογίζεται με βάση τον ακόλουθο αλγόριθμο, ο οποίος ονομάζεται *δυαδική εκθετική υποχώρηση* (binary exponential backoff).

Ας συμβολίσουμε με T το χρόνο που απαιτείται για να διαδοθεί ένα ηλεκτρικό σήμα από το ένα άκρο του φυσικού μέσου στο άλλο, υποθέτοντας ότι το μήκος του φυσικού μέσου είναι το μέγιστο επιτρεπτό.

Εάν ένα πλαίσιο συγκρούστηκε n συνεχόμενες φορές κατά τη μετάδοσή του, τότε ο κόμβος επιλέγει, με ίσες πιθανότητες, έναν τυχαίο αριθμό K από το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 2^m - 1\}$, όπου $m := \min\{10, n\}$. Στη συνέχεια, ο κόμβος υπολογίζει τον τυχαίο χρόνο αναμονής, ο οποίος ισούται με το γινόμενο $K \times 2T$.

Έτσι, μετά την πρώτη σύγκρουση, ο κόμβος είτε ξαναπροσπαθεί αμέσως, είτε περιμένει χρόνο $2T$ πριν ξεκινήσει τη διαδικασία μετάδοσης. Μετά τη δεύτερη σύγκρουση, περιμένει, με ίσες πιθανότητες, για χρόνο 0, $2T$, $4T$ ή $6T$. Αντίστοιχα, μετά από τρεις διαδοχικές συγκρούσεις, ο χρόνος αναμονής μπορεί ισοπίθανα να είναι ένας από τους 0, $2T$, $4T$, $6T$, …, $14T$, κ.ο.κ. Έτσι, εξαπλώνοντας σταδιακά το εύρος των χρόνων αναμονής μετά από σύγκρουση, μειώνουμε την πιθανότητα εμφάνισης διαδοχικών συγκρούσεων στο δίκτυο.

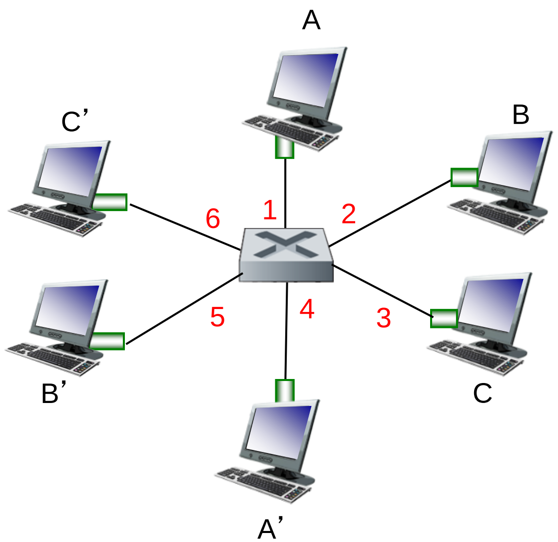
Σημείωση:
Στο θέμα 1 της φετινής ΓΕ2 γίνεται αναφορά στην πρώτη προσπάθεια επίλυσης της σύγκρουσης (n=1)

Δίκτυα Μεταγωγής Πακέτων

- βλ. διαφάνειες 226-240 της παρουσίασης PLH22_OSS1_Networks_2023_2024_v2 που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr

Switched Ethernet: πολλαπλές ταυτόχρονες εκπομπές

- Οι hosts έχουν ξεχωριστή, απευθείας σύνδεση στον μεταγωγέα
- Το πρωτόκολλο Ethernet χρησιμοποιείται σε κάθε εισερχόμενη ζεύξη, χωρίς συγκρούσεις; full duplex
  - Κάθε ζεύξη είναι ξεχωριστός τομέας συγκρούσεων
- *Μεταγωγή :* A-to-A' και B-to-B' μπορούν να εκπέμψουν ταυτόχρονα, χωρίς συγκρούσεις

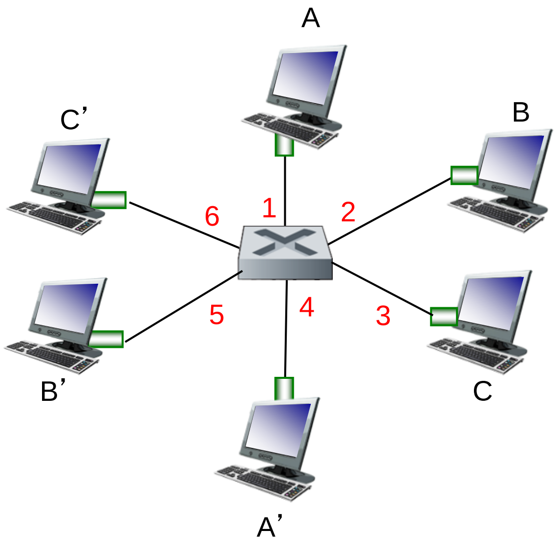


Μεταγωγέας με 6 διεπαφές (1,2,3,4,5,6)

Μεταγωγέας: self-learning

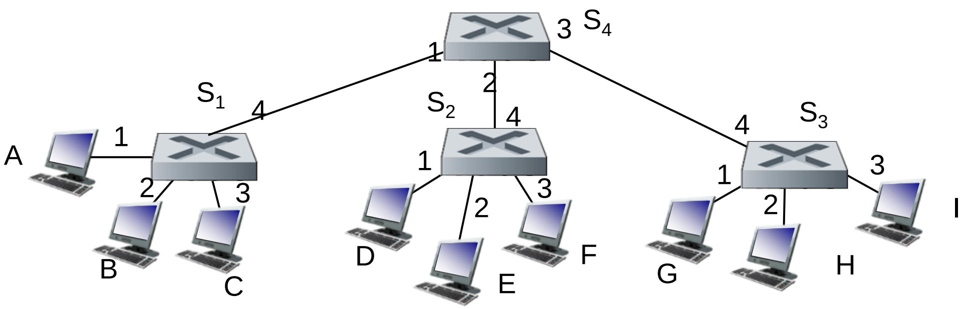
Με αυτό-εκμάθηση (self-learning)!

- *Μαθαίνει* ποιους hosts μπορεί να φτάσει μέσω ποιων διεπαφών
  - Όταν λαμβάνει ένα πλαίσιο, "μαθαίνει" και σημειώνει τη θέση του αποστολέα: εισερχόμενη διεπαφή
  - Καταγράφει το ζεύγος αποστολέας – διεπαφή στον πίνακα μεταγωγής



Self-learning με πολλαπλούς μεταγωγείς

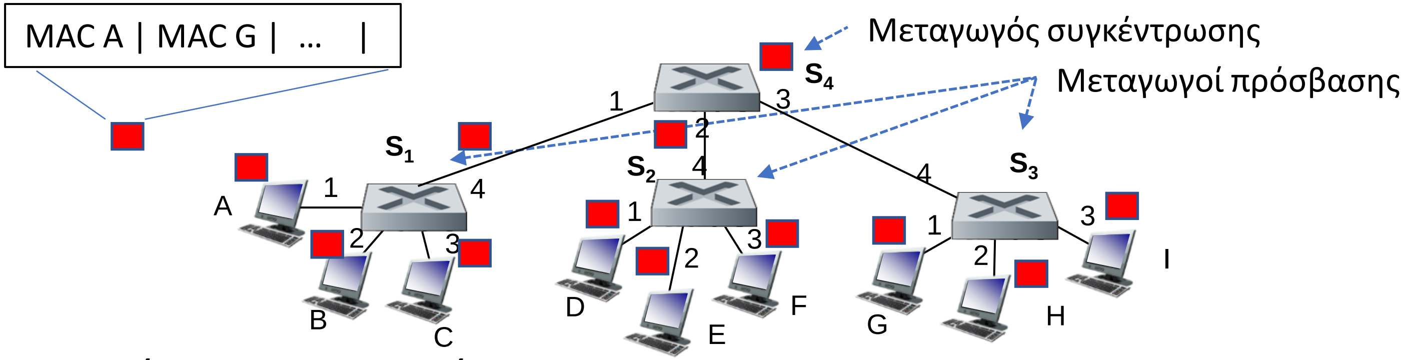
- Υποθέστε ότι ο A στέλνει ένα πλαίσιο στον G και ο G απαντά στον A



- ΕΡΩΤΗΣΗ: Ποιοι ειναι οι πίνακες μεταγωγής στους S_1, S_2, S_3, S_4 ;

Διασύνδεση μεταγωγέων

- Ο Α στέλνει ένα πλαίσιο στον G



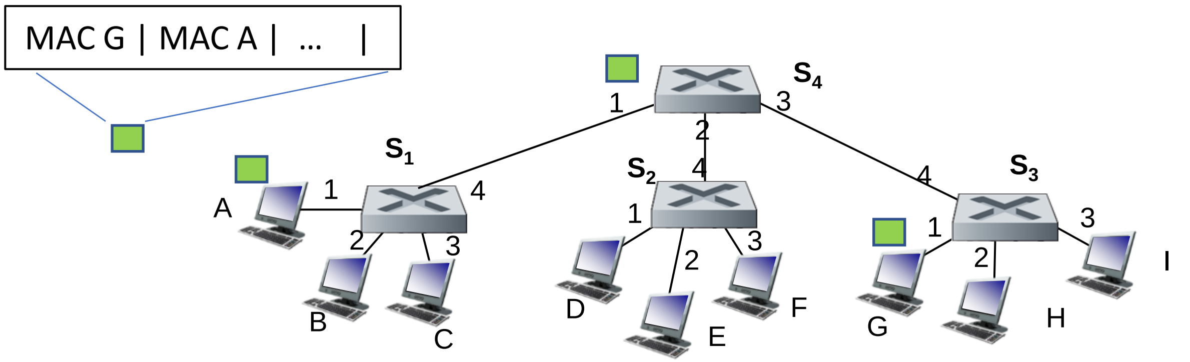
- Πίνακες μεταγωγής

Self-learning

Χρονική στιγμή	S1	S2	S3	S4
t=0	-	-	-	-
t=1	(MAC A, 1)	-	-	-
t=2	(MAC A, 1)	-	-	(MAC A, 1)
t=3	(MAC A, 1)	(MAC A, 4)	(MAC A, 4)	(MAC A, 1)

Διασύνδεση μεταγωγέων

- Ο G στέλνει ένα πλαίσιο στον A



- Πίνακες μεταγωγής

Αποστολή πακέτου από τον G

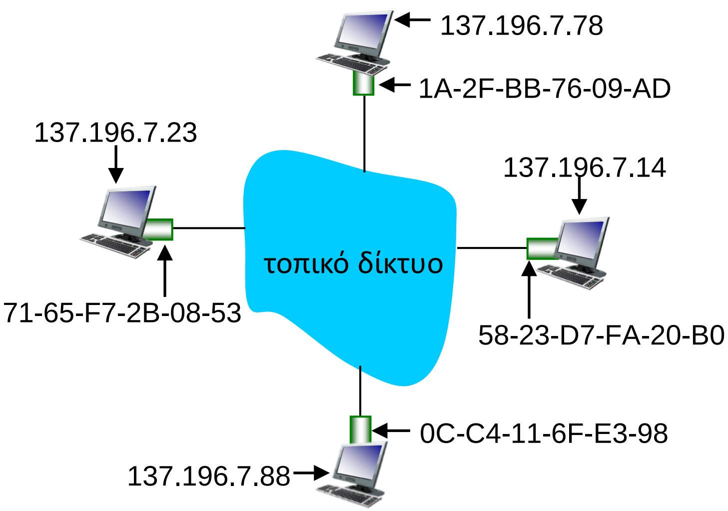
Χρονική στιγμή	S1	S2	S3	S4
t=3	(MAC A, 1)	(MAC A, 4)	(MAC A, 4)	(MAC A, 1)
t=4	(MAC A, 1)	(MAC A, 4)	(MAC A, 4) (MAC G, 1)	(MAC A, 1)
t=5	(MAC A, 1)	(MAC A, 4)	(MAC A, 4) (MAC G, 1)	(MAC A, 1) (MAC G, 3)
t=6	(MAC A, 1) (MAC G, 4)	(MAC A, 4)	(MAC A, 4) (MAC G, 1)	(MAC A, 1) (MAC G, 3)

Πρωτόκολλο ARP
Δρομολόγηση πακέτου σε κόμβο εντός/εκτός LAN

- βλ. διαφάνειες 216-222 της παρουσίασης PLH22_OSS1_Networks_2023_2024_v2 που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr

ARP : Πρωτόκολλο αναγωγής διευθύνσεων

Ερώτηση: πώς βρίσκουμε τη MAC διεύθυνση μιας διεπαφής αν γνωρίζουμε την IP διεύθυνσή της;



Πίνακας *ARP:* κάθε IP κόμβος (ξενιστής, δρομολογητές) στο LAN διατηρεί πίνακα ARP

- Αντιστοιχίσεις IP/MAC διευθύνσεων για κάποιους κόμβους του τοπικού δικτύου:

< IP διεύθυνση; MAC διεύθυνση; πεδίο TTL>

- TTL (Time To Live): χρόνος μετά τον οποίο οι αντιστοιχίσεις των διευθύνσεων απαλείφονται από τη μνήμη (τυπικά: 20 λεπτά)

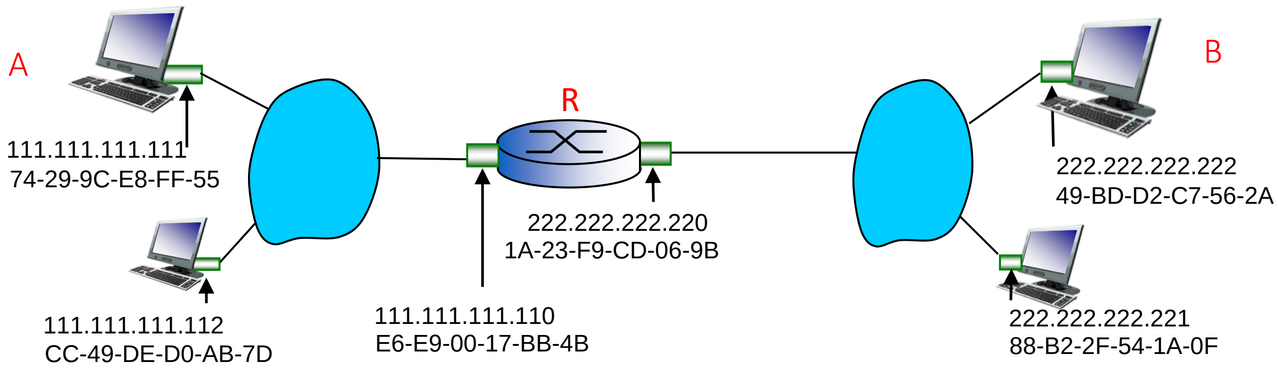
Λειτουργία ARP πρωτοκόλλου στο ίδιο LAN

- Ο A θέλει να στείλει ένα πακέτο δεδομένων στον B
  - Η MAC διεύθυνση του B δεν είναι στον ARP πίνακα του A.
- Ο A στέλνει broadcast ένα ARP query πλαίσιο, που περιέχει την IP διεύθυνση του B
  - θέτοντας MAC διεύθυνση προορισμού = FF-FF-FF-FF-FF-FF
  - Όλοι οι κόμβοι στο LAN λαμβάνουν το ARP query
- Ο B λαμβάνει το πακέτο ARP και απαντά στον A με τη MAC διεύθυνσή του
  - το πλαίσιο στέλνεται στη MAC διεύθυνση του B (unicast)
- Ο A αποθηκεύει το ζεύγος διευθύνσεων IP-MAC στον ARP πίνακά του μέχρι η πληροφορία να παλιώσει (να περάσει χρόνος TTL)
  - *soft state*: πληροφορία που παλιώνει και απαλείφεται όταν περάσει συγκεκριμένος χρόνος, αλλιώς ανανεώνεται.
- Το ARP είναι “plug-and-play” (τοποθέτησης και άμεσης λειτουργίας):
  - οι κόμβοι δημιουργούν τους πίνακες ARP χωρίς παρέμβαση του διαχειριστή δικτύου

Δρομολόγηση πακέτου σε κόμβο εκτός LAN

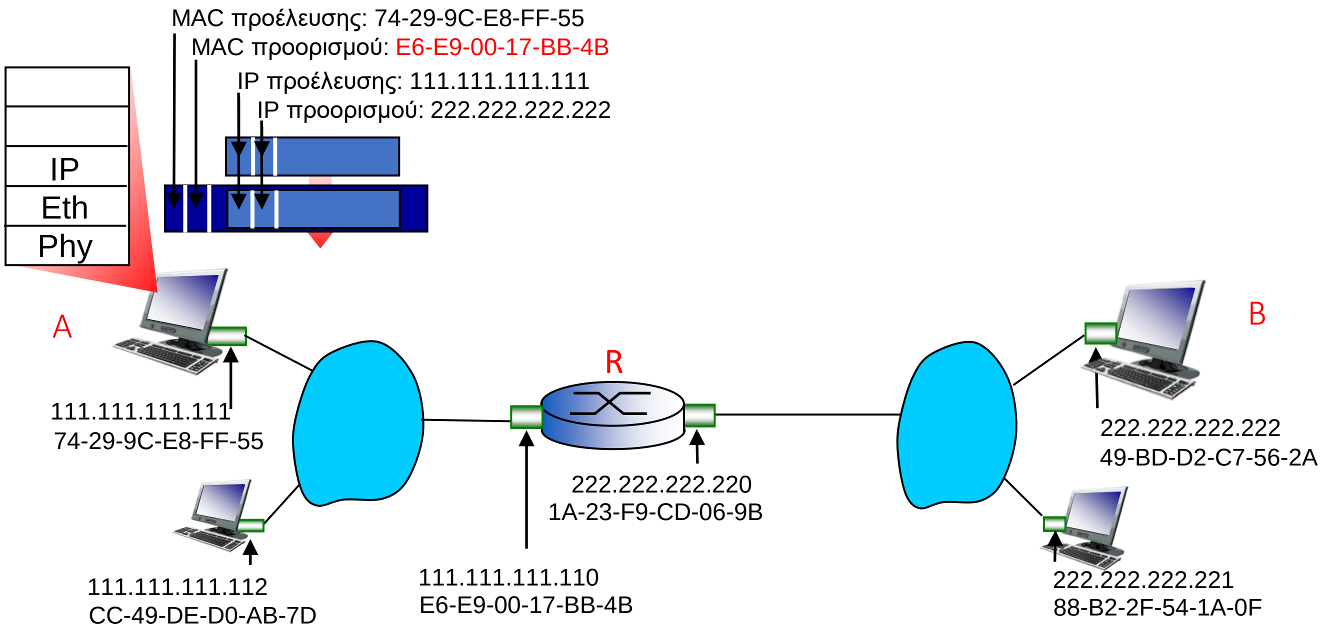
Βήμα-προς-βήμα η αποστολή πακέτου από τον A στον B μέσω δρομολογητή R

- Εστιάστε στην εύρεση και χειρισμό των διευθύνσεων – σε επίπεδο IP (datagram) και MAC (πλαίσιο)
- Υποθέστε ότι ο A γνωρίζει την IP διεύθυνση του B
- Υποθέστε ότι ο A γνωρίζει την IP διεύθυνση του δρομολογητή, R
- Υποθέστε ότι ο A γνωρίζει τη MAC διευθυνση του R



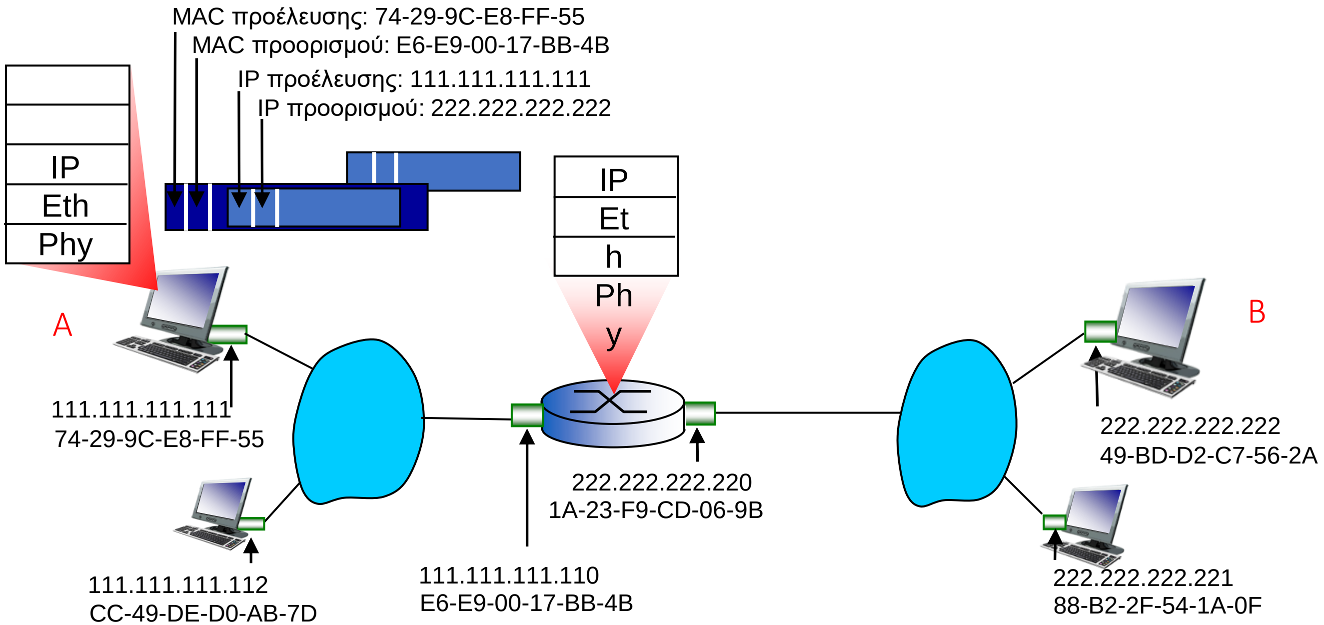
Δρομολόγηση πακέτου σε κόμβο εκτός LAN

- Ο A δημιουργεί IP πακέτο με IP διεύθυνση προέλευσης αυτήν του A, και IP διεύθυνση προορισμού αυτήν του B
- Ο A δημιουργεί πλαίσιο στο επίπεδο ζεύξης που περιέχει το IP πακέτο. Βάζει τη MAC διεύθυνση του δρομολογητή R σαν διεύθυνση προορισμού.



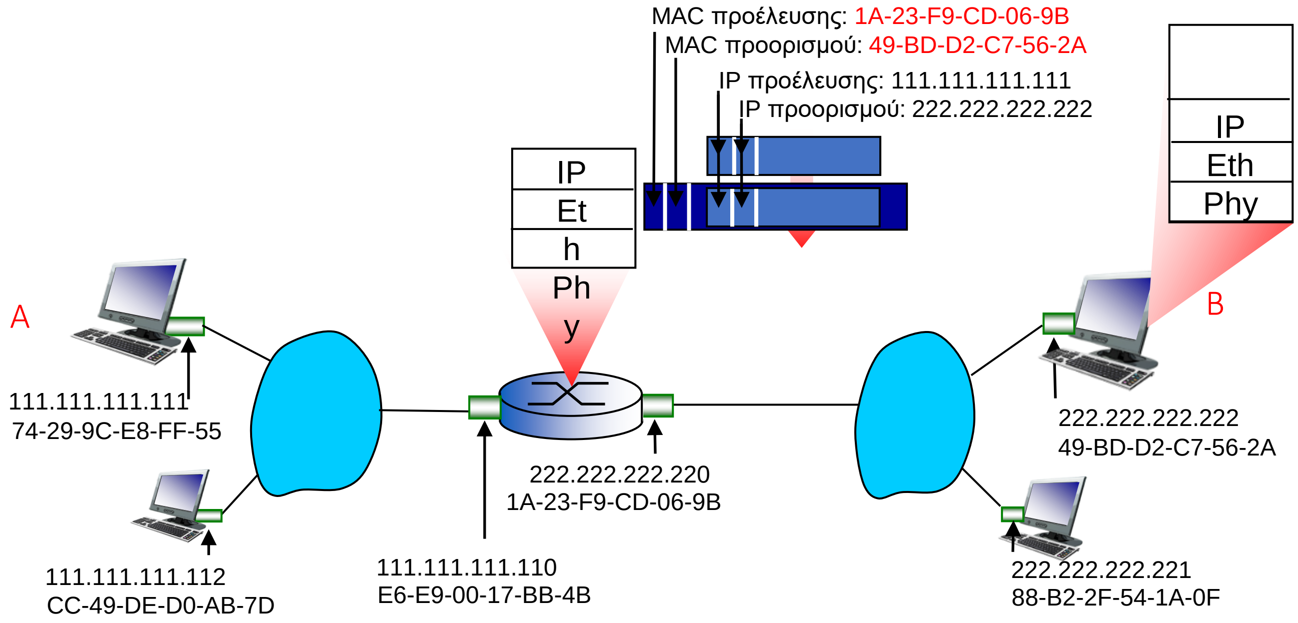
Δρομολόγηση πακέτου σε κόμβο εκτός LAN

- Το πλαίσιο αποστέλλεται από τον A στον R
- Το πλαίσιο λαμβάνεται στον R, αφαιρείται η κεφαλίδα του επιπέδου ζεύξης και το IP πακέτο επεξεργάζεται από το επίπεδο δικτύου του δρομολογητή



Δρομολόγηση πακέτου σε κόμβο εκτός LAN

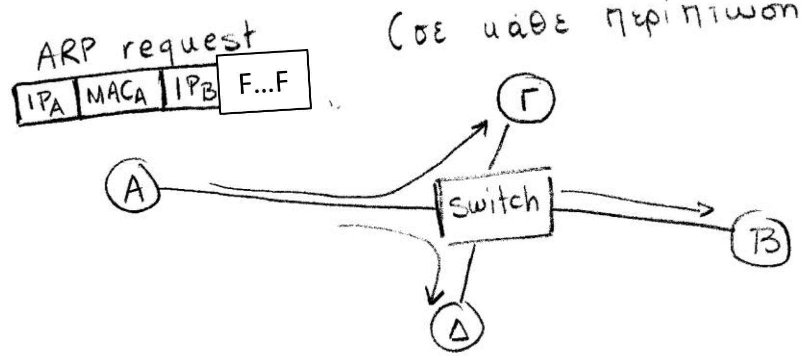
- Ο R αποφασίζει πού θα δρομολογήσει το πακέτο και προωθεί το πακέτο με IP διεύθυνση προέλευσης A και προορισμού B στο επίπεδο ζεύξης
- Ο R δημιουργεί πλαίσιο επιπέδου ζεύξης, που περιέχει το IP πακέτο από τον A στον B, με τη MAC address του B ως διεύθυνση προορισμού

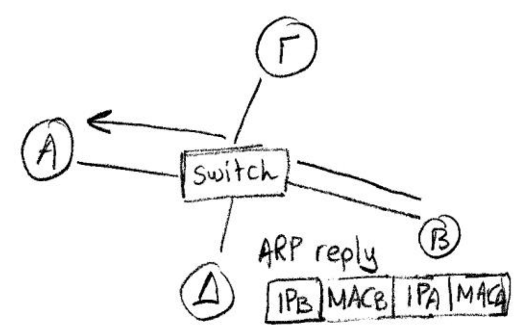


ARP protocol. (IP address resolution)

Προκειμένου να λάβει ο παραλήπτης ένα πακέτο χρειάζεται ο αποστολέας να γνωρίζει

- τη MAC address του παραλήπτη (αν είναι στο ίδιο υποδίκτυο)
- την IP address του παραλήπτη (σε κάθε περίπτωση)



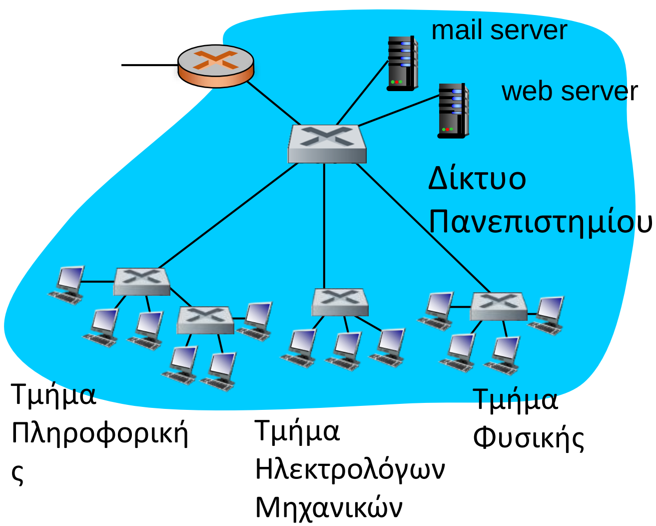


VLANs

- βλ. διαφάνειες 241-247 της παρουσίασης PLH22_OSS1_Networks_2023_2024_v2 που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr

Γιατί εικονικά τοπικά δίκτυα (VLANs);

Ζητήματα με την τυπική ιεραρχική δόμηση των τοπικών δικτύων μεταγωγής



- Ελλιπής απομόνωση της κίνησης
- η broadcast κίνηση επιπέδου 2 (π.χ. ARP μηνύματα) πρέπει να διασχίσει ολόκληρο το δίκτυο (single broadcast domain)
- Για 10 τμήματα των 25 ατόμων το καθένα, θα αρκούσαν 3 μεταγωγείς των 96 θυρών
  - αντί για 10 που απαιτεί η απομόνωση της κίνησης κάθε τμήματος
- Για υπαλλήλους που μετακινούνται ή ανήκουν σε 2 τμήματα ή περισσότερα, χρειάζεται επιπλέον καλωδίωση

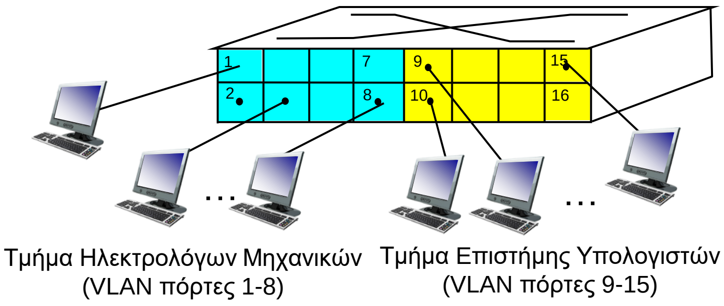
$\Rightarrow$Συνολικά δημιουργούνται ζητήματα ιδιωτικότητας, ασφάλειας και αποδοτικότητας.

Port-based VLANs : ιδέα

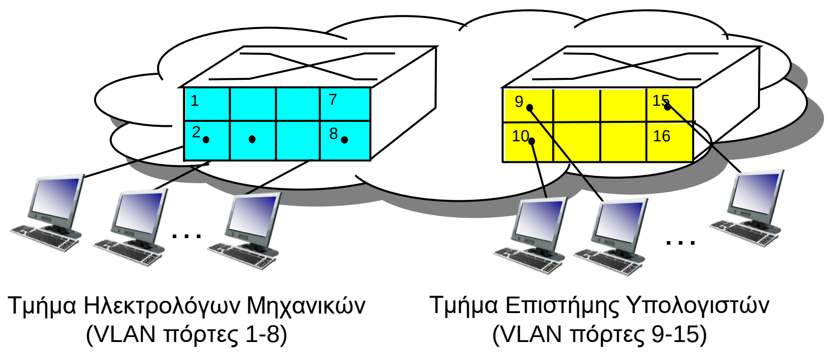
Virtual Local Area Network

Οι μεταγωγείς που έχουν δυνατότητες λειτουργίας VLAN μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε να μπορούν να λειτουργούν παράλληλα πολλαπλά εικονικά τοπικά δίκτυα πάνω από ένα μοναδικό φυσικό τοπικό δίκτυο μεταγωγής

port-based VLAN: οι πόρτες του μεταγωγέα ομαδοποιούνται (μέσω λογισμικού διαχείρισης του μεταγωγέα) έτσι ώστε ο μοναδικός μεταγωγέας …

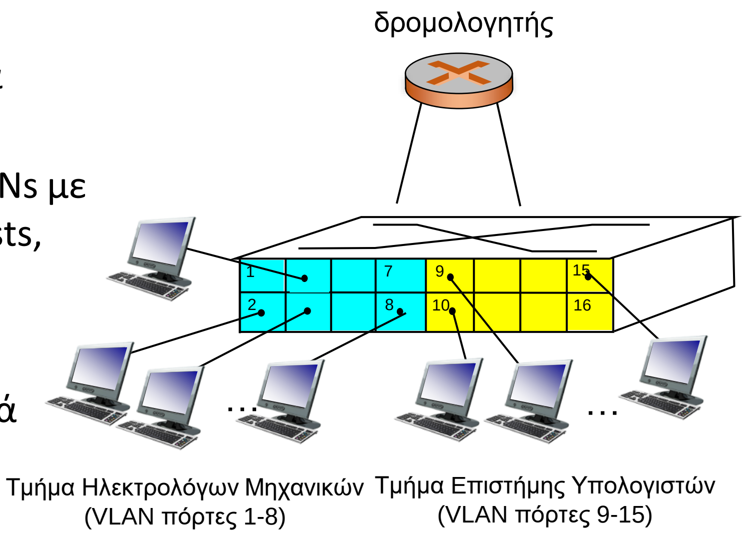


… να λειτουργεί ως πολλαπλοί εικονικοί μεταγωγείς

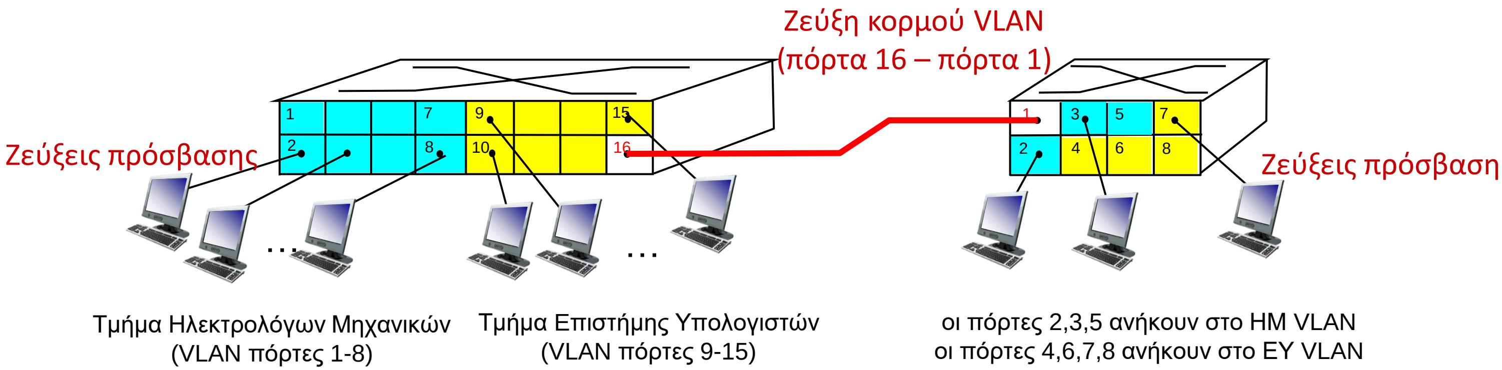


Port-based VLANs : ιδέα

- Απομόνωση κίνησης: πλαίσια από/προς πόρτες 1-8 μπορούν να φτάσουν μόνο ως τις πόρτες 1-8
    - Μπορεί κανείς να ορίσει VLANs με βάση MAC διευθύνσεις ή hosts, αντί με βάση τις πόρτες μεταγωγέα
- Δυναμική συμμετοχή: οι πόρτες μπορούν να αποδοθούν δυναμικά σε διάφορα VLANs
- Προώθηση δεδομένων μεταξύ VLANS: χωρίς δρομολόγηση (όπως με διαφορετικούς μεταγωγείς)



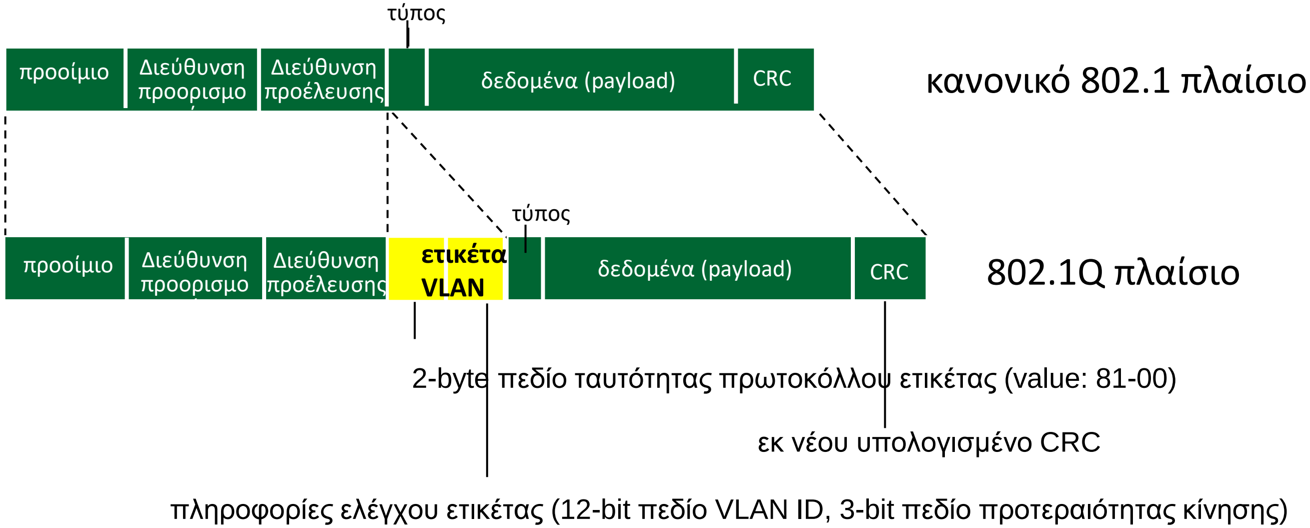
VLANs πάνω από πολλαπλούς μεταγωγείς



- *πόρτα trunk*: ανήκει σε όλα τα VLANs και προωθεί πλαίσια όλων των VLANs, μέσω της διασημειακής (point-to-point) ζεύξης κορμού VLAN (VLAN trunking), στον άλλο μεταγωγέα

  Πώς όμως τώρα ο μεταγωγέας γνωρίζει για πιο VLAN προορίζεται ένα πλαίσιο που φτάνει μέσω ζεύξης κορμού VLAN;
  - τα πλαίσια που προωθούνται εντός ενός VLAN μεταξύ μεταγωγέων δεν μπορούν να είναι τα «κανονικά» 802.1 πλαίσια αλλά πρέπει να φέρουν και κάποιο διακριτικό για το VLAN (VLAN ID)
  - Το πρωτόκολλο 802.1q προσθαφαιρεί επιπλέον πεδία κεφαλίδας στα πλαίσια που προωθούνται μέσω των θυρών trunk
- Χρειάζεται να είναι διασυνδεδεμένα όλα τα switches μέσω ζεύξεων κορμού (είτε μεταξύ διαδοχικών switches είτε σε ιεραρχική τοπολογία - αστέρα)

802.1Q VLAN frame format



- Η ετικέτα VLAN (VLAN tag) προστίθεται από το μεταγωγέα στην πλευρά της αποστολής μιας ζεύξης κορμού
- Ο μεταγωγέας στην πλευρά λήψης της ζεύξης κορμού αφαιρεί και αναλύει την ετικέτα προκειμένου να προωθήσει το πλαίσιο στις σωστές πόρτες

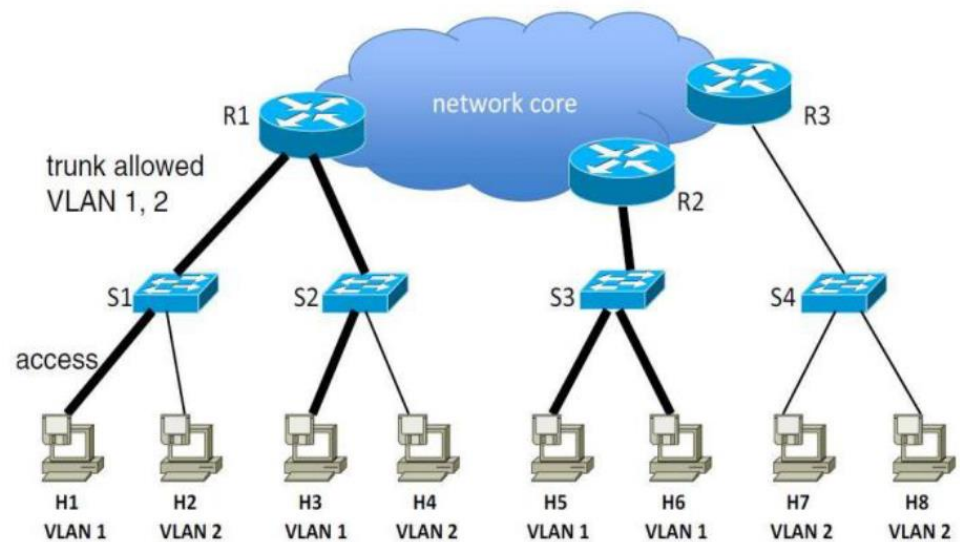
ΘΕΜΑ 5	Δίκτυα μεταγωγής (δικτύωση επιπέδου 2) και Εικονικά Τοπικά Δίκτυα

ΓΕ1/2022-23

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τη Μεταγωγή Επιπέδου Ζεύξης (πρωτόκολλο ARP) και τα Εικονικά Τοπικά Δίκτυα (VLANs).*

Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ1/2021/Θ6, ΓΕ/2022/Θ6*

Μέρος 2' – Ένα πανεπιστημιακό δίκτυο είναι οργανωμένο σε δύο (2) VLANs (VLAN 1 και VLAN 2), όπως φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4. Δίκτυο οργανωμένο σε 2 VLANs

(α) Αν ο κόμβος H1 στείλει ένα ARP πακέτο ποιοι κόμβοι θα το λάβουν; Ποιες συσκευές θα φροντίσουν για την μεταφορά του ARP πακέτου;

(β) Ο μεταγωγέας S1 τίνος εικονικού δικτύου την κίνηση προωθεί;

(γ) Όταν ο μεταγωγέας S1 λάβει πλαίσια από τον κόμβο H1, που θα τα προωθήσει;

(δ) Όταν ο μεταγωγέας S3 λάβει πλαίσια από τον κόμβο H5, που θα τα προωθήσει;

Μέρος 2ο

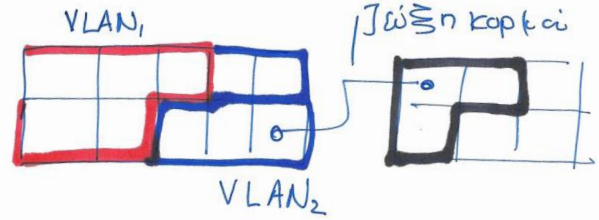
(α) Θα το λάβουν μόνο οι κόμβοι που ανήκουν στο VLAN1 (H3, H5, H6) και οι αντίστοιχοι μεταγωγείς S1, S2, S3 και δρομολογητές R1 και R2 με κόμβους που ανήκουν στο VLAN1 πίσω τους.

(β) Ο μεταγωγέας S1 προωθεί την κίνηση και των δύο εικονικών δικτύων (VLAN 1 και VLAN 2).

(γ) Θα τα προωθήσει μόνο στη διεπαφή του με τον δρομολογητή R1 και όχι στη διεπαφή του με τον κόμβο H2.

(δ) Θα τα προωθήσει τόσο στη διεπαφή του με τον δρομολογητή R2 όσο και στη διεπαφή του με τον κόμβο H6.

VLAN



Απομόνωση
· Κίνησης

· Δυναμική απόδοση κίνησης

· Προώθηση Δεδομένων μεταξύ VLANS

Λειτουργία 802.1Q VLAN

Προσθήκη στο πλαίσιο 802.1

ετικέτας VLAN

μήκους 2 byte

12 bit VLANID

Άλλα bit ελέγχου

Αριθμός ζεύξεων κορμού

- εξαρτάται από τον αριθμό switches
- ανεξάρτητος από τον αριθμό VLANs

Συνδυαστική άσκηση
Switched ethernet/VLANs

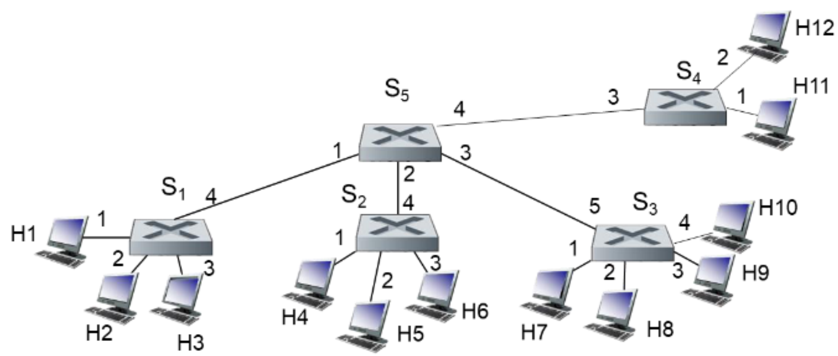
ΘΕΜΑ 6 ΓΕ1/2122	**Δικτύωση επιπέδου 2 (μηχανισμός αυτό-εκμάθησης τοπολογίας στους μεταγωγείς και εικονικά τοπικά δίκτυα-VLANs)**

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τη λειτουργία των εικονικών τοπικών δικτύων (Virtual Local Area Network -VLANs).*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/2021/Θ6

Δίνεται η παρακάτω τοπολογία δικτύου μεταγωγής που αποτελείται από πέντε μεταγωγείς (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) και 12 ξενιστές κόμβους (hosts), H1-H12. Θεωρήστε ότι τη χρονική στιγμή t=0 οι μεταγωγείς S_1-S_5, υφίστανται επανεκκίνηση και οι πίνακες μεταγωγής τους είναι κενοί.

Σημείωση: Οι κόμβοι H1-H12 έχουν ενημερωμένες τις ARP caches τους με τις MAC διευθύνσεις των κόμβων του δικτύου, δλδ. δε χρειάζεται να αποσταλούν επιπλέον ARP μηνύματα στο δίκτυο.



(α) Ποιοι από τους μεταγωγείς στο σχήμα είναι μεταγωγείς πρόσβασης και ποιοι είναι μεταγωγείς συγκέντρωσης;

(β) Το χρονοδιάγραμμα των εκπομπών στο δίκτυο είναι το εξής (ο χρόνος μετράται σε ακέραια πολλαπλάσια της χρονικής μονάδας):

t=1 : H1 στέλνει στον H6

t=2 : H5 στέλνει στον H2 και H12 στέλνει στον H11

t=3 : H6 στέλνει στον H3

t=4 : H6 στέλνει στον H1

t=5 : H12 στέλνει στον H9 και H6 στέλνει στον H5

t=6 : H4 στέλνει στον H5 και H8 στέλνει στον H7

t=7 : H3 στέλνει στον H6

Ο χρόνος μετάδοσης των πλαισίων πάνω από κάθε ζεύξη, που περιλαμβάνει όλους τους τύπους καθυστέρησης που υφίστανται τα πλαίσια, είναι σταθερός και ίσος με *μια χρονική μονάδα*.

Τα περιεχόμενα των πινάκων μεταγωγής των μεταγωγέων S_1 - S_5 κατά τις χρονικές στιγμές από t=1 ως t=4, ως αποτέλεσμα των παραπάνω εκπομπών, απεικονίζονται στον παρακάτω πίνακα. Κάθε εγγραφή στις στήλες 2-6 είναι ένα ζεύγος τιμών (MAC διεύθυνση, interface id).

Συμπληρώστε τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα, για τις χρονικές στιγμές από t=5 ως και t =10.

Χρονική στιγμή	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**
t = 1	-	-	-	-	-
t = 2	(MAC H1, 1)				
t = 3	(MAC H1, 1)	(MAC H5, 2)		(MAC H12, 2)	(MAC H1, 1)
t = 4	(MAC H1, 1)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3)	(MAC H1, 5)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4)
t = 5					
t = 6					
t = 7					
t = 8					
t = 9					
t = 10					

(γ) Έστω, και ανεξάρτητα από το ερώτημα (β), οι πίνακες μεταγωγής στους μεταγωγείς S_1 - S_5 κάποια χρονική στιγμή t έχουν τη μορφή:

Χρονική στιγμή	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**S_4**	**S_5**
t	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H12, 4)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H12, 4) (MAC H4, 1)	(MAC H1, 5) (MAC H5, 5) (MAC H12, 5) (MAC H8, 2)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3) (MAC H5, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4)

Αν τη χρονική στιγμή t+1, ο H1 αποστείλει πλαίσιο στον κόμβο H8, περιγράψτε (i) ποιοι μεταγωγείς θα λάβουν τελικά το πλαίσιο και από ποια διεπαφή, (ii) ποιοι θα το προωθήσουν σε μια μόνο διεπαφή τους και ποιοι σε περισσότερες και ποιες είναι αυτές, (iii) ποιοι θα κάνουν νέα εγγραφή στον πίνακα μεταγωγής τους και για ποιον κόμβο.

Απαντήστε στα ίδια ερωτήματα αν τη χρονική στιγμή t+1 αντί του H1, αποστείλει πλαίσιο ο κόμβος H9 στον H8.

(δ) Ο διαχειριστής του δικτύου παρατηρεί ότι οι κόμβοι που είναι συνδεδεμένοι στους μεταγωγείς S_1, S_2 τείνουν να επικοινωνούν μεταξύ τους και ότι το αντίστοιχο συμβαίνει για τους κόμβους που είναι συνδεδεμένοι στους μεταγωγείς S_3, S_4. Αποφασίζει συνεπώς να ορίσει δύο εικονικά τοπικά δίκτυα, ένα (VLAN1) που να περιλαμβάνει τους κόμβους H1-H6 και ένα (VLAN2) με τους κόμβους H7-H12, ορίζοντας παράλληλα πάνω στον συγκεντρωτή μεταγωγέα τις θύρες 1,2 να εξυπηρετούν αποκλειστικά το VLAN1 και τις θύρες 3,4 να εξυπηρετούν αποκλειστικά το VLAN2. Προσδιορίστε τα περιεχόμενα των πινάκων μεταγωγής των μεταγωγέων S_1 - S_5 τη χρονική στιγμή t = 10, για το χρονοδιάγραμμα εκπομπών του ερωτήματος (β).

ΛΥΣΗ

(α) Υπάρχουν 4 μεταγωγείς πρόσβασης (S_1, S_2, S_3, S_4) και 1 μεταγωγέας συγκέντρωσης (S_5).

(β) Οι πίνακες έχουν ως εξής:

Χρονική στιγμή	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
t = 1	-	-	-	-	-
t = 2	(MAC H1, 1)				
t = 3	(MAC H1, 1)	(MAC H5, 2)		(MAC H12, 2)	(MAC H1, 1)
t = 4	(MAC H1, 1)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3)	(MAC H1, 5)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4)
t = 5	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H12, 4)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3) (MAC H12, 4)	(MAC H1, 5) (MAC H5, 5) (MAC H12, 5)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3) (MAC H5, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4) (MAC H6, 2)
t = 6	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H12, 4) (MAC H6, 4)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3) (MAC H12, 4)	(MAC H1, 5) (MAC H5, 5) (MAC H12, 5) (MAC H6, 5)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3) (MAC H5, 3) (MAC H6, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4) (MAC H6, 2)
t = 7	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H12, 4) (MAC H6, 4)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3) (MAC H12, 4) (MAC H4, 1)	(MAC H1, 5) (MAC H5, 5) (MAC H12, 5) (MAC H6, 5) (MAC H8, 2)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3) (MAC H5, 3) (MAC H6, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4) (MAC H6, 2)
t= 8	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H12, 4) (MAC H6, 4) (MAC H3, 3)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3) (MAC H12, 4) (MAC H4, 1)	(MAC H1, 5) (MAC H5, 5) (MAC H12, 5) (MAC H6, 5) (MAC H8, 2)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3) (MAC H5, 3) (MAC H6, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4) (MAC H6, 2) (MAC H8, 3)

t = 9	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H12, 4) (MAC H6, 4) (MAC H3, 3) (MAC H8, 4)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3) (MAC H12, 4) (MAC H4, 1) (MAC H8, 4)	(MAC H1, 5) (MAC H5, 5) (MAC H12, 5) (MAC H6, 5) (MAC H8, 2)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3) (MAC H5, 3) (MAC H6, 3) (MAC H8, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4) (MAC H6, 2) (MAC H8, 3) (MAC H3, 1)
t = 10	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H12, 4) (MAC H6, 4) (MAC H3, 3) (MAC H8, 4)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3) (MAC H12, 4) (MAC H4, 1) (MAC H8, 4) (MAC H3, 4)	(MAC H1, 5) (MAC H5, 5) (MAC H12, 5) (MAC H6, 5) (MAC H8, 2)	(MAC H12, 2) (MAC H1, 3) (MAC H5, 3) (MAC H6, 3) (MAC H8, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4) (MAC H6, 2) (MAC H8, 3) (MAC H3, 1)

(γ) Αν έχουμε εκπομπή Η1→Η8

- Ο S_1 θα λάβει το πλαίσιο από τη διεπαφή 1 και θα το προωθήσει στις διεπαφές 2,3, και 4. Δε θα κάνει νέα εγγραφή αφού ήδη γνωρίζει για τον κόμβο Η1.
- Ο S_5 λάβει το πλαίσιο από τη διεπαφή 1 και θα το προωθήσει τις διεπαφές 2,3, και 4. Δε θα κάνει νέα εγγραφή αφού ήδη γνωρίζει για τον κόμβο Η1.
- Ο S_2 θα λάβει το πλαίσιο από τη διεπαφή 4 και θα το προωθήσει στις διεπαφές 1,2, και 3. Δε θα κάνει νέα εγγραφή αφού ήδη γνωρίζει για τον κόμβο Η1.
- Ο S_3 θα λάβει το πλαίσιο από τη διεπαφή 5 και θα το προωθήσει μόνο στη διεπαφή 2 γιατί έχει εγγραφή για τον κόμβο Η8. Δε θα κάνει νέα εγγραφή αφού ήδη γνωρίζει για τον κόμβο Η1.
- Ο S_4 θα λάβει το πλαίσιο από τη διεπαφή 3 και θα το προωθήσει στις διεπαφές 1 και 2. Δε θα κάνει νέα εγγραφή αφού ήδη γνωρίζει για τον κόμβο Η1.

Αν έχουμε εκπομπή Η9→Η8, ο μόνος μεταγωγέας που θα "δει" το πλαίσιο είναι ο S3, που θα λάβει το πλαίσιο από τη διεπαφή 3, θα κάνει νέα εγγραφή για τον κόμβο 9 (MAC H9, 3) στον πίνακα μεταγωγής του και θα το προωθήσει στη διεπαφή 2.

(δ) Ο ορισμός των 2 εικονικών τοπικών δικτύων απομονώνει τα ζεύγη των μεταγωγέων. Ο συγκεντρωτής μεταγωγέας δεν προωθεί πλαίσια με προορισμό κόμβο του VLAN1 στους μεταγωγείς S_3 και S_4 και, αντίστοιχα, δεν προωθεί πλαίσια με προορισμό κόμβο του VLAN2 στους μεταγωγείς S_1 και S_2. Κατά συνέπεια, οι μεταγωγείς αγνοούν κόμβους εκτός του δικού τους εικονικού δικτύου.

Ο πίνακας μεταγωγής στο μεταγωγέα S_5 δεν επηρεάζεται σε αυτήν την περίπτωση.

Χρονική στιγμή	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
t = 10	(MAC H1, 1) (MAC H5, 4) (MAC H6, 4) (MAC H3, 3)	(MAC H5, 2) (MAC H1, 4) (MAC H6, 3) (MAC H4, 1) (MAC H3, 4)	(MAC H12, 5) (MAC H8, 2)	(MAC H12, 2) (MAC H8, 3)	(MAC H1, 1) (MAC H5, 2) (MAC H12, 4) (MAC H6, 2) (MAC H8, 3) (MAC H3, 1)

2. Ψηφιακές Επικοινωνίες

- Ακολουθεί αυτούσια η ενδεικτική παρουσίαση PLH22_2nd_OSS_Digital_Comms_2023_v1.0 που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr

ΠΛΗ 22: Βασικά Ζητήματα Δίκτυα Η/Υ

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πρόγραμμα, «Πληροφορική»

Εισαγωγή στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

2η ΟΣΣ

2023-2024

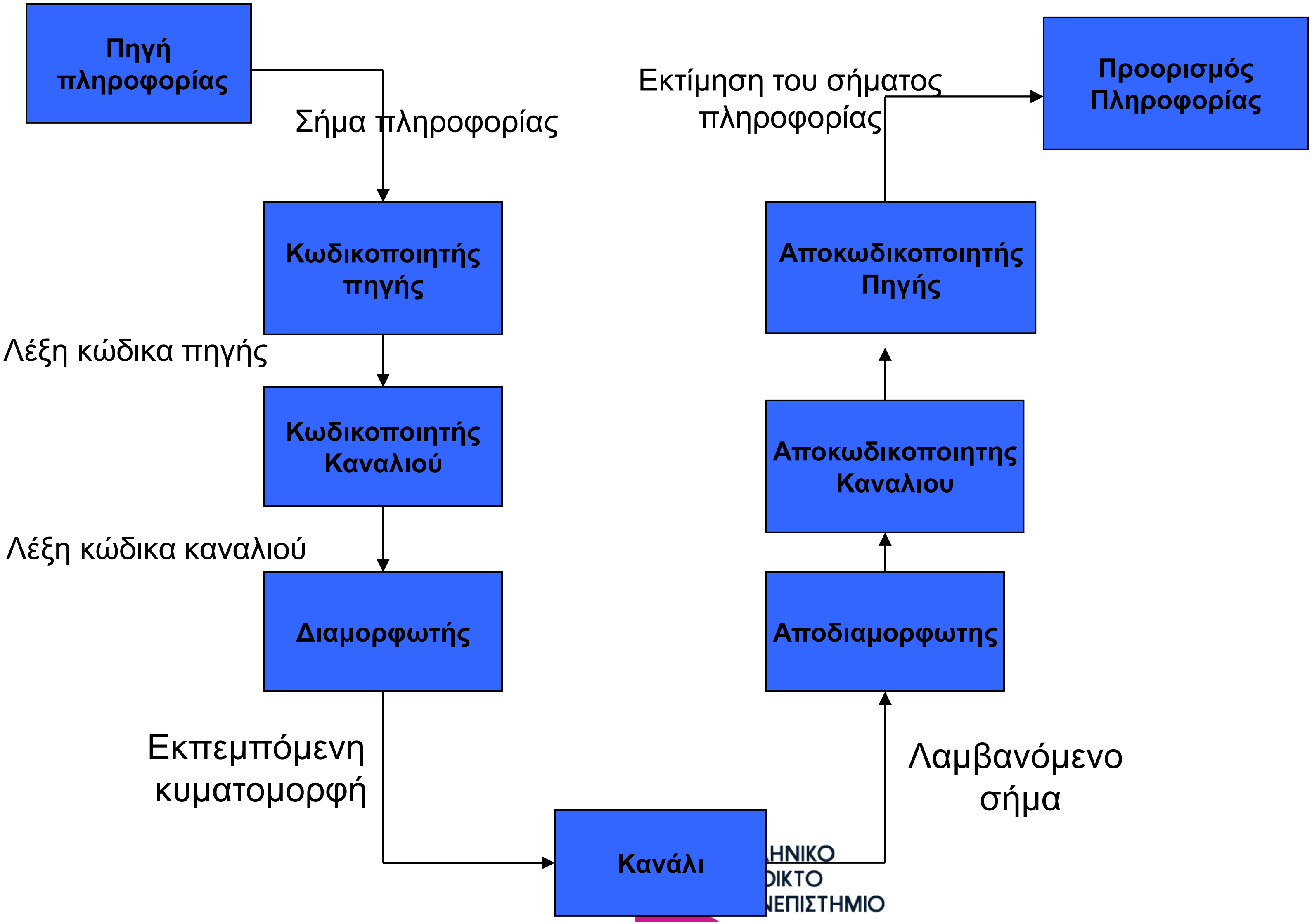
Στόχοι Μελέτης

- Παρουσίαση Βασικού (Τηλ)επικοινωνιακού Μοντέλου
- Κατανόηση Βασικών Εννοιών Σημάτων & Συστημάτων
  – Μαθηματική Εισαγωγή
  – Τύποι Σημάτων
  – Εκφράσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου
  – Περιοδικότητα Σημάτων
  – Εκφράσεις σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων
  – Μετασχηματισμός Fourier

Βασικές Αρχές (Τηλ)επικοινωνιακών Συστημάτων

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Στοιχεία ενός Επικοινωνιακού Συστήματος



Μαθηματική Εισαγωγή

Διακριτά σύνολα αριθμών

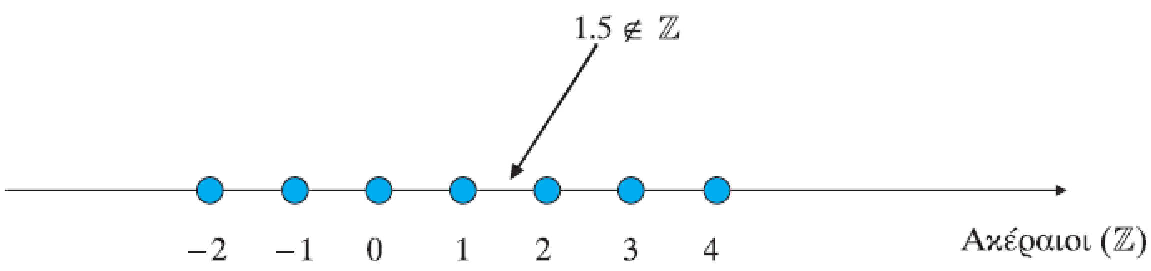
- Φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
- Ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$
- Ρητοί αριθμοί, που ορίζονται ως το πηλίκο ακεραίων:

$$z \in \mathbb{Q} \text{ όταν } \exists\, x, y \in \mathbb{Z}\ (y \neq 0) \text{ ώστε } z = \frac{x}{y}$$

- Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή πηλίκου ακεραίων. Είναι οι δεκαδικοί με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία.

Παραδείγματα άρρητων: $\pi = 3.1415927\ldots$, οι ρίζες μη τελείων τετραγώνων $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ κ.λπ.

Τα παραπάνω σύνολα είναι διακριτά, δηλαδή αποτελούνται από διακριτές τιμές και είναι δυνατό μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών τους να υπάρχει αριθμός που να μην ανήκει στο σύνολο.



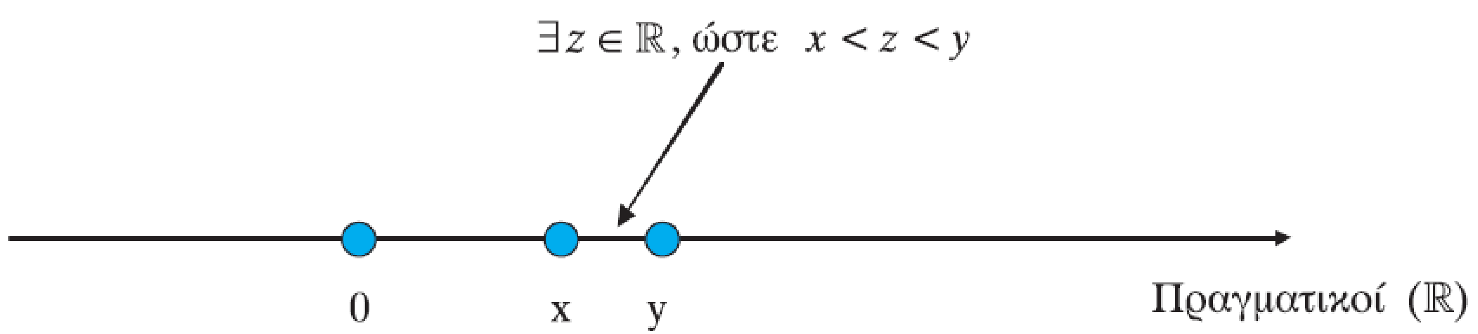
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Συνεχή σύνολα αριθμών

- Οι πραγματικοί αριθμοί ($\mathbb{R}$) συμπεριλαμβάνουν ρητούς και άρρητους.

Αποτελούν ένα συνεχές σύνολο αριθμών, δηλαδή για κάθε ζεύγος πραγματικών υπάρχει πραγματικός που να βρίσκεται ανάμεσά τους:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \text{με } x<y,\ \exists\, z \in \mathbb{R},\ \text{ώστε } x<z<y$$



Σχήμα 2.2

Παράδειγμα συνεχούς συνόλου

Μιγαδικοί Αριθμοί (Ι)

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τους αριθμούς $z \in \mathbb{C}$ που ορίζονται ως εξής:

$$z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

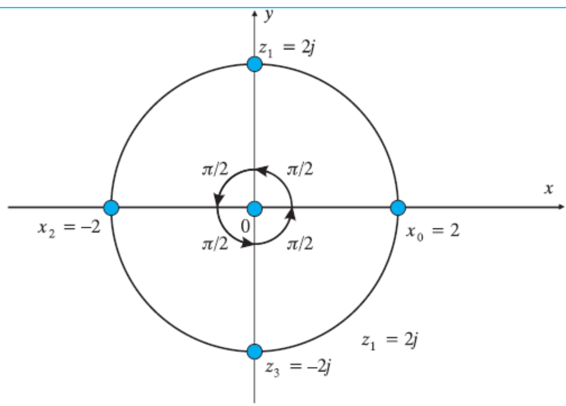
Ο μιγαδικός αριθμός «j» ισούται με $j = \sqrt{-1}$ και ισχύει $j^2 = -1$.

Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ισούται με $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ο συζυγής μιγαδικός ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ είναι ο $z^* = x - jy$.

Ισχύει ότι $z \cdot z^* = (x + jy)\cdot(x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

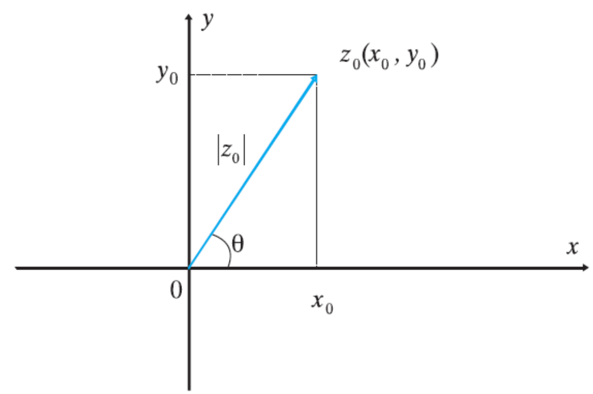
Ο πολλαπλασιασμός του «j» επί έναν πραγματικό αριθμό ισοδυναμεί με αριστερόστροφη στροφή φάσης κατά $\pi/2$.



Σχήμα 2.3

Πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού επί «j»

Ο άξονας των x ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών και ο άξονας των y ονομάζεται άξονας των φανταστικών αριθμών.

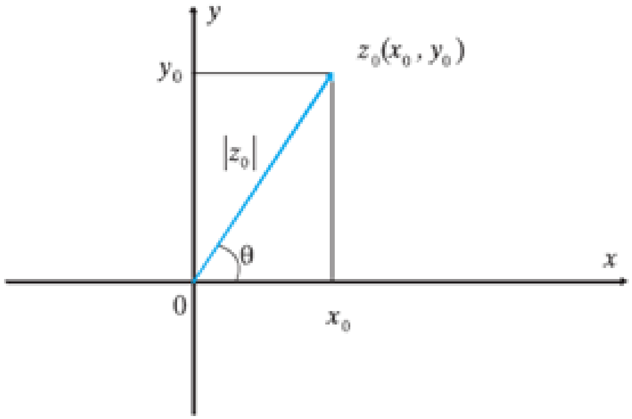


Σχήμα 2.7

Δισδιάστατη απεικόνιση μιγαδικού αριθμού

Μιγαδικοί Αριθμοί (II)

Ισχύει ότι:



$$z_0 = x_0 + jy_0$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_0}{|z_0|} \Leftrightarrow x_0 = |z_0|\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_0}{|z_0|} \Leftrightarrow y_0 = |z_0|\sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$

Οπότε ο μιγαδικός z_0 μπορεί και να γραφεί ως:

$$z_0 = |z_0|\left[\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right]$$

Θέτοντας $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

θα είναι:

$$z_0 = |z_0| e^{j\theta}$$

Εξισώσεις Euler

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Εξισώσεις Euler

Ο μιγαδικός αριθμός $e^{j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$ έχει μοναδιαίο μέτρο διότι $\left|e^{j\theta}\right|=\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}=\sqrt{1}=1$

Ισχύει επίσης ότι:

$$e^{-j\theta}=\cos(-\theta)+j\sin(-\theta)=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$$

Άρα,

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)+\cos(\theta)-j\sin(\theta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos(\theta)$$

και

$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)-\cos(\theta)+j\sin(\theta)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin(\theta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι σχέσεις **Euler**:

$$e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\cos(\theta)\Leftrightarrow\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

και

$$e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\sin(\theta)\Leftrightarrow\sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

Εισαγωγή στα Σήματα

Σήμα

- **Σήμα:** Ο όρος “σήμα” χρησιμοποιείται κυρίως στον τομέα των Τηλεπικοινωνιών και αντιπροσωπεύει μια πληροφορία που μεταδίδεται από ένα μέρος σε κάποιο άλλο
  - Παραδείγματα: Η ομιλία του ανθρώπου, η ηχώ του ραντάρ, το εγκεφαλογράφημα

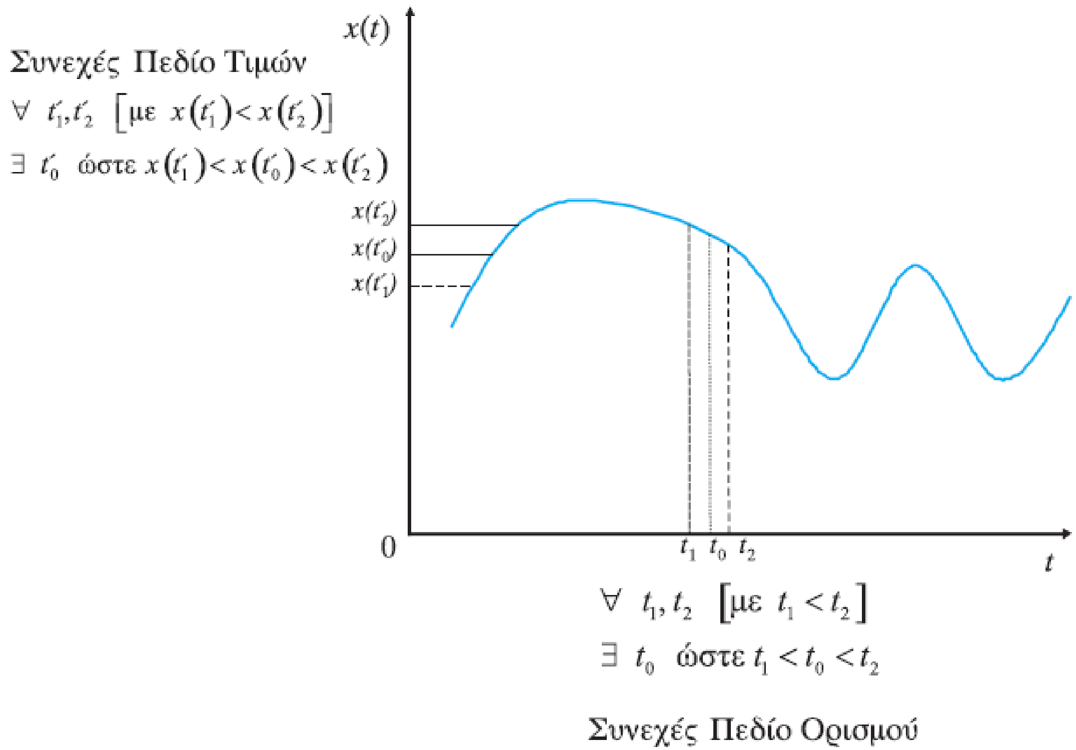
Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Κατηγορίες Σημάτων

- Σήματα Συνεχούς Χρόνου-Σήματα Διακριτού Χρόνου
- Τύποι Σημάτων
  - Περιοδικά Σήματα
  - Ειδικές Κατηγορίες Σημάτων
    - Ημιτονοειδή Σήματα
    - Ορθογωνικός Παλμός
    - Τριγωνικός Παλμός
    - Κρουστικά Σήματα
    - Σήμα Βήματος

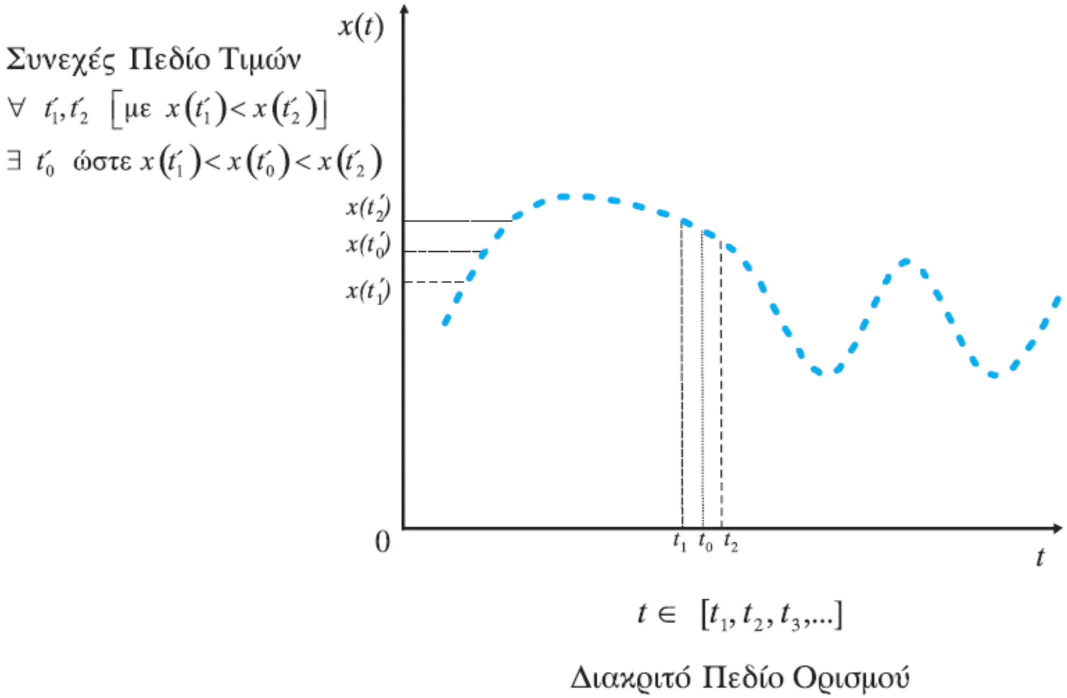
Σήματα συνεχούς χρόνου - αναλογικά



Τα σήματα συνεχούς χρόνου (αναλογικά) έχουν συνεχές πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$, $t \in \mathbb{R}$ είναι συνεχούς χρόνου.

Σήματα διακριτού χρόνου

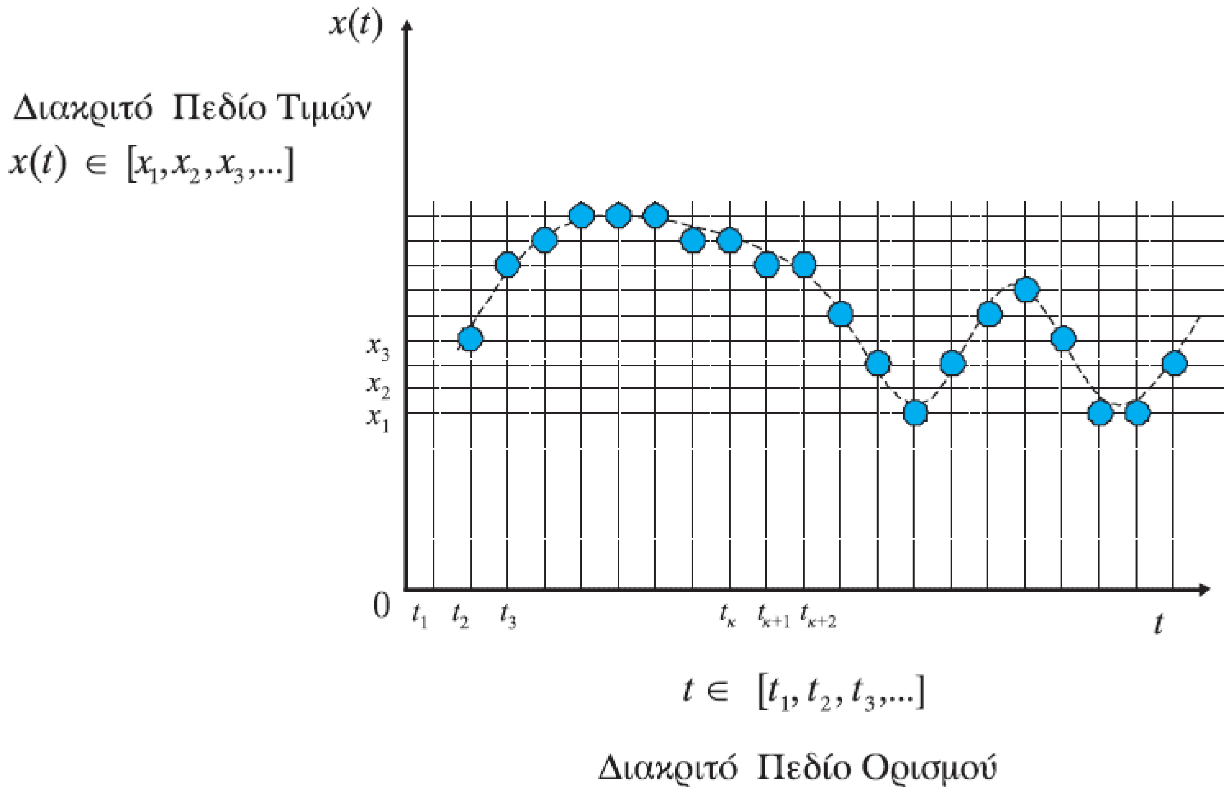
Τα σήματα διακριτού χρόνου έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και συνεχές πεδίο τιμών.



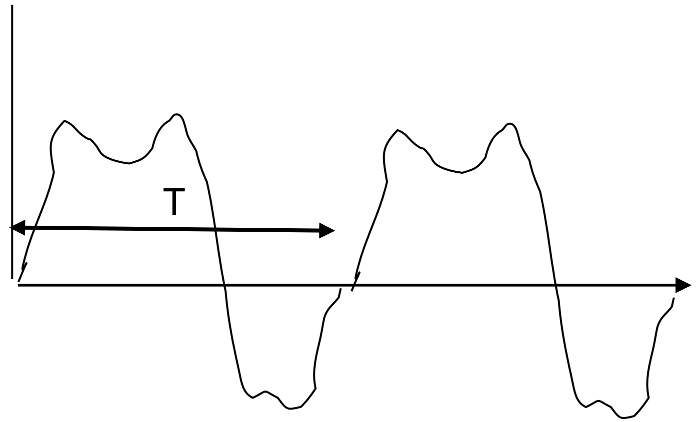
Για παράδειγμα, το σήμα $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} n\right)$, όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$ και T_0 άρρητος $\left(\text{π.χ. } T_0 = \sqrt{5}\right)$, είναι διακριτού χρόνου, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα συνεχές σύνολο [το $(-1,1)$] $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Ψηφιακά σήματα

Τα ψηφιακά σήματα έχουν διακριτό πεδίο ορισμού και διακριτό πεδίο τιμών. Για παράδειγμα, το σήμα $x(n)=\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}n\right)$, όπου $n=0,1,2,\ldots$ και T_0 ρητός, είναι ψηφιακό, διότι οι τιμές που παίρνει το σήμα $x(n)$ ανήκουν σε ένα διακριτό σύνολο [π.χ. για $T_0=5$, το $x(n)$ παίρνει τις τιμές $\{0.309,-0.809,1\}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$].



Περιοδικά Σήματα



Ένα σήμα $x(t)$ ορίζεται ως περιοδικό αν ισχύει ότι:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT) = x(t)\ \text{για}\ k = 1,2,\ldots$$

(Συν)ημιτονοειδή Σήματα

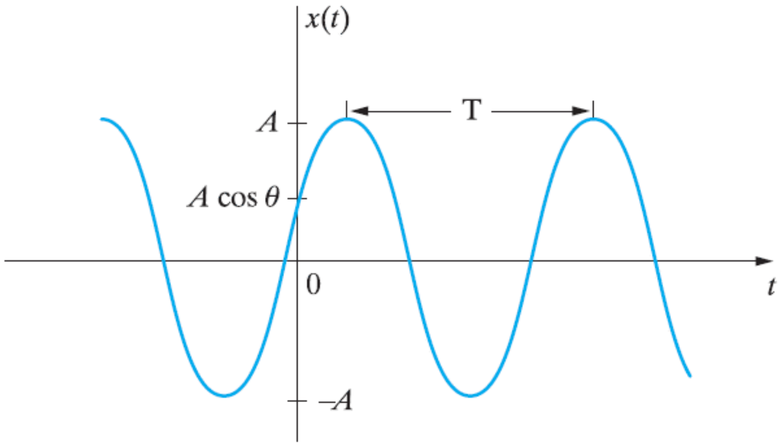
$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) = A \cdot \cos(2\pi f \cdot t + \theta) = A \cdot \sin\left(2\pi f \cdot t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

ω: κυκλική συχνότητα (μετράται σε rad/sec)

θ: φάση (μετράται σε rad)

f: συχνότητα (μετράται σε Hertz)

A: πλάτος (μετράται σε Volt)



Υπολογισμός περιόδου

Αναζητείται θετικό $T \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιο ώστε $\forall t \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x(t+T) = x(t) \Leftrightarrow A \cdot \cos(2\pi f(t+T)+\theta) = A \cdot \cos(2\pi ft+\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi ft + 2\pi fT + \theta) = \cos(2\pi ft+\theta) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{ισχύει ότι αν } \cos(x)=\cos(y), \\ \text{τότε } x = 2k\pi + y,\ k = 1,2,...\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi ft + 2\pi fT + \theta = 2\pi ft + \theta + 2k\pi, k = 1,2,...$$

Άρα,

$$2\pi fT = 2k\pi \Leftrightarrow T = \frac{k}{f}, k = 1,2,...$$

Η θεμελιώδης περίοδος λαμβάνεται για k=1 και ισούται με $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

67

Περιοδικότητα Αθροίσματος Περιοδικών Σημάτων

Περιοδικότητα αθροίσματος σημάτων

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2 θα είναι περιοδικό εάν:

$\exists\, m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 \Leftrightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_2}{m_1} \in \mathbb{Q}$ (μη αναγόμενο κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις).

Δηλαδή, θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι ρητός αριθμός.

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των δύο περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 .$$

Γενίκευση

Το σήμα που αποτελείται από το άθροισμα N περιοδικών σημάτων με περιόδους T_1, T_2,..., T_N θα είναι περιοδικό εάν:

$\exists\, m_1, m_2, ..., m_N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιοι ώστε:

$m_1 T_1 = m_2 T_2 = ... = m_N T_N .$

Η περίοδος του συνολικού σήματος θα ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων των συνιστωσών σημάτων, δηλαδή:

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = ... = m_N T_N$$

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Το άθροισμα περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου είναι περιοδικό σήμα αν και μόνο αν ο λόγος της περιόδου των επιμέρους σημάτων είναι ρητός αριθμός (μπορεί να γραφεί ως κλάσμα ακεραίων).
- Πως υπολογίζεται η περίοδος του σύνθετου σήματος?

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Η βασική περίοδος του σύνθετου σήματος N περιοδικών σημάτων υπολογίζεται ως εξής:
  - Γράφουμε το λόγο των περιόδων T_{o1}/T_{oi}, $2 \leq i \leq N$ ως λόγο ακεραίων, όπου T_{o1} η περίοδος του 1ου σήματος και T_{oi} η περίοδος των υπολοίπων N-1 σημάτων. Αν ένας από τους λόγους είναι άρρητος το άθροισμα δεν είναι περιοδικό σήμα.
  - Απαλείφουμε τους κοινούς όρους σε αριθμητή και παρονομαστή κάθε λόγου ακεραίων.
  - Η βασική περίοδος του σύνθετου σήματος είναι $T_o = k_o T_{o1}$, όπου k_o είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των επιμέρους λόγων.

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Θεωρείστε σήμα *v(t)* ως άθροισμα των περιοδικών σημάτων

$$v(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$
$$x_1(t) = \cos(3.5t)$$
$$x_2(t) = \cos(2t)$$
$$x_3(t) = \cos(\frac{7}{6}t)$$

- Είναι περιοδικό το σύνθετο σήμα και αν ναι ποια η περίοδός του?

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Υπολογίστε τους λόγους των περιόδων των επιμέρους σημάτων

$$T_{01}=\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{3.5}$$

$$T_{02}=\frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{2\pi}{2}$$

$$T_{03}=\frac{2\pi}{\omega_3}=\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{T_{01}}{T_{02}}=\frac{\frac{2\pi}{3.5}}{\frac{2\pi}{2}}=\frac{2}{3.5}=\frac{4}{7}$$

$$\frac{T_{01}}{T_{03}}=\frac{\frac{2\pi}{3.5}}{\frac{2\pi}{\frac{7}{6}}}=\frac{\frac{7}{6}}{3.5}=\frac{7}{21}$$

- Οι λόγοι είναι ρητοί αριθμοί και άρα το σύνθετο σήμα περιοδικό.

Περιοδικότητα Σύνθετων Σημάτων

- Απαλοιφή κοινών παραγόντων:
  - $T_{01}/T_{02} = 4/7$
  - $T_{01}/T_{03} = 7/21=1/3$
- Υπολογισμός ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου των παρονομαστών των λόγων:
  - $n_1= 3{\cdot}7=21$
- Βασική περίοδος του σύνθετου σήματος:
  - $T_0= n_1\, T_{01} = 21 \cdot 2\pi/3.5=12\pi$

Εναλλακτική λύση

- Αναζητούμε ελάχιστους ακέραιους m_1, m_2, m_3 ώστε να ισχύει

$$m_1 T_{01} = m_2 T_{02} = m_3 T_{03} \Leftrightarrow$$

$$m_1 \frac{2\pi}{3.5} = m_2 \frac{2\pi}{2} = m_3 \frac{2\pi}{\frac{7}{6}} \Leftrightarrow \{\text{διαίρεση κατά μέλη με } 2\}$$

$$m_1 \frac{1}{3.5} = m_2 \frac{1}{2} = m_3 \frac{1}{\frac{7}{6}} \Leftrightarrow \{\text{διαίρεση κατά μέλη με } 6\}$$

$$m_1 \frac{1}{21} = m_2 \frac{1}{12} = m_3 \frac{1}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 21 \\ m_2 = 12 \\ m_3 = 7 \end{cases}$$

Άρα σήμα περιοδικό με περίοδο $T_0 = m_1 T_{01} = m_2 T_{02} = m_3 T_{03} = 12\pi \text{ sec}$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Παράδειγμα Περιοδικότητας Σύνθετων Σημάτων

Άσκηση 5

Δίνεται το σήμα $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right)$, όπου $f(x) = \cos(\pi x)$.

Να εξεταστεί αν είναι περιοδικό και αν ναι να βρεθούν η περίοδος και η συχνότητά του.

Παράδειγμα Περιοδικότητας Σύνθετων Σημάτων

Είναι $s_1(t) = f(5t) + f\left(\frac{t}{2}\right) = \cos(5\pi t) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το $\cos(5\pi t)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}\sec$

Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $\mathrm{T}_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\sec$

Ο λόγος των περιόδων είναι $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2} = \frac{2/5}{4} = \frac{1}{10} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α=1,β=10 φυσικούς, άρα ρητός οπότε το σήμα $s_1(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $\mathrm{T} = \beta \mathrm{T}_1 = \alpha \mathrm{T}_2 = 4\sec$

Η συχνότητα του $s_1(t)$ είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} = 0.25$ Hz

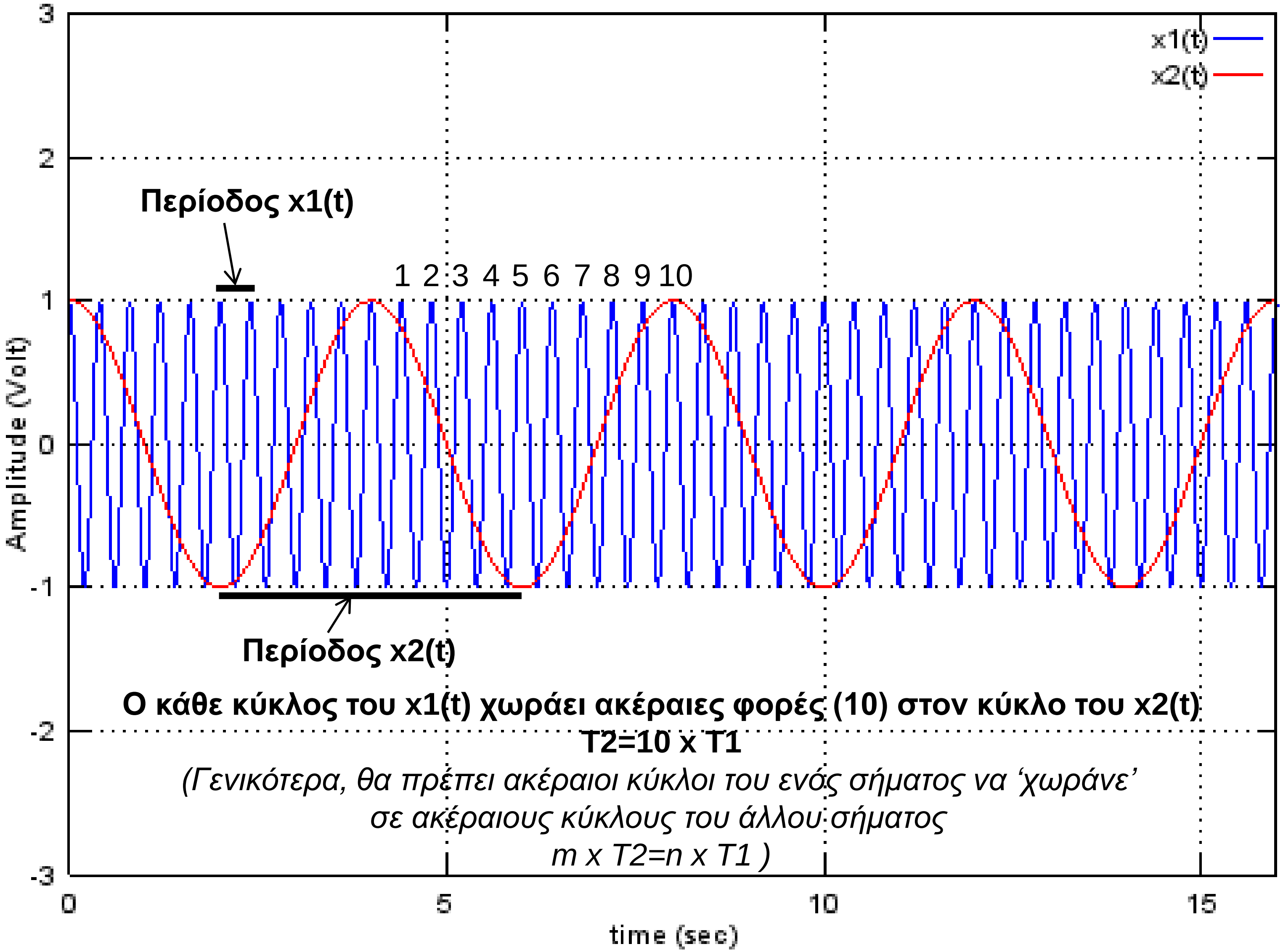
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Example 1a

- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*pi.*t); % 1st signal with frequency 2.5Hz
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal ‘b’ is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal ‘r’ is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

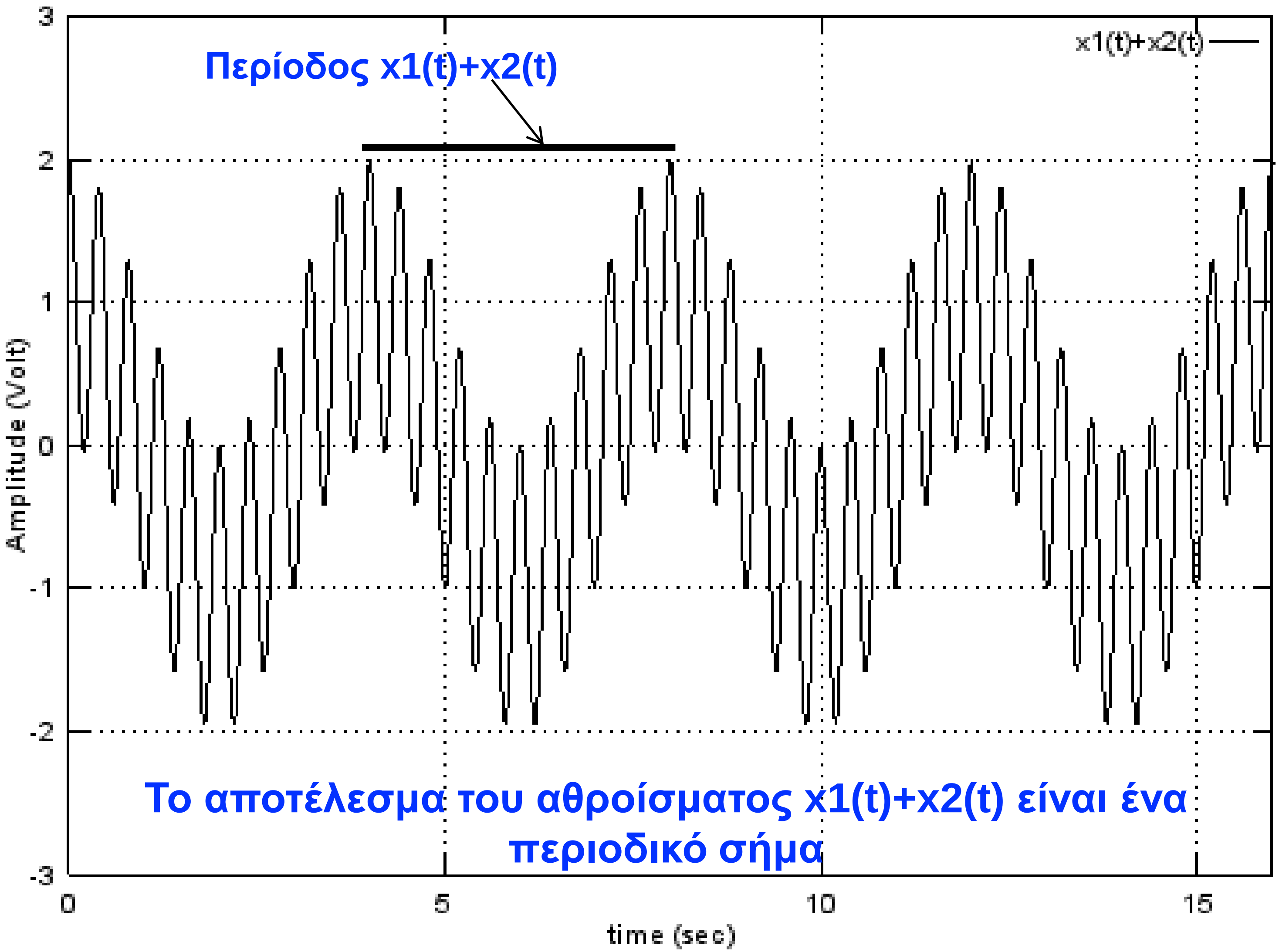
Σημείωση: Για την εγκατάσταση και τη χρήση του octave να δείτε το octave_tutorial_2023-24.ppt στο study.eap.gr (Βοηθητικό Υλικό ΟΣΣ/ΟΣΣ2)

Example 1a



3
2
1
0
-1
-2
-3
Amplitude (Volt)
0
5
10
15
time (sec)
x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) χωράει ακέραιες φορές (10) στον κύκλο του x2(t)
T2=10 x T1
(Γενικότερα, θα πρέπει ακέραιοι κύκλοι του ενός σήματος να ‘χωράνε’
σε ακέραιους κύκλους του άλλου σήματος
m x T2=n x T1)

Example 1a



Περίοδος x1(t)+x2(t)
x1(t)+x2(t)
Amplitude (Volt)
time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15
Το αποτέλεσμα του αθροίσματος x1(t)+x2(t) είναι ένα περιοδικό σήμα

Παραλλαγή

Διαφοροποίηση

Είναι $s_1(t) = \boxed{f(5t/\pi) +} f\left(\frac{t}{2}\right) = \boxed{\mathbf{cos(5t)}} + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

Υπολογίζουμε την περίοδο καθενός από τα επιμέρους περιοδικά σήματα:

Για το ***cos(5t)*** η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5}$ ***sec***

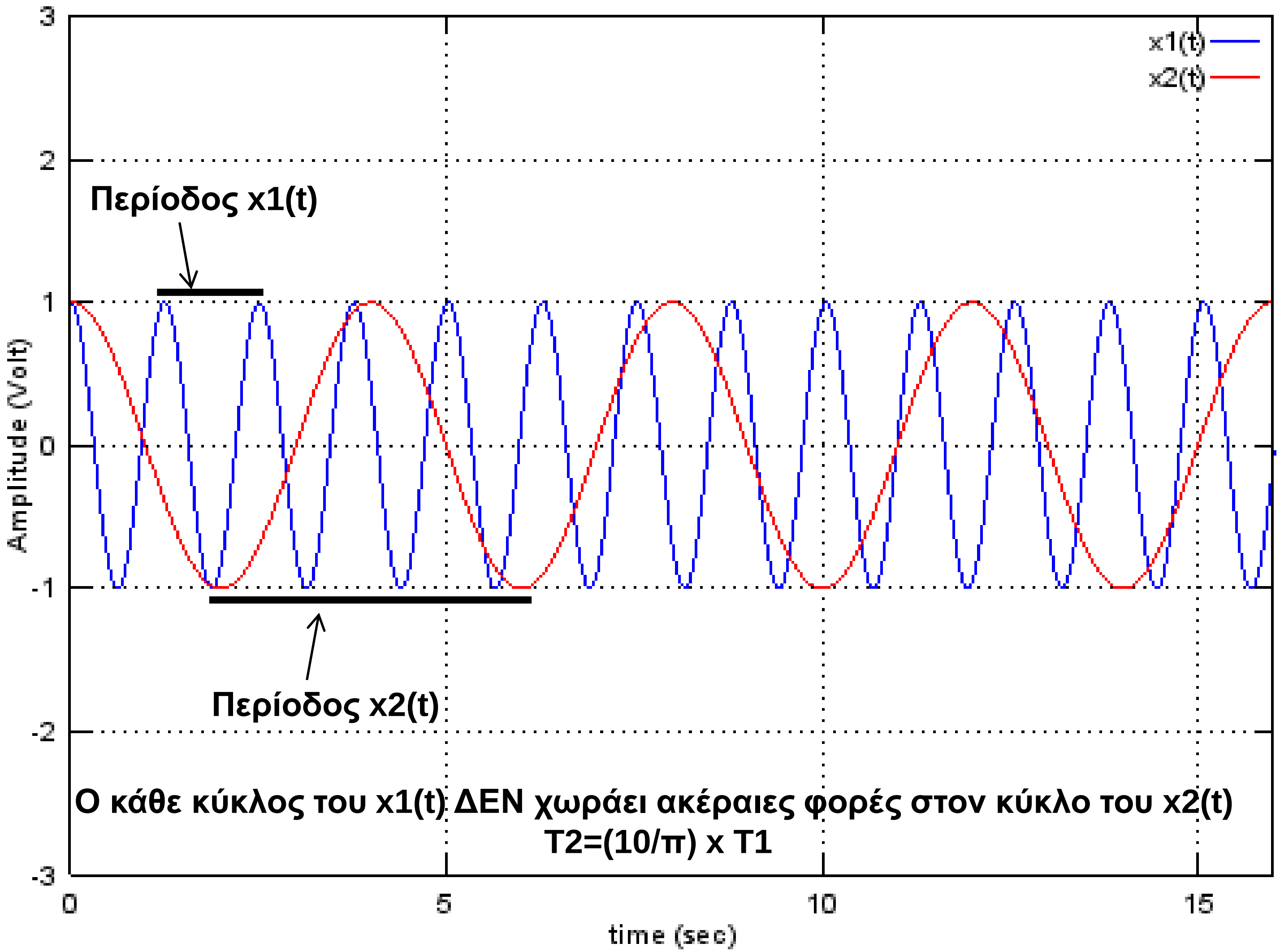
Για το $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ η περίοδος είναι $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4\,\text{sec}$

Ο λόγος των περιόδων είναι, $T_1/T_2 = \pi/10$ Άρρητος άρα το σήμα είναι μη περιοδικό

Example 1b

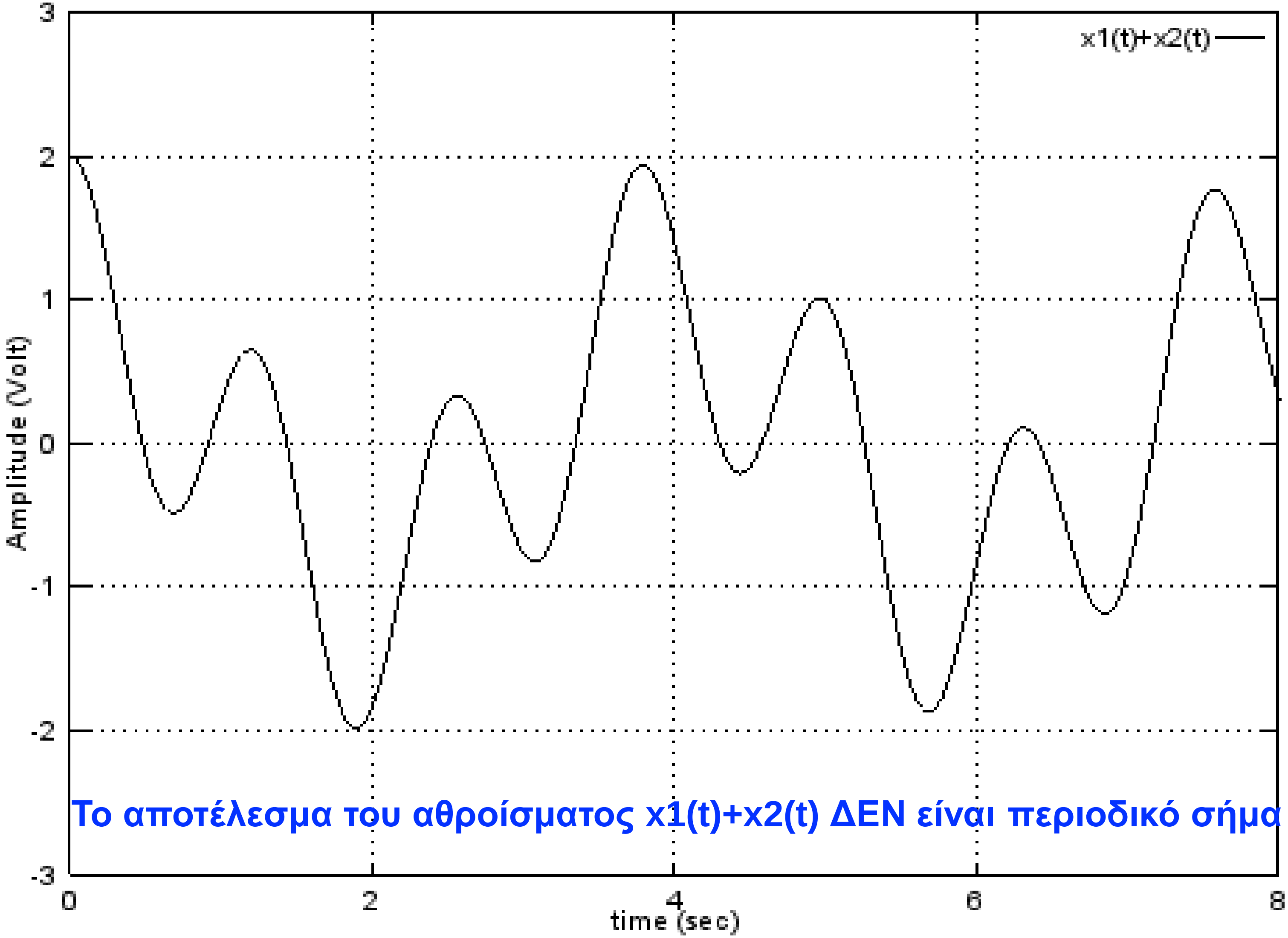
- figure; % figure creation
- Ts=1./50; % sample duration   (sampling frequency=50Hz)
- t=0:Ts:10000.*Ts; %create 10000 time samples
- x1=cos(5.*t); % 1st signal with frequency 2.5/pi Hz **Διαφοροποίηση σε σχέση με το example 1a**
- x2=cos(pi.*t./2); % 2nd signal with frequency 0.25Hz
- plot(t,x1,'b'); %plot 1st signal 'b' is for blue line
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- hold; %hold the first plot
- plot(t,x2,'r'); % plot the 2nd signal 'r' is for red line
- legend('x1(t)','x2(t)'); % show which plot corresponds to which signal
- grid; % show a rectangular grid
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- figure; % figure creation
- plot(t,x1+x2,'k'); %plot the sum of x1(t) and x2(t)
- xlabel('time (sec)'); % label of x- axis
- ylabel('Amplitude (Volt)'); % label of y-axis
- legend('x1(t)+x2(t)'); % show to which signal the plot corresponds
- axis([0 16 -3 3]); %adjust axis scaling : x axis between [0,16] and y axis between [-3,3]
- grid % show a rectangular grid

Example 1b



3
2
1
0
-1
-2
-3
Amplitude (Volt)
0
5
10
15
time (sec)
x1(t)
x2(t)
Περίοδος x1(t)
Περίοδος x2(t)
Ο κάθε κύκλος του x1(t) ΔΕΝ χωράει ακέραιες φορές στον κύκλο του x2(t)
T2=(10/π) x T1

Example 1b



Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

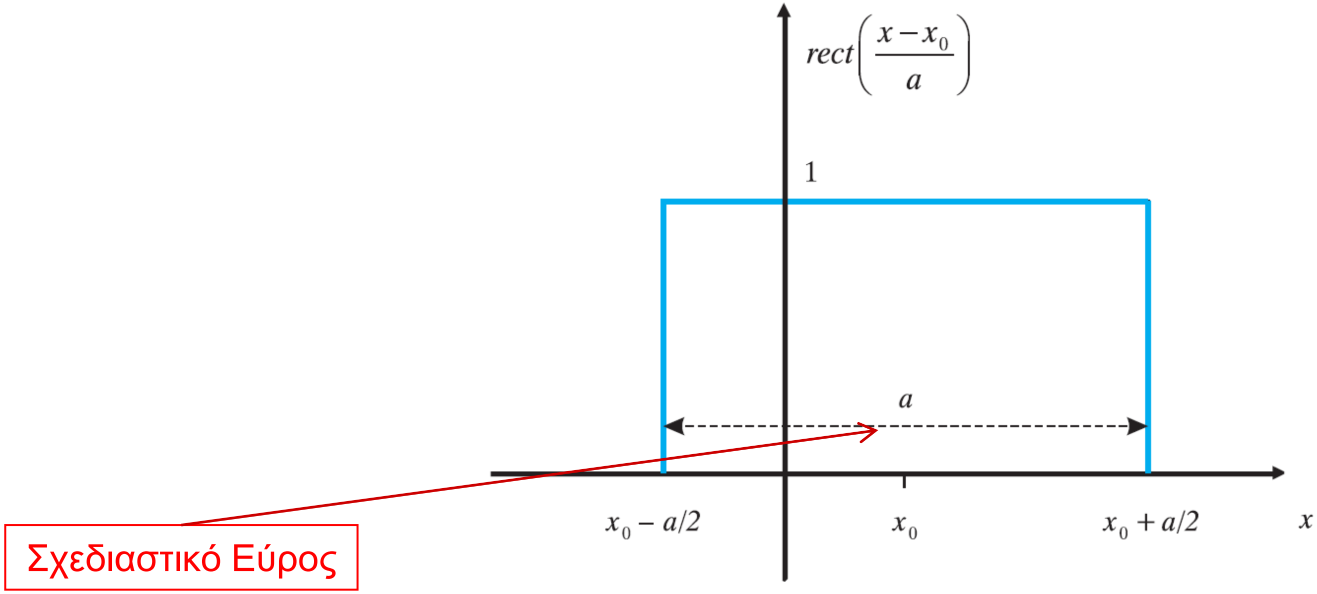
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Ορθογωνικός Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1, \text{ όταν } |x-x_0|<\frac{a}{2}, \text{ δηλ. } x_0-\frac{a}{2}<x<x_0+\frac{a}{2}\\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>\frac{a}{2}, \text{ δηλ. } \begin{cases}x<x_0-\frac{a}{2}\\ \text{ή}\\ x>x_0+\frac{a}{2}\end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$

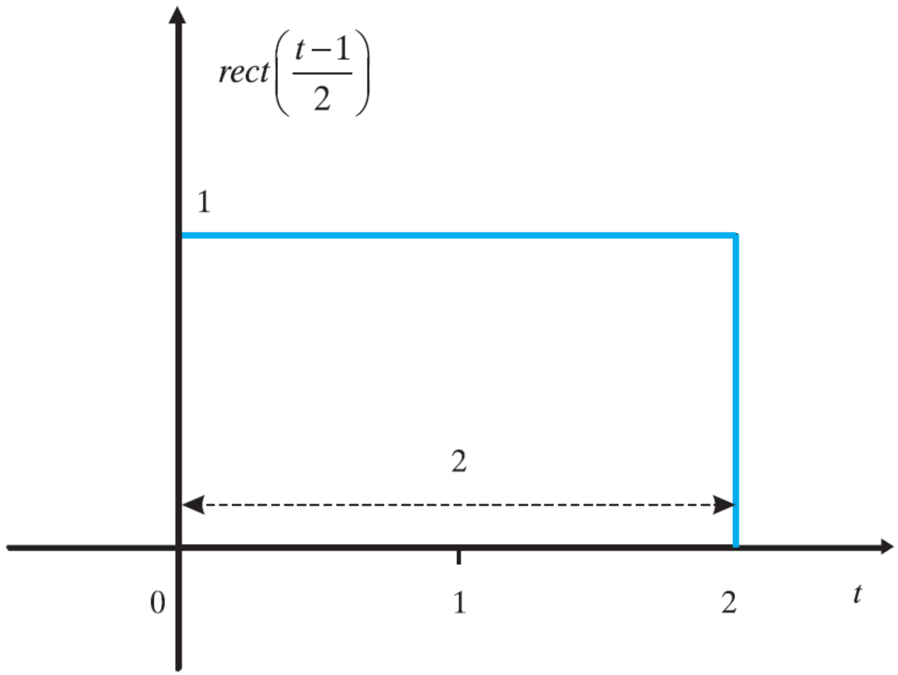


Ορθογωνικός Παλμός (2)

- Παραδείγματα

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος 2, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{2}{2}, t_0 + \frac{2}{2}) = (0,2)$.

- $x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$

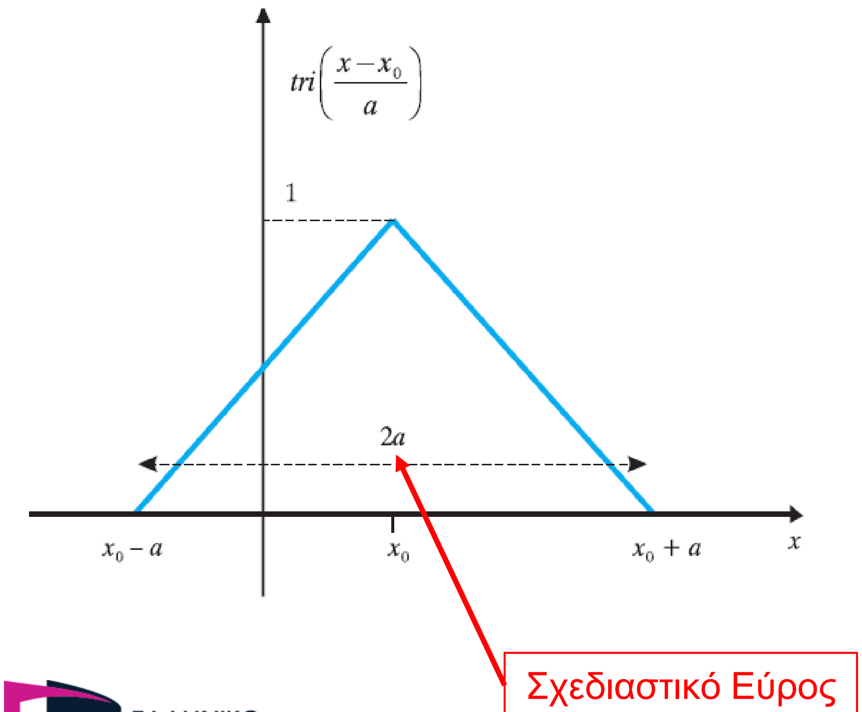


Τριγωνικός Παλμός (1)

- Ορισμός

$$\Lambda\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=tri\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-x_0|}{a}, \text{ όταν } |x-x_0|<a, \text{ δηλ.} x_0-a<x<x_0+a \\ 0, \text{ όταν } |x-x_0|>a, \text{ δηλ.} \begin{cases} x<x_0-a \\ \text{ή} \\ x>x_0+a \end{cases}\end{cases}$$

όπου $a>0$



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

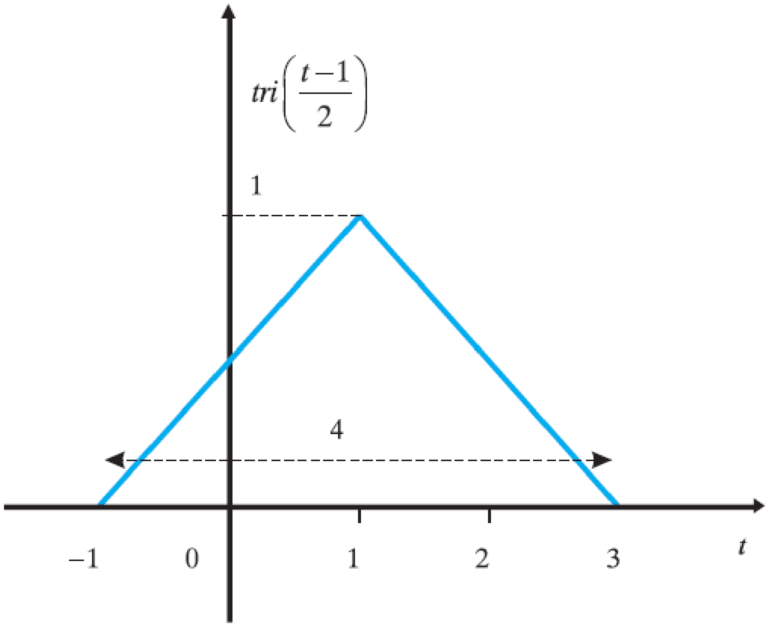
Τριγωνικός Παλμός (2)

- Παραδείγματα

• $x(t) = tri\left(\dfrac{t-1}{2}\right)$

Το σήμα είναι ένας παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = 1$ και εύρος

$2 \times 2 = 4$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \frac{4}{2},\ t_0 + \frac{4}{2}) = (-1,3)$.



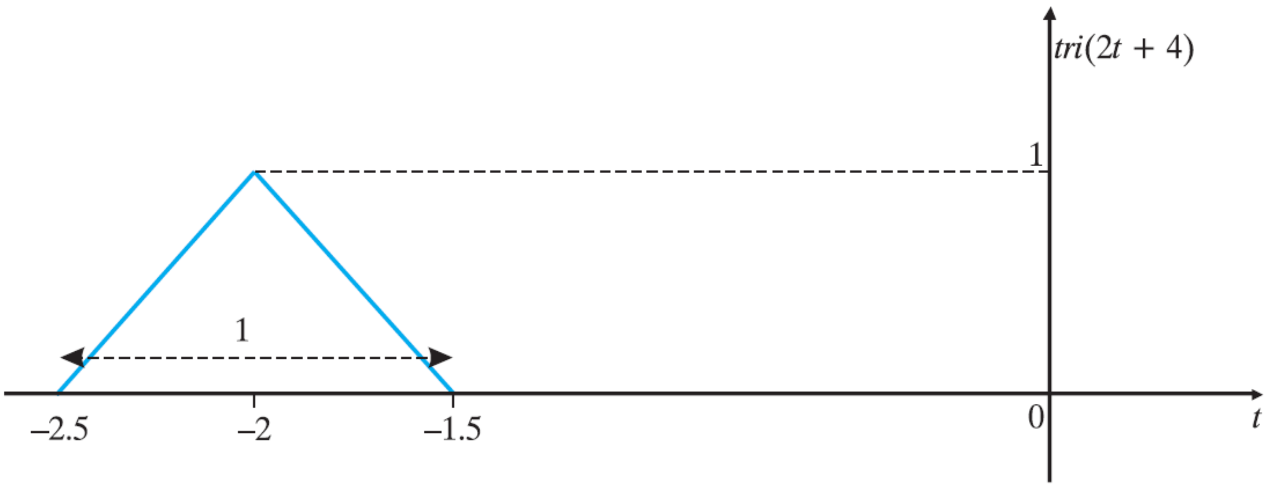
Τριγωνικός Παλμός (3)

- $x(t) = tri(2t+4)$

Το σήμα πρέπει να γραφεί σε μορφή $tri\left(\dfrac{t-t_0}{a}\right)$

Είναι: $x(t) = tri(2t+4) = tri(2(t+2)) = tri\left(\dfrac{t+2}{1/2}\right) = tri\left(\dfrac{t-(-2)}{1/2}\right)$

Συνεπώς, το σήμα είναι ένας τριγωνικός παλμός μοναδιαίου πλάτους, με κέντρο $t_0 = -2$ και εύρος $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$, άρα εκτείνεται στο διάστημα $(t_0 - \dfrac{1}{2}, t_0 + \dfrac{1}{2}) = (-2.5, -1.5)$.



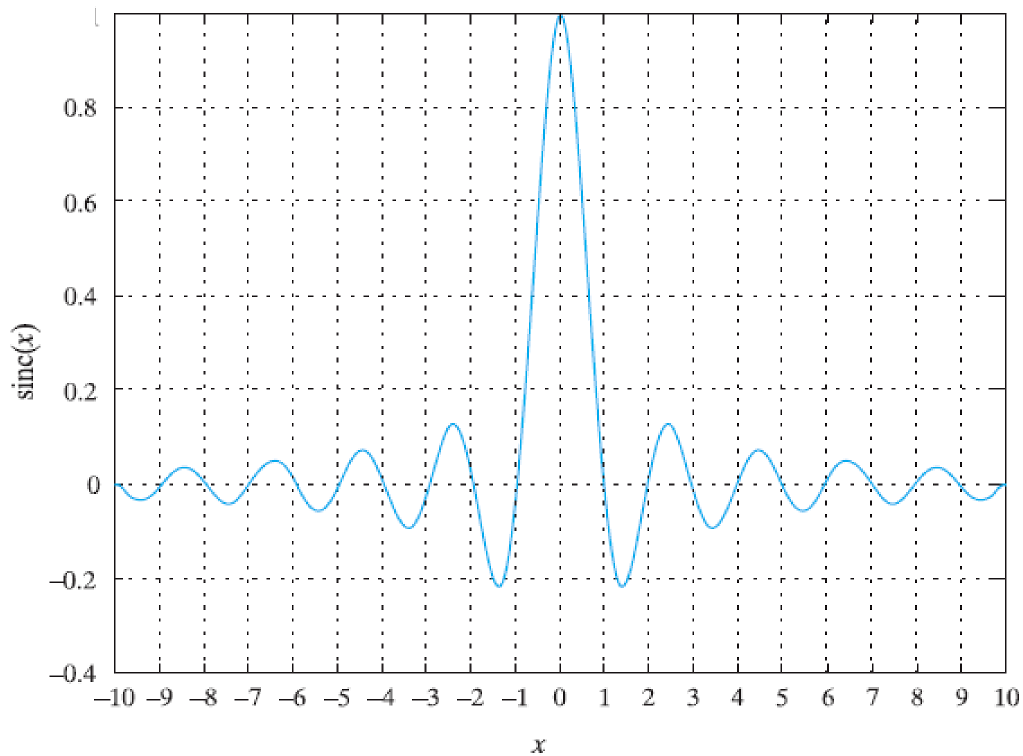
Συνάρτηση sinc(x)

Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$

και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Σχήμα 2.15

Απεικόνιση συνάρτησης sinc

Κρουστική Συνάρτηση δ(x) Dirac (I)

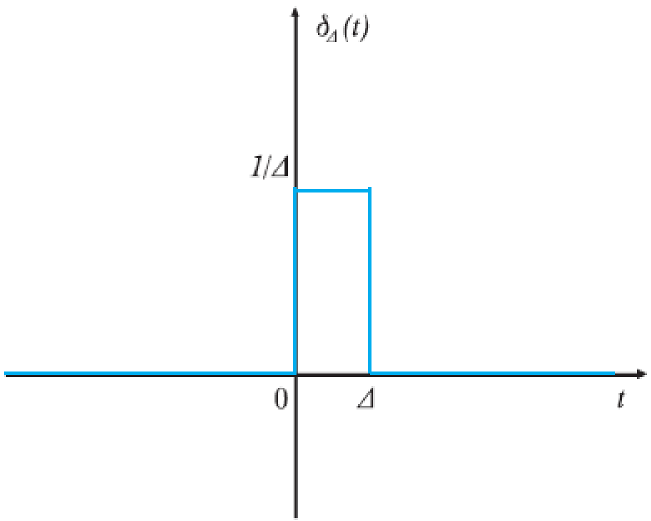
Έστω ένας ορθογωνικός παλμός μοναδιαίου εμβαδού με την εξής μορφή:

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}0,\ \text{όταν}\ t<0\\ \dfrac{1}{\Delta},\ \text{όταν}\ 0<t<\Delta\\ 0,\ \text{όταν}\ t>\Delta\end{cases}$$

όπου $\Delta>0$.

Δηλαδή, ισχύει ότι:

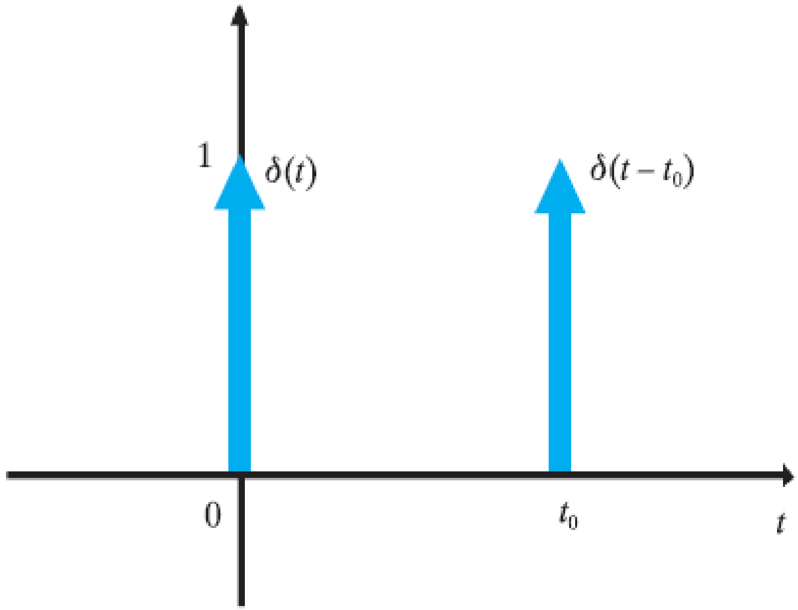
$$\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}rect\left(\frac{t-\frac{\Delta}{2}}{\Delta}\right)$$



Απεικόνιση τετραγωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού

Κρουστική Συνάρτηση δ(x) Dirac (II)

Αν θεωρηθεί ότι το Δ είναι πολύ μικρό ($\Delta \to 0$), η χρονική διάρκεια του παλμού μηδενίζεται και το πλάτος του «απειρίζεται», ενώ το εμβαδόν του παραμένει ίσο με 1. Η κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0}\left[\delta_\Delta(t)\right]$ σχεδιάζεται ως εξής:



Σχήμα 2.20

Απεικόνιση κρουστικής συνάρτησης στα σημεία 0 και t_0

Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης δ(x)

- $\delta(t) = 0, \text{ οταν } t \neq 0$
- $\delta(t - t_0) = 0, \text{ οταν } t \neq t_0$
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)\,dt = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0)$
- $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

$f(x)*g(x)=g(x)*f(x)$ *αντιμεταθετική*

$[f(x)*g(x)]*h(x)=f(x)*[g(x)*h(x)]$ *προσεταιριστική*

$f(x)*[g(x)+h(x)]=f(x)*g(x)+f(x)*h(x)$ *επιμεριστική*

Σημείωση: Ο τελεστής ‘*’ αναπαριστά την πράξη της συνέλιξης που θα δούμε στην 3η ΟΣΣ

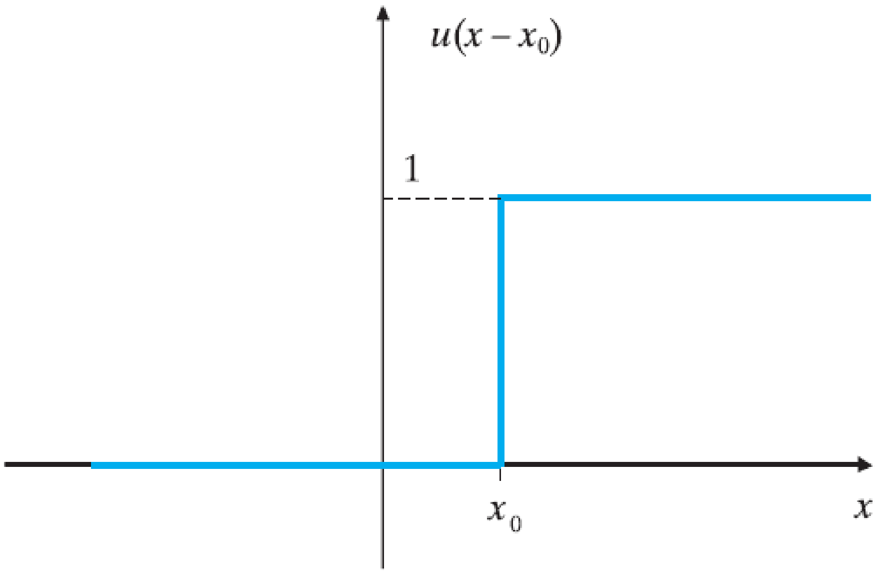
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα

Το μοναδιαίο βηματικό σήμα ορίζεται ως εξής:

$$u(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < x_0 \\ 1, & \text{όταν } x > x_0 \end{cases}$$

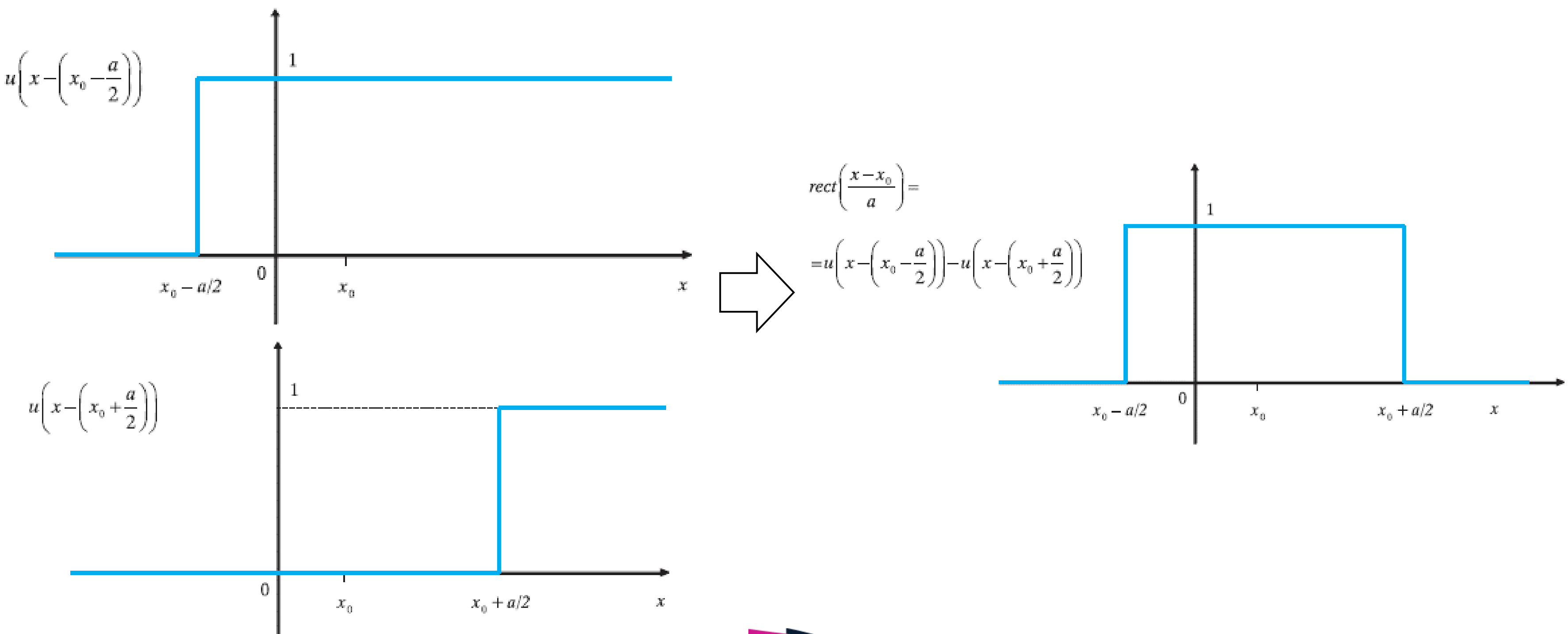
και παριστάνεται γραφικά ως εξής:



Μοναδιαίο Βηματικό Σήμα – Ορθογωνικός Παλμός

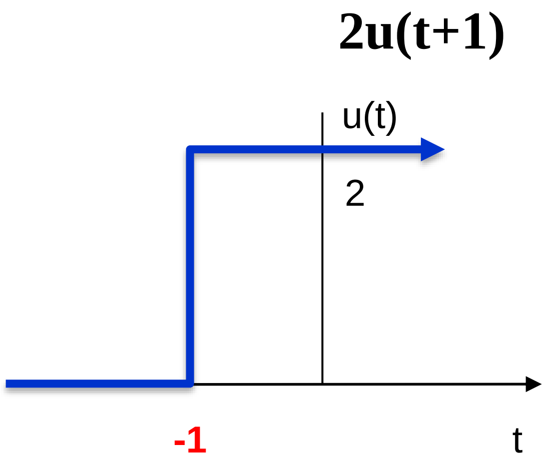
Η συνάρτηση ορθογωνικού παλμού μπορεί να περιγραφεί με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση ως εξής:

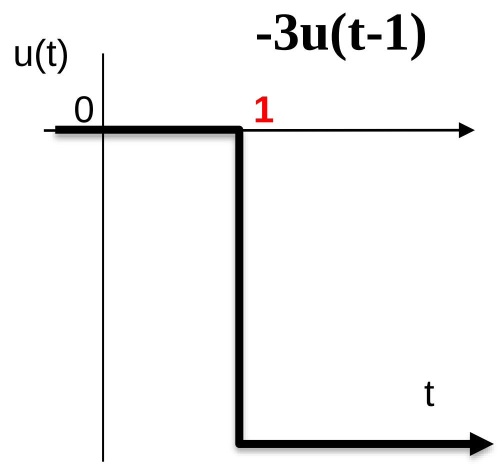
$$rect\left(\frac{x-x_0}{a}\right)=u\left(x-\left(x_0-\frac{a}{2}\right)\right)-u\left(x-\left(x_0+\frac{a}{2}\right)\right)$$

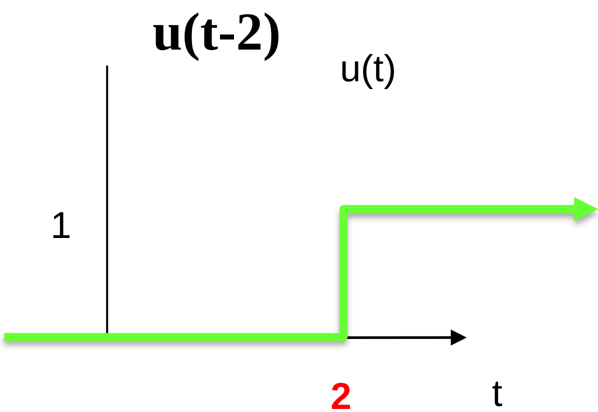


Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (3)

- Παραδείγματα
  - Να σχεδιαστεί το σήμα $x(t)=2u(t+1)-3u(t-1)+u(t-2)$
- Μέθοδος
- Βήμα 1: Υπολογίζουμε κάθε έναν από τους όρους





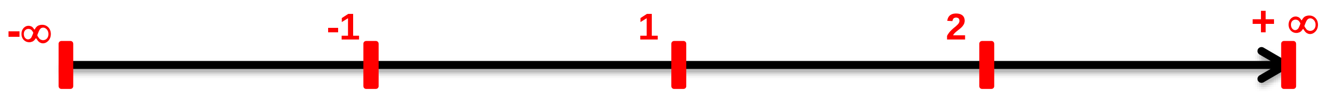


- Βήμα 2: Προσδιορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας **-1, 1** και **2**

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

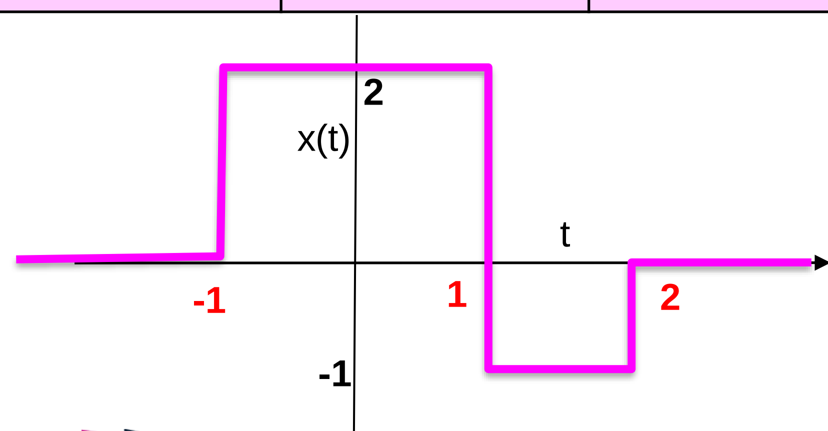
Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (4)

- Βήμα 3: Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα σημεία ασυνέχειας που βρήκαμε και τις τιμές που παίρνει το σήμα στα επιμέρους διαστήματα που δημιουργούνται



2u(t+1)	0	2	2	2
-3u(t-1)	0	0	-3	-3
u(t-2)	0	0	0	1
x(t)	0	2	-1	0

  - Βήμα 4:
  - Γραφική Παράσταση



Υπέρθεση Σημάτων (1)

- Εργασία 1η, (2009), Θέμα 4

- Δίνεται το σήμα

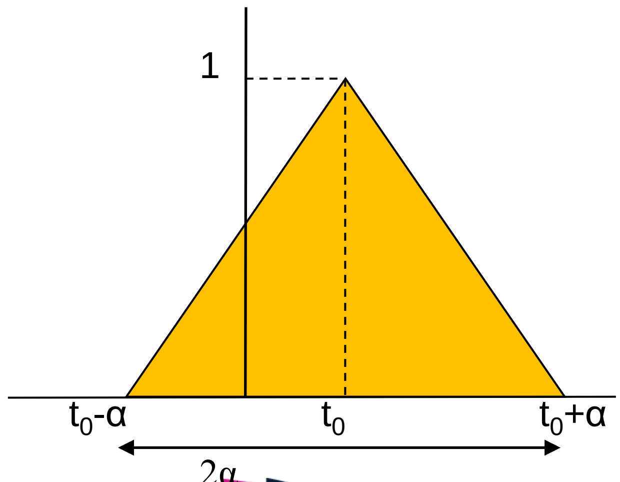
$$x(t) = -2\Lambda(\frac{t+2}{2}) + 2\Lambda(\frac{t}{2}) - 2\Lambda(\frac{t-2}{2})$$

- (α) Να σχεδιαστεί στο πεδίο του χρόνου το σήμα *x(t)*.

Υπέρθεση Σημάτων (2)

- <u>Βήμα 1ο</u>: Αναλύουμε και σχεδιάζουμε την κάθε συνιστώσα-σήμα
- Στην συγκεκριμένη περίπτωση και οι τρεις συνιστώσες προκύπτουν από τον ίδιο τύπο σήματος

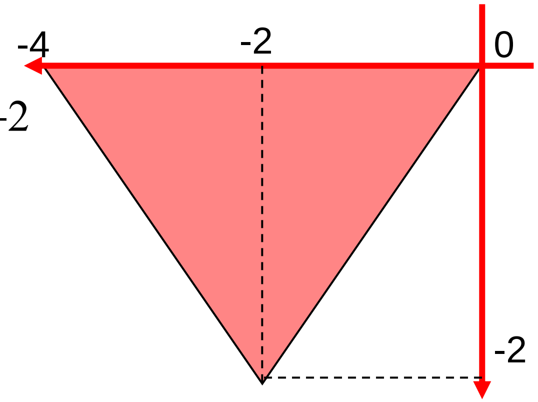
$$\Lambda\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=tri\left(\frac{t-t_0}{a}\right)=\begin{cases} 1-\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad t_0<t<a+t_0 \\ 1-\dfrac{-(t-t_0)}{a}=1+\dfrac{t-t_0}{a}, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad -a+t_0<t<t_0 \\ 0, & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad |t-t_0|>a \quad \acute{\eta} \quad -a+t_0>t \;\&\; t>t_0+a \end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (3)

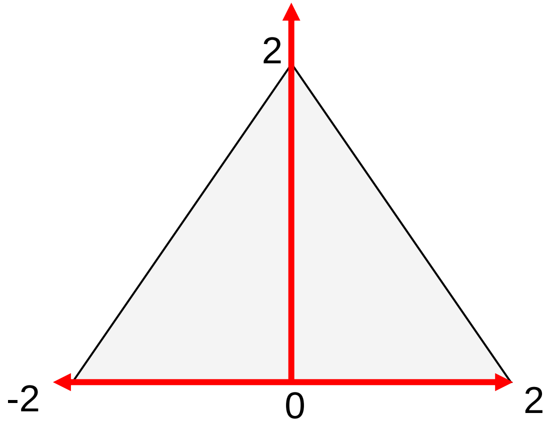
- Αρα 1ο σήμα

$$-2\Lambda\left(\frac{t+2}{2}\right)=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t+2)}{2}\right]=-4-t, \text{όταν } -2<t+2<0 \Rightarrow -4<t<-2\\ -2\left[1-\frac{(t+2)}{2}\right]=t, \text{όταν } 0<t+2<2 \Rightarrow -2<t<0\\ 0, \text{όταν } t<-4 \text{ ή } t>0\end{cases}$$



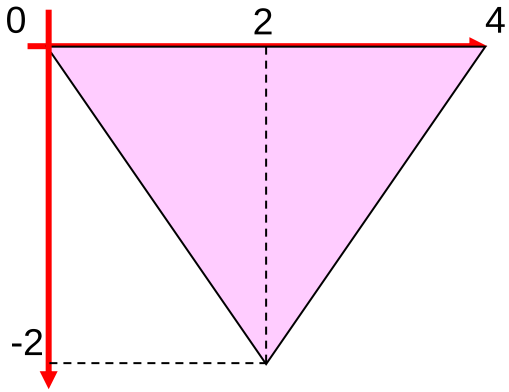
2ο σήμα

$$2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)=\begin{cases}2\left[1-\frac{-(t)}{2}\right]=2+t, \text{όταν } -2<t<0\\ 2\left[1-\frac{(t)}{2}\right]=2-t, \text{όταν } 0<t<2\\ 0, \text{όταν } t<-2 \text{ ή } t>2\end{cases}$$



Υπέρθεση Σημάτων (4)

$$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})=\begin{cases}-2\left[1-\frac{-(t-2)}{2}\right]=-t, \text{όταν } -2<t-2<0 \Rightarrow 0<t<2\\ -2\left[1-\frac{(t-2)}{2}\right]=t-4, \text{όταν } 0<t-2<2 \Rightarrow 2<t<4\\ 0, \text{όταν } t<0 \text{ ή } t>4\end{cases}$$



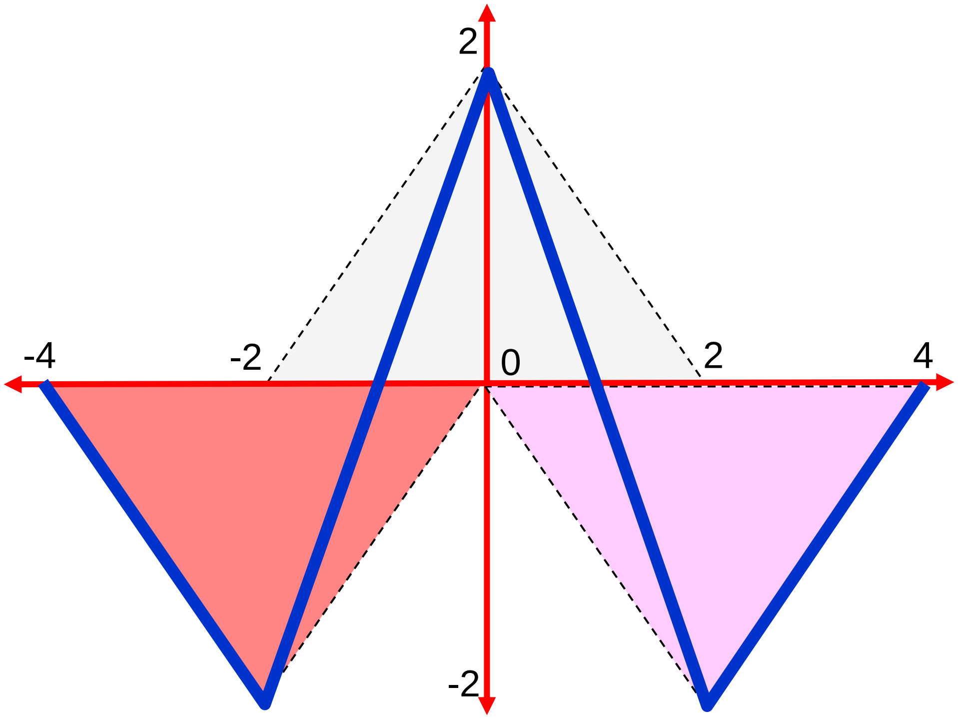
Υπέρθεση Σημάτων (5)

- Βήμα 2ο: Καταστρώνουμε τον πίνακα με τα σημεία ασυνέχειας και τα διαστήματα των τιμών ή των τύπων που παίρνει η κάθε συνιστώσα-σήμα

$-2\Lambda(\frac{t+2}{2})$	0	-4-t	t	0	0
$2\Lambda(\frac{t}{2})$	0	0	2+t	2-t	0
$-2\Lambda(\frac{t-2}{2})$	0	0	0	-t	t-4
x(t)	0	-4-t	2+2t	2-2t	t-4

Υπέρθεση Σημάτων (6)

- <u>Βήμα 3ο</u>: Κάνουμε την απεικόνιση με βάση τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Υπέρθεση Σημάτων (7)

- Από Εργασία 1η, (2009), Θέμα 6(β)

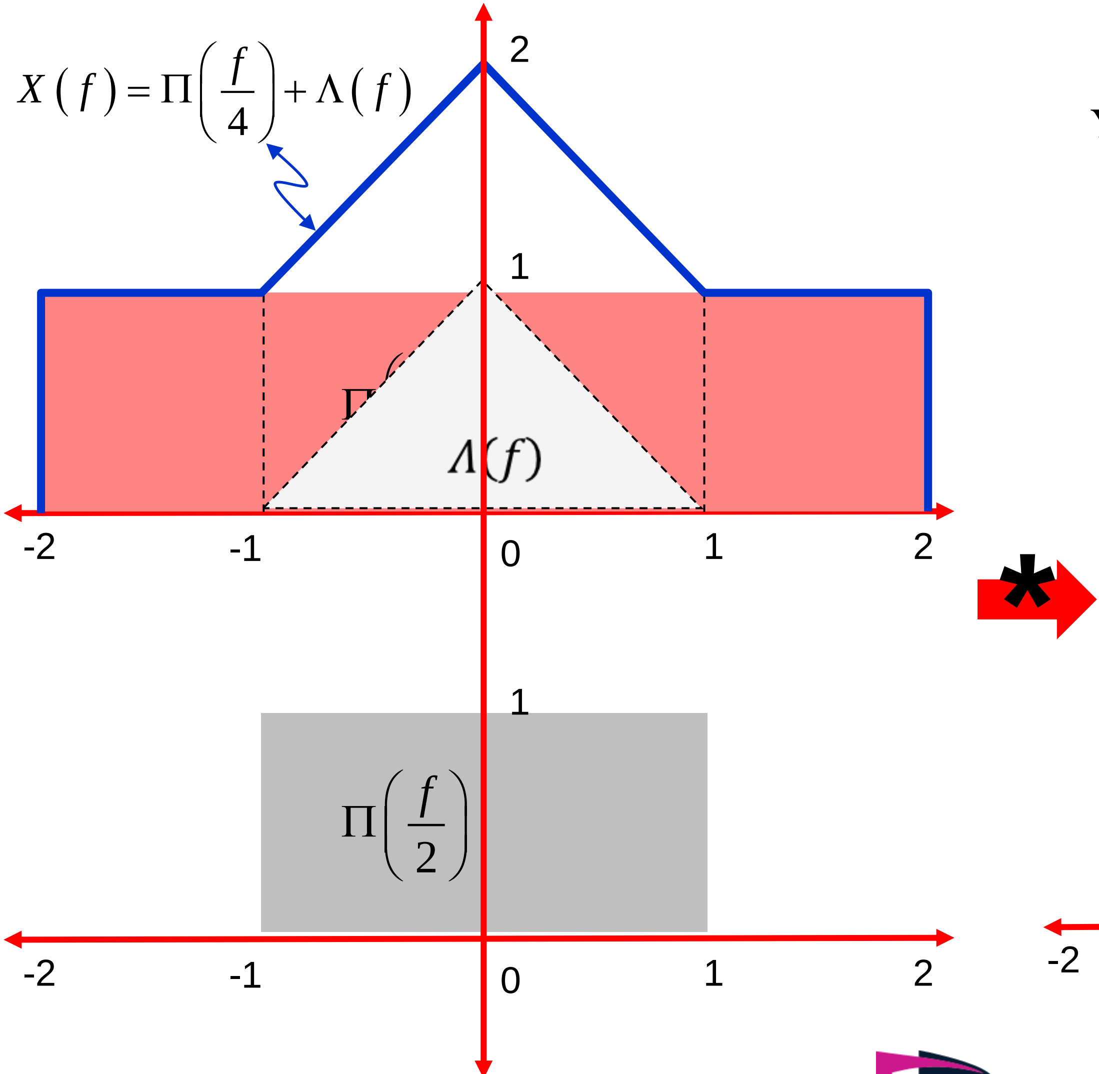
- Δίνεται το X(f) και H(f) που είναι
- $X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)$ και $\mathrm{H}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right)$

- Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε το

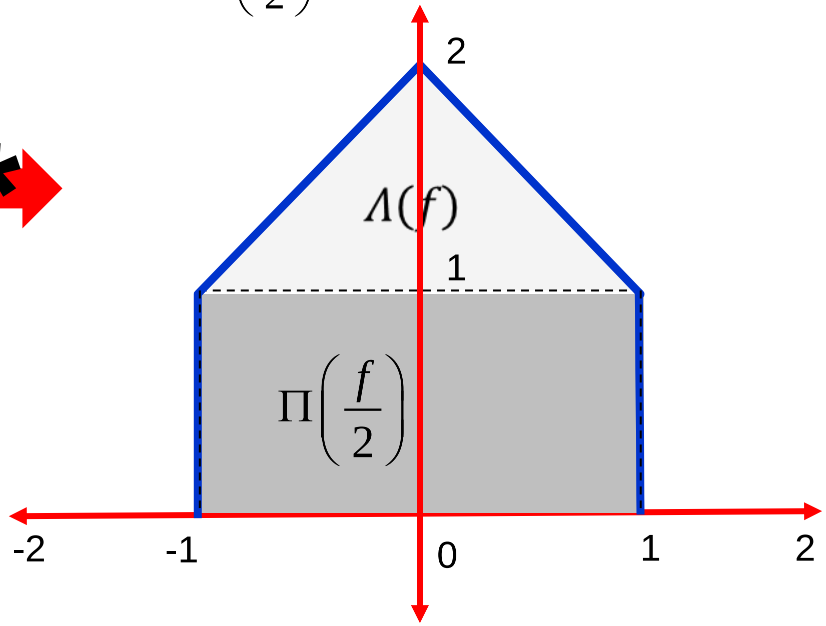
$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Υπέρθεση Σημάτων (8)

$$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)$$



$$\begin{aligned} Y(f) &= \left[\Pi\left(\frac{f}{4}\right) + \Lambda(f)\right]\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{f}{4}\right)\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f)\cdot\Pi\left(\frac{f}{2}\right) \\ &= \Pi\left(\frac{f}{2}\right) + \Lambda(f) \end{aligned}$$

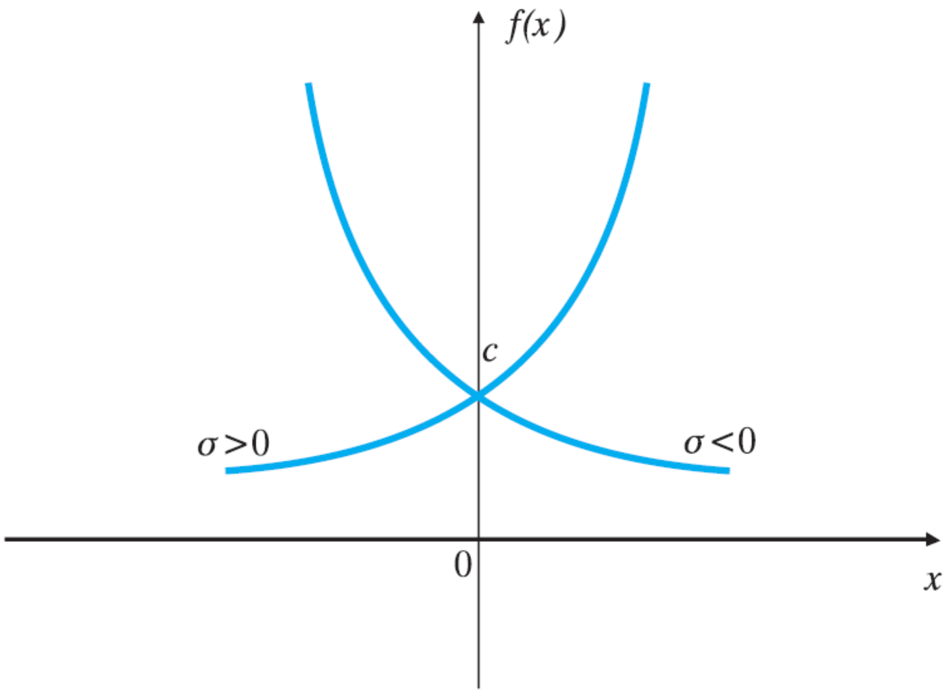


Αναλογικά Εκθετικά Σήματα (1)

Το σήμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = c \cdot e^{\sigma x}, \text{ όπου } c, \sigma \in \mathbb{R}$$

Η γραφική παράσταση του εκθετικού σήματος είναι η ακόλουθη:



Μετασχηματισμός Fourier

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Φάσμα πλάτους Σημάτων – Μετάβαση στο πεδίο συχνοτήτων

Παράδειγμα.

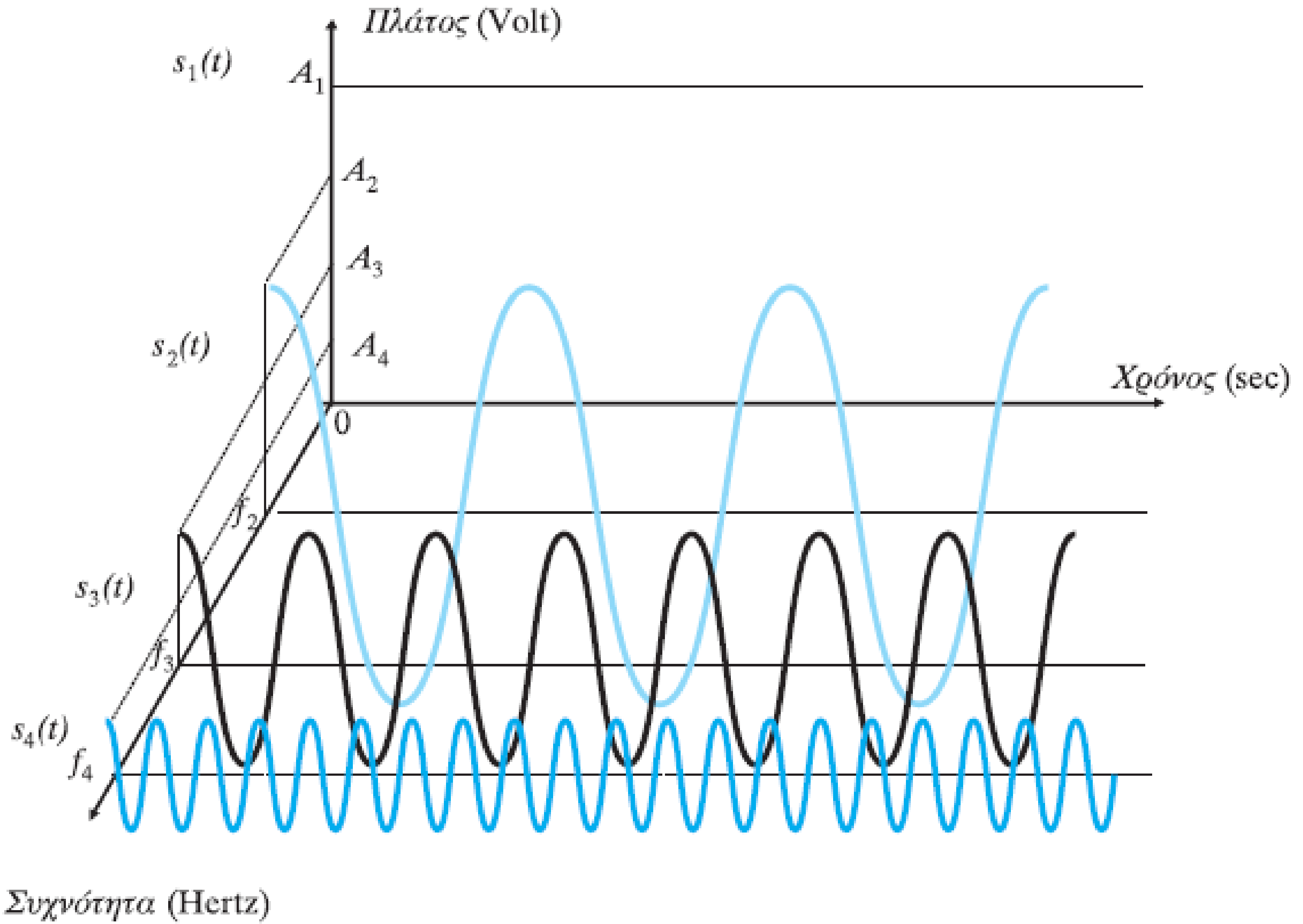
Έστω το σήμα το οποίο απαρτίζεται από τα επιμέρους σήματα $S_i(t)$, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + s_4(t)$$

όπου,

$$s_1(t) = A_1$$
$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$
$$s_3(t) = A_3 \cos(2\pi f_3 t)$$
$$s_4(t) = A_4 \cos(2\pi f_4 t)$$
$$f_2 < f_3 < f_4$$
$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

Τα σήματα που απαρτίζουν το $s(t)$ μπορούν να απεικονιστούν σε ένα τρισδιάστατο σύστημα αξόνων (ως προς τη συχνότητα, το χρόνο και το πλάτος) ως εξής:

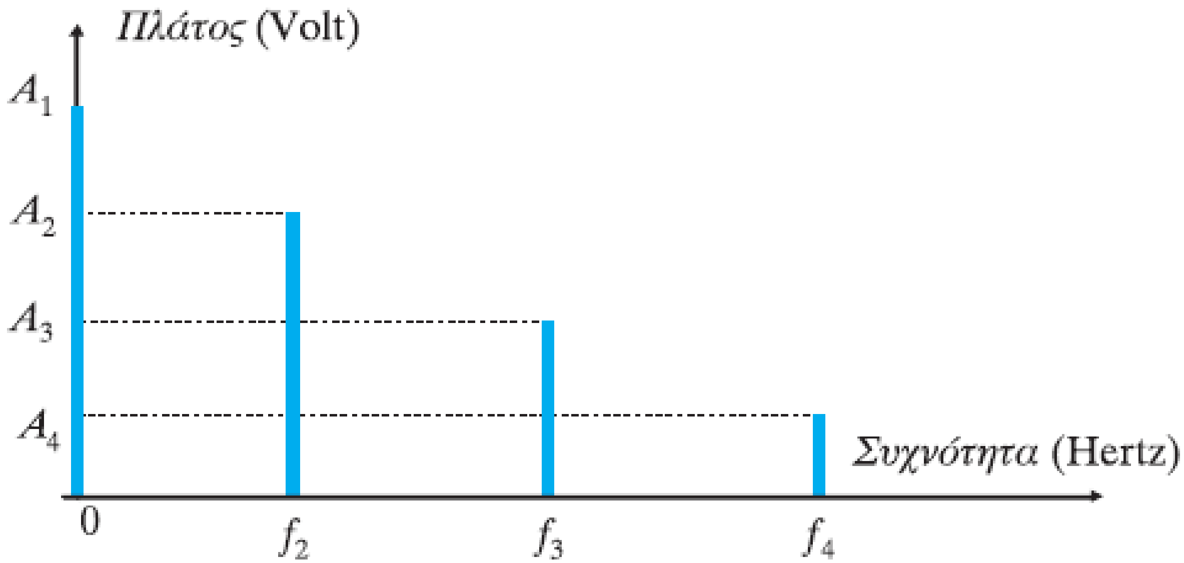


Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Μονόπλευρο Φάσμα πλάτους

Το μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$ μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω σχήμα παρατηρώντας τη μεταβολή του σήματος στους άξονες πλάτους και συχνοτήτων και αγνοώντας τον άξονα του χρόνου (σχεδιάζοντας το πλάτος του σήματος κατά απόλυτη τιμή).



Σχήμα 2.22

Μονόπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος $s(t)$

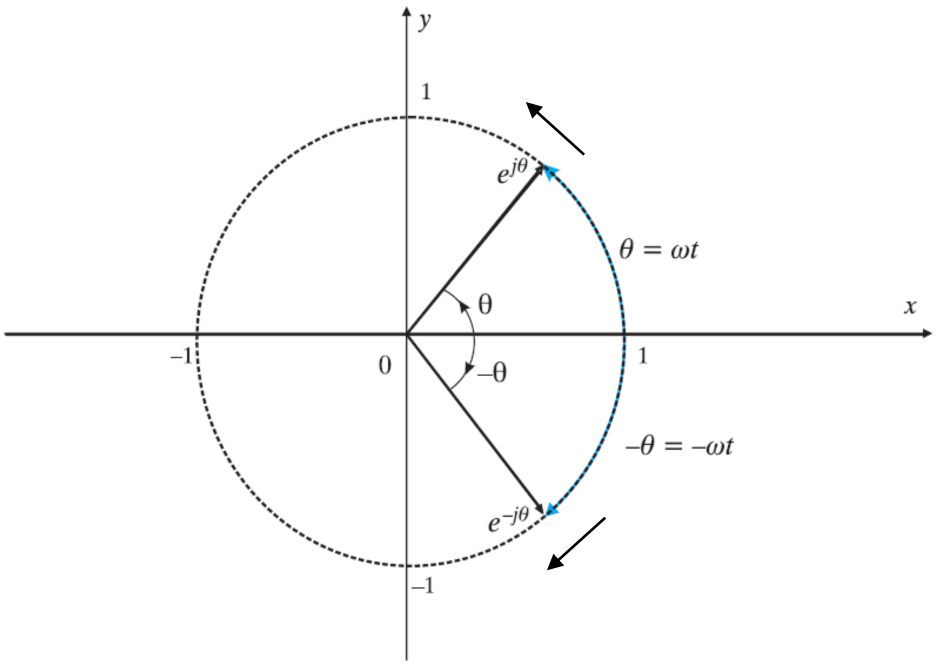
Μετάβαση στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους

- Έκφραση περιοδικών σημάτων με τη χρήση εκθετικών
- Με χρήση σχέσεων Euler

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}e^{j2\pi ft} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi ft}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta) \Leftrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



112

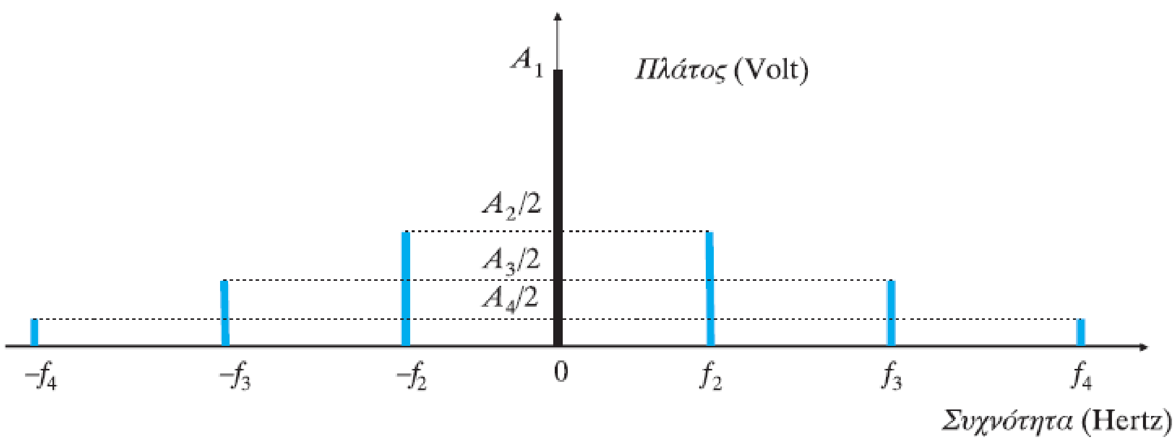
Αμφίπλευρο Φάσμα πλάτους

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler, ο τύπος που δίνει το σήμα $s(t)$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά:

$$s(t) = A_1 + A_2 \frac{e^{j2\pi f_2 t} + e^{-j2\pi f_2 t}}{2} + A_3 \frac{e^{j2\pi f_3 t} + e^{-j2\pi f_3 t}}{2} + A_4 \frac{e^{j2\pi f_4 t} + e^{-j2\pi f_4 t}}{2} =$$

$$= A_1 + \frac{A_2}{2} e^{j2\pi f_2 t} + \frac{A_2}{2} e^{-j2\pi f_2 t} + \frac{A_3}{2} e^{j2\pi f_3 t} + \frac{A_3}{2} e^{-j2\pi f_3 t} + \frac{A_4}{2} e^{j2\pi f_4 t} + \frac{A_4}{2} e^{-j2\pi f_4 t}$$

Η παραπάνω σχέση απεικονίζεται ως εξής (αμφίπλευρο φάσμα πλάτους):



Αν το s(t) είναι περιοδικό με περίοδο T, το πλάτος ανά συχνότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$V_k = \frac{1}{T}\int_0^T s(t) e^{-j2\pi f_k t}, k = 1,2,3,4$$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι στο αμφίπλευρο φάσμα πλάτους του σήματος τα πλάτη των όρων με μη μηδενικές συχνότητες υποδιπλασιάζονται ενώ το πλάτος του σταθερού όρου παραμένει αμετάβλητο.

- Βασικοί Κανόνες περιοδικότητας στα πεδία χρόνου-συχνοτήτων:
  - Θεμελιώδης Ορισμός:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}_+^*,\ \text{τέτοιο ώστε}\ x(t+kT) = x(t)\ \text{για}\ k = 1,2,\ldots$$

  - Στο πεδίο του χρόνου: Η έκφραση του σήματος αποτελείται από άθροισμα περιοδικών σημάτων με περιόδους που ικανοποιούν τη σχέση

$$T = m_1 T_1 = m_2 T_2 = \ldots = m_N T_N \quad m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$$

  - Στο πεδίο των συχνοτήτων: Το φάσμα πλάτους αποτελείται από διακριτό σύνολο συχνοτήτων που ικανοποιούν τη σχέση

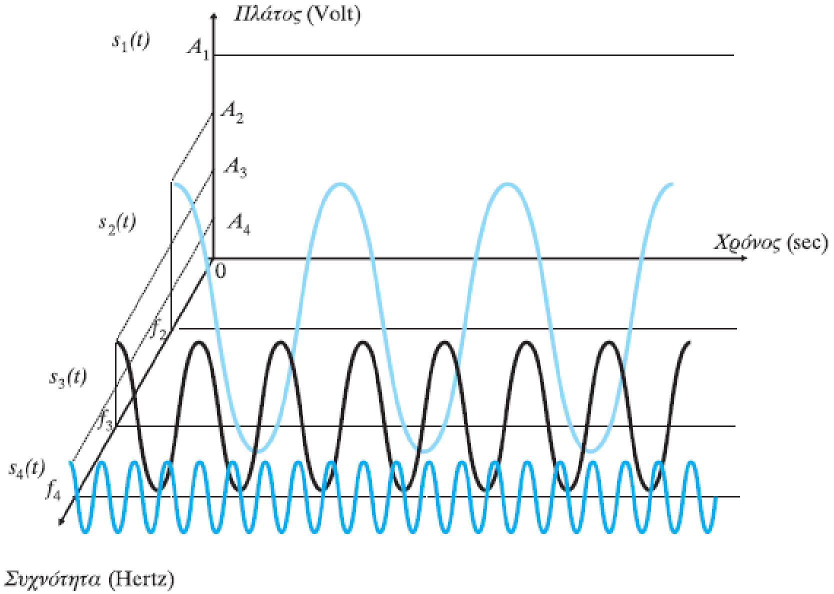
$$f = f_1/m_1 = f_2/m_2 = \ldots = f_N/m_N\ ,\ m_1, m_2 \ldots m_N \in \mathbb{N}^*$$

  - Υπολογισμός πλάτους ανά συχνότητα (Συντελεστές Fourier)

$$V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j2\pi k f t}\, dt$$

Φυσική Σημασία Μ/Σ Fourier

- Ο Μ/Σ Fourier μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα εργαλείο με το οποίο βλέπουμε ένα σήμα από μια άλλη οπτική γωνία:



Σχήμα 2.21

Απεικόνιση του σήματος $s(t)$ στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων

Η συχνότητα μετρά το ρυθμό της χρονικής μεταβολής ενός σήματος:

- Η υψηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις γρήγορες μεταβολές συναρτήσει του χρόνου
- Η χαμηλή συχνότητα αντιστοιχεί στις αργές μεταβολές

115

Επέκταση Ανάλυσης Fourier και για μη περιοδικά σήματα

- Το πλάτος ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ συχνότητας f σε μια συγκεκριμένη (συνιστώσα) συχνότητα $f_k = kf$ προσδιορίζεται από τον αντίστοιχο συντελεστή Fourier

$$V_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi \cdot kf \cdot t}, k \in \mathbb{Z}$$

- Στην περίπτωση ενός μη περιοδικού σήματος, η περίοδος μπορεί να υποτεθεί ότι τείνει στο άπειρο ($T \to \infty$) και το φάσμα του σήματος θα αποτελείται από ένα συνεχές (και όχι διακριτό) σύνολο συχνοτήτων ($kf \to f$).
- Με τη γενίκευση αυτή προκύπτει ο Μετασχηματισμός Fourier, δηλ. η έκφραση του φάσματος $X(f)$ με βάση τη χρονική έκφραση του σήματος $x(t)$ (που συμπεριλαμβάνει και μη περιοδικά σήματα)

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

- Ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier, δηλ. η έκφραση της χρονικής έκφρασης του σήματος $x(t)$, με βάση το φάσμα $X(f)$ είναι:

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$$

Άλλη Μορφή Μ/Σ Fourier

- Ισοδύναμες αναφορές με τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Η κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$ μετριέται σε radians/sec και dω=2πdf

117

Παραπομπές Τόμου Β/ Μερους Β

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (1)

Σημείωση: δείτε τον πίνακα Α, σελ. 54-55 (τόμος Β, μέρος Β)

- Γραμμικότητα

$$x_1(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_1(f),\quad x_2(t) \leftrightarrow \mathrm{X}_2(f) \Leftrightarrow ax_1(t)+bx_2(t) \leftrightarrow a\mathrm{X}_1(f)+b\mathrm{X}_2(f)$$

- Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου και Συχνότητας

$$x_1(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right) \qquad \frac{1}{|a|} x_1\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow X_1(af)$$

- Χρονική καθυστέρηση

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)\exp(-j2\pi\ ft_0)$$

- Δυϊσμός

Αν $x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow X(-t) \Leftrightarrow x(f)$ & $X(t) \Leftrightarrow x(-f)$

119

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (2)

- Συνδυασμός Αλλαγής Κλίμακας & Χρονικής Ολίσθησης

$$x_1\left(at-t_0\right) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right)\exp\left(-j2\pi\ f\ \frac{t_0}{a}\right)$$

- Ολίσθηση Συχνότητας

$$\exp\left(j2\pi\ f_c t\right) x(t) \leftrightarrow X\left(f-f_c\right)$$

120

Ιδιότητες Μετασχηματισμών (3)

- Παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)X(f)$$

- Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$$

- Διαμόρφωση

$$x(t)\cdot\cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_c) + \frac{1}{2}X(f + f_c)$$

- Θεώρημα Parseval $E = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

121

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών σημάτων

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$rect(t)$	$sinc(f)$
$sinc(t)$	$rect(f)$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$sinc^2(t)$	$tri(f)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

Πεδίο χρόνου (t)	Πεδίο συχνότητας (f)
$\delta(t)$	1
$x(t)=1$	$\delta(f)$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

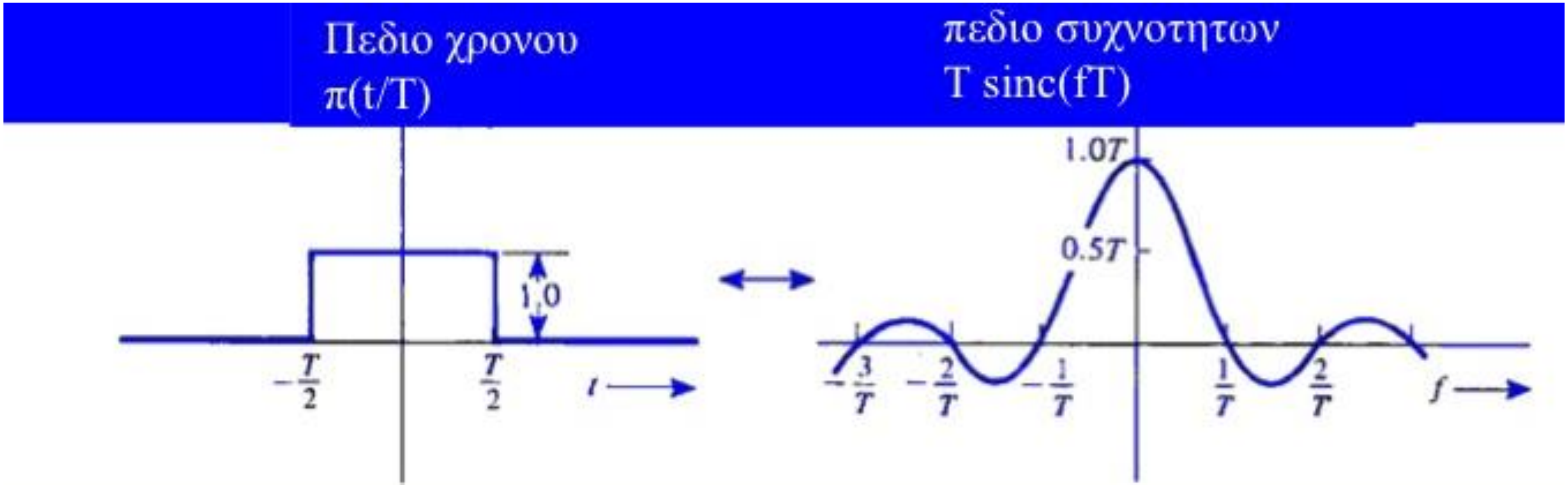
Βασικές Ιδιότητες ΜΣ Fourier

Ιδιότητα	**Πεδίο χρόνου (*t*)**	**Πεδίο συχνότητας (f)**
Αρχική συνθήκη	$x(t)$	$X(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_o)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Ολίσθηση συχνότητας	$e^{j\Omega_0 t} x(t) = e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f-f_0)$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(f)\delta(f)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(f)H(f)$
Διαμόρφωση	$x(t)y(t)$	$\left[X(f) * Y(f)\right]$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Δυϊσμός αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$ ή $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$	$y(t) = X(t)$	$Y(f) = x(-f)$

Παραδείγματα (1)

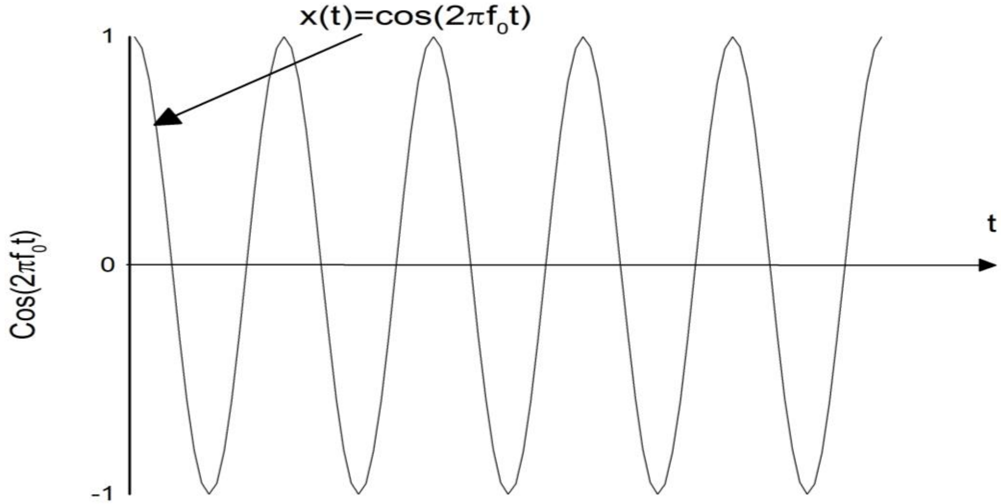
Ορθογωνικός Παλμός

- Π(t/T) ⇔ Tsinc(f·T)
- Παρατηρήσεις:
  - Η διάρκεια του παλμού είναι αντιστρόφως ανάλογη του εύρους φάσματος
  - Η ασυνέχεια στο πεδίο του χρόνου οδηγεί σε απεριόριστο φάσμα

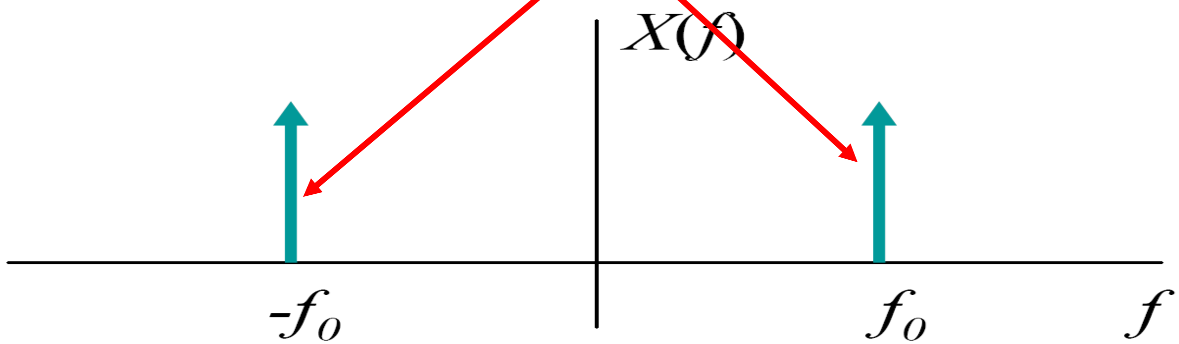


124

Παραδείγματα (2)



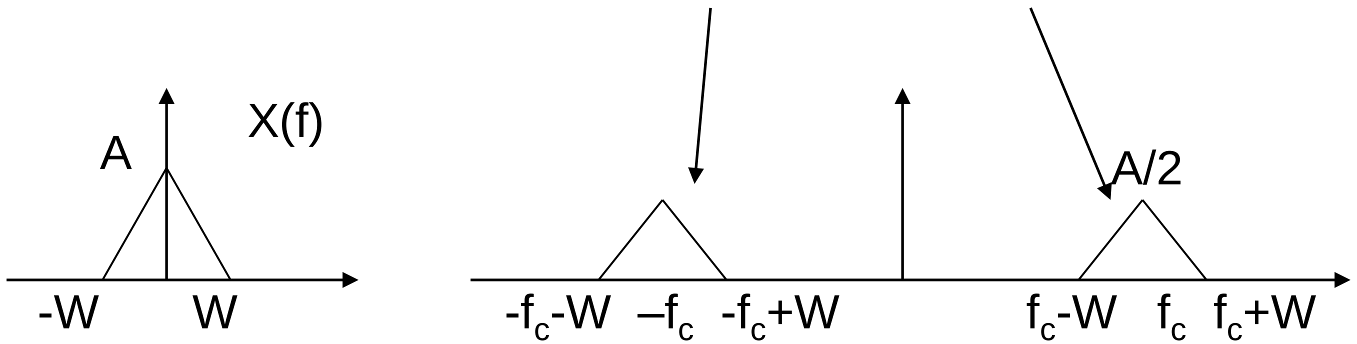
$$X(f) = F\{x(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



125

Παραδείγματα (3)

- $x(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow (1/2)X(f+f_c) + (1/2)X(f-f_c)$



126

Ερωτήσεις

Ενδεικτικές Ασκήσεις

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΘΕΜΑ 1 ΓΕ2 / 2022-23

Στόχος της άσκησης είναι *η εξοικείωση με το μετασχηματισμό Fourier βασικών σημάτων, τα φάσματα και τη γραφική τους αναπαράσταση, καθώς και τη διερεύνηση περιοδικότητας.*
Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ1/2010-11/Θ7, ΓΕ2/2015-16/Θ1, ΓΕ1/2011-12/Θ4 , ΕΞ 2019Α/Θ1, ΕΞ2018Α/Θ2, ΕΞ2017Β/Θ1, ΓΕ1/2019-20/Θ1*

Δίνεται το σήμα $x(t) = \cos(300\pi t)$. Να διερευνηθεί η περιοδικότητα και να προσδιοριστεί η περίοδος (αν υπάρχει) για τα παρακάτω σήματα:

(α) $x_\alpha(t) = x(t) + x(2t)$

(β) $x_\beta(t) = x(\pi t) + x(2\pi t)$

(γ) $x_\gamma(t) = [x(t)]^2$

(δ) $x_\delta(t) = x(t) \cdot u(t)$, όπου $u(t)$ το μοναδιαίο βηματικό σήμα

(ε) $x_\varepsilon(t) = x(t) + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-n)$, όπου $\delta(t)$ ο κρουστικός παλμός Dirac

(στ) $x_{\sigma\tau}(t) = x(t) + 2sinc(2t) - 2sinc(t) \cdot \cos(2\pi 0.5t)$

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να ακολουθήσετε τη μεθοδολογία ελέγχου περιοδικότητας σύνθετων σημάτων, είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο της συχνότητας. Στο ερώτημα (στ) θα βοηθήσει στη διερεύνηση εάν σχεδιάσετε το φάσμα πλάτους του* $x_{\sigma\tau}(t)$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

(α) $x_\alpha(t) = x(t) + x(2t) = \cos(300\pi t) + \cos(600\pi t) = \cos(2\pi 150 t) + \cos(2\pi 300 t)$
Οι περίοδοι των επιμέρους περιοδικών όρων του αθροίσματος είναι οι ακόλουθοι:

$$T_{\alpha,1} = \frac{1}{150} sec$$
$$T_{\alpha,2} = \frac{1}{300} sec$$

Ο λόγος τους είναι:

$\frac{T_{\alpha,1}}{T_{\alpha,2}} = \frac{\frac{1}{150}}{\frac{1}{300}} = 2$, ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_\alpha = T_{\alpha,1} = 2T_{\alpha,2} = \frac{1}{150} sec$

(β) $x_\beta(t) = x(\pi t) + x(2\pi t) = \cos(\pi 300\pi t) + \cos(2\pi 300\pi t) = \cos(2\pi 150\pi t) + \cos(2\pi 300\pi t)$
Οι περίοδοι των επιμέρους περιοδικών όρων του αθροίσματος είναι οι ακόλουθοι:

$$T_{\beta,1} = \frac{1}{150\pi} sec$$
$$T_{\beta,2} = \frac{1}{300\pi} sec$$

Ο λόγος τους είναι:

$\frac{T_{\beta,1}}{T_{\beta,2}} = \frac{\frac{1}{150\pi}}{\frac{1}{300\pi}} = 2$, ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_\beta = T_{\beta,1} = 2T_{\beta,2} = \frac{1}{150\pi} sec$

(γ) $x_\gamma(t) = [x(t)]^2 = [\cos(300\pi t)]^2 = \frac{1+\cos(600\pi t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 300 t)$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_\gamma = \frac{1}{300} sec$

(δ) $x_\delta(t) = x(t) \cdot u(t) = \cos(300\pi t) \cdot u(t) = \begin{cases} \cos(300\pi t), & ό\tau\alpha\nu\ t > 0 \\ 0, ό\tau\alpha\nu\ t < 0 \end{cases}$

Το σήμα είναι μη περιοδικό διότι δεν ισχύει ο ορισμός της περιοδικότητας $\forall t \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}$ $ώ\sigma\tau\varepsilon\ \ x_\delta(t+T) = x_\delta(t)$

(ε) $x_\varepsilon(t) = x(t) + \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-n) = \cos(2\pi 150 t) + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-n)$

Οι περίοδοι των επιμέρους περιοδικών όρων του αθροίσματος είναι οι ακόλουθοι:

$$T_{\varepsilon,1} = \frac{1}{150} sec$$
$$T_{\varepsilon,2} = 1\ sec$$

Ο λόγος τους είναι:

$\frac{T_{\varepsilon,1}}{T_{\varepsilon,2}} = \frac{\frac{1}{150}}{1} = \frac{1}{150}$, ρητός άρα το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_\varepsilon = 150 T_{\varepsilon,1} = T_{\varepsilon,2} = 1 sec$

(στ) $x_{\sigma\tau}(t) = x(t) + 2sinc(2t) - 2sinc(t) \cdot \cos(2\pi 0.5t)$

Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι:

$$
\begin{aligned}
X_{\sigma\tau}(f) &= \frac{1}{2}\{\delta(f-150)+\delta(f+150)\} + rect\left(\frac{f}{2}\right) - 2rect(f) * \frac{1}{2}\{\delta(f-0.5)+\delta(f+0.5)\} \\
&= \frac{1}{2}\{\delta(f-150)+\delta(f+150)\} + rect\left(\frac{f}{2}\right) - rect(f-0.5) - rect(f+0.5) \\
&= \frac{1}{2}\{\delta(f-150)+\delta(f+150)\}
\end{aligned}
$$

Δηλαδή οι τετραγωνικοί παλμοί στο πεδίο των συχνοτήτων αλληλοαναιρούνται οπότε μένει το αρχικό σήμα $x_{\sigma\tau}(t) = \mathrm{x(t)} = \cos(2\pi 150 \mathrm{t})$ που είναι περιοδικό με περίοδο $T_{\sigma\tau} = \frac{1}{150} sec$

Εναλλακτικά

$x_{\sigma\tau}(t) = \cos(300\pi t) + 2sinc(2t) - 2sinc(t) \cdot \cos(2\pi 0.5t)$

Όμως

$$2sinc(t) \cdot \cos(2\pi 0.5t) = 2\frac{sin(\pi t)}{\pi t} \cdot cos(\pi t) = 2 \cdot \frac{sin(2\pi t)}{2\pi t} = 2sinc(2t)$$

Άρα $x_{\sigma\tau}(t) = \cos(300\pi t) + 2sinc(2t) - 2sinc(2t) = \cos(300\pi t)$, οπότε είναι περιοδικό με περίοδο $T_{\sigma\tau} = \frac{1}{150} sec$

ΘΕΜΑ 2 ΓΕ2 / 2021-22

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις πράξεις σημάτων και την πράξη της συνέλιξης. Επίσης στόχος είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τη χρήση του Octave.

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ2/18-19/Θ6, ΓΕ2/20-21/Θ4 .

Έστω τα εξής σήματα συνεχούς χρόνου: $x(t) = 4\,\mathrm{rect}(t)$, $y(t) = -\mathrm{rect}(t/4)$, $z(t) = \mathrm{tri}(5t - 10)$.

Να υπολογίσετε και στη συνέχεια να απεικονίσετε τα παρακάτω σήματα σε Octave. Το χρονικό βήμα θα είναι 0.01sec σε όλες τις περιπτώσεις. (Σε κάθε ερώτημα, να υπολογίσετε αναλυτικά τις ζητούμενες εκφράσεις ως αθροίσματα βασικών παλμών (π.χ ορθογωνικών ή/και τριγωνικών) και να σχεδιάσετε στο Octave τα αντίστοιχα ζητούμενα διαγράμματα).

(α) $w(t) = y^3(t)$

(β) $k(t) = x^2(t) + z(t)$

(γ) $s(t) = x^2(t) + y^2(t)$

A) Από τον ορισμό της συνάρτησης rect(·) για a, T>0 έχουμε

$$rect\left(\frac{t-T}{a}\right)=\begin{cases}0, & \text{εαν } |t-T|>\frac{a}{2}\\ 1, & \text{εαν } |t-T|\le\frac{a}{2}\end{cases}$$

Δεδομένου ότι για οποιονδήποτε μη μηδενικό ακέραιο n, $0^n=0$ και $1^n=1$, σε οποιαδήποτε δύναμη και αν υψωθεί η συνάρτηση rect(·) θα ισούται με την ίδια συνάρτηση, δηλαδή

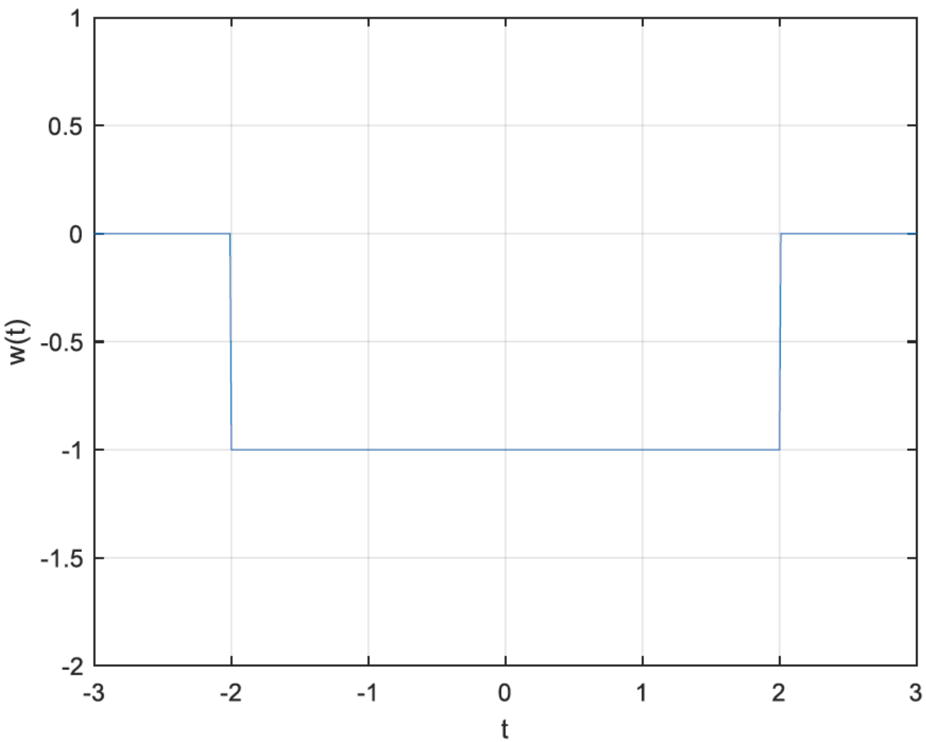
$$rect^n\left(\frac{t-T}{a}\right)=rect\left(\frac{t-T}{a}\right)$$

Άρα θα είναι

$$w(t)=y^3(t)=\left[-rect\left(\frac{t}{4}\right)\right]^3=(-1)^3 rect^3\left(\frac{t}{4}\right)=-rect\left(\frac{t}{4}\right)=y(t)$$

Ο κώδικας σε Octave είναι

```
close all;
clear all;
clc;
ts = 0.01;
t = -3:ts:3;
w = -rectpulse(t,0,4);
plot(t, w);
axis([-3 3 -2 1])
xlabel('t');
ylabel('w(t)');
grid on;
```



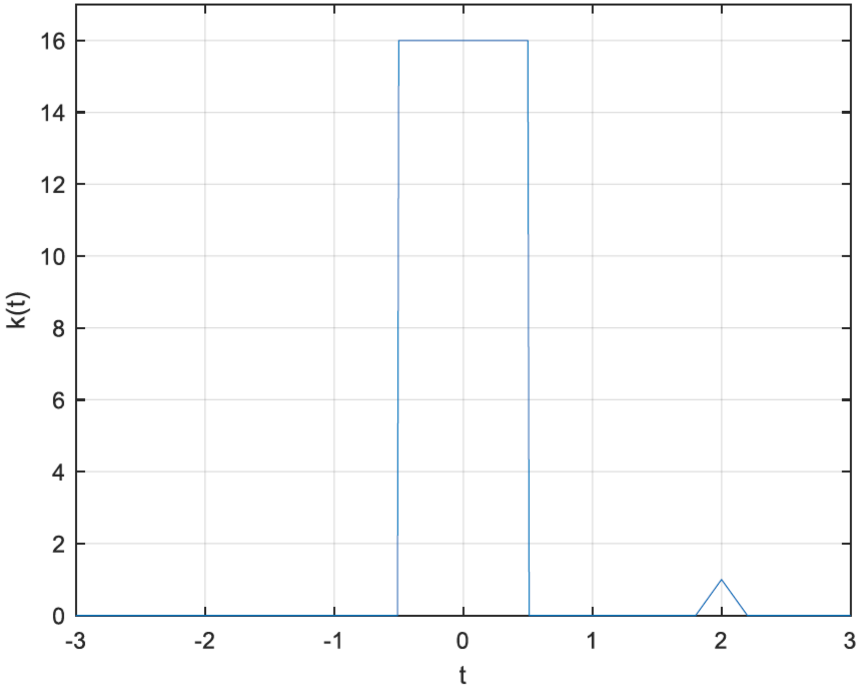
B)

Άρα θα είναι

$$k(t) = x^2(t) + z(t) = 4^2 rect^2(t) + tri(5t-10) = 16rect(t) + tri\left(5\left(t-2\right)\right) = 16rect(t) + tri\left(\frac{(t-2)}{\frac{1}{5}}\right)$$

Ο κώδικας σε Octave είναι

```
close all;
clear all;
clc;
ts = 0.01;
t = -3:ts:3;
k = 16*rectpulse(t,0,1)+triangular(t,2,0.2);
plot(t, k);
axis([-3 3 0 17])
xlabel('t');
ylabel('k(t)');
grid on;
```



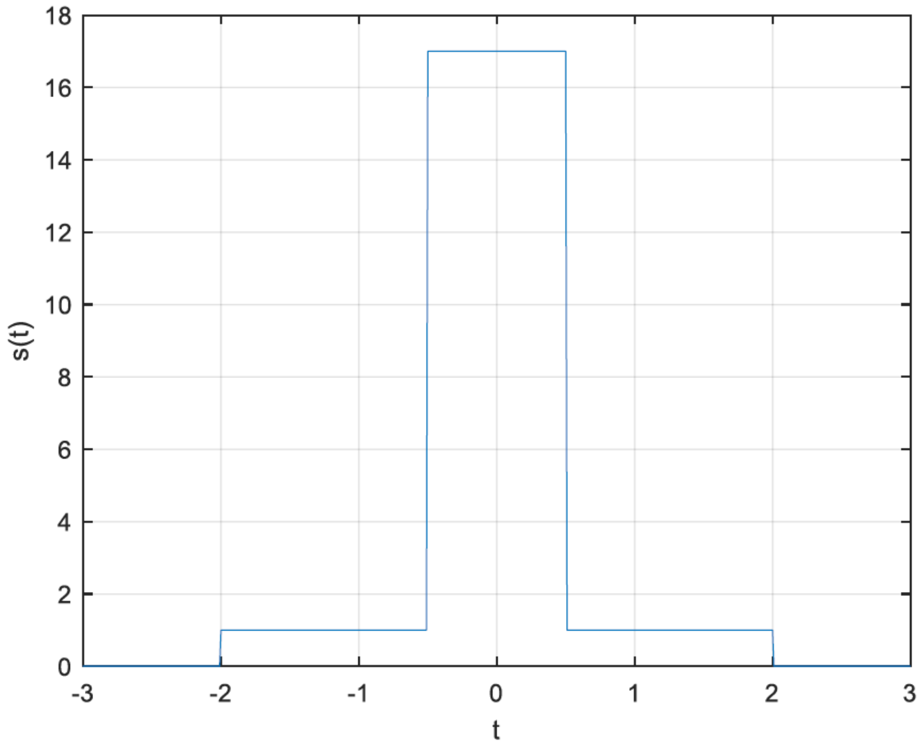
Γ)

Έχουμε

$$s(t)=x^2(t)+y^2(t)=4^2 rect^2(t)+\left[-rect\left(\frac{t}{4}\right)\right]^2=16rect(t)+rect\left(\frac{t}{4}\right)$$

Ο κώδικας σε Octave είναι

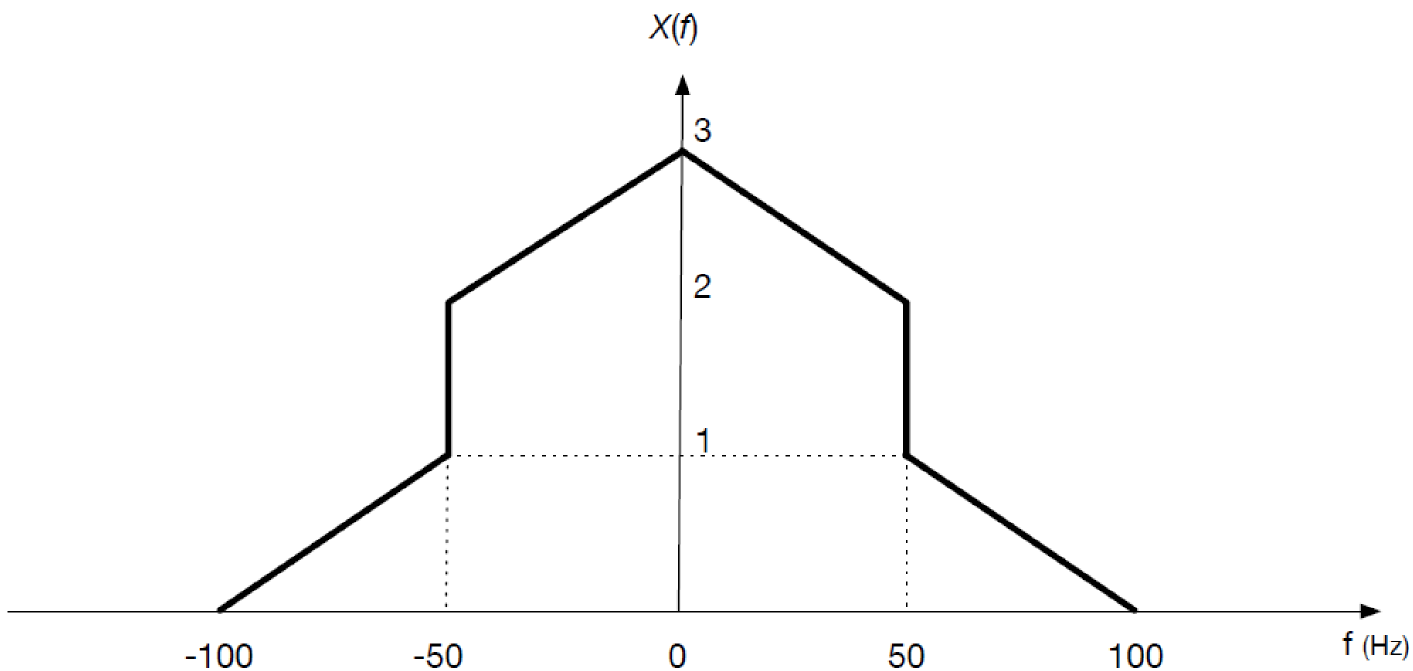
```
close all;
clear all;
clc;
ts = 0.01;
t = -3:ts:3;
s = 16*rectpulse(t,0,1)+rectpulse(t,0,4);
plot(t, s);
axis([-3 3 0 18])
xlabel('t');
ylabel('s(t)');
grid on;
```



ΠΛΗ22_Εξέταση 1η_3-7-2019

ΘΕΜΑ 2 (20 Μονάδες)

Έστω ένα σήμα πληροφορίας πεπερασμένου εύρους ζώνης $x(t)$ το οποίο έχει το παρακάτω πλάτος φάσματος $X(f)$:



Ερώτηση 1η (5 Μονάδες): Να υπολογίσετε στο πεδίο του χρόνου την έκφραση του σήματος $x(t)$.

<u>Ερώτηση 1^{η}:</u> Αρχικά υπολογίζουμε την αλγεβρική έκφραση για το πλάτος φάσματος του σήματος:

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{100}\right) + 2\ tri\left(\frac{f}{100}\right)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τους γνωστούς Μ/Σ Fourier:

$$asinc(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} rect\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$asinc^2(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} tri\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} X(af)$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier και έχουμε:

$$x(t) = 100sinc(100t) + 2 \cdot 100sinc^2(100t)$$

ΘΕΜΑ 2

ΓΕ2/ 2019-20

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνοτήτων για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων.*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ2/17-18/Θ7, ΓΕ2/18-19/Θ1.

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *X(f)* του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω σημάτων: $x(t) = u(t-3) - u(t-7) + tri(t-5)$ (όπου u η μοναδιαία βηματική συνάρτηση και όπου tri η συνάρτηση τριγωνικού παλμού).

Με μία προσεκτική απεικόνιση του σήματος προκύπτει ότι οι δύο βηματικοί παλμοί σχηματίζουν ένα τετραγωνικό παλμό:

$$x(t) = u(t-3) - u(t-7) + tri(t-5) = rect\left(\frac{t-5}{4}\right) + tri(t-5)$$

Ισχύουν τα παρακάτω σύμφωνα με την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier για αλλαγή κλίμακας & χρονικής ολίσθησης:

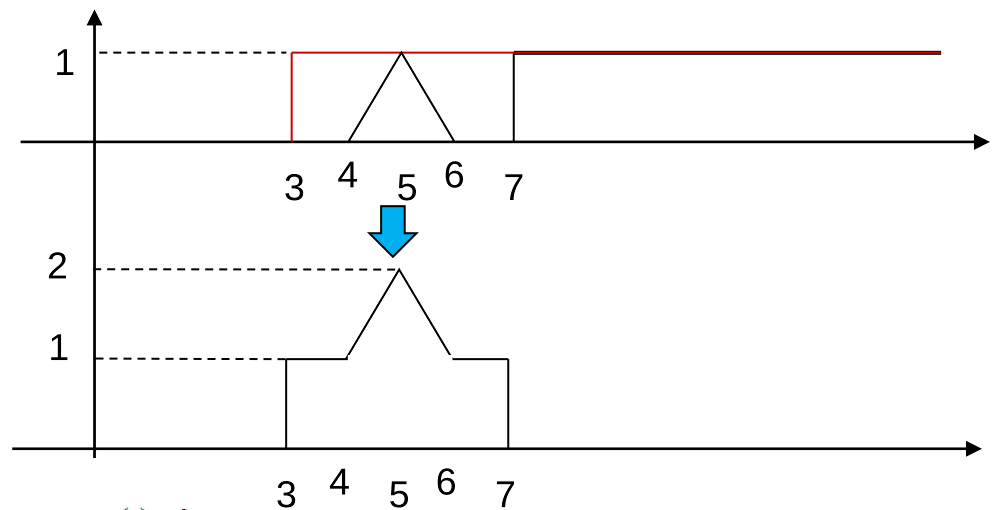
$$rect(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{sinc}(f)$$

$$rect\left(\frac{t}{4}\right) \xleftrightarrow{F} 4\operatorname{sinc}(4f)$$

$$rect\left(\frac{t-5}{4}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f5}\, 4\operatorname{sinc}(4f)$$

$$tri(t) \xleftrightarrow{F} \operatorname{sinc}^2(f)$$

$$tri(t-5) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f5} \operatorname{sinc}^2(f)$$



Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος x(t) είναι:

$$X(f) = e^{-j2\pi f5}\, 4\operatorname{sinc}(4f) + e^{-j2\pi f5} \operatorname{sinc}^2(f)$$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = 4\cos(800\pi t)$ και $X_2(f) = tri\left(\frac{f}{100}\right)$.

1. Να απαντηθούν τα παρακάτω

(α). Να υπολογιστεί η έκφραση $x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t)\right]$

(β). Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα του σήματος $x_3(t)$.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

1/

(α), (β)

$$x_1\left(\frac{t}{2}\right) = 4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{t}{2}\right) = 4\cos\left(2\pi 200t\right) \leftrightarrow 2\left[\delta\left(f-200\right)+\delta\left(f+200\right)\right] \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{2}x_1\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{1}{2}4\cos\left(2\pi 400\cdot\frac{3t}{2}\right) = 2\cos\left(2\pi 600t\right) \leftrightarrow \delta\left(f-600\right)+\delta\left(f+600\right) \qquad \text{(B)}$$

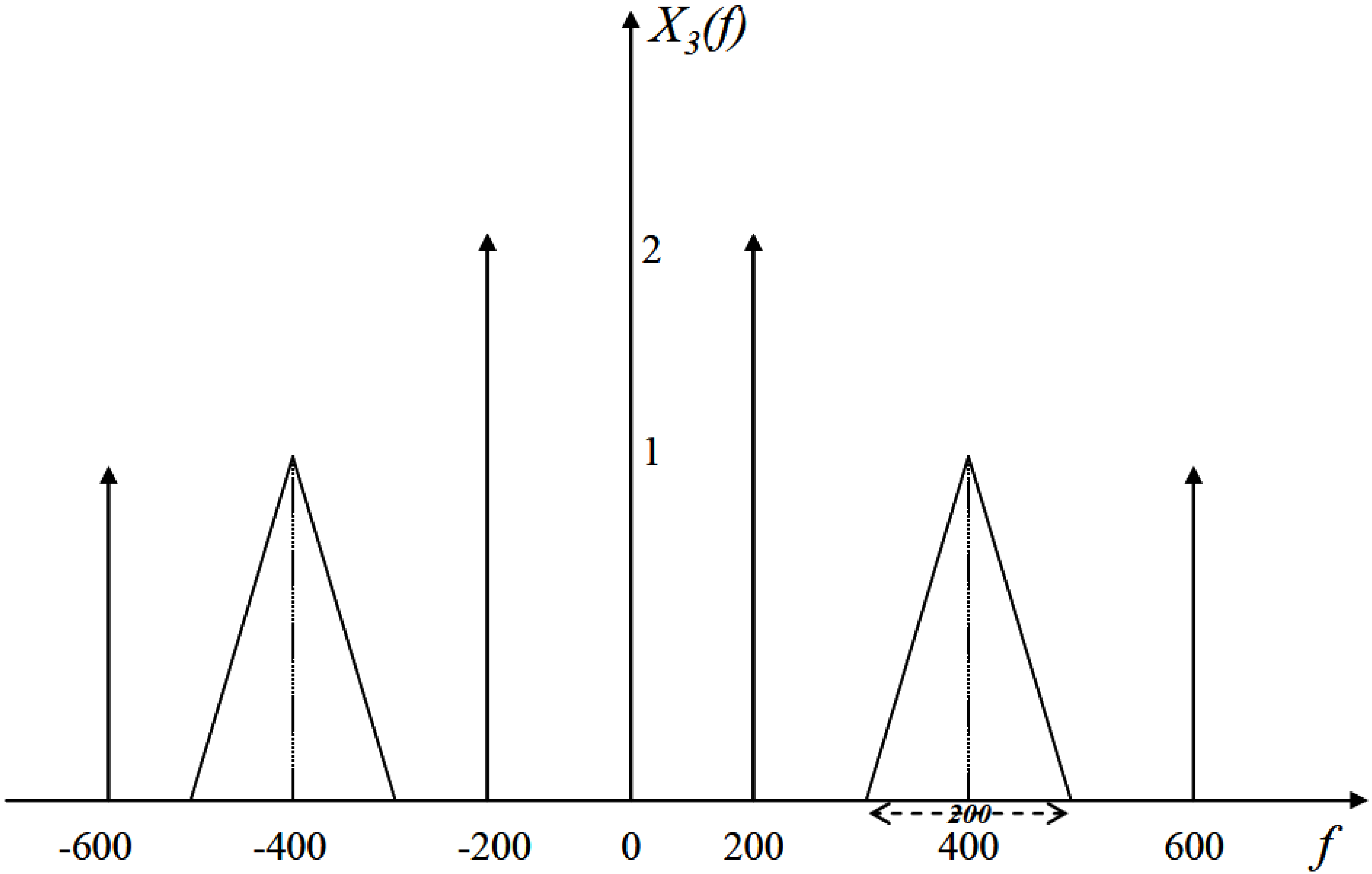
$$\frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) = 2\cos\left(2\pi 400t\right)100\sin c^2(100t) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left\{\delta\left(f-400\right)+\delta\left(f+400\right)\right\} * tri\left(\frac{f}{100}\right) = tri\left(\frac{f-400}{100}\right) + tri\left(\frac{f+400}{100}\right) \qquad \text{(Γ)}$$

Άρα από τις (Α-Γ):

$$x_3(t) = x_1(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\left[x_1(\frac{3t}{2}) + x_1(t)x_2(t) \right] = 4\cos\left(2\pi 200t\right) + 2\cos\left(2\pi 600t\right) + 200\cos\left(2\pi 400t\right)\sin c^2(100t)$$

$$X_3(f) = 2\left[\delta\left(f-200\right)+\delta\left(f+200\right)\right] + \left[\delta\left(f-600\right)+\delta\left(f+600\right)\right] + \left[tri\left(\frac{f-400}{100}\right) + tri\left(\frac{f+400}{100}\right)\right]$$



$X_3(f)$
2
1
200
-600
-400
-200
0
200
400
600
f

ΘΕΜΑ 1

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μετασχηματισμών Fourier και τις εναλλαγές μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνοτήτων για γνωστά σήματα και παλμούς με χρήση σχετικών πινάκων και ιδιοτήτων. Επίσης, μόνο στο ερώτημα (ε) απαιτείται χρήση OCTAVE MATLAB*

Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ1/2010-11/Θ6, ΓΕ1/2011-12/Θ5,6, ΓΕ1/2012-13/Θ1,3

(α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *X(f)* του σήματος με χρονική έκφραση που δίνεται από το άθροισμα των παρακάτω μοναδιαίων βηματικών σημάτων: $x(t)=u(t+4)-u(t+2)+u(t-2)-u(t-4)$

(β) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους *Y(f)* του σήματος με χρονική έκφραση

$$y(t)=8\operatorname{sinc}(8t)-4\operatorname{sinc}(2t)\cos(6\pi t)$$

(γ) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους *Z(f)* του σήματος με χρονική έκφραση

$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right]$. Επίσης να διερευνηθεί η περιοδικότητα του σήματος και να υπολογιστεί η περίοδός του (αν υπάρχει).

(δ) Να προσδιοριστούν και να σχεδιαστούν πρόχειρα τα φάσματα που προκύπτουν από τις παρακάτω πράξεις μεταξύ των φασμάτων που υπολογίστηκαν στα ερωτήματα (β), (γ):

(i) $W(f)=Y(f)Z(f)$

(α)

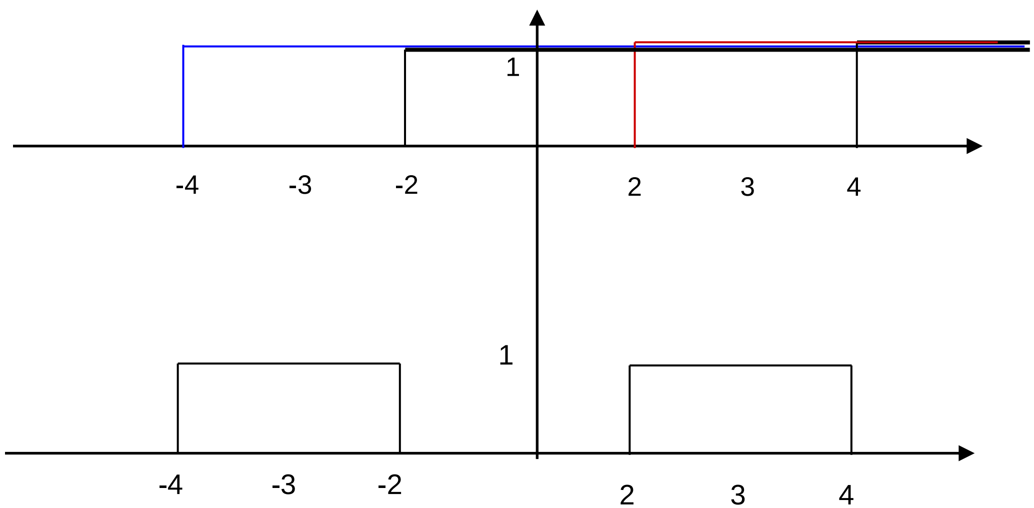
Έχουμε διαδοχικά:

$$x(t)=u(t+4)-u(t+2)+u(t-2)-u(t-4)=rect\left(\frac{t+3}{2}\right)+rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

$$rect(t)\xleftrightarrow{F}\sin c(f)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow rect\left(\frac{t}{2}\right)\xleftrightarrow{F}2\mathrm{sinc}(2f)\Leftrightarrow\begin{cases} rect\left(\frac{t+3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}e^{j2\pi f3}2\mathrm{sinc}(2f) \\ rect\left(\frac{t-3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}e^{-j2\pi f3}2\mathrm{sinc}(2f) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X(f)=e^{j2\pi f3}2\mathrm{sinc}(2f)+e^{-j2\pi f3}2\mathrm{sinc}(2f)=2\mathrm{sinc}(2f)\left[e^{j2\pi f3}+e^{-j2\pi f3}\right]=2\mathrm{sinc}(2f)2\cos(6\pi f)$$



(β)

Εφόσον στο προηγούμενο ερώτημα προέκυψε ότι $rect\left(\frac{t+3}{2}\right)+rect\left(\frac{t-3}{2}\right)\xleftrightarrow{F}2\text{sinc}(2f)2\cos(6\pi f)$

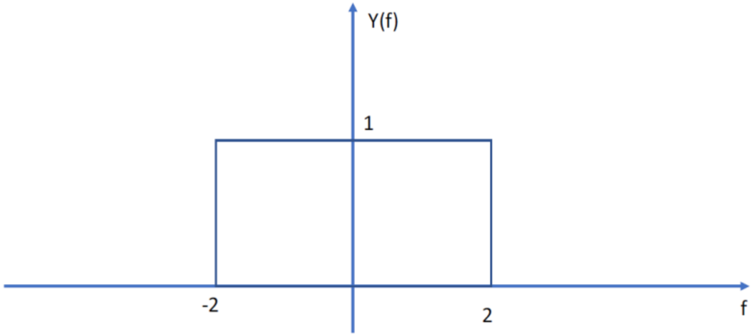
με βάση την ιδιότητα του δυϊσμού θα ισχύει:

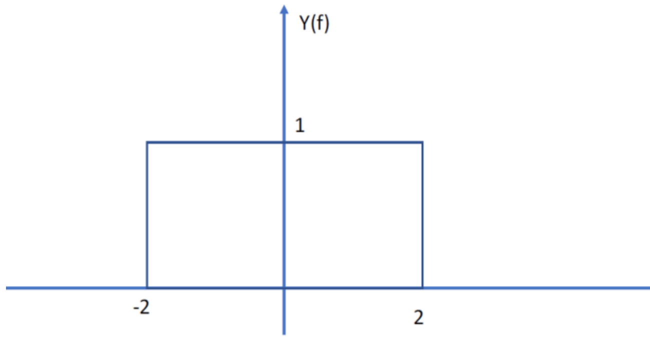
$$4\text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{-f+3}{2}\right)+rect\left(\frac{-f-3}{2}\right)=rect\left(\frac{f-3}{2}\right)+rect\left(\frac{f+3}{2}\right)$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$y(t)=8\text{sinc}(8t)-4\text{sinc}(2t)\cos(6\pi t)\xleftrightarrow{F}rect\left(\frac{f}{8}\right)-rect\left(\frac{f-3}{2}\right)-rect\left(\frac{f+3}{2}\right)=$$

$$=rect\left(\frac{f}{4}\right)$$





Εφόσον ισχύει $\cos(2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$,

με την ιδιότητα του δυϊσμού θα έχουμε

$$\frac{1}{2}\left[\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)\right] \xleftrightarrow{F} \cos(2\pi t_0 f)$$

Συνεπώς

$$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right] \xleftrightarrow{F} \cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$$

Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι συνεχές άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.

Εναλλακτικά

$$\delta\left(t-\frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f/8}$$

$$\delta\left(t+\frac{1}{8}\right) \xleftrightarrow{F} e^{j2\pi f/8}$$

Και με χρήση του κανόνα του Euler

$$z(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{8}\right)+\delta\left(t+\frac{1}{8}\right)\right] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[e^{-j2\pi f/8}+e^{j2\pi f/8}\right]=\cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$$

(δ)

(i) $W(f) = Y(f)Z(f) = rect\left(\frac{f}{4}\right)\cos\left(2\pi\frac{1}{8}f\right)$