ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ-46

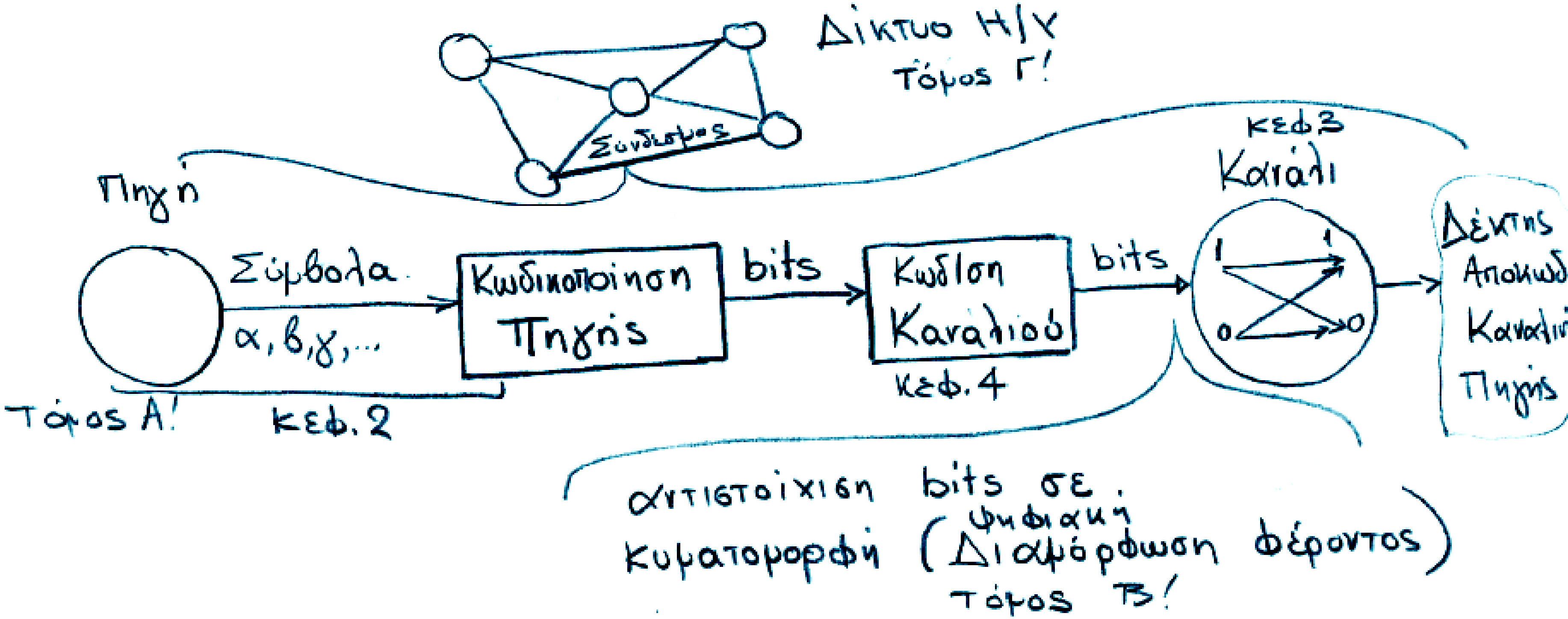
$4^{η}$ ΟΣΣ

10.03.2024

Ν.Δημητρίου

Επικοινωνιακό Μοντέλο

Επικοινωνία: Μεταβίβαση Πληροφορίας



Ειδικά θέματα:

1) Πιθανότητες- Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

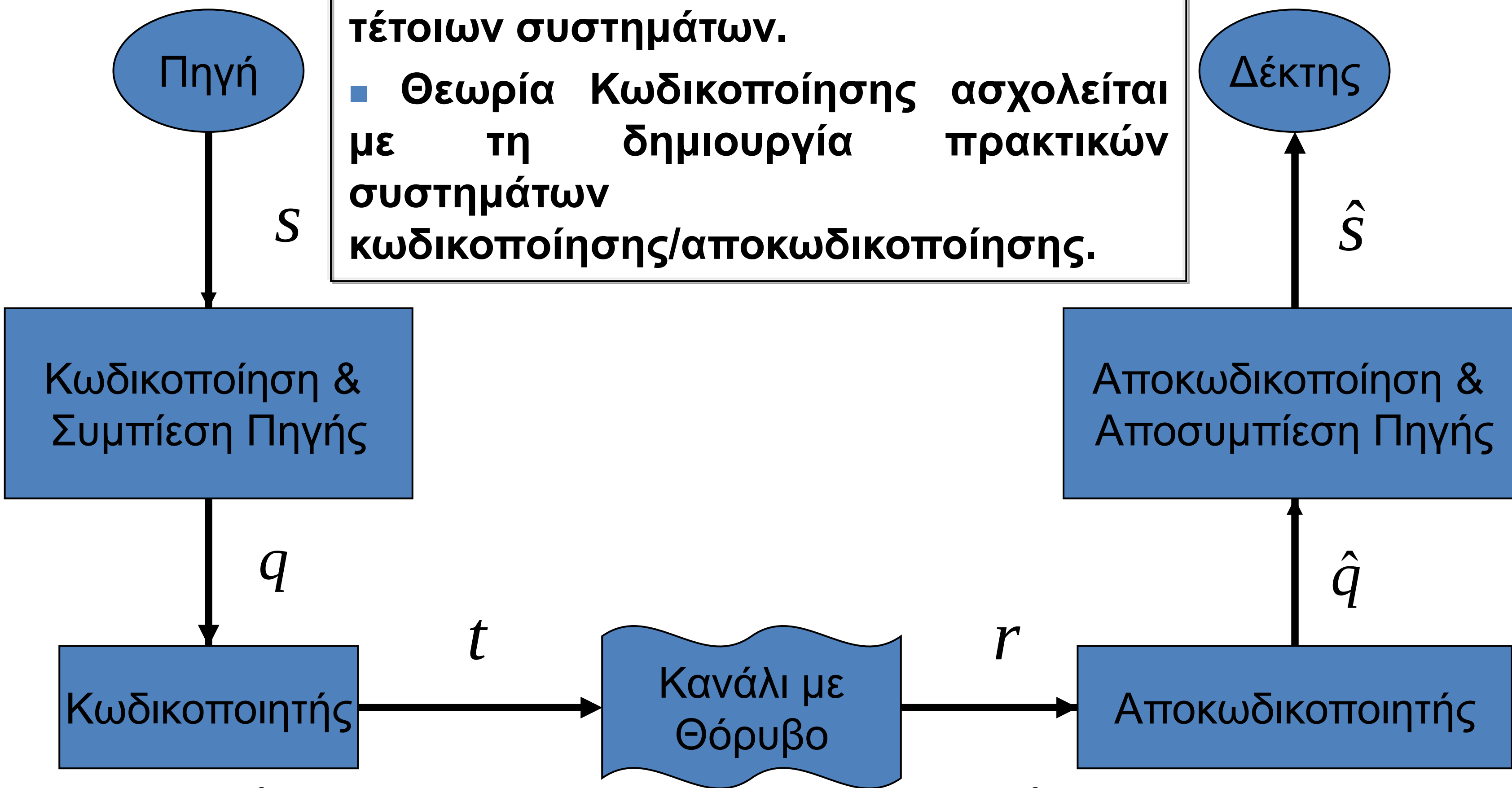
2) Ποσότητα Πληροφορίας

3) Πηγές Συμβόλων με/χωρίς μνήμη

4) Κωδικοποίηση πηγής

Προεπισκόπηση ΘΠ (3)

- **Η Θεωρία Πληροφορίας μελετά τα θεωρητικά όρια και τις δυνατότητες τέτοιων συστημάτων.**
- **Θεωρία Κωδικοποίησης ασχολείται με τη δημιουργία πρακτικών συστημάτων κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.**



- Το μοντέλο του Επικοινωνιακού Συστήματος

- Σύμβολα Πηγής ⟶ Δομικές μονάδες σήματος πληροφορίας

  ↳ τυχαία η διαδοχή τους (τυχαία μεταβλητή)

- Σφάλματα λόγω θορύβου στο κανάλι ⟶ τυχαία μεταβλητή

  ⇒ Χρήση Πιθανοτήτων

  για την περιγραφή της ροής πληροφορίας

  από την πηγή διαμέσου του καναλιού στο δέκτη

Πιθανότητες· Εισαγωγή

Τυχαίο Πείραμα (Το αποτέλεσμά του δεν είναι εκ των προτέρων βέβαιο)

Π.χ. ρίψη νομίσματος, ζάρια, ορθή αποστολή πακέτου από κόμβο Α στον κόμβο Β.

Πείραμα → $S_1, S_2, \vdots, S_n$: Ατομικά Αδιαίρετα Αποτελέσματα ή Ενδεχόμενα, Δειγματικά Σημεία

Διαφάνειες 3-14
Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_Entropy-Sources_2023_2024_v0.0

Ο δειγματικός χώρος ορίζεται ως το σύνολο των ενδεχομένων $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$

και αντιστοιχίζεται σε μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ με τη σχέση } \underbrace{P(S_i) = P(X = x_i)}_{\substack{\text{"πιθανότητα ενδεχομένου } S_i\text{"} \\ \text{"η τ.μ. } X \text{ να ισούται με } x_i\text{"}}} = P(x_i)$$

Ιδιότητες Πιθανοτήτων

- Το άθροισμα των πιθανοτήτων <u>όλων</u> των ενδεχομένων ισούται με 1 $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$.
- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου <u>Πάντα</u> ανήκει στο διάστημα $[0,1]$ $\quad 0 \leq P(x_i) \leq 1$

απίθανο   βέβαιο

Συνάρτηση Συνδυασμένης Πιθανότητας δύο ενδεχομένων x_i, y_j δύο τ.μ. X, Y

$P(x_i, y_j)$: πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$ <u>ταυτόχρονα</u>

$\parallel$

$P(y_j, x_i)$

Υπο συνθήκη πιθανότητα : πιθανότητα $X = x_i$ <u>με δεδομένο</u> ότι $Y = y_j$

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

ενδεχόμενο εμφάνισης

δεδομένο

ισχύει επίσης ότι:

$$P(y_j / x_i) = \frac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)} = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$$

· Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i/y_j)P(y_j) = P(y_j/x_i)P(x_i)$

· Όταν τα x_i, y_j είναι μεταξύ τους <u>ανεξάρτητα</u>

(δηλ το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του άλλου)

Έχουμε :

$$P(x_i/y_j) = P(x_i)$$

$$P(y_j/x_i) = P(y_j)$$

· Άρα, $P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$

Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής X

Αν $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με $\{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\}$

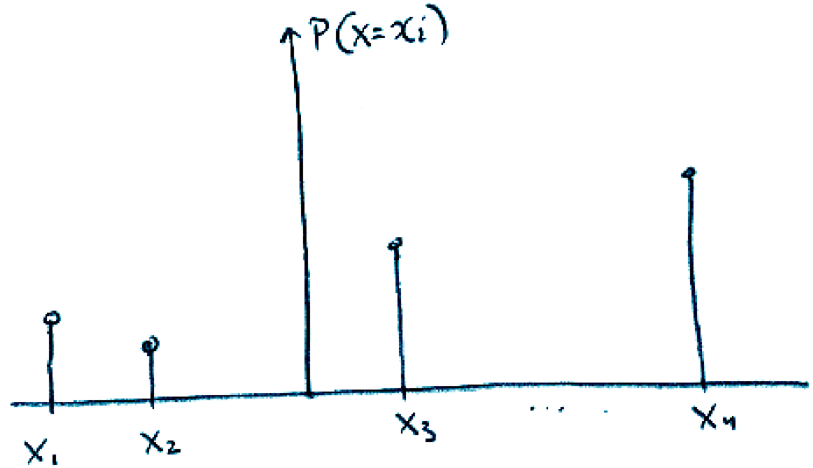
ισχύει ότι

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i).$$

Για 1 τυχαία μεταβλητή <u>διακριτή</u>

X με διακριτά ενδεχόμενα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

το σύνολο των πιθανοτήτων $P(X=x_i) = p(x_i) = \{p(x_1), p(x_2) \ldots, p(x_n)\}$
ορίζει τη συνάρτηση πιθανότητας μάζας. (σελ. 23)



ιστόγραμμα
τ.μ. X

Ιδιότητες:
- $0 \leq p(x_i) \leq 1$
- $\sum^{n} p(x_i) = 1$

Συνάρτηση κατανομής αθροιστικής πιθανότητας τ.μ. X

$$F(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad 0 \leq F(X \leq x) \leq 1$$

Για 2 διακριτές τ.μ.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

η συνδυασμένη πιθανότητα μάζας ορίζεται

ως: $P(X = x_i, Y = y_j)$ → ισοδυναμεί με πίνακα $n \times m$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς X:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \qquad i = 1, \dots, n$$

Ακραία πιθανότητα μάζας ως προς Y

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j) \qquad j = 1, \dots, m$$

Πιθανότητες.

Τυχαία μεταβλητή $X = \{\overbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}^{\text{ενδεχόμενες τιμές}}\}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1. \quad 0 \leq P(x_i) \leq 1$

Πιθανότητα μάζας $\{p(x_1), p(x_2) \ldots, p(x_n)\}$

Μέση τιμή $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$

Συνδυασμένη Πιθανότητα 2 τυχαίων μεταβλητών: X, Y $\quad P(x_i, y_j) =$ πιθανότητα $X = x_i$ και $Y = y_j$ ταυτόχρονα

Υπό συνθήκη πιθανότητα 2 τυχαίων μεταβλητών X, Y

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

ενδεχόμενο ↑ δεδομένο ↑

Ισχύει επίσης $P(y_j / x_i) = \dfrac{P(y_j, x_i)}{P(x_i)} = \dfrac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$

Άρα $p(x_i, y_j) = p(y_j / x_i) \cdot p(x_i) = p(x_i / y_j) \, p(y_j)$

Για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $P(x_i / y_j) = p(x_i)$ και $P(y_j / x_i) = P(y_j)$

άρα $P(x_i, y_j) = P(x_i) \cdot P(y_j)$

Δεδομένης της $P(x_i, y_j)$: $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$

ορίζονται: Ακραία πιθανότητα μάζας $P(x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i / y_j) \cdot P(y_j)$

Ακραία πιθανότητα μάζας $p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(y_j / x_i) \cdot P(x_i)$

Θεώρημα Bayes: $P(x_i / y_j) = \dfrac{P(y_j / x_i) \cdot P(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(y_j / x_i) \cdot p(x_i)}$

Θεώρημα Bayes (2)

- **Άσκηση**
  - Έστω δύο δοχεία **$Δ_1$** και **$Δ_2$**. Το **$Δ_1$** περιέχει 2 Πράσινες μπάλες και 8 Κόκκινες μπάλες. Το **$Δ_2$** περιέχει 6 Πράσινες μπάλες και 4 Κόκκινες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα δύο δοχεία και κατόπιν επιλέγουμε μία μπάλα από το επιλεγμένο δοχείο. Έστω ότι η μπάλα που επιλέχθηκε είναι πράσινη. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχει επιλεγεί το δοχείο **$Δ_1$**. Ομοίως για το **$Δ_2$**.
- **Λύση**
  - Το γεγονός το οποίο θεωρούμε ότι δεν είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε είναι η επιλογή του δοχείου.
  - Γνωρίζουμε όμως και τον τρόπο αλλά και τις πιθανότητες να επιλέξουμε ένα δοχείο, δηλ. P(**$Δ_1$**)=P(**$Δ_2$**)=1/2
  - Ζητείται ο υπολογισμός της πιθανότητας P(**Δ1**/Μπάλα είναι πράσινη)
  - Τέλος γνωρίζουμε και τις δεσμευμένες πιθανότητες, P(Π/**$Δ_1$**)=2/10, P(Κ/**$Δ_1$**)=8/10, P(Π/**$Δ_2$**)=6/10, P(Κ/**$Δ_2$**)=4/10.
  - Εφαρ ου Bayes γ

Εκ των υστέρων πιθανότητα

Εκ των προτέρων πιθανότητα

$$P(Δ_1/Π) = \frac{P(Δ_1, Π)}{P(Π)} = \frac{P(Π/Δ_1)P(Δ_1)}{P(Π/Δ_1)P(Δ_1) + P(Π/Δ_2)P(Δ_2)} = \frac{2/10 * 1/2}{2/10 * 1/2 + 6/10 * 1/2} = {}^{1}/_{4}$$

$$P(Δ_2/Π) = \frac{P(Π/Δ_2)P(Δ_2)}{P(Π/Δ_1)P(Δ_1) + P(Π/Δ_2)P(Δ_2)} = {}^{3}/_{4}$$

Παράδειγμα

- **Παράδειγμα 1**: Έστω (X,Y) έχουν την παρακάτω πιθανότητα μάζας

Περιθωριακές Πιθανότητες

Y \ X	1	2	3	4	P(y)
1	$\boxed{1/8}$	1/16	1/32	1/32	→ 1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	→ 1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	→ 1/4
4	1/4	0	0	0	→ 1/4
P(x)	1/2	1/4	1/8	1/8	

Περιθωριακές Πιθανότητες

$P(X/Y=y) = P(X,y)/P(Y=y)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1/8}{1/4} & \frac{1/16}{1/4} & \frac{1/32}{1/4} & \frac{1/32}{1/4} \end{bmatrix} \quad P(X/Y=1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad P(X/Y=2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad P(X/Y=3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P(X/Y=4)$$

$P(Y/X=x) = P(x,Y)/P(X=x)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1/8}{1/2} \\ \frac{1/16}{1/2} \\ \frac{1/16}{1/2} \\ \frac{1/4}{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1/16}{1/4} \\ \frac{1/8}{1/4} \\ \frac{1/16}{1/4} \\ \frac{0}{1/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1/32}{1/8} \\ \frac{1/32}{1/8} \\ \frac{1/16}{1/8} \\ \frac{0}{1/8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P(Y/X=1)$ $\quad$ $P(Y/X=2)$ $\quad$ $P(Y/X=3)$ $\quad$ $P(Y/X=4)$

Εξαρτημένες Πιθανότητες

p(x/y)=p(x,y)/p(y)

p(y/x)=p(x,y)/p(x)

Παράδειγμα

- **Παράδειγμα 1**: Έστω (X,Y) έχουν την παρακάτω πιθανότητα μάζας

Περιθωριακές Πιθανότητες

Y \ X	1	2	3	4	P(y)
1	$\boxed{1/8}$	1/16	1/32	1/32	→ 1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	→ 1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	→ 1/4
4	1/4	0	0	0	→ 1/4
P(x)	1/2	1/4	1/8	1/8	

Περιθωριακές Πιθανότητες

P(X/Y) ενδεχόμενα

δεδομένα	X1	X2	X3	X4
Y1	1/2	1/4	1/8	1/8
Y2	1/4	1/2	1/8	1/8
Y3	1/4	1/4	1/4	1/4
Y4	1	0	0	0

$P(Y/X=x) = P(x,Y)/P(X=x)$

P(Y/X) ενδεχόμενα

δεδομένα	Y1	Y2	Y3	Y4
X1	1/4	1/8	1/8	1/2
X2	1/4	1/2	1/4	0
X3	1/4	1/4	1/2	0
X4	1/4	1/4	1/2	0

Εξαρτημένες Πιθανότητες

p(x/y)=p(x,y)/p(y)

p(y/x)=p(x,y)/p(x)

Μέτρα Πληροφορίας

Είδηση/Πληροφορία 1

Χιόνισε στη Σαχάρα ύστερα από σχεδόν 40 χρόνια

Είδηση/Πληροφορία 2

Στα λευκά ο Παρνασσός -Γέμισε κόσμο

→ Ποσότητα Πληροφορίας ή Πληροφοριακό Περιεχόμενο $H(x_i)$ γεγονότος x_i τυχαίας μεταβλητής X (σελ. 28)

Αν πιθανότητα εμφάνισης του x_i η $P(x_i)$

τότε $H(x_i) = -\log_2[P(x_i)]$ bits

* Παρακάτω όπου $\log(x)$ θα εννοείται ο δυαδικός λογάριθμος

$H(x_i) = 1$ bit όταν

$P(x_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow H(x_i) = -\log\frac{1}{2} = -\cancel{\log 1}^{0} + \log 2 = 1$ bit

→ ποσότητα πληροφορίας για αβεβαιότητα μεταξύ 2 ισοπίθανων γεγονότων

Διαφάνειες 22-56

Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_Entropy-Sources_2023_2024_v0.022

Σημείωση για $\log_\alpha x$:

Συνήθως $\alpha = 2, 10, e$

Σύμβαση $\log_e \to \ln$

Αν $a^y = x$ τότε $y = \log_\alpha x$ (όπου $x > 0$)

Ιδιότητες:

$$\log_\alpha(x \cdot y) = \log_\alpha(x) + \log_\alpha(y)$$

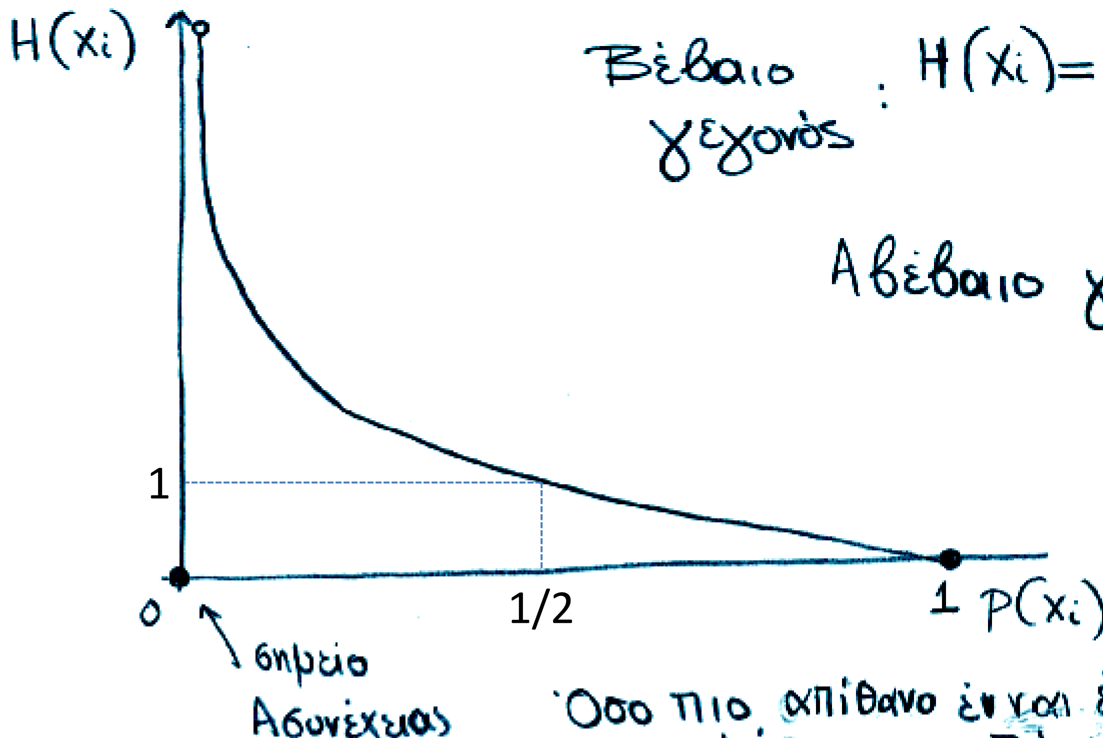
$$\log_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \log_\alpha(x) - \log_\alpha(y)$$

$$\log_\alpha(x^b) = b \cdot \log_\alpha(x)$$

$$\log_\alpha(1) = 0 \quad , \quad \log_\alpha \alpha = 1$$

Calculator

$$\log_\alpha x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} \alpha}$$



Βέβαιο γεγονός : $H(x_i)=0$ όταν $P(x_i)=0$

$P(x_i)=1$

Αβέβαιο γεγονός

$H(x_i)$ αντιστρόφως ανάλογο του $p(x_i)$

Όσο πιο απίθανο είναι ένα γεγονός τόσο μεγαλύτερο το πληροφοριακό περιεχόμενό του.

→ Μέση Ποσότητα Πληροφορίας ή μέση πληροφορία ή μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ή εντροπία μιας τυχαίας μεταβλητής $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log\left[p(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, H(x_i)$$

μέση τιμή, άθροισμα $H(x_i)$ με συντελεστές βαρύτητας τις πιθ. εμφάνισης $p(x_i)$

→ Για κάθε τ. μ. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ισχύει ότι

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(n)$$

* $H(X)=0$ όταν έχουμε βέβαιο γεγονός $p(x_i)=1$
$p(x_j)=0 \quad \forall j \neq i$

* H(X)=log(n) όταν έχουμε μέγιστη αβεβαιότητα

⇒ ομοιόμορφη κατανομή τ. μ.

δηλ. $p(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

π.χ. τ.μ. με 2 πιθανά γεγονότα

σελ. 28 σχ. 1.4

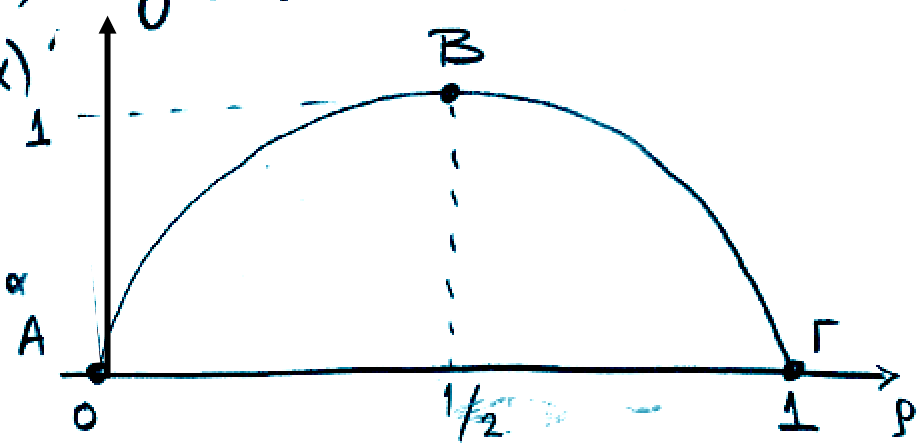
$X = \{x_1, x_2\}$

Έστω $p(x_1) = \rho$

$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1-\rho$

$$H(X) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) =$$

$$= -\rho\log\rho - (1-\rho)\log(1-\rho)$$



Σημεία Α, Γ βέβαιο γεγονός $H(x)=0$

Σημείο Β: μέγιστη αβεβαιότητα

$H(x) = \log 2 = 1$

Σχέσεις για 2 τ.μ. X, Y $\quad X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

$Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$

Συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log\left[p(x_i,y_j)\right]$$

Υπο συνθήκη ποσότητα πληροφορίας

$$H(X/Y) = +\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, H(X/y_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p(y_j)\left[-\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)\log p(x_i/y_j)\right] =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{p(y_j)\, p(x_i/y_j)}_{p(x_i,y_j)} \log p(x_i/y_j)$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p(x_i,y_j)\cdot\log p(x_i/y_j)$$

Βασική σχέση: $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

Αμοιβαία ποσότητα Πληροφορίας

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

$H(X)$: αβεβαιότητα της τ.μ. X

$H(X/Y)$: αβεβαιότητα της X δεδομένης της Y

⇓

διαφορά μεταξύ των X, Y

⇑

$H(Y/X)$: αβεβαιότητα της Y δεδομένης της X

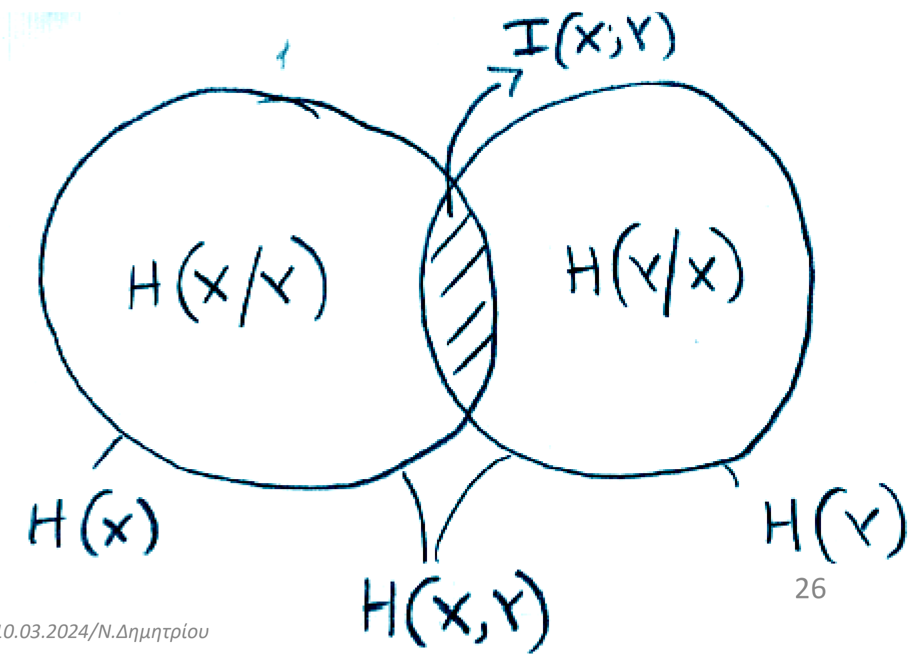
$I(X;Y)$: μέτρο εξάρτησης μεταξύ X, Y

Αν X και Y ανεξάρτητες

$H(X/Y) = H(X)$ $\quad H(Y/X) = H(Y)$

$I(X;Y) = 0$

$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$



Ερώτηση 8 Δεν έχει απαντηθεί ακόμα Βαθμολογείται με 1,00 **Σήμανση ερώτησης**

Επεξεργασία ερώτησης

Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι λανθασμένη;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. $I(X;Y)=I(Y;X)$
- B. $I(X;X)=H(X)$
- C. $I(X;Y)=H(Y)+H(Y/X)$
- D. $I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)$

Επιλέξτε ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι πάντοτε λάθος σχετικά με την αμοιβαία πληροφορία;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. I(X;Y)=I(Y;X)
- B. I(X;Y)=H(Y)-H(X/Y)
- C. I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y)
- D. I(X;X)=H(X)

Δίνονται οι τ.μ. Χ, Υ. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις πρέπει να ισχύει έτσι ώστε οι Χ και Υ, να θεωρηθούν ότι είναι πάντα ανεξάρτητες μεταξύ τους;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. $I(X;Y) \neq 0$
- b. $H(X/Y) = H(Y/X)$
- c. $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$
- d. $H(X/Y) < H(X)$

Ποιο είναι το πληροφοριακό περιεχόμενο μιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία αντιστοιχεί στο στρίψιμο ενός ζαριού το οποίο στις 3 πλευρές του έχει τον αριθμό 1 και στις άλλες τρεις πλευρές του τον αριθμό έξη (6).

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. 0 bit
- b. 1 bit
- c. $\log_2 6$ bits
- d. $\log_2 3$ bits

Ποιο είναι το πληροφοριακό περιεχόμενο μιας τυχαίας μεταβλητής X η οποία αντιστοιχεί στο στρίψιμο ενός νομίσματος με 2 κορώνες;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. Κανένα από τα παραπάνω
- b. 0 bit
- c. 1 bit
- d. 0.5 bits

Αμοιβαία Πληροφορία (4)

- **<u>Παράδειγμα 6</u>**: Έστω (X,Y) έχουν την παρακάτω πιθανότητα μάζας

Y \ X	1	2	3	4	P(y)
1	1/8	1/16	1/32	1/32	→ 1/4
2	1/16	1/8	1/32	1/32	→ 1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	→ 1/4
4	1/4	0	0	0	→ 1/4
P(x) ↓	1/2	1/4	1/8	1/8	

- H(X)=7/4 bits και H(Y)=2 bits
- H(X/Y)=11/8 bits και H(Y/X)=13/8 bits
- H(X,Y)=27/8 bits
- I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)=3/8 bits

Παράδειγμα 1 (43)

υπολογισμός μέτρων πληροφορίας

Σημ:
$\log\left(\frac{1}{2}\right)^n = -n\log 2 =$
$= -n$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} P(x_i)\log\left[P(x_i)\right] = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}2\log 2 + 2\,\frac{1}{8}\cdot 3\log 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \text{ bits}$$

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} P(y_j)\log\left[P(y_j)\right] = -4\,\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = 2\log 2 = 2 \text{ bits}$$

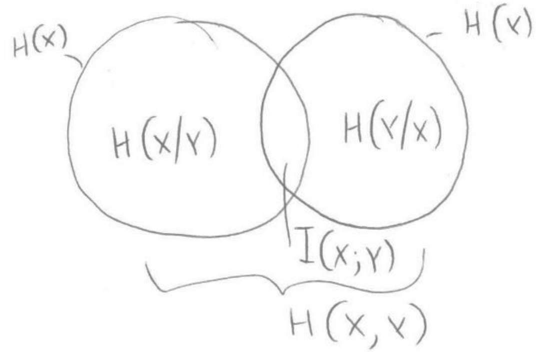
$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P(x_i,y_j)\log P(x_i,y_j) = -2\,\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - 6\,\frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - 4\,\frac{1}{32}\log\frac{1}{32} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}3\log 2 + \frac{3}{8}4\log 2 + \frac{1}{8}5\log 2 + \frac{1}{4}2\log 2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{27}{8} \text{ bits}$$

$$H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = \frac{27}{8} - 2 = \frac{11}{8} \text{ bits}$$

$$H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = \frac{27}{8} - \frac{7}{4} = \frac{13}{8} \text{ bits}$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X/X) = \frac{7}{4} - \frac{11}{8} = \frac{3}{8} \text{ bits}$$



Ανισότητες Εντροπίας (2)

- **Άσκηση**
  - Έστω ότι η τ.μ. (X,Y) έχει την παρακάτω συνδυασμένη μάζα πιθανότητας

Y \ X	1	2	P(y)
1	0	3/4	3/4
2	1/8	1/8	1/4
P(x)	1/8	7/8	

  - H(X)=H(1/8,7/8)=0.544 bits
  - H(X/Y=1)=H(0,1)=0 bits και H(X/Y=2)=H(1/2,1/2)=1 bit
  - H(X/Y)=3/4 H(X/Y=1)+1/4 H(X/Y=2)=0.25 bits
  - Παρατηρείστε ότι η αβεβαιότητα της X αυξάνεται στην περίπτωση που γνωρίζουμε το γεγονός Y=2 και ελαττώνεται όταν γνωρίζουμε το γεγονός Y=1. Παρόλα αυτά η μέση πληροφορία ή η αβεβαιότητα ελαττώνεται για την X/Y

παράδειγμα 2 (>>)

$$H(X) = \sum p(x_i)\log p(x_i) = -\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{7}{8}\log\frac{7}{8} = H\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right) = 0,544 \text{ bits}$$

Δίνεται ο πίνακας συνδυασμένης πιθανότητας $P(x_i, y_j)$

Για τους υπολογισμούς των υπό συνθήκη μέτρων πληροφορίας πρέπει να υπολογιστούν οι υπό συνθήκη πιθανότητες $P(x_i/y_j)$

$$H(X/Y=1) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i/y_1)\log p(x_i/y_1)$$

$$p(x_1/y_1) = \frac{P(x_1,y_1)}{P(y_1)} = 0 \qquad p(x_2/y_1) = \frac{P(x_2,y_1)}{P(y_1)} = \frac{3/4}{3/4} = 1.$$

Άρα $H(X/Y=1) = -0\log 0 - 1\log 1 = H(0,1) = 0$

$$p(x_1/y_2) = \frac{P(x_1,y_2)}{P(y_2)} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2 \qquad P(x_2/y_2) = \frac{P(x_2,y_2)}{P(y_2)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

άρα $H(X/Y=2) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bit}$

$$H(X/Y) = p(y_1)\cdot H(X/y_1) + p(y_2)H(X/y_2) = \frac{3}{4}\,0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4} \text{ bits}$$

$=$

ΘΕΜΑ 5

ΓΕ3 1718

Στόχος της άσκησης είναι *η εξοικείωση με βασικά γνωρίσματα των τυχαίων μεταβλητών, με τις συνδυασμένες και υπό συνθήκη πιθανότητες καθώς και με σχετικά μέτρα πληροφορίας.*

Σχετικές ασκήσεις: *Θ4/ΓΕ3/1617, Θ4/ΓΕ3/1516, Θ1/ΓΕ4/1213*

Δίνονται 2 τυχαίες μεταβλητές X, Y με συναρτήσεις ακραίας πιθανότητας μάζας $p(x_i)$, $p(y_j)$, (όπου $i=1,..,3$, $j= 1,..,3$). Επίσης δίνονται οι τιμές της $p(x_i)=\{1/8\ ,1/2\ ,\ 3/8\ \}$ καθώς και ο πίνακας των υπό συνθήκη πιθανοτήτων $p(y_j/x_i)$:

$p(y_j/x_i)$	y_1	y_2	y_3
x_1	$1/4$	$1/4$	$1/2$
x_2	$6/16$	$3/16$	$7/16$
x_3	$3/8$	$1/8$	$4/8$

Ζητούνται τα εξής:

(α) Ο πίνακας *συνδυασμένης πιθανότητας* $p(x_i, y_j)$,*ο πίνακας υπό συνθήκη πιθανότητας* $p(x_i/ y_j)$ καθώς και η συνάρτηση ακραίας πιθανότητας μάζας της τ.μ. Y, $p(y_j)$.

(β) Τα μέτρα πληροφορίας $H(X)$, $H(Y)$,

(γ) Τα μέτρα πληροφορίας $H(Y/X)$, $H(X,Y))$ και $H(X/Y)$ καθώς και η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας $I(X;Y)$

(δ) Να υποθέσετε και τρίτη τ.μ. Ζ με συνάρτηση ακραίας πιθανότητας μάζας $p(z_k)$, (όπου $k = 1,..,3$) και να υποθέσετε ότι ισχύει $H(Z)=1.5786$ *και* $H(X,Z)=2.8846$. Ποιά από τις τ.μ Y, Z έχει τη μεγαλύτερη εξάρτηση από τη X; Επίσης, ποιά από τις 3 τυχαίες μεταβλητές έχει τη μικρότερη αβεβαιότητα; Να αιτιολογήσετε περιληπτικά τις απαντήσεις σας.

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να εφαρμόσετε τις σχέσεις που συνδέουν τις υπό συνθήκη με τις συνδυασμένες πιθανότητες. Επίσης, να εφαρμόσετε τις σχέσεις υπολογισμού των διαφόρων μέτρων πληροφορίας, λαμβάνοντας υπόψη (όπου είναι δυνατό) τις σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μέτρων για απλοποίηση των υπολογισμών.*

(α)

Είναι:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j / x_i)$$

Χρησιμοποιώντας τον δεδομένο πίνακα υπό συνθήκη πιθανότητας *p(y$_j$/x$_i$) και τις τιμές p(x$_i$)* προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας

Συνδυασμένη πιθανότητα $p(x_i,y_j)$

$p(x_i,y_j)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0.03125 (2/64)	0.03125 (2/64)	0.0625 (4/64)
x_2	0.1875 (12/64)	0.09375 (6/64)	0.21875 (14/64)
x_3	0.140625 (9/64)	0.046875 (3/64)	0.1875 (12/64)

Αθροίζοντας τις επιμέρους στήλες του ανωτέρω πίνακα προκύπτουν οι τιμές της συνάρτησης ακραίας πιθανότητας μάζας της Y:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_j)$$

Άρα

p(y$_j$)={ 0.359375 (23/64) , 0.1718752 (11/64) , 0.46875 (30/64)}

Επίσης ισχύει ότι

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i) \cdot p(y_j / x_i)}{\sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_j)} = \frac{p(x_i) \cdot p(y_j / x_i)}{\sum_{i=1}^{3} p(x_i) \cdot p(y_j / x_i)}$$

Οπότε προκύπτει και ο παρακάτω πίνακας:

Υπό συνθήκη πιθανότητα $p(x_i/y_j)$

$p(x_i/y_j)$	x_1	x_2	x_3
y_1	0.086957 (2/23)	0.521739 (12/23)	0.391304 (9/23)
y_2	0.181818 (2/11)	0.545455 (6/11)	0.272727 (3/11)
y_3	0.133333 (4/30)	0.466667 (14/30)	0.400000 (12/30)

(β)

Με βάση τις σχετικές εκφράσεις για την εντροπία μιας τ.μ έχουμε:

$$H\left(X\right)=-\sum_{i=1}^{3}p\left(x_i\right)\cdot\log\left[p\left(x_i\right)\right]=1.4056 \text{ bits/symbol}$$

$$H\left(Y\right)=-\sum_{j=1}^{3}p\left(y_j\right)\cdot\log\left[p\left(y_j\right)\right]=1.4797 \text{ bits/symbol}$$

(γ)

Χρησιμοποιώντας τις υπο συνθήκη πιθανότητες $p(y_j/x_i)$ και τις συνδυασμένες πιθανότητες $p(x_i,y_j)$ μπορεί να υπολογιστεί η H(Y/X)

$$H\left(Y/X\right)=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}p\left(x_i,y_j\right)\cdot\log\left[p\left(y_j/x_i\right)\right]=1.4672 \text{ bits/symbol}$$

Επίσης, έχουμε:

$$H(X,Y)=H(X)+H\left(Y/X\right)=2.879 \text{ bits/symbol}$$

και

$$H(X/Y)=H(X,Y)-H\left(Y\right)=2.879-1.4797=1.3993 \text{ bits/symbol}$$

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας είναι

$$I(X;Y)=H(X)-H\left(X/Y\right)=1.4797-1.4672=0.01241 \text{ bits/symbol}$$

(δ)

Δίνεται ότι $H(Z)=1.5786$ *και* $H(X,Z)=2.8846$ bits/symbol

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας των X, Z είναι

$I(X;Z)=H(X)+H(Z)-H(X,Z)=1.4056+1.5786-2.8846=0.0996>I(X;Y)$ άρα η Z έχει μεγαλύτερη εξάρτηση από τη X σε σχέση με την Y.

Επίσης, τη μικρότερη αβεβαιότητα έχει η τ.μ. X διότι H(X)<H(Y)<H(Z)

Θέμα 2/ΓΕ 2003-04

Δίνονται 2 τ.μ. X, Y και ο πίνακας συνδυασμένων πιθανοτήτων τους

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	4	2	1	1
y_2	2	4	1	1
y_3	2	2	2	2
y_4	8	0	0	0

×32

÷32

$P(x_i, y_j)$

Y \ X	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$
$y_1=1$	1/8	1/16	1/32	1/32
$y_2=2$	1/16	1/8	1/32	1/32
$y_3=3$	1/16	1/16	1/16	1/16
$y_4=4$	1/4	0	0	0

Ζητούμενα:

1) $H(X)$, $H(Y)$
2) $H(X/Y)$, $H(Y/X)$
3) $H(X,Y)$
4) $I(X;Y)$

Εντροπια $H(x) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i) \log[p(x_i)]$

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας

ως προς x_i: $p(x_1) = \sum_{j=1}^{4} p(x_1, y_j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(αθροίζουμε τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα)

$$p(x_2) = \sum_{j=1}^{4} p(x_2, y_j) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$p(x_3) = \sum_{j=1}^{4} p(x_3, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

$$p(x_4) = \sum_{j=1}^{4} p(x_4, y_j) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{8}$$

Άρα, $H(x) = -p(x_1)\log(p(x_1)) - p(x_2)\log(p(x_2)) -$

$- p(x_3)\log(p(x_3)) - p(x_4)\log(p(x_4)) =$

$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) = 1{,}75$ bits

Ομοίως για το Y:

Υπολογισμός Ακραίων Πιθανοτήτων μάζας ως προς y_j

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_2) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_3) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p(y_4) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i, y_4) = \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{4}$$

Άρα, $H(Y) = -\sum_{j=1}^{4} p(y_j) \log(p(y_j)) = \left[-\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right)\right] \cdot 4 = 2$ bits

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P(x_i, y_j)\left[\log P(x_i/y_j)\right] \quad (1)$$

$$= -\sum_{j=1}^{4} P(y_j)\cdot \sum_{i=1}^{4}\left[P(x_i/y_j)\log\left(P(x_i/y_j)\right)\right]$$

$$P(x_i/y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

Υπολογίζοντας τις υπο συνθήκη πιθανότητες και εφαρμόζοντας τη σχέση (1) μπορεί να υπολογισθεί η $H(X/Y)$

Εναλλακτική λύση: (αποφεύγοντας υπολογισμούς $P(x_i/y_j)$)

Ισχύει ότι $H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

$$\Rightarrow H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y)$$

από τον πίνακα υπολογίζεται η $H(X,Y)$ και με την παραπάνω σχέση υπολογίζεται το ζητούμενο

$$H(x,x) = -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} p(x_i,y_j) \log\left[p(x_i,y_j)\right]$$

$$= -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \quad \Rightarrow \text{1η στήλη}$$

$$- \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) - \quad \Rightarrow \text{2η στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - 0\log(0) - \quad \Rightarrow \text{3η στήλη}$$

$$- \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{16}\log\left(\frac{1}{16}\right) - 0\log(0) \quad \Rightarrow \text{4η στήλη}$$

$$\log\left(\frac{1}{4}\right) = \log(4^{-1}) = \log(2^{-2}) = -2\log 2 = 2$$

Είναι: $\log\left(\frac{1}{8}\right) = \log\left(8^{-1}\right) = \log\left[\left(2^{3}\right)^{-1}\right] = \log\left(2^{-3}\right) =$

$= -3\log(2) = -3$

$$\log\left(\frac{1}{16}\right) = \log\left(16^{-1}\right) = \log\left(2^{-4}\right) = -4\log 2 = -4$$

$$\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log\left(32^{-1}\right) = \log\left(2^{-5}\right) = -5\log 2 = -5$$

Εξήγηση για το $\log(0)$

Κανονικά, $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$

Όμως στην περίπτωση μας, όπου υπολογίζουμε την ποσότητα πληροφορίας $H(x_i) = -\log(p(x_i))$, ισχύει

ότι $H(x_i) = 0$ όταν ισχύει $\left\{ \begin{array}{l} p(x_i) = 1 \\ \text{ή} \\ p(x_i) = 0 \end{array} \right.$

Άρα, θέτουμε $\log(0) = 0$ (μόνο στην περίπτωση υπολογισμών ποσότητας πληροφορίας)

· Άρα, $H(X,Y) = -\frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{4}(-2) -$

$- \frac{1}{16}(-4) - \frac{1}{8}(-3) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$

$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 -$

$- \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{32}(-5) - \frac{1}{16}(-4) - 0 =$

$= \frac{2 \cdot 3}{8} + \frac{6 \cdot 4}{16} + \frac{4 \cdot 5}{32} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{6+12+5+4}{8} = \frac{27}{8} = 3{,}375$ bits

· Άρα, $H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = 3{,}375 - 2 = 1{,}375$ bits

και $H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = 3{,}375 - 1{,}75 = 1{,}625$ bits

και $I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 1{,}75 - 1{,}375 = 0{,}375$ bits

Πηγές Συμβόλων – Κωδικοποίηση πηγής

Εντροπία Πηγής (1)

- **Διακριτή Πηγή Πληροφορίας**
  - Παράγει ακολουθίες **συμβόλων** (ή γραμμάτων), s_i
  - **Αλφάβητο πηγής** είναι το σύνολο των συμβόλων
    - $S=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, όπου n είναι το πλήθος των συμβόλων
  - Παράγει διαδοχικές ακολουθίες συμβόλων που ονομάζονται **μηνύματα**
    - Το πλήθος των δυνατών μηνυμάτων μήκους l είναι n^l
  - Η Παραγωγή των συμβόλων λαμβάνει χώρα με κάποια πιθανότητα, p_i
  - Η παραγωγή κάθε συμβόλου γίνεται
    - Είτε ανεξάρτητα αυτών που έχουν προηγηθεί οπότε αναφερόμαστε σε **διακριτή πηγή χωρίς μνήμη**

Διαφάνειες 57-65

Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_Entropy-Sources_2023_2024_v0.0

Εντροπία Πηγής (2)

- **Ποσότητα πληροφορίας της πηγής χωρίς μνήμη**
- Μέση ποσότητα πληροφορίας ή εντροπία των συμβόλων (bits/symbol)
  - $H(S) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$
- Μέγιστη μέση ποσότητα πληροφορίας (bits/symbol)
  - $\max H(S) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n$
- Πλεονασμός διακριτής πηγής, [0,1]
  - $red = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log n}$
- Μέσος Ρυθμός Πληροφορίας της πηγής (bits/sec)
  - $$R = \underbrace{r_S}_{\text{symbols/sec}} \underbrace{H(S)}_{\text{bits/symbol}}$$

Εντροπία Πηγής (3)

- **Παράδειγμα:** S={0,1} με p(0)=3/4 και p(1)=1/4
  - H(S)=0.815 bits/symbol
  - maxH(S)=log2=1 bit/symbol
  - red=1-0.815/1=0.19

Εντροπία Πηγής (4)

- Μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο μηνυμάτων της πηγής
  - Εάν γνωρίζουμε ότι η πηγή παράγει μηνύματα μήκους l, με δεδομένο ότι το πλήθος του συνόλου $M=(m_1,m_2,\ldots,m_q)$, των μηνυμάτων είναι $q=n^l$, και η πιθανότητα εμφάνισης ενός μηνύματος m_i είναι $p(m_i)$, τότε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των μηνυμάτων είναι
    - $$H(M) = -\sum_{i=1}^{n^l} p(m_i)\log p(m_i)$$
    - Αποδεικνύεται ότι $H(M)= l*H(S)$, δηλαδή το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο ενός μηνύματος είναι ίσο με το άθροισμα της πληροφορίας που μεταφέρουν τα σύμβολα που το αποτελούν.
- **Παράδειγμα:** Τα μηνύματα μήκους 2 που δημιουργούνται από την πηγή των συμβόλων του προηγούμενου παραδείγματος είναι M={00,01,10,11} πλήθους 4 και οι πιθανότητες να συμβούν είναι p(00)=9/16, p(01)=p(10)=3/16, p(11)=1/16. Τότε H(M)=1.63 bits/μήνυμα=2*0.815

Εντροπία Πηγής (5)

- ***<u>Άσκηση</u>***
  - Μια πηγή πληροφορίας παράγει σύμβολα, τα οποία ανήκουν στο αλφάβητο *S={τ, υ, φ, χ, ψ, ω}.* Οι πιθανότητες των συμβόλων αυτών είναι ¼, ¼, 1/8, 1/8, 1/8 και 1/8, αντίστοιχα.
  - Θεωρώντας την πηγή χωρίς μνήμη, ζητείται να υπολογίσετε
  - α) Το σύμβολο με το μεγαλύτερο και το μικρότερο πληροφορικό περιεχόμενο της πηγής.
  - β) Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής,
  - γ) Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα.
  - δ) Τον πλεονασμό της πηγής (*log6=2,585*) και
  - ε) Το μέσο ρυθμό πληροφορίας της πηγής για ρυθμό 500 συμβόλων /sec.

Εντροπία Πηγής (6)

- ***<u>Απάντηση</u>***
  - α) Τα σύμβολα με το μεγαλύτερο πληροφορικό περιεχόμενο είναι αυτά που έχουν την μικρότερη πιθανότητα δηλαδή *H(i)=-log(1/8)=3 bits* όπου *i*=φ,χ,ψ,ω. Αντίθετα τα σύμβολα με το μικρότερο πληροφορικό περιεχόμενο είναι αυτά που έχουν την μεγαλύτερη πιθανότητα δηλαδή *H(i)=-log(1/4)=2 bits* όπου *i*=τ,υ.
  - β) Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής
- $$H(S) = -\sum_{i=1}^{6} p_i \log p_i = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} = (20/8) = 2{,}5 \text{ bits/symbol.}$$

Εντροπία Πηγής (7)

- **<u>Απάντηση (συνέχεια)</u>**
  - γ) Για τον υπολογισμό του μέσου πληροφορικού περιεχομένου των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από 2 σύμβολα, υπολογίζουμε πρώτα τις (συνδυασμένες) πιθανότητες δημιουργίας των μηνυμάτων αυτών. Αφού η πηγή είναι χωρίς μνήμη, για τον υπολογισμό της πιθανότητας κάθε μηνύματος αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις πιθανότητες παραγωγής των συμβόλων από τα οποία αποτελείται. Συνολικά έχουμε 36 μηνύματα. Παρατηρούμε ότι από τα 36 μηνύματα, 4 έχουν πιθανότητα παραγωγής ίση με (1/16), 16 μηνύματα έχουν πιθανότητα παραγωγής (1/64) και 16 μηνύματα έχουν πιθανότητα παραγωγής (1/32).
  - p1=p(τ,τ)=1/16, p2=p(τ,υ)=1/16, p3=p(τ,φ)=1/32, p4=p(τ,χ)=1/32, p5=p(τ,ψ)=1/32, p6=p(τ,ω)=1/32,
  - p7=p(υ,τ)=1/16, p8=p(υ,υ)=1/16, p9=p(υ,φ)=1/32, p10=p(υ,χ)=1/32, p11=p(υ,ψ)=1/32, p12=p(υ,ω)=1/32,
  - p13=p(φ,τ)=1/32, p14=p(φ,υ)=1/32, p15=p(φ,φ)=1/64, p16=p(φ,χ)=1/64, p17=p(φ,ψ)=1/64, p18=p(φ,ω)=1/64,
  - p19=p(χ,τ)=1/32, p20=p(χ,υ)=1/32, p21=p(χ,φ)=1/64, p22=p(χ,χ)=1/64, p23=p(χ,ψ)=1/64, p24=p(χ,ω)=1/64,
  - p25=p(ψ,τ)=1/32, p26=p(ψ,υ)=1/32, p27=p(ψ,φ)=1/64, p28=p(ψ,χ)=1/64, p29=p(ψ,ψ)=1/64, p30=p(ψ,ω)=1/64,
  - p31=p(ω,τ)=1/32, p32=p(ω,υ)=1/32, p33=p(ω,φ)=1/64, p34=p(ω,χ)=1/64, p35=p(ω,ψ)=1/64, p36=p(ω,ω)=1/64.

Εντροπία Πηγής (8)

- **<u>Απάντηση (συνέχεια)</u>**
  - Επομένως

$$H\left(M\right) = -\sum_{i=1}^{36} p_i \log p_i = -4\frac{1}{16}\log\frac{1}{16} \text{-}16\frac{1}{64}\log\frac{1}{64} \text{-}16\frac{1}{32}\log\frac{1}{32} = (320/64) = 5 \text{ bits/message.}$$

  - Παρατηρείστε ότι H(M)=2 H(S)
  - Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι η πηγή είναι χωρίς μνήμη
  - δ) red=1-H(S)/maxH(S)=1-H(S)/log6=1-(2,5/2,585)=1-0,967=0,0328.
  - ε) R=rH(S)=500x(2,5)=1250 bits/sec.

Ερώτηση 6 Δεν έχει απαντηθεί ακόμα Βαθμολογείται με 1,00 **Σήμανση ερώτησης**

Επεξεργασία ερώτησης

Θεωρείστε ότι έχετε ένα αλφάβητο πηγής που αποτελείται από 64 ισοπίθανα σύμβολα. Από αυτό το αλφάβητο σχηματίζουμε μηνύματα μήκους αποτελούμενα από 4 σύμβολα το καθένα.

Ποια είναι η ποσότητα πληροφορίας των μηνυμάτων σε bits;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 4 bits
- B. 32 bits
- C. 6 bits
- D. 24 bits

Θεωρήστε πηγή πληροφορίας η οποία παράγει 3 σύμβολα α, β, γ με τα εξής χαρακτηριστικά ($p_α$=$p_β$ ενώ το $p_γ$=1/3). Ποιο το πληροφοριακό περιεχόμενο **<u>μηνυμάτων</u>** της πηγής αυτής αποτελούμενων από **<u>4 σύμβολα</u>**.

Επιλέξτε μια απάντηση:

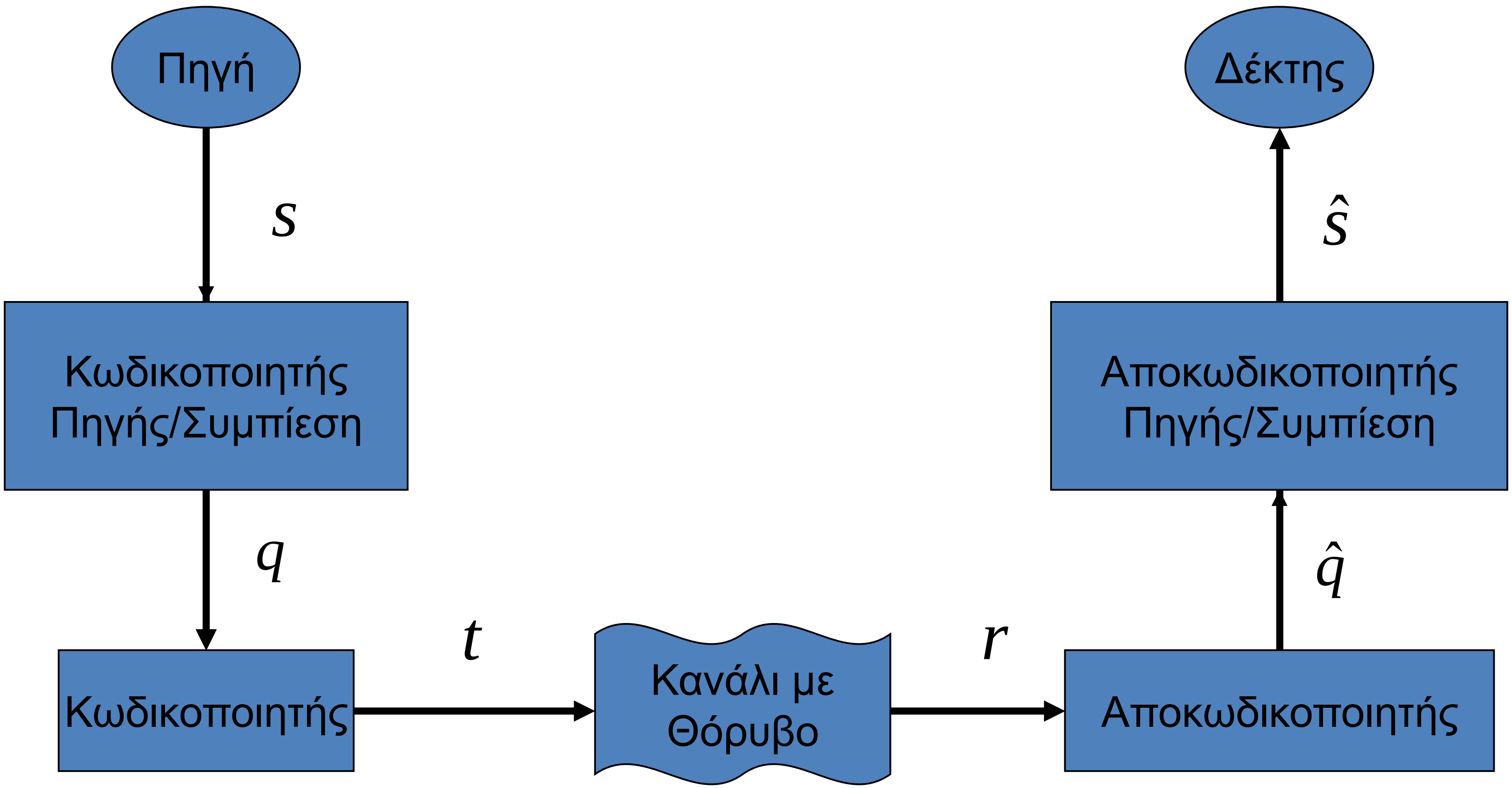
- A. 1.00 bit/μήνυμα
- B. 6.34 bits/μήνυμα
- C. 2.34 bits/μήνυμα
- D. 1.585 bit/μήνυμα

Συμπίεση Πληροφορίας ή Κωδικοποίηση Πηγής

- Επικοινωνιακό μοντέλο
- Διακριτές Πηγές Πληροφορίας
  - Με μνήμη
  - Χωρίς μνήμη
- Κωδικοποίηση Πηγής
  - Κωδικό Αλφάβητο, Κωδικές Λέξεις
- Κώδικες Πηγών
  - Ιδιάζοντες
  - Μοναδικά Αποκωδικοποιήσιμοι
  - Άμεσοι
  - Πλήρεις
- Ανισότητα Kraft
- Θεώρημα Κωδικοποίησης
  - Βέλτιστα Μήκη Κωδικών Λέξεων
- Αλγόριθμοι Κωδικοποίησης Πηγών Συμβόλων
  - FANO, SHANNON, HUFFMAN,

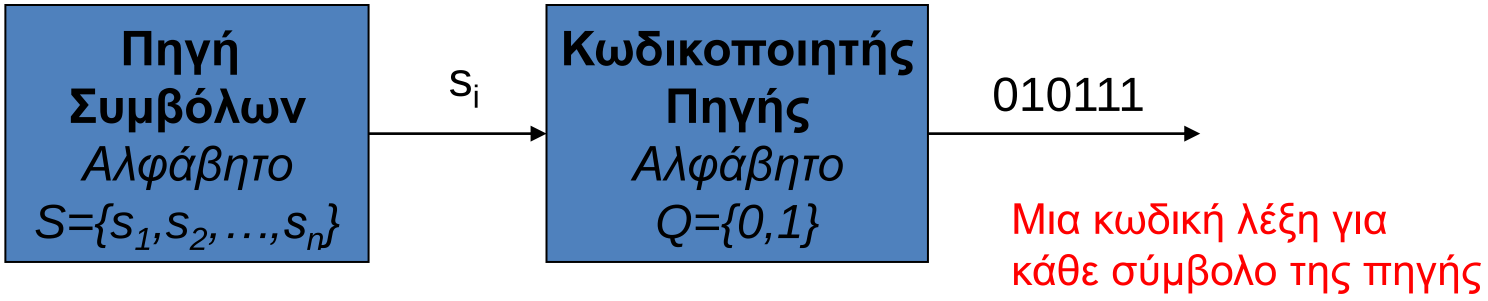
Διαφάνειες 67-103
Αρχείου PLH22_4th_OSS_InfoTheory_Entropy-Sources_2023_2024_v0.0

Κωδικοποίηση Πηγής (1)



Κωδικοποίηση Πηγής (2)

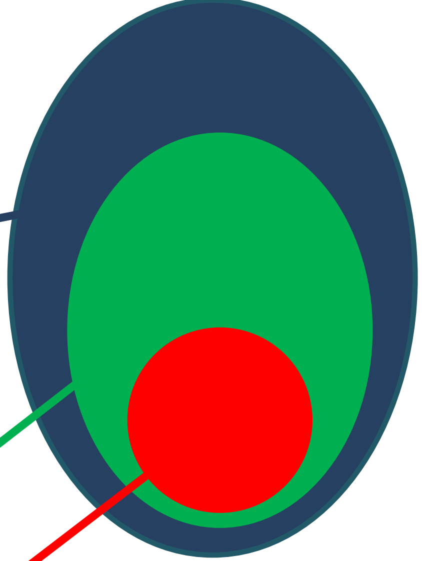
- Κωδικοποίηση/συμπίεση της πηγής
  - Είναι η διαδικασία αντιστοίχισης του αλφάβητου των συμβόλων σε ένα άλλο αλφάβητο, ώστε να αφαιρείται ο πλεονασμός και να προκύπτει συμπιεσμένη αναπαράσταση των μηνυμάτων.
  - Το καινούριο αυτό αλφάβητο ονομάζεται κωδικό αλφάβητο και τα μέλη ονομάζονται κωδικά σύμβολα.
  - ΟΙ ακολουθίες των κωδικών συμβόλων που αντιστοιχούν σε σύμβολα της πηγής λέγονται κωδικές λέξεις



Κωδικοποίηση Πηγής (4)

- Απαιτήσεις για χρησιμότητα κωδικών
  – Κάθε ακολουθία κωδικών λέξεων πρέπει να μπορεί να αποκωδικοποιηθεί με μοναδικό τρόπο
  – Η αποκωδικοποίηση πρέπει να γίνεται εύκολα και άμεσα
  – Ο κώδικας πρέπει να πετυχαίνει τη βέλτιστη δυνατή συμπίεση

Ορισμοί



- **Μη ιδιάζων (nonsingular) κώδικας**
  - Όταν όλες οι κωδικές λέξεις είναι διαφορετικές.
- **Μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμος (uniquely decodable) κώδικας**
  - Όταν τόσο οι κωδικές λέξεις όσο και όλες οι πιθανές ακολουθίες των κωδικών λέξεων είναι διαφορετικές.
- **Άμεσος ή Προθεματικός κώδικας (instantaneous/prefix code)**
  - Ο κώδικας του οποίου καμια κωδική λέξη δεν αποτελεί πρόθεμα κάποιας άλλης.
  - Κάθε προθεματικός κώδικας επιτρέπει την *άμεση* αποκωδικοποίηση της κωδικής λέξης χωρίς να χρειάζεται να ληφθούν υπόψη οι επόμενες κωδικές λέξεις.
- Άμεσος$\Rightarrow$Μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμος$\Rightarrow$Μη Ιδιάζων

Κωδικοποίηση Πηγής (6)

- **Παράδειγμα**
  - Μη ιδιάζων, I,II,III,IV
  - Μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος, II,III,IV. O I δεν είναι αφού ΦΦΦΦ, ΦΦΨ, ΨΨ όλα έχουν κωδική λέξη την ίδια, 0000
  - Άμεσοι κώδικες, II και III
  - Ο κώδικας IV δεν είναι άμεσος αφού χρειάζεται να γνωρίζουμε ψηφία που ανήκουν στην επόμενη κωδική λέξη, π.χ. 011011100?

	I	**II**	**III**	**IV**
Φ	0	00	0	0
Χ	11	01	10	01
Ψ	00	10	110	011
Ω	01	11	1110	0111

Ερώτηση 7 Δεν έχει απαντηθεί ακόμα Βαθμολογείται με 1,00 **Σήμανση ερώτησης**

Επεξεργασία ερώτησης

Για μία πηγή πληροφορίας τεσσάρων συμβόλων δίνονται οι παρακάτω κώδικες:

I: {000, 011, 110, 000}

II: {00, 111, 10 , 0010}

III: {000, 001, 010 , 100}

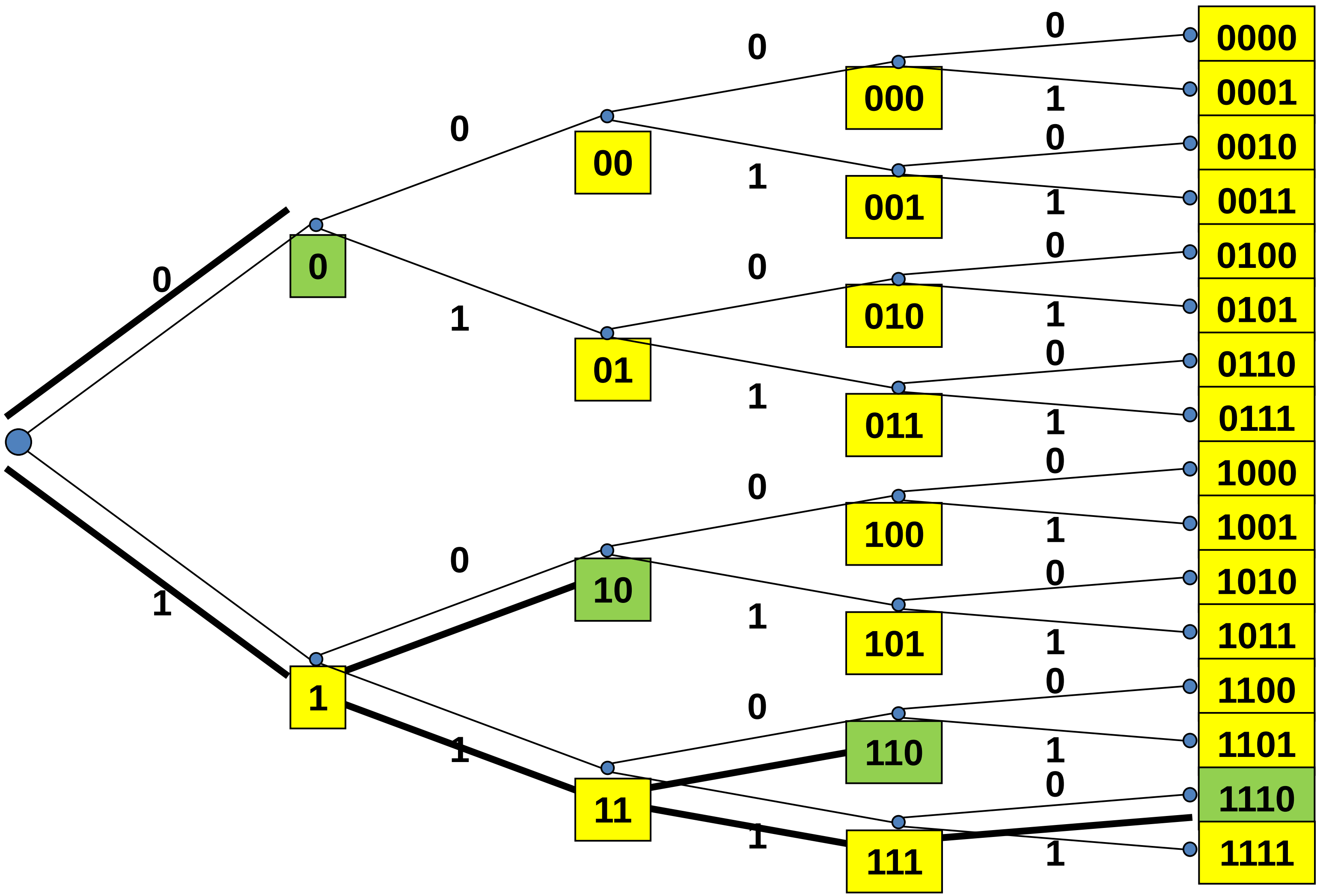
IV: {1, 10, 100 , 1000}

Ποια από τις παρακάτω φράσεις είναι σωστή;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. Ο «I» είναι μη ιδιάζων κώδικας
- B. Ο «III» είναι άμεσος
- C. Κανένας από τους κώδικες I-IV δεν είναι άμεσος
- D. Ο «II» είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος

Κωδικοποίηση Πηγής (7)



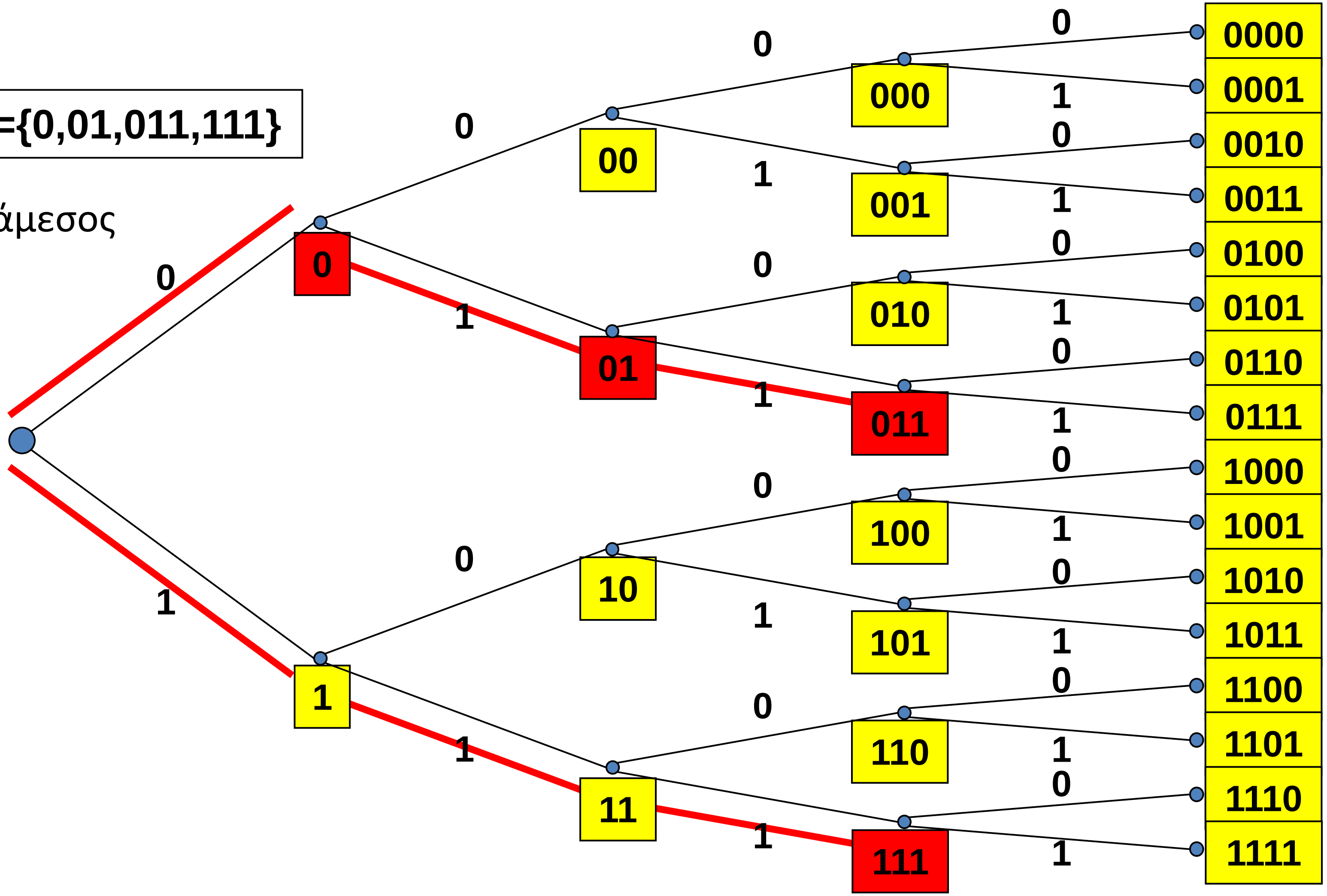
Παραδείγματα κωδίκων (άμεσων και μη)

- $C1=\{0,101\}$ — Άμεσος
- $C2=\{1,101\}$ — Μη άμεσος
- $C3=\{0,10,110,111\}$ — Άμεσος
- $C4=\{00,01,10,11\}$ — Άμεσος
- $C5=\{0,01,011,111\}$ — Μη άμεσος

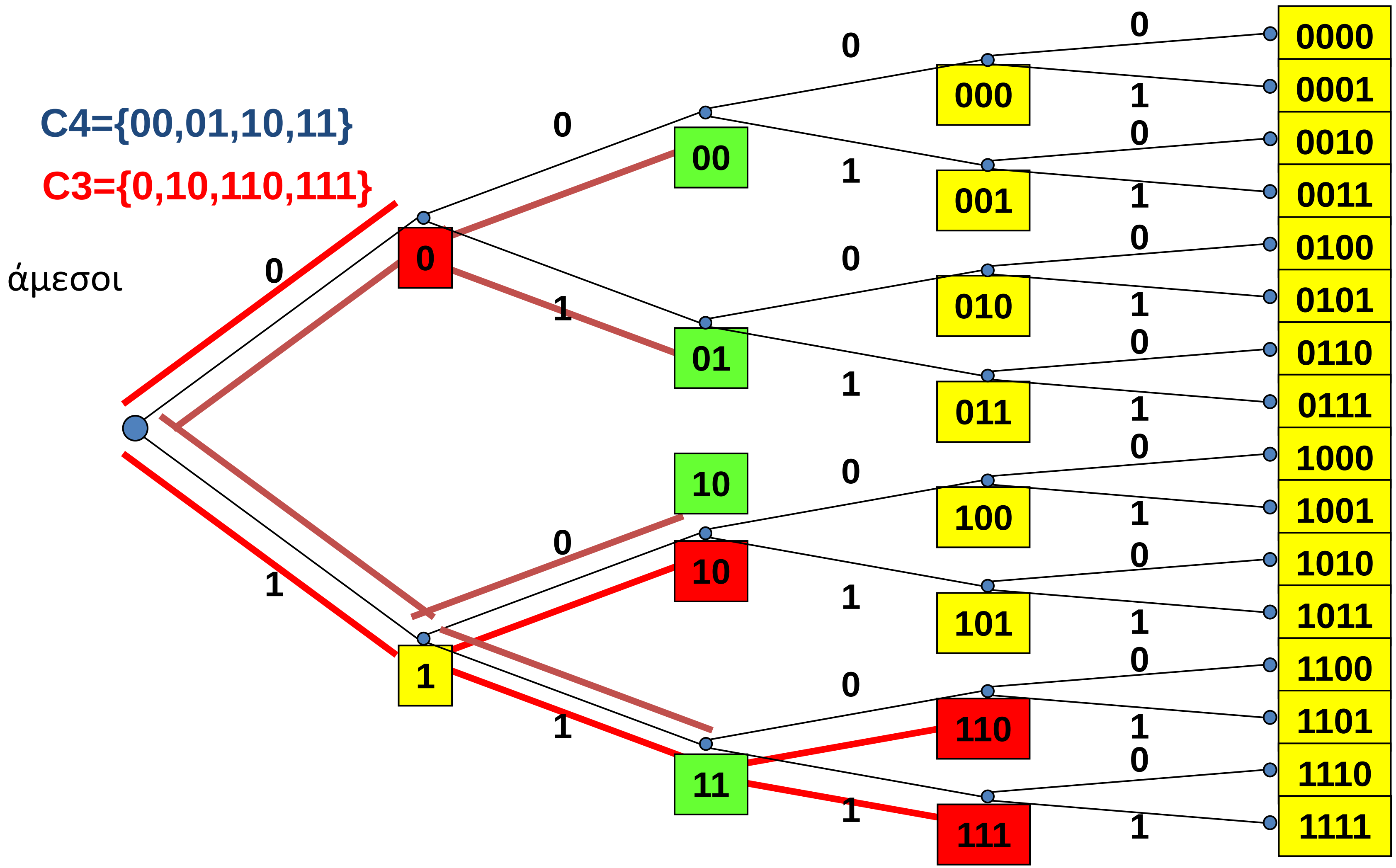
Κωδικοποίηση Πηγής (9)

C5={0,01,011,111}

Μη άμεσος



Κωδικοποίηση Πηγής (10)



- **Θεώρημα 12:** Ανισότητα του Kraft
  - Για κάθε άμεσο κώδικα με πλήθος κωδικών συμβόλων q του κωδικού αλφαβήτου Q και μήκη των κωδικών λέξεων l_i, όπου i=1,2,…,n και n το πλήθος των συμβόλων της πηγής ισχύει,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} q^{-l_i} \leq 1}$$

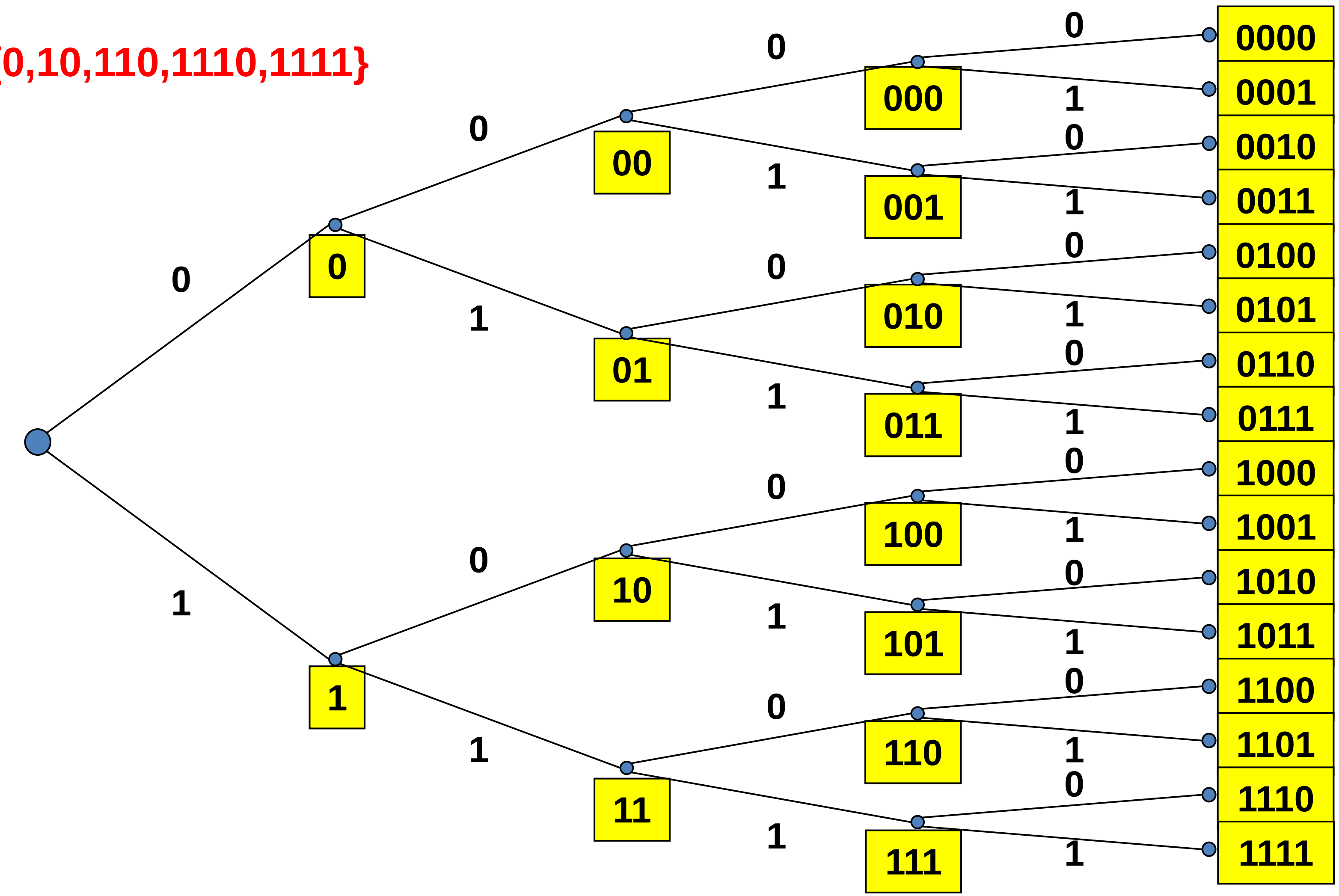
με δυαδικό αλφάβητο q=2

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \leq 1}$$

  - Αντίστροφα, αν για ένα σύνολο μηκών κωδικών λέξεων ισχύει η ανισότητα Kraft τότε υπάρχει ένας άμεσος κώδικας του οποίου οι κωδικές λέξεις έχουν αυτά τα μήκη.

Κωδικοποίηση Πηγής (15)

C={0,10,110,1110,1111}



ΘΣ / ΓΕ 0203

Πηγή 8 συμβόλων

S_i	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ
$p(s_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Τ.μ.

$$\sum_{i=1}^{8} P(S_i) = 1$$

Σύμβολα με χαμηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο:

↓

Σύμβολα με υψηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Ε, Β

$$H(s_i) = -\log[p(s_i)] \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}} = -\log\frac{1}{4} = -(\log 1 - \log 4) =$$

$$= -(0 - \log 2^2) = -(-2\log 2) = 2 \ \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}.$$

Σύμβολα με υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο

↓

Σύμβολα με χαμηλότερη πιθανότητα εμφάνισης Δ, Ζ

$$H(s_i) = -\log\left(\frac{1}{32}\right) = -(\log 1 - \log 32) = -(0 - \log 2^5) =$$

$$= 5\log 2 = 5 \ \text{bits/symbol}.$$

Μέσο Πληροφοριακό Περιεχόμενο Πηγής

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} p(S_i)\log[P(S_i)] = -p(A)\log[P(A)] - p(B)\log(P(B)) -$$

$$-p(\Gamma)\log(P(\Gamma)) - p(\Delta)\log(P(\Delta)) - p(E)\log(P(E)) - p(Z)\log(P(Z)) -$$

$$-P(H)\log(P(H)) - p(\Theta)\log(P(\Theta)) = -\frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} -$$

$$-\frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{32}\log\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8}\log\left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\log 8 + \frac{2}{4}\log 4 + \frac{1}{16}\log 16 + \frac{2}{32}\log 32 = \frac{3}{8}\cdot 3 + \frac{2}{4}\cdot 2 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{2}{32}\cdot 5 =$$

$$= \frac{36}{32} + \frac{32}{32} + \frac{8}{32} + \frac{10}{32} = \frac{86}{32} = 2{,}6875 \text{ bits/symbol}$$

Αν τα σύμβολα ήταν ισοπίθανα (πιθανότητες εμφάνισης ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή)

$$P(S_i) = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{8}$$

$$H(S_i) = \log(\eta) = \log 8 = 3\,\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = -\eta\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\log\frac{1}{\eta} = \log\eta = \log 8 = 3\,\frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

Τρόποι Κωδικοποίησης

(A) Ομοιόμορφη (Θεωρώντας ίδιο αριθμό bits ανά σύμβολο)

Α	000 ← 3 bits/symbol → Μέσο μήκος κώδικα
Β	001
Γ	010
Δ	011
Ε	100
Ζ	101
Η	110
Θ	111

(B) Ανομοιόμορφη (βασισμένη στην εντροπία της πηγής)

Σκοπός: Κατασκευή κατάλληλου κώδικα του οποίου το μέσο μήκος να προσεγγίζει την εντροπία των συμβόλων της πηγής $H(S) < \bar{L} < \log n$

2.6875 bits/symbol

3 bits/symbol

Άριστος κώδικας: max επίδοση

Κωδικοποίηση Huffman
(JPEG, MPEG)

(1) Διάταξη κατά φθίνουσα $P(S_i)$

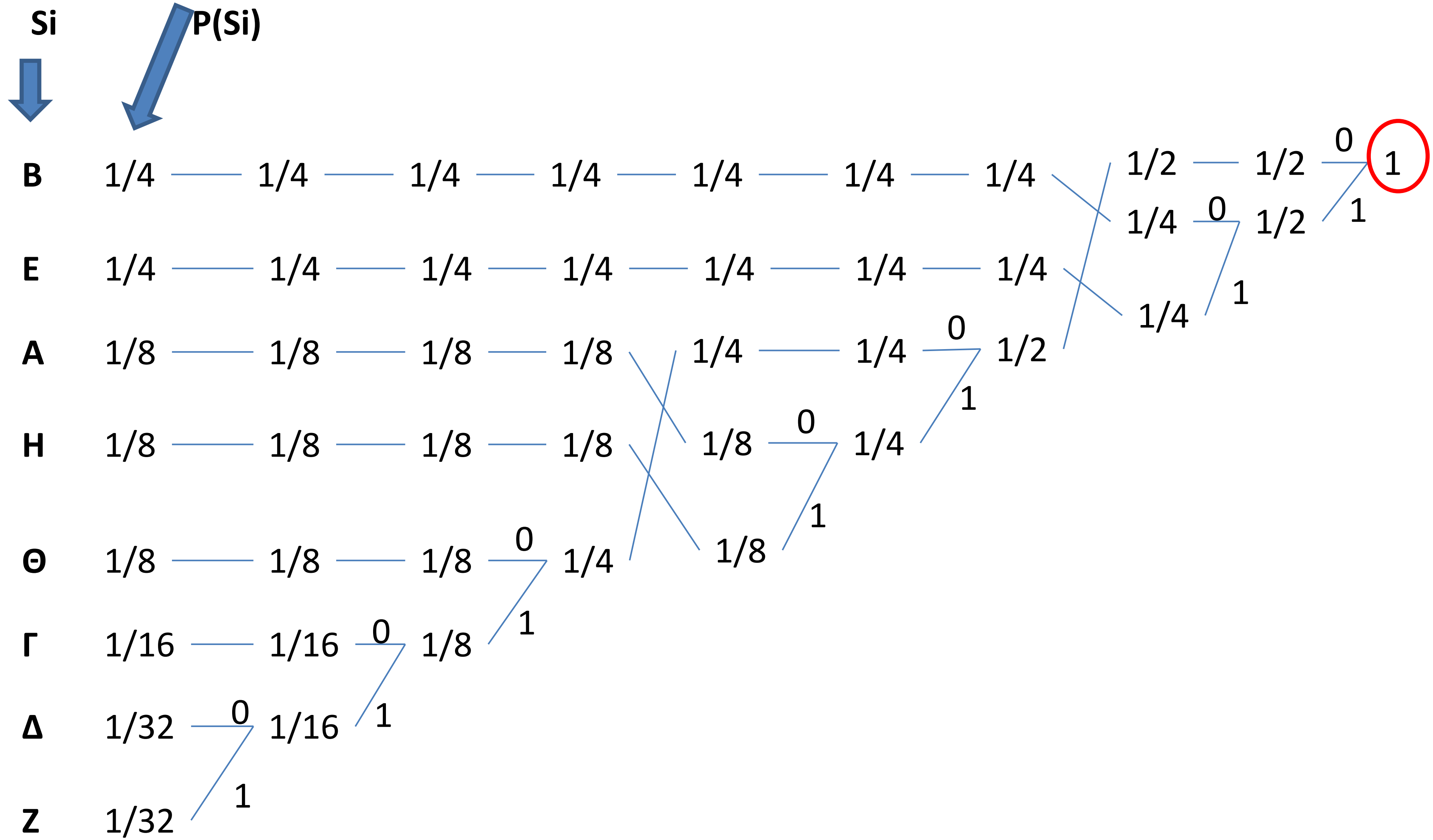
(2) Τα 2 τελευταία σύμβολα ενώνονται σε 1 με $P(\text{αθροιστική}) = P(S_i)+P(S_j)$

(3) Αναδιάταξη Συμβόλων.

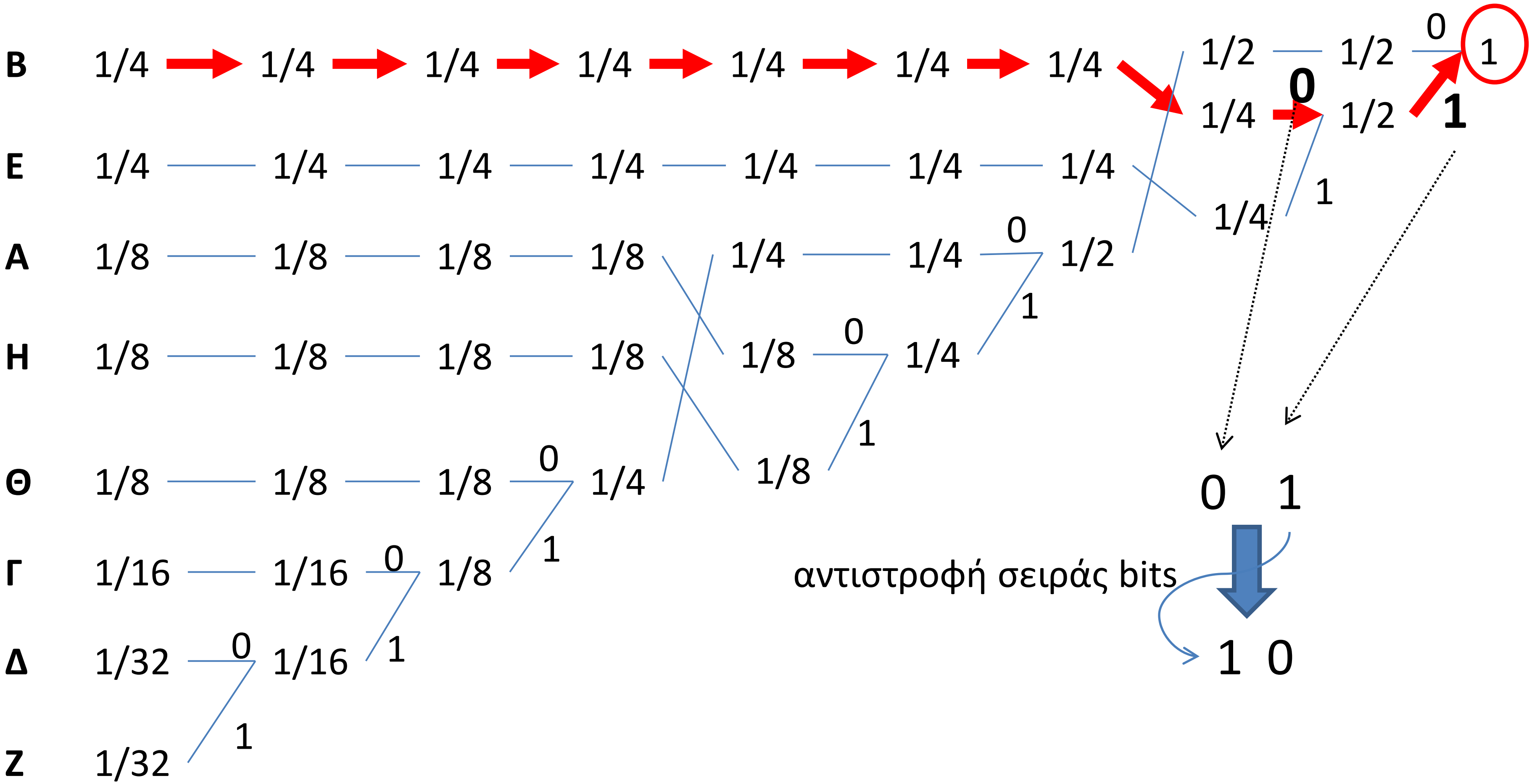
(4) Επανάληψη του (2) μέχρι να καταλήξουμε σε 2 σύμβολα.

(5) Από το τέλος στην αρχή σχηματίζουμε τον κώδικα για κάθε σύμβολο.

Σύμβολο Si **Πιθανότητα P(Si)**

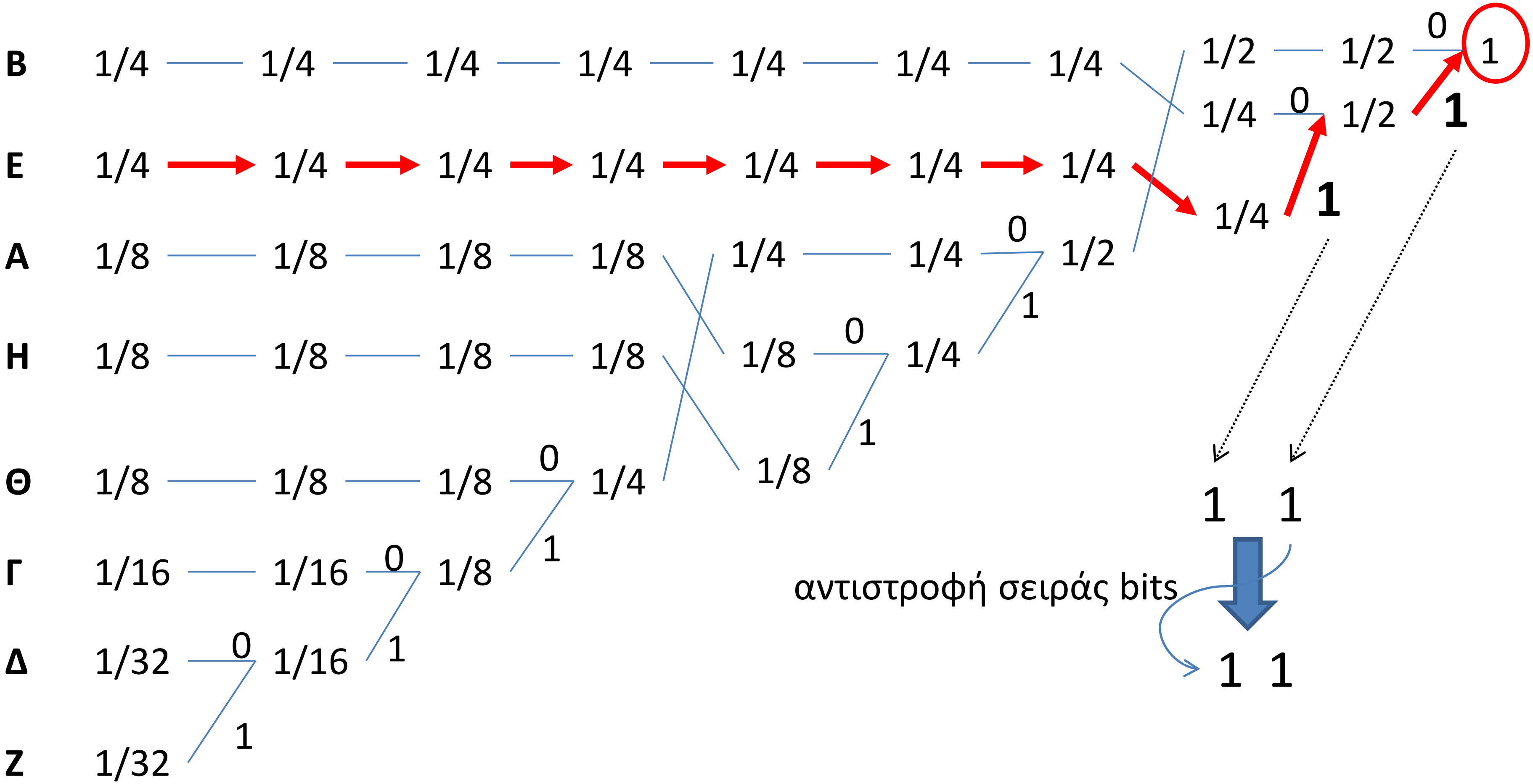


Σύμβολο Β



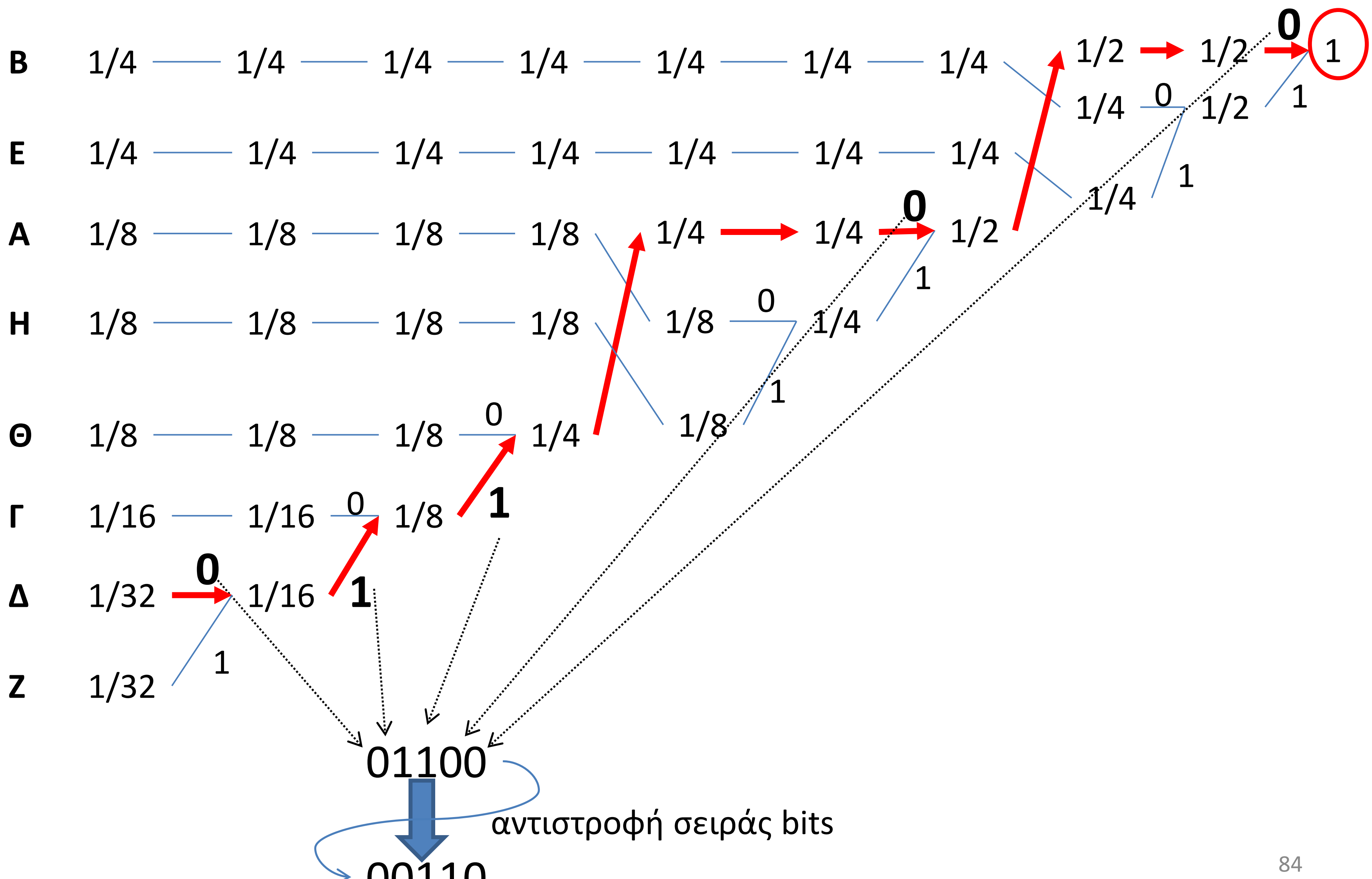
B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
A 1/8 1/8 1/8 1/8
H 1/8 1/8 1/8 1/8
Θ 1/8 1/8 1/8
Γ 1/16 1/16
Δ 1/32
Ζ 1/32
1/16 1/8 1/4 1/4 1/8 1/8 1/4 1/4 1/4 1/2
1/2 1/4 1/4 1/2 1/2 1
0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
0 1
αντιστροφή σειράς bits
1 0

Σύμβολο Ε



B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4
A 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2
H 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Z 1/32
1/2 1/2 1
1/4 1/2
1/4
0
1
1 1
αντιστροφή σειράς bits
1 1

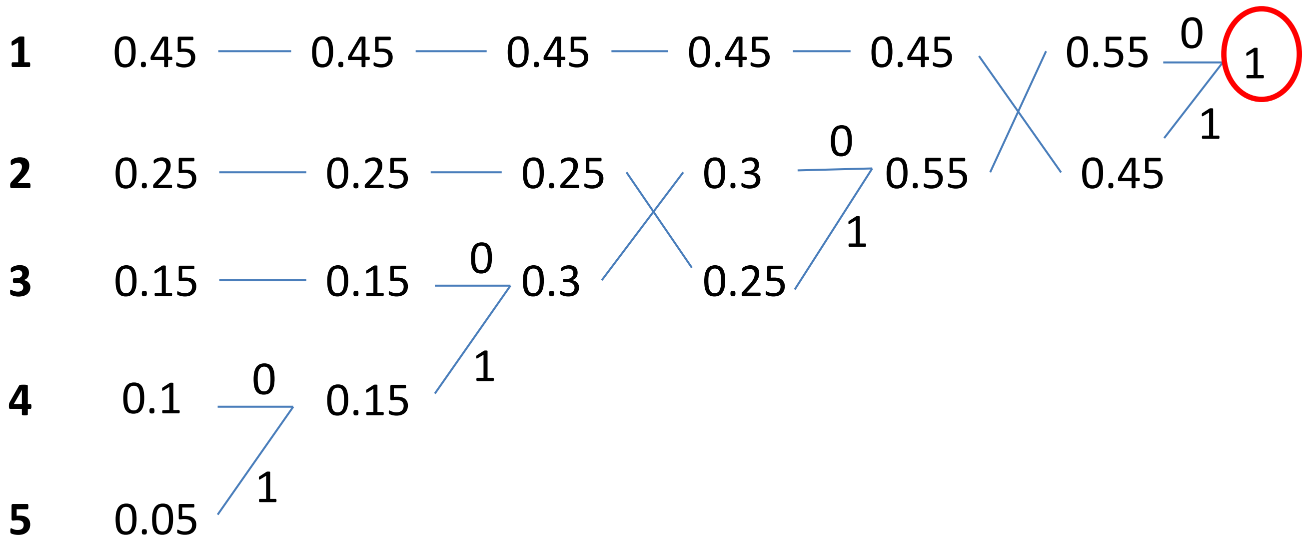
Σύμβολο Δ



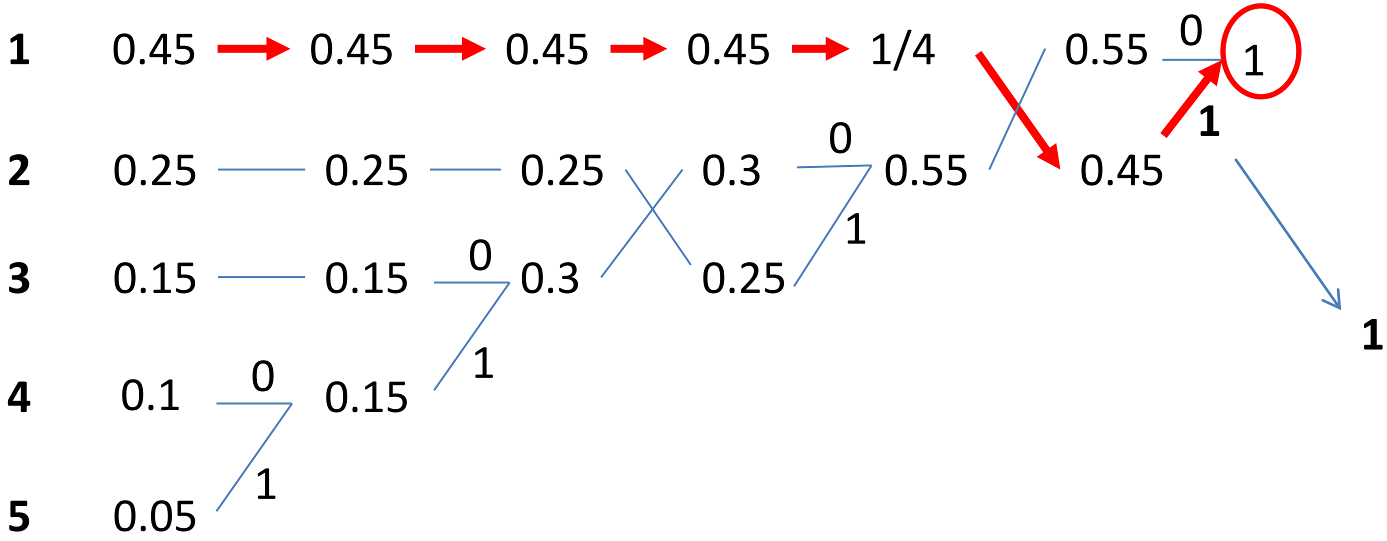
B 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2 1/2 1
E 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/4 1/2
A 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4 1/4 1/2 1/4
H 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/4
Θ 1/8 1/8 1/8 1/4 1/8
Γ 1/16 1/16 1/8
Δ 1/32 1/16
Z 1/32
0
1
01100
αντιστροφή σειράς bits
00110

Πρόσθετο Παράδειγμα κωδικοποίησης Huffman

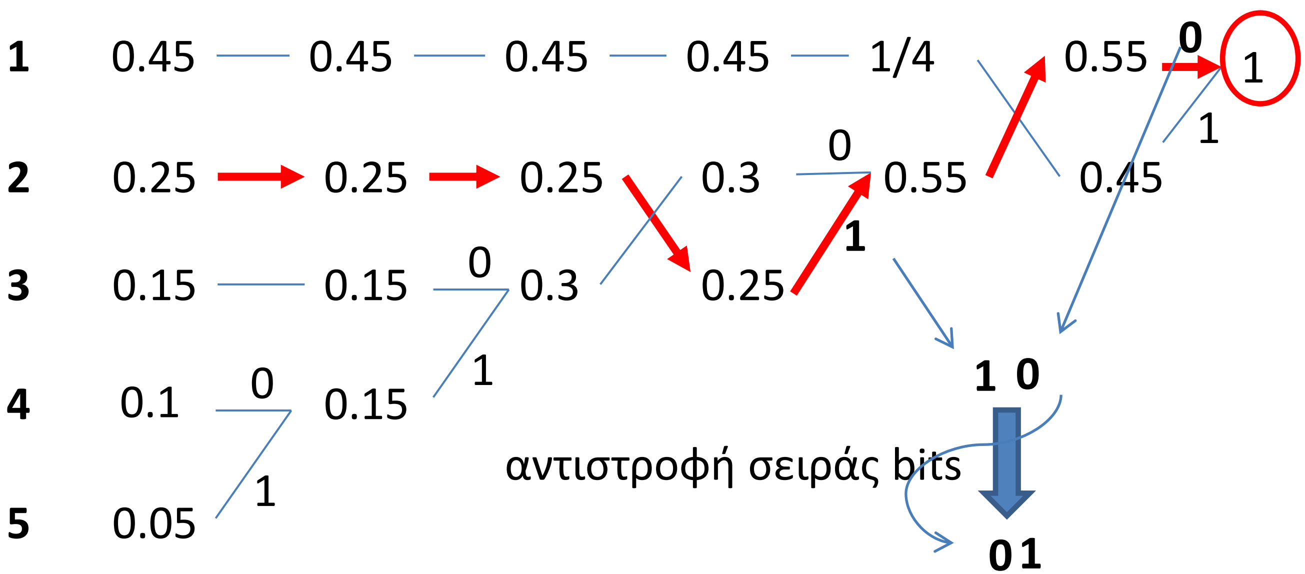
Σύμβολα



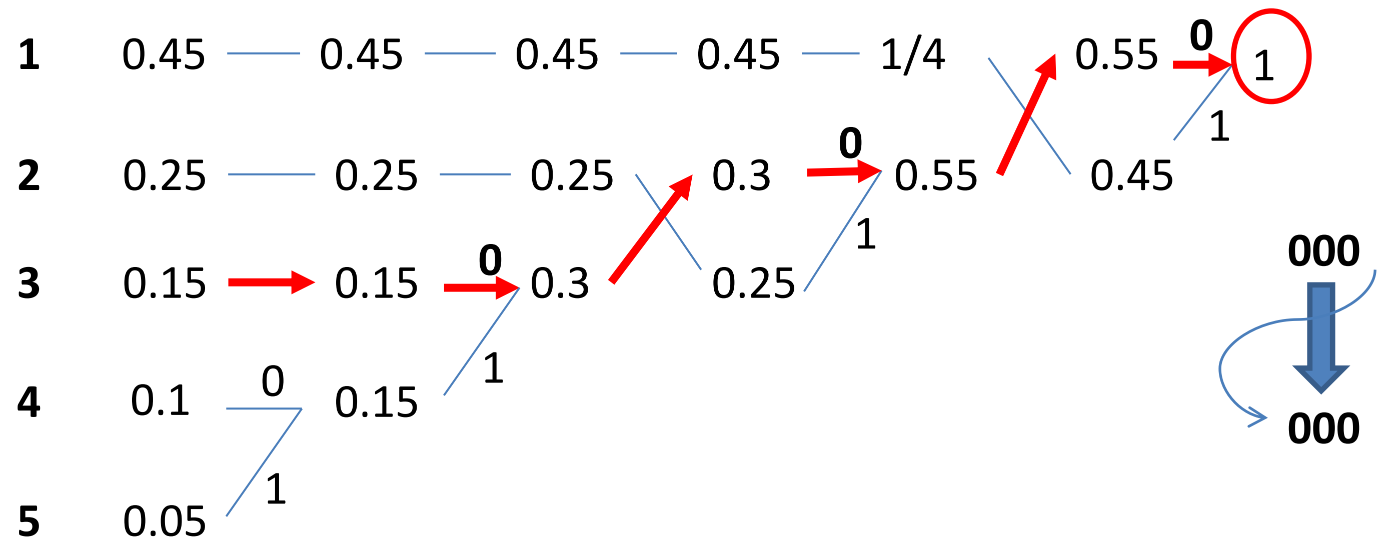
Σύμβολο 1



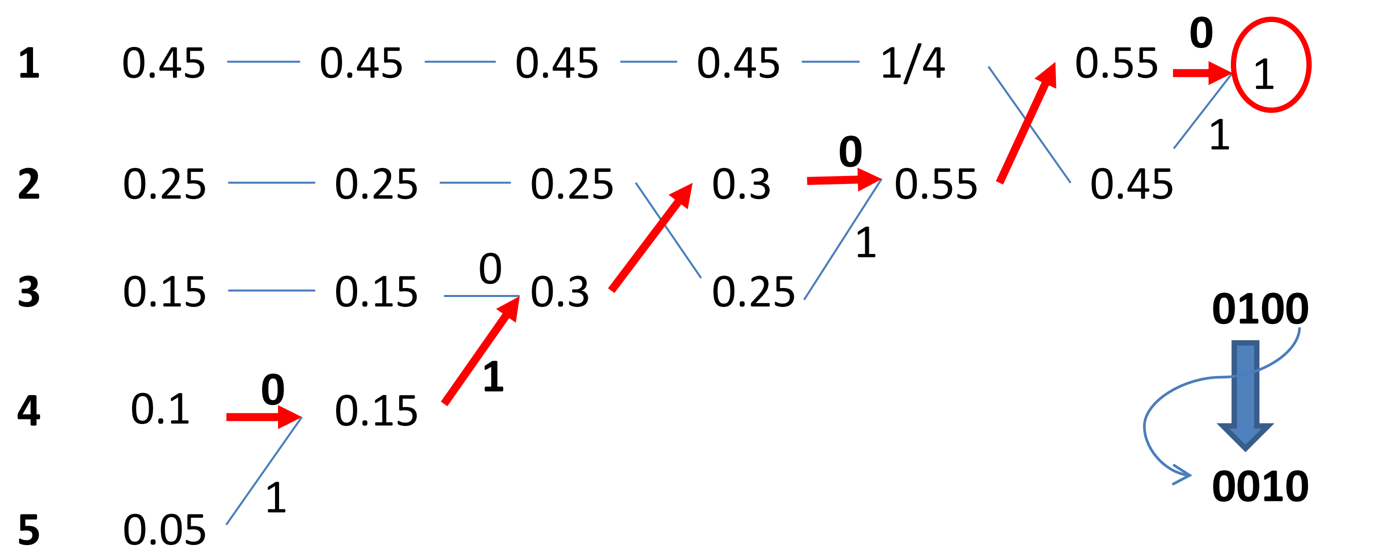
Σύμβολο 2



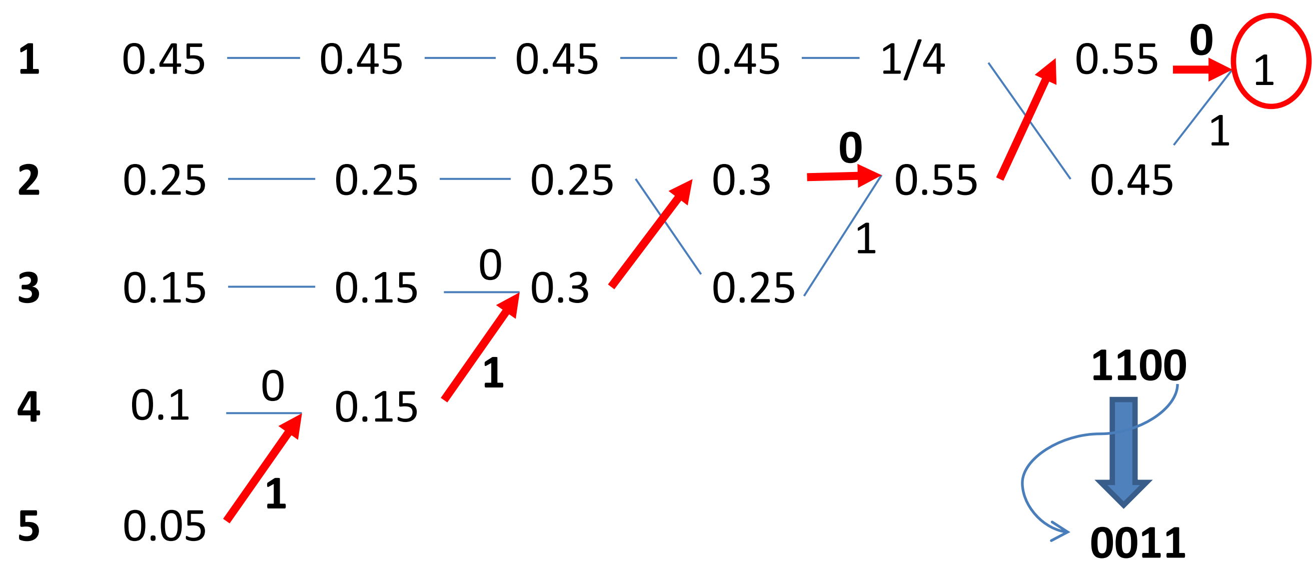
Σύμβολο 3



Σύμβολο 4



Σύμβολο 5



1
2
3
4
5
0.45 0.45 0.45 0.45 1/4 0.55 0 1 1
0.25 0.25 0.25 0.3 0 0.55 0.45
0.15 0.15 0 0.3 0.25 1
0.1 0 0.15 1
0.05 1
1100
0011

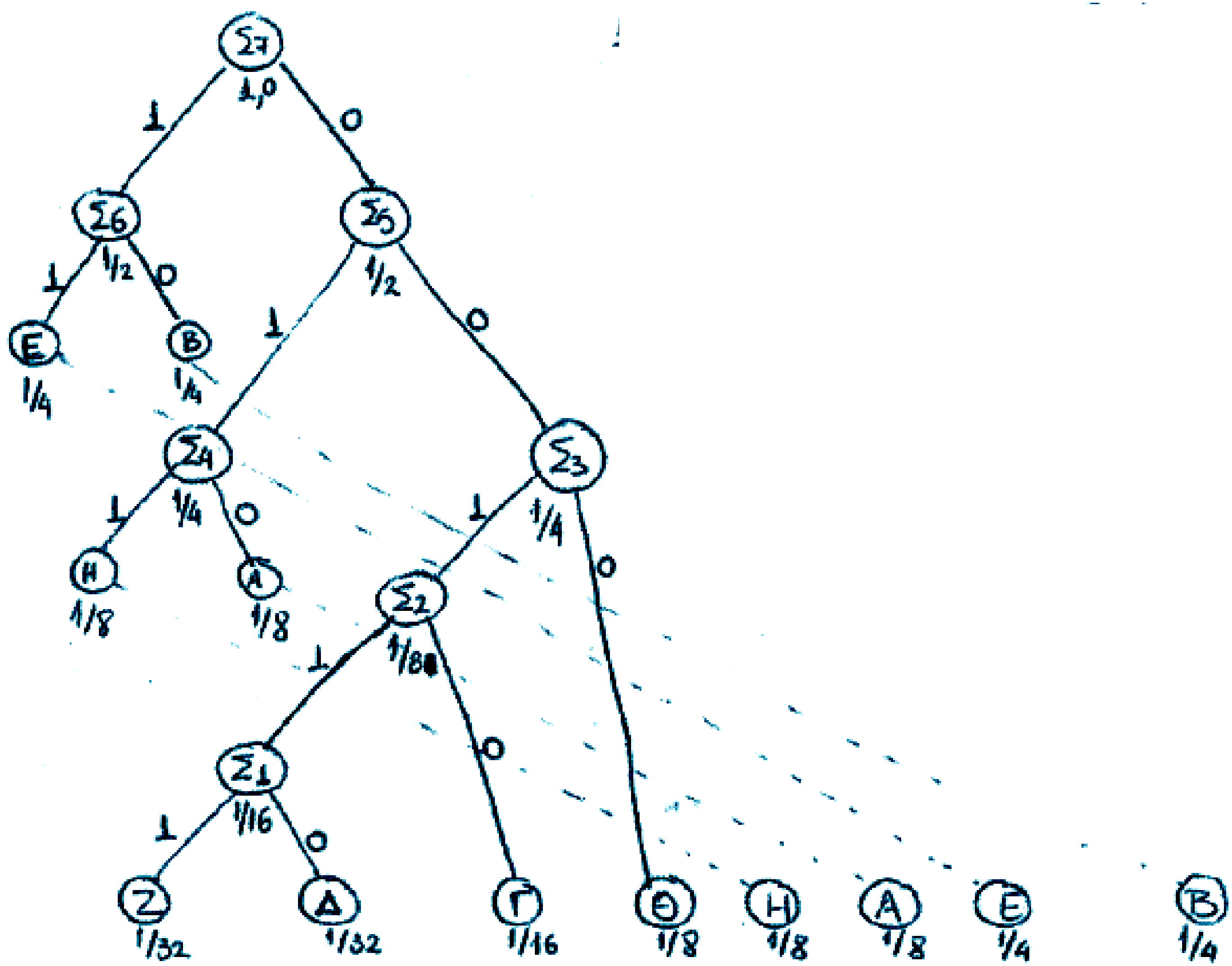
Κωδ. Huffmann με Χρήση δυαδικού δένδρου

1. Τοποθέτηση συμβόλων με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων: ΖΔΓΘΗΑΕΒ
2. Ομαδοποίηση Ζ, Δ στο Σ_1 $P_{\Sigma_1} = 1/32 + 1/32 = 1/16$
3. Σ_1 Γ Θ Η Α Ε Β σε αύξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση Σ_1, Γ στο Σ_2 $P_{\Sigma_2} = 1/16 + 1/16 = 1/8$
4. Σ_2 Θ Η Α Ε Β σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα ομαδοποίηση Σ_2, Θ στο Σ_3 $P_{\Sigma_3} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
5. Σ_3 Η Α Ε Β ΟΧΙ σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων: Η Α Σ_3 Ε Β ομαδοποίηση Η, Α στο Σ_4 $P_{\Sigma_4} = 1/8 + 1/8 = 1/4$
6. Σ_4 Σ_3 Ε Β σε αυξ. σειρά πιθανοτήτων, άρα ομαδοποίηση Σ_4, Σ_3 στο Σ_5 $P_{\Sigma_5} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
7. Σ_5 Ε Β ΟΧΙ σε αυξ σειρά πιθανοτήτων άρα αναδιάταξη συμβόλων: Ε Β Σ_5 ομαδοποίηση Ε, Β στο Σ_6 $P_{\Sigma_6} = 1/4 + 1/4 = 1/2$
8. Ομαδοποίηση Σ_6, Σ_5 στο Σ_7 $P_{\Sigma_7} = 1,0$
9. Ανάθεση '1' στα αριστερά παιδιά και '0' στα δεξιά παιδιά κάθε κόμβου.
10. Αντιστοίχιση κωδ. λέξεων ανά σύμβολο.

Σε κάθε βήμα διατάσσουμε τα σύμβολα με αύξουσα σειρά πιθανοτήτων και ομαδοποιούμε τα 2 αριστερότερα

- Β: Διαδρομή $\Sigma_7 \to \Sigma_6 \to$ Β: 10
- Ε: Διαδρομή $\Sigma_7 \to \Sigma_6 \to$ Ε: 11
- Α: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_4 \to$ Α: 010
- Η: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_4 \to$ Η: 011
- Θ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to$ Θ 000
- Γ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to$ Γ: 0010
- Δ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Sigma_1 \to$ Δ: 00110
- Ζ: -"- $\Sigma_7 \to \Sigma_5 \to \Sigma_3 \to \Sigma_2 \to \Sigma_1 \to$ Ζ: 00111

Στην επόμενη σελίδα παρατίθεται η κωδ/ση Huffman με τη χρήση δυαδικού δένδρου.


Σ7
1,0
Σ6
1/2
Σ5
1/2
E
1/4
B
1/4
Σ4
1/4
Σ3
1/4
H
1/8
A
1/8
Σ2
1/8
Σ1
1/16
Z
1/32
Δ
1/32
Γ
1/16
Θ
1/8
H
1/8
A
1/8
E
1/4
B
1/4

Πλεονασμός πηγής

$$r_{ed} = 1 - \frac{H(S)}{\max H(S)} = 1 - \frac{H(S)}{\log N} = 1 - \frac{2,6875}{3} = 10,4\%$$

Επίδοση Κώδικα

$$\alpha = \frac{H(C)}{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i \log q}$$ σελ. 57

$$H(C) = 2,6875 \frac{\text{bits}}{\text{symbol}}$$

$$\log q = \log 2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \frac{1}{4} 2 + \frac{1}{4} 2 + \frac{1}{8} 3 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} 3 + \frac{1}{16} 4 + \frac{1}{32} \cdot 5 + \frac{1}{32} 5 =$$

$$= 1 + \frac{9}{8} + \frac{18}{32} = \frac{86}{32} = 2,6875$$

Άρα $\alpha = 100\%$

$\alpha < 100\%$ όταν $l_i^* = -\log(p_i) \notin \mathbb{N}$

Κωδικοποίηση Αλγ. Fano.

① Διάταξη με φθίνουσα $P(S_i)$ — q κωδικά σύμβολα

② Διαχωρισμός σε q υποομάδες (για δυαδικό $q=2$) με όσο το ΔΥΝΑΤΟΝ ίσες αθροιστικές πιθανότητες

③ Αντιστοίχιση σε κάθε υποομάδα ενός κωδ. συμβόλου

④ Ξανά το ② για κάθε υποομάδα.

Β	1/4	0 0	(11)
Ε	1/4	0 1	(10)
Α	1/8	1 0 0	(011)
Η	1/8	1 0 1	(010)
Θ	1/8	1 1 0	(001)
Γ	1/16	1 1 1 0	(0001)
Δ	1/32	1 1 1 1 0	(00001)
Ζ	1/32	1 1 1 1 1	(00000)
	1	l_i	

με ανάθεση πρώτα του 1 και μετά το 0.

ΟΜΑΔΟΠΟΙΟΥΜΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ!

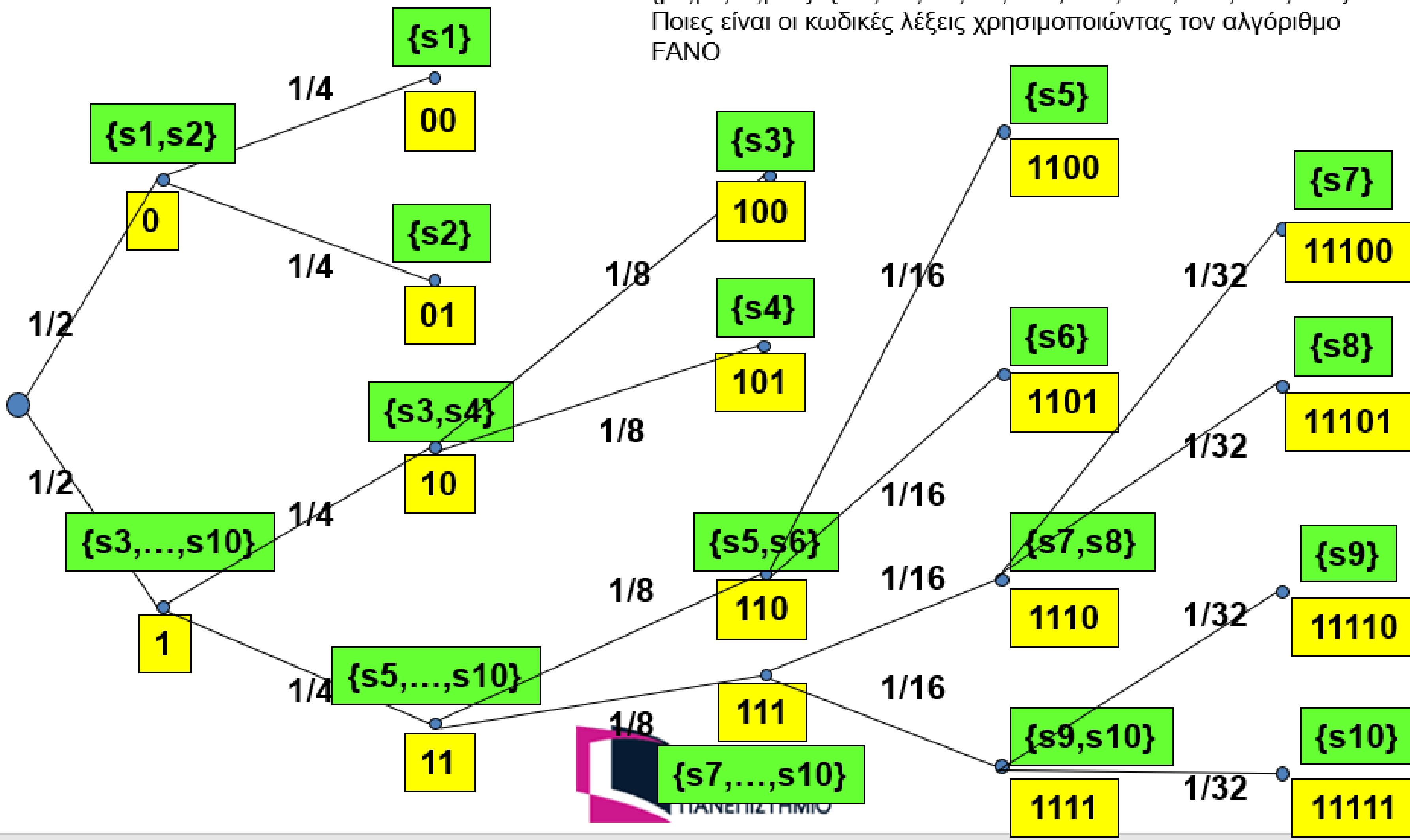
Αλγόριθμος Κωδικοποίησης FANO

Παράδειγμα

S={s1,s2,…,s10}

{p1,p2,…,p10}={1/4,1/4,1/8,1/8,1/16,1/16,1/32,1/32,1/32,1/32}

Ποιες είναι οι κωδικές λέξεις χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο FANO



Κωδικοποίηση Shannon

① Διάταξη συμβόλων με φθίνουσα $p(S_i)$

② Υπολογισμός Αθροιστικής πιθανότητας $\Pi_i = \sum_{k=1}^{i-1} p(S_k)$, $\Pi_1 = 0$

③ Υπολογισμός πλήθους κωδικών συμβόλων (μήκους κωδικής λέξης) για κάθε σύμβολο $l_i = \lceil -\log(p(s_i)) \rceil$

④ Εύρεση Δυαδικού Αναπτύγματος για κάθε Π_i

Αλγόριθμος:

```
for k= 1 : li
    Π(i) ← Π(i)·2
        if Π(i) ≥ 1
            ψk = 1
            Π(i) ← Π(i)-1
        else
            ψk = 0
        end
    end
```

s_i	$P(s_i)$	Π_i	$l_i = -\log_2 P(s_i)$	κωδικολέξεις
Β	$1/4 = 0{,}25$	0	2	00
Ε	$1/4 = 0{,}25$	$0{,}25+0=0{,}25$	2	01
Α	$1/8 = 0{,}125$	$0{,}25+0{,}25=0{,}5$	3	100
Η	$1/8 = 0{,}125$	$0{,}125+0{,}5=0{,}625$	3	101
Θ	$1/8 = 0{,}125$	$0{,}125+0{,}625=0{,}75$	3	110
Γ	$1/16 = 0{,}0625$	$0{,}125+0{,}75=0{,}875$	4	1110
Δ	$1/32 = 0{,}03125$	$0{,}0625+0{,}875=0{,}9375$	5	11110
Ζ	$1/32 = 0{,}03125$	$0{,}03125+0{,}9375=0{,}96875$	5	11111

π.χ για το Δ

$k = 1:5$, $Π_Δ = 0{,}9375$

$k=1$

$Π_Δ \leftarrow 0{,}9375 \times 2 = 1{,}875 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} ψ_1 = 1 \\ Π_Δ \leftarrow 1{,}875 - 1 = 0{,}875 \end{cases}$

$k=2$

$Π_Δ \leftarrow 0{,}875 \times 2 = 1{,}75 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} ψ_2 = 1 \\ Π_Δ \leftarrow 1{,}75 - 1 = 0{,}75 \end{cases}$

$k=3$

$Π_Δ \leftarrow 0{,}75 \times 2 = 1{,}5 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} ψ_3 = 1 \\ Π_Δ \leftarrow 1{,}5 - 1 = 0{,}5 \end{cases}$

$k=4$

$Π_Δ \leftarrow 0{,}5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} ψ_4 = 1 \\ Π_Δ \leftarrow 1 - 1 = 0 \end{cases}$

$k=5$

$Π_Δ \leftarrow 0 \times 2 = 0 < 1 \Rightarrow \begin{cases} ψ_5 = 0 \\ \text{END} \end{cases}$

Αλγόριθμος κωδικοποίησης SHANNON

- Παράδειγμα μετατροπής δεκαδικού κλάσματος σε δυαδικό
  - F=0.375
    - 2F=2*0.375=0.75 < 1 $\Rightarrow$ α_1=0
    - 2(2F-α_1)=2*0.75=1.5 ≥ 1 $\Rightarrow$ α_2=1
    - 2(2(2F-α_1)-α2)=2(1.5-1)=1 ≥ 1 $\Rightarrow$ α_3=1
    - Άρα το δυαδικό ανάπτυγμα του 0.375 είναι 0.011
  - F=0.327
    - 2*0.327=0.654 < 1 $\Rightarrow$ α_1=0
    - 2*0.654=1.308 ≥ 1 $\Rightarrow$ α_2=1
    - 2*(1.308-1)=0.616 < 1 $\Rightarrow$ α_3=0
    - 2*0.616=1.232 ≥ 1 $\Rightarrow$ α_4=1
    - 2*(1.232-1)=0.464 < 1 $\Rightarrow$ α_5=0
    - 2*0.464=0.928 < 1 $\Rightarrow$ α_6=0
    - 2*0.928=1.956 ≥ 1 $\Rightarrow$ α_7=1
    - 2*(1.956-1)=1.912 ≥ 1 $\Rightarrow$ α_8=1
    - 2*(1.912-1)=1.824 ≥ 1 $\Rightarrow$ α_9=1
    - Άρα το δυαδικό ανάπτυγμα του 0.327 είναι 0.010100111…
    - Παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν το δυαδικό ανάπτυγμα ενός κλάσματος να αποτελείται από άπειρα δυαδικά ψηφία

Αλγόριθμος κωδικοποίησης SHANNON

Παράδειγμα

...

Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων Ps_i	P_i	Μήκος l_i $-\log(Ps_i)$	Ανάπτυγμα του P_i	Κωδικές Λέξεις
S_1	1/4	$P_1 = 0$	$l_1 = 2$	.00000	00
S_2	1/4	$P_2 = 1/4$	$l_2 = 2$	.01000	01
S_3	1/8	$P_3 = 1/2$	$l_3 = 3$	.10000	100
S_4	1/8	$P_4 = 5/8$	$l_4 = 3$	.10100	101
S_5	1/16	$P_5 = 3/4$	$l_5 = 4$	.11010	1100
S_6	1/16	$P_6 = 13/16$	$l_6 = 4$	.11010	1101
S_7	1/32	$P_7 = 7/8$	$l_7 = 5$	.11100	11100
S_8	1/32	$P_8 = 29/32$	$l_8 = 5$	.11101	11101
S_9	1/32	$P_9 = 15/16$	$l_9 = 5$	.11110	11110
S_{10}	1/32	$P_{10} = 31/32$	$l_{10} = 5$	.11111	11111

Σημείωση: Εάν ο παρονομαστής των αθροιστικών πιθανοτήτων μπορεί να γραφεί σε μορφή 2^n (εδώ είναι 2^5=32) τότε γράφουμε όλες τις αθροιστικές πιθανότητες με τον παρονομαστή αυτόν και το δυαδικό ανάπτυγμα αντιστοιχεί στη δυαδική μορφή του αριθμητή(με ν bits). Π.χ. για το S6 Π6=13/16=26/32 άρα το ανάπτυγμα είναι [26]=11010

Δίνεται η τυχαία μεταβλητή X={1,2,3,4} με κατανομή εμφάνισης συμβόλων p(X)={1/2, 1/4, 1/8, 1/8}, αντίστοιχα. Ποιο σύμβολο έχει το μικρότερο πληροφοριακό περιεχόμενο και πόσο είναι αυτό σε bits;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. X={3,4} και 3 bits
- b. X={3,4} και 1.75
- c. X=1 και 1 bit
- d. X=1 και 0.5 bits

Μια διακριτή πηγή χωρίς μνήμη μεταδίδει τυχαία 3 σύμβολα ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, σύμφωνα με την κατανομή {0.25, 0.25, 0,5} με ρυθμό 3000 σύμβολα/sec. Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός σε bits/sec που μπορεί να επιτύχει η πιο αποδοτική κωδικοποίηση;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. 6000 bits/sec
- b. 4500 bits/sec
- c. 3000 bits/sec
- d. 1500 bits/sec

Μια πηγή μεταδίδει 6 σύμβολα σύμφωνα με την κατανομή {0.25, 0.2, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1} τα οποία κωδικοποιούνται σύμφωνα με τον αλγόριθμο FANO.

Ποιος διαχωρισμός πιθανοτήτων σε δύο υποσύνολα αντιστοιχεί στο **πρώτο** Βήμα του αλγορίθμου FANO;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. {0.25,0.2} και {0.2,0.15,0.1,0.1}
- B. {0.25} και {0.2,0.2,0.15,0.1,0.1}
- C. {0.25,0.2,0.2} και {0.15,0.1,0.1}
- D. {0.25,0.15,0.1} και {0.2,0.2,0.1}

Για ποια από τα παρακάτω σύνολα κωδικών λέξεων δεν μπορεί να βρεθεί ένας άμεσος κώδικας;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. {1, 2, 3, 6, 6, 6}
- B. {3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}
- C. {1, 2, 3, 3, 4}
- D. {2, 2, 3, 4}

Μια πηγή μεταδίδει 5 σύμβολα {Α, Β, Γ, Δ, Ε} με αντίστοιχες πιθανότητες {0.4, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1} τα οποία κωδικοποιούνται σύμφωνα με τον αλγόριθμο HUFFMAN ενώ το βέλτιστο μέσο μήκος είναι L=2.2 bits. Ποιες από τις παρακάτω κωδικοποιήσεις μπορεί να προκύψει από τον αλγόριθμο Huffman;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. Α=0, Β=100, Γ=101, Δ=110, Ε=111
- B. Α=00, Β=01, Γ=10, Δ=110, Ε=111
- C. Όλες είναι κωδικοποιήσεις Huffman
- D. Α=0, Β=10, Γ=110, Δ=1110, Ε=1111

Δίνεται η παρακάτω κωδικοποίηση

Σύμβολο	Πιθανότητα εμφάνισης	Κωδικοποίηση
Α	0,5	0
Β	0,2	10
Γ	0,15	110
Δ	0,15	110

Ποιο είναι το μέσο μήκος της κωδικής λέξης;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 2
- B. 2.3
- C. 1.8
- D. 1.6

Δίνεται ο κώδικας $\{0, 100, 101, 110, 111\}$. Τί είδους κώδικας είναι αυτός;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. Μη ιδιάζων
- b. Άμεσος
- c. Μοναδικώς αποκωδικοποιήσιμος
- d. Ιδιάζων

Συγκεντρωτικό Τυπολόγιο

x τ.μ. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Πιθανότητες

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \qquad 0 \leq p(x_i) \leq 1$$

Ομοιόμορφη κατανομή $p(x_i) = \frac{1}{n}$

Συνδυασμένη πιθανότητα : $p(x_i \text{ ΚΑΙ } y_j) = p(x_i, y_j)$

Υπο συνθήκη πιθανότητα $p(x_i \text{ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ } y_j) = p(x_i/y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$

$$\iff p(x_i, y_j) = p(x_i/y_j)\, p(y_j) = p(y_j/x_i)\, p(x_i)$$

Μέση τιμή τ. μ: $E(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i\, p(x_i)$

Ποσότητα Πληροφορίας

Ενδεχομένου x_i μιας τ. μ. x $H(x_i) = -\log_2[p(x_i)]$

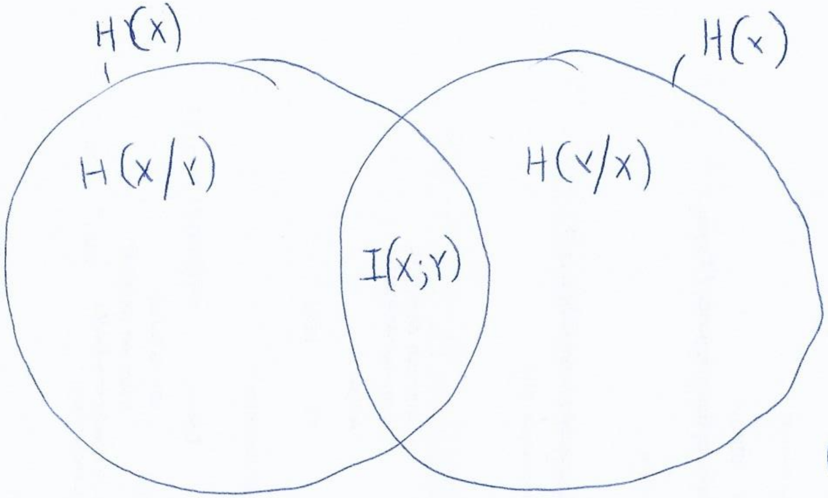
Αν. $p(x_i) = 0$ ή $p(x_i) = 1$ $H(x_i) = 0$ (βέβαιο ή απίθανο ενδεχόμενο)

Μέση ποσότητα Πληροφορίας - Εντροπία τ. μ. x: $H(x) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i) \log[p(x_i)]$

Συνδυασμένη Εντροπία $H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$

Υπό συνθήκη Εντροπία $H(X/Y) = \sum_{j=1}^{N} H(X/y_j)\, p(y_j) = \sum_{j=1}^{n}\left[\left[\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) \log p(x_i/y_j)\right] p(y_j)\right] =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p(x_i/y_j) \cdot p(y_j) \log p(x_i/y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j)$$



$$H(X) = H(X/Y) + I(X;Y)$$

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) =$$
$$= H(Y) + H(X/Y)$$

X: τ.μ. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$0 \leq H(X) \leq \log_2(n)$$

1 βέβαιο ενδεχόμενο

ομοιόμορφη κατανομή (ισοπίθανα όλα τα ενδεχόμενα)

Ασκήσεις
ΓΕ3/1718/Θ5,6
ΕΞ 2016 Β/Θ3

ΓΕ4/1819/Θ1
ΓΕ4/1920/Θ1,2
ΓΕ4/2021/Θ1,2

Κωδικοποίηση Πηγής

{Σύμβολα} ⟶ {Κωδικές λέξεις}

- ομοιόμορφη
- Fano, Shannon, Huffman (βέλτιστη)

Σύμβολα $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$

Μέσο μήκος κώδικα $\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} l_i \, p(s_i)$.

$$H(S) \le \bar{L} \le \log_2(n)$$

Προσοχή: όλοι οι ανωτέρω κώδικες είναι άμεσοι (ιδιάζοντες, μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι, μη προθεματικοί)

Ανισότητα του Kraft

Για κάθε άμεσο δυαδικό κώδικα με μήκη κωδικολέξεων l_i ισχύει: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} \le 1}$

ΓΕ4/1819/Θ3,4
ΓΕ4/1920/Θ3,4
ΓΕ4/2021/Θ3,4

Ασκήσεις
ΓΕ3/1718/Θ7
ΕΞ2017Α/Θ3, ΕΞ2014Α/Θ3

ΕΞ2018Α/Θ4, ΕΞ2018Β/Θ3
ΕΞ2019Α/Θ4, ΕΞ2019Β/Θ3,4

Ερωτήσεις

Πρόσθετα Παραδείγματα

ΘΕΜΑ 4 ΕΞ2018Α

Μία διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη παράγει τα σύμβολα V, W, X, Y, Z, με πιθανότητες 0.3125, P_1, 0.25, 0.125, P_2, αντίστοιχα, όπου $P_1>P_2$. Εάν η ποσότητα πληροφορίας του συμβόλου με το υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο είναι ίση με 4 bits, να υπολογιστούν:

1) Οι τιμές των P_1 και P_2.
2) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής.
3) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο από τα παραπάνω σύμβολα.

1) Η ποσότητα πληροφορίας ενός συμβόλου υπολογίζεται από τον αρνητικό λογάριθμο της πιθανότητας παραγωγής του. Συνεπώς:

$$-\log_2\left(P_i\right)=4 \Leftrightarrow \log_2\left(P_i\right)=-4 \Leftrightarrow$$
$$2^{\log_2\left(P_i\right)}=2^{-4} \Leftrightarrow P_i=1/16.$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι το υψηλότερο πληροφοριακό περιεχόμενο έχει το σύμβολο με τη μικρότερη πιθανότητα παραγωγής και $P_1 > P_2 \rightarrow P_2=1/16$. Τέλος, με βάση τον νόμο των πιθανοτήτων (πρέπει να αθροίζουν σε 1), είναι:

$$\sum_{i=1}^{5} P_i=1 \Leftrightarrow \frac{5}{16}+P_1+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=1 \Leftrightarrow P_1=\frac{4}{16}.$$

2) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο των συμβόλων της πηγής υπολογίζεται με βάση την παρακάτω σχέση

$$H(s) = -\sum_{i=1}^{5} P_i \log_2 P_i = -\frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16}$$

$$= 0.524 + 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.25 = 2.149 bits / symbol.$$

3) Για τον υπολογισμό του μέσου πληροφορικού περιεχομένου των μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η πηγή είναι χωρίς μνήμη δηλαδή η επιλογή ενός συμβόλου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τις επιλογές των προηγούμενων συμβόλων. Συνεπώς οι από κοινού (συνδυασμένες) πιθανότητες δημιουργίας των μηνυμάτων μπορούν να υπολογιστούν από τον πολλαπλασιασμό των πιθανοτήτων παραγωγής των συμβόλων από τα οποία αποτελούνται. Συνολικά θα έχουμε $5^2=25$ διαφορετικά μηνύματα, των οποίων οι πιθανότητες εμφάνισης δίνονται παρακάτω

$$P_{VV}=P_VP_V=\frac{25}{256}, P_{VW}=P_VP_W=\frac{5}{16}\frac{1}{4}=\frac{5}{64}, P_{VX}=\frac{5}{64}, P_{VY}=\frac{5}{128}, P_{VZ}=\frac{5}{256},$$
$$P_{WV}=\frac{5}{64}, P_{WW}=\frac{1}{16}, P_{WX}=\frac{1}{16}, P_{WY}=\frac{1}{32}, P_{WZ}=\frac{1}{64},$$
$$P_{XV}=\frac{5}{64}, P_{XW}=\frac{1}{16}, P_{XX}=\frac{1}{16}, P_{XY}=\frac{1}{32}, P_{XZ}=\frac{1}{64},$$
$$P_{YV}=\frac{5}{128}, P_{YW}=\frac{1}{32}, P_{YX}=\frac{1}{32}, P_{YY}=\frac{1}{64}, P_{YZ}=\frac{1}{128},$$
$$P_{ZV}=\frac{5}{256}, P_{ZW}=\frac{1}{64}, P_{ZX}=\frac{1}{64}, P_{ZY}=\frac{1}{128}, P_{ZZ}=\frac{1}{256}.$$

Για τα 25 μηνύματα που έχουν δημιουργηθεί, θα υπολογιστεί το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο με βάση την παρακάτω σχέση:

$$H(s) = -\sum_{i=1}^{25} P_i \log_2(P_i) =$$

$$-\frac{25}{256}\log_2\left(\frac{25}{256}\right) - \frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right) - \frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right) - \frac{5}{128}\log_2\left(\frac{5}{128}\right) - \frac{5}{256}\log_2\left(\frac{5}{256}\right)$$

$$-\frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right) - \frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$$

$$-\frac{5}{64}\log_2\left(\frac{5}{64}\right) - \frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}\log_2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$$

$$-\frac{5}{128}\log_2\left(\frac{5}{128}\right) - \frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{32}\log_2\left(\frac{1}{32}\right) - \frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right) - \frac{1}{128}\log_2\left(\frac{1}{128}\right)$$

$$-\frac{5}{256}\log_2\left(\frac{5}{256}\right) - \frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right) - \frac{1}{64}\log_2\left(\frac{1}{64}\right) - \frac{1}{128}\log_2\left(\frac{1}{128}\right) - \frac{1}{256}\log_2\left(\frac{1}{256}\right)$$

= 1.196+1.037+1.037+0.644+ 0.384= 4.298 bits/message.

ΘΕΜΑ 3 ΕΞ2018Β

Μια διακριτή πηγή πληροφορίας χωρίς μνήμη παράγει τα σύμβολα α, β, γ, δ, ε, ζ με πιθανότητες 5/16, 4/16, 3/16, 2/16, 1/16, 1/16, αντίστοιχα. Ζητούνται:

(α) Η εντροπία της πηγής.

(β) Να δημιουργηθεί κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Huffman.

(γ) Να υπολογιστεί η επίδοση του κώδικα Huffman που δημιουργήθηκε.

1. Η εντροπία της πηγής υπολογίζεται με βάση την ακόλουθη σχέση

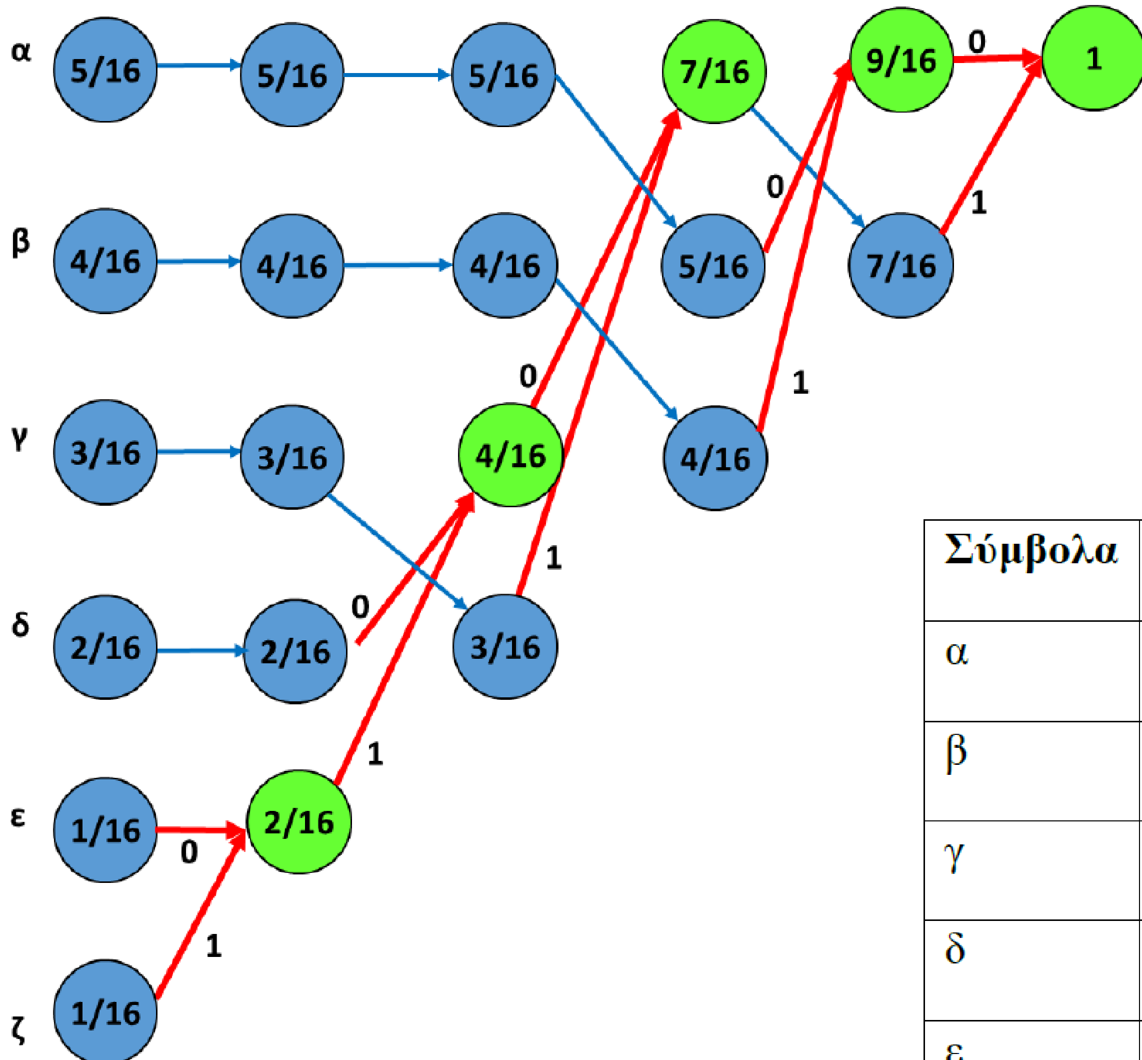
$$H(s) = -\sum_{i=1}^{6} P_i \log_2 P_i = -\frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16} - \frac{4}{16}\log_2\frac{4}{16} - \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{2}{16}\log_2\frac{2}{16}$$

$$-\frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} = 0.524 + 0.5 + 0.453 + 0.375 + 0.25 + 0.25$$

$$= 2.352 bits / symbol.$$

2. Τα βήματα για την υλοποίηση του αλγορίθμου Huffman είναι τα ακόλουθα
a) Τα σύμβολα της πηγής διατάσσονται κατά φθίνουσα πιθανότητα εκπομπής.
b) Τα δύο τελευταία σύμβολα της πηγής με τη μικρότερη πιθανότητα παραγωγής ενώνονται σε ένα, πιθανότητας ίσης με το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο αυτών συμβόλων, με αποτέλεσμα τη μείωση κατά ένα του πλήθους των συμβόλων του αλφάβητου της πηγής.
c) Τα βήματα 1 και 2 επαναλαμβάνονται έως ότου το αλφάβητο της πηγής αποτελείται μόνο από δύο σύμβολα. Σ' αυτά τα δύο σύμβολα αποδίδονται τα «0» και «1» του δυαδικού κώδικα.
d) Ένα «0» και ένα «1» αποδίδονται στη θέση του ενός και του άλλου συμβόλου, αντίστοιχα, τα οποία στο βήμα 2 συγχωνεύτηκαν σε ένα. Το βήμα αυτό αφορά σε όλες τις συγχωνεύσεις.
e) Οι κωδικές λέξεις των συμβόλων σχηματίζονται από όλα τα ψηφία «0» και «1» που σχετίζονται με αυτά τα σύμβολα (από το τέλος προς την αρχή), δηλαδή από τα ψηφία που έχουν αποδοθεί απευθείας σε αυτά ή στα συγχωνευμένα σύμβολα που συμμετέχουν.

Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα, οδηγούμαστε στον ακόλουθο κώδικα



Σύμβολα	Κώδικας
α	00
β	01
γ	11
δ	100
ε	1010
ζ	1011

3. Το μέσο μήκος των κωδικών λέξεων του Huffman μας δίνεται από

$$\sum_{i=1}^{6} l_i P_i = 2\frac{5}{16} + 2\frac{4}{16} + 2\frac{3}{16} + 3\frac{2}{16} + 4\frac{1}{16} + 4\frac{1}{16}$$

$$= \frac{10+8+6+6+4+4}{16} = \frac{38}{16} = 2.375 bits / symbol$$

Η απόδοση είναι

$$\alpha = \frac{H(s)}{\sum_{i=1}^{6} l_i P_i} = \frac{2.352}{2.375} = 0.99$$

ΘΕΜΑ 4

ΓΕ4/1112

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τον υπολογισμό μέτρων ποσότητας πληροφορίας και την εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης. Σχετικά θέματα μπορείτε να βρείτε σε ΓΕ4 περασμένων ετών, όπως ΓΕ4/2010-11/Θ3, ΓΕ4/2009-10/Θ2, ΓΕ4/2008-09/Θ3, ΓΕ4/2006-7/Θ4 και* Θ3/ΓΕ/2004-5.

Θεωρούμε την πηγή που εκπέμπει τα στατιστικά ανεξάρτητα σύμβολα Α, Β, Γ, Δ, Ε, το πληροφορικό περιεχόμενο των οποίων περιέχεται στον ακόλουθο πίνακα:

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)
A	1.81
B	1.38
Γ	2.42
Δ	3.14
E	4.96

Ζητούνται τα εξής:

1. Η εντροπία της πηγής.
2. Κώδικας Shannon για τα σύμβολα της πηγής και η επίδοσή του.
3. Κώδικας καλύτερος αυτού που προέκυψε στο ερώτημα 2 και η επίδοσή του.

1). Γνωρίζω ότι το πληροφορικό περιεχόμενο της πηγής εκφράζεται από το $-log_2(p(x_i))$. Οπότε θα έχουμε π.χ. <u>Σύμβολο "Α":</u> $-log_2(p(x_1)) = 1.81 \rightarrow p(x_1) = 0.285$

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Οπότε η εντροπία της πηγής θα δίνεται από

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{6} p(x_i) \cdot log_2(p(x_i))$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τα αριθμητικά δεδομένα θα έχουμε

$$H(X) = -\begin{bmatrix} 0.285 \cdot log_2(0.285) + 0.384 \cdot log_2(0.384) + 0.186 \cdot log_2(0.186) \\ +0.113 \cdot log_2(0.113) + 0.032 \cdot log_2(0.032) \end{bmatrix}$$
$$= 0.516 + 0.530 + 0.451 + 0.355 + 0.158 = 2.01$$

2). Για τη μέθοδο Shannon θα χρησιμοποιήσουμε τη φθίνουσα σειρά των συμβόλων

Σύμβολο	**Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol)**	**Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων**
Β	1.38	0.384
Α	1.81	0.285
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Και μετά εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Shannon

Προκειμένου να βρεθεί η απόδοση της πηγής, θα πρέπει να υπολογισθεί το μέσο μήκος του κώδικα

				Ανάπτυγμα Pi					
Σύμβολα Πηγής	Πιθανότητες Συμβόλων	Μήκος li	Αθροιστικές πιθανότητες	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	Κωδική Λέξη
B	0.384	2	0	0	0	0	0	0	00
A	0.285	2	0.384	0	1	1	0	0	01
Γ	0.186	3	0.669	1	0	1	0	1	101
Δ	0.113	4	0.855	1	1	0	1	1	1101
E	0.032	5	0.968	1	1	1	1	0	11110

$$L = \sum_{i=1}^{5} p(x_i) \cdot l_i$$

$$L = 0.384 \cdot 2 + 0.285 \cdot 2 + 0.186 \cdot 3 + 0.113 \cdot 4 + 0.032 \cdot 5 = 2.508$$

Οπότε η απόδοση της πηγής ορίζεται ως

$$n = \frac{H(S)}{L} = 80.14\%$$

Shannon

H(xi)=-log(p(xi)=>p(xi)=2 $^{(-H(xi))}$

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol) $(H(x_i))$_	Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων 2 $^{(-H(xi))}$
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

ΓΕ4/1112/Θ4

p(xi)	-log(p(xi))	Li	Πi	Code
0,384	1,380821784	2	0	00
0,285	1,810966176	2	0,384	01
0,186	2,426625474	3	0,669	101
0,113	3,145605322	3	0,855	1101
0,032	4,965784285	5	0,968	11111

2x0,855 →	1,71 ⇒	1
2x0,71 →	1,42 ⇒	1
2x0,42 →	0,84 ⇒	0
2x0,84 →	1,68 ⇒	1

Σύμβολο	Πληροφορικό περιεχόμενο (bits/symbol) $(H(x_i))$_	Πιθανότητα εκπομπής συμβόλων $2^{(-H(xi))}$
Α	1.81	0.285
Β	1.38	0.384
Γ	2.42	0.186
Δ	3.14	0.113
Ε	4.96	0.032

Shannon

$H(xi)=-\log(p(xi)=>p(xi)=2^{(-H(xi))}$

ΓΕ4/1112/Θ4

p(xi)	-log(p(xi))	Li	Πi	Code
0,384	1,380821784	2	0	00
0,285	1,810966176	2	0,384	01
0,186	2,426625474	3	0,669	101
0,113	3,145605322	3	0,855	1101
0,032	4,965784285	5	0,968	11110

	x 2			
0,968	→	1,936	⇒	1
0,936	→	1,872	⇒	1
0,872	→	1,744	⇒	1
0,744	→	1,488	⇒	1
0,488	→	0,976	⇒	0

ΘΕΜΑ 6	ΓΕ3 2014-15

Στόχος της άσκησης *είναι η εξάσκηση στην εφαρμογή των αλγορίθμων κωδικοποίησης πηγής.*
Σχετικές ασκήσεις: *Θ7/ΓΕ4/2004-5, Θ4/ΓΕ4/2006-7, Θ3/ΓΕ4/2007-8, Θ3 κ Θ4/ΓΕ4/2008—9, Θ4/ΓΕ4/2009-10, Θ3/ΓΕ4/2010-11, Θ4/ΓΕ4/2011-12, Θ4/ΓΕ4/2012-3.*

Θεωρούμε διακριτή πηγή που εκπέμπει τα σύμβολα *Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η*. Οι αντίστοιχες πιθανότητες εκπομπής έχουν ως εξής: {0.15, 0.12, 0.10, 0.05, 0.48, 0.05, 0.05}.

Ζητείται:

(α) Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Fano.

(β) Να σχηματισθεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Shannon.

(γ) Να σχηματιστεί δυαδικός κώδικας σύμφωνα με τον αλγόριθμο Huffman.

(δ) Ποια είναι η βέλτιστη από τις κωδικοποιήσεις που προκύπτουν στα ερωτήματα α-γ? Τεκμηριώστε την απάντηση σας υπολογίζοντας την απόδοση του κάθε κώδικα.
Είναι ο βέλτιστος κώδικας που υπολογίσατε και άριστος;

<u>Ενδεικτική Μεθοδολογία:</u> *Να ακολουθηθούν τα προβλεπόμενα σε κάθε αλγόριθμο κωδικοποίησης βήματα. Για τον υπολογισμό της επίδοσης των κωδίκων που σχηματίσατε να εφαρμόσετε τον αντίστοιχο τύπο.*

(α) Κώδικας Fano

Σύμβολα	Πιθανότητες εκπομπής	Κωδική λέξη
Ε	0.48	0
Α	0.15	100
Β	0.12	101
Γ	0.10	1100
Δ	0.05	1101
Ζ	0.05	1110
Η	0.05	1111

(β) Κώδικας Shannon

ΣΥΜΒΟΛΑ	Πιθανότητες	P_i	$<=l_i$	$l_i>$	l_i	Ανάπτυγμα	Κώδικας
Ε	0.48	0	1,05889	2,05889	2	.00000000	00
Α	0.15	0.48	2.7369	3.7369	3	.01111010	011
Β	0.12	0.63	3,05889	4,05889	4	.10100001	1010
Γ	0.1	0.75	3.32	4.32	4	.11000000	1100
Δ	0.05	0.85	4.32	5.32	5	.11011001	11011
Ζ	0.05	0.90	4.32	5.32	5	.11100110	11100
Η	0.05	0.95	4.32	5.32	5	.11110011	11110

(γ) Κώδικας Huffman

Σύμβολα							Κώδικας
Ε	0.48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,52 (0)	1
Α	0.15	0,15	0,15	0,22	0,3 (0)	0,48 (1)	000
Β	0.12	0,12	0,15	0,15 (0)	0,22 (1)		010
Γ	0.1	0,10	0,12 (0)	0,15 (1)			011
Δ	0.05	0,1 (0)	0,10 (1)				0010
Ζ	0.05 (0)	0,05 (1)					00110
Η	0.05 (1)						00111

Δυαδικός κώδικας Fano

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 1 + (0{,}15 + 0{,}12) \times 3 + (0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05) \times 4 = 2{,}29$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i)\log_2 2} = \frac{2{,}2658}{2{,}29} = 0{,}989457$$

Δυαδικός κώδικας Shannon

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 2 + 0{,}15 \times 3 + (0{,}12 + 0{,}10) \times 4 + (0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05) \times 5 = 3{,}04$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i)} = \frac{2,2658}{3,04} = 0,7453$$

Δυαδικός κώδικας Huffman

$$\sum_{i=1}^{7} p_i l_i = 0{,}48 \times 1 + (0{,}15 + 0{,}12 + 0{,}10) \times 3 + 0{,}05 \times 4 + (0{,}05 + 0{,}05) \times 5 = 2{,}29$$

Κατά συνέπεια

$$a = \frac{H(S)}{(\sum_{i=1}^{7} p_i l_i)\log_2 2} = \frac{2{,}2658}{2{,}29} = 0{,}989457$$

ΓΕ4/
1112/Θ1

Δίδεται η τυχαία μεταβλητή X, η οποία αναπαριστά το επίπεδο χοληστερίνης ενός ατόμου, με δύο δυνατά αποτελέσματα, x_1= «χοληστερίνη εντός επιτρεπτών ορίων» και x_2= «υψηλή χοληστερίνη». Επίσης, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή W, η οποία αναπαριστά το αν το άτομο ασκείται σωματικά, με w_1= «επιδίδεται σε σωματική άσκηση» και w_2= «δεν ασκείται σωματικά», την Y για το είδος της εργασίας του με y_1= «δεν κάνει δουλειά γραφείου» και y_2= «κάνει δουλειά γραφείου» και, τέλος, τη Z για το είδος διατροφής που ακολουθεί, με z_1= «μεσογειακή διατροφή» και z_2= «διατροφή πλούσια σε ζωϊκά λίπη». Οι πιθανότητες $p(x_i, w_j, y_k)$ του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών (X, (W, Y)) και $p(x_i, y_k, z_l)$ του (X, (Y, Z)) περιέχονται στους κατωτέρω πίνακες.

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

Ζητείται να υπολογίσετε

1. Τις $H(X)$, $H(W)$, $H(Y)$ και $H(Z)$,
2. Τις συνδυασμένες ποσότητες πληροφορίας $H(X, Y)$, $H(X, Z)$, $H(X,W)$, $H(X, W, Z)$ και $H(X,Y, Z)$,
3. Τις υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας $H(X/W)$, $H(X/Y)$, $H(X/Z)$, $H(X/(W,Y))$, και $H(X/(Y,Z))$.

Επίσης, ζητείται

4. να επιλέξετε εκείνη την τυχαία μεταβλητή εκ των W, Y, Z, ή εκείνον τον συνδυασμό δύο τυχαίων μεταβλητών εκ των (W, Y) και (Y, Z) που επιτρέπει την καλύτερη πρόβλεψη της X, όταν γίνεται γνωστή η τιμή της τυχαίας αυτής μεταβλητής ή οι τιμές του συνδυασμού των τυχαίων μεταβλητών. Αιτιολογήστε

(X, (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	1/4	1/16
(w_1, y_2)	1/16	1/8
(w_2, y_1)	1/8	1/16
(w_2, y_2)	0	5/16

p(w1,y1)=1/4+1/16=5/16

p(w1,y2)=1/16+1/8=3/16

p(w2,y1)=1/8+1/16=3/16

p(w2,y2)=0+5/16=5/16

p(w1)=5/16+3/16=8/16

p(y1)=5/16+3/16=8/16

p(w2)=3/16+5/16=8/16

p(y2)=5/16+3/16=8/16

p(x2)=1/16+1/8+1/16+5/16=9/16

p(x1)=1/4+1/16+1/8=7/16

p(x1,w1)=1/4+1/16=5/16

p(x1,w2)=1/8+0=1/8

p(x2,w1)=1/16+1/8=3/16

p(x2,w2)=1/16+5/16=6/16

(X, (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	1/4	1/16
(y_1, z_2)	1/8	1/16
(y_2, z_1)	1/16	3/16
(y_2, z_2)	0	1/4

p(y1,z1)=1/4+1/16=5/16

p(y1,z2)=1/8+1/16=3/16

p(y2,z1)=1/16+3/16=4/16

p(y2,z2)=0+1/4=1/4

p(z1)=5/16+4/16=9/16

p(z2)=3/16+1/4=7/16

ΓΕ4/1112/Θ1

Οι υπό συνθήκη πιθανότητες περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα (υπενθυμίζουμε ότι $p(\phi / \chi) = \dfrac{p(\phi, \chi)}{p(\chi)}$, σελίδες 25-26 του βιβλίου):

X/W	x_1	x_2
w_1	5/8	3/8
w_2	2/8	6/8

X/Y	x_1	x_2
y_1	6/8	2/8
y_2	1/8	7/8

X/Z	x_1	x_2
z_1	5/9	4/9
z_2	2/7	5/7

(X/ (W,Y))	x_1	x_2
(w_1, y_1)	4/5	1/5
(w_1, y_2)	1/3	2/3
(w_2, y_1)	2/3	1/3
(w_2, y_2)	0	1

(X/ (Y,Z))	x_1	x_2
(y_1, z_1)	4/5	1/5
(y_1, z_2)	2/3	1/3
(y_2, z_1)	1/4	3/4
(y_2, z_2)	0	1

1. Με τον τύπο της σελίδας 28 του βιβλίου υπολογίζουμε τις εντροπίες *H(X)*, *H(W)*, *H(Y)* και *H(Z)*.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log p(x_i, w_j) = -\frac{7}{16}\log\frac{7}{16} - \frac{9}{16}\log\frac{9}{16} = 0{,}9879 \text{ bits.}$$

H(W)=H(Y)=1 bit και *H(Z)=H(X)=0,9879 bits.*

2. Για τον υπολογισμό της συνδυασμένης ποσότητας πληροφορίας *H(X, W)*, *H(X, Y)*, *H(X,Z)*, *H(X, W, Z)* και *H(X,Y, Z)* δείτε το σχετικό τύπο στη σελίδα 34 του βιβλίου:

$$H(X,W) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, w_j)\log p(x_i, w_j)$$

$$= -\frac{5}{16}\log\frac{5}{16} - \frac{2}{16}\log\frac{2}{16} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{16} - \frac{6}{16}\log\frac{6}{16} = 1{,}882719 \text{ bits.}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε *H(X, Y)=1,67738 bits* και *H(X, Z)=1,92318 bits.*

$$H(X,(W,Y)) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} p(x_i, w_j, y_k)\log p(x_i, w_j, y_k)$$

$$= -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - 0 - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\log\frac{1}{16} - \frac{5}{16}\log\frac{5}{16} = 2{,}52439 \text{ bits.}$$

Αντίστοιχα, $H(X,(Y,Z)) = 2{,}5778$ bits.

3. Για τον υπολογισμό των υπό συνθήκη ποσοτήτων πληροφορίας *H(X/W)*, *H(X/Y)*, *H(X/Z)*, *H(X/(W,Y))*, και *H(X/(Y,Z))* μπορούμε να κάνουμε χρήση του τύπου της σελίδας 36 του βιβλίου ή της πρότασης 1.3 που περιέχεται στη σελίδα 37 του βιβλίου.

$$H(X/W) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, w_j)\log p(x_i/w_j)$$

$$= -\frac{5}{16}\log\frac{5}{8} - \frac{2}{16}\log\frac{2}{8} - \frac{3}{16}\log\frac{3}{8} - \frac{6}{16}\log\frac{6}{8} = 0{,}882 bits.$$

Εφαρμόζοντας την πρόταση 1.3, έχουμε *H(X/W)=H(X,W)-H(W)=1,882719-1=0,882719 bits.*

Παρόμοια, υπολογίζουμε *H(X/Y)=0,6774 bits*, *H(X/Z)=0,93419*, *H(X/(W,Y))=0,57 bits*, και *H(X/(Y,Z))=0,60 bits.*

4. Για την επιλογή της καταλληλότερης εκ των δεδομένων τυχαίων μεταβλητών W, Y και Z ή του καταλληλότερο εκ των συνδυασμών (W, Y) και (Y,Z), πρέπει να λάβουμε υπόψη είτε τις σχετικές αμοιβαίες πληροφορίες μεταξύ της X και εκάστης ή εκάστου εξ΄ αυτών είτε τις αντίστοιχες υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας. Συγκεκριμένα, η υψηλότερη αμοιβαία πληροφορία αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή ή τον συνδυασμό των τυχαίων μεταβλητών που περιέχει περισσότερη πληροφορία για την X και είναι επομένως η ζητούμενη λύση, ενώ η χαμηλότερη υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας αποκαλύπτει την τυχαία μεταβλητή ή τον συνδυασμό τυχαίων μεταβλητών που αφήνει τη μικρότερη αβεβαιότητα ως προς την έκβαση της X και είναι επομένως η καταλληλότερη λύση για την πρόβλεψη της X. Από τα αποτελέσματα του ερωτήματος 3, η καλύτερη πρόβλεψη της X επιτυγχάνεται με προηγούμενη γνώση του συνδυασμού (W,Y).

Αυτό μπορεί επίσης να δειχθεί και με τις αμοιβαίες πληροφορίες, οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

$I(X;W)= H(X)-H(X/W)= 0,9879-0,882= 0,1059$ bits,

$I(X;Y)= H(X)-H(X/Y)= 0,9879-0,6774= 0,3105$ bits,

$I(X;Z)= H(X)-H(X/Z)= 0,9879-0,93419= 0, 0537$ bits,

$I(X;(W,Y))= 0,9879-0,57= 0,4179$ bits,

$I(X;(Y,Z))= 0,9879-0,60=0, 3879$ bits.

ΓΕ4 / 1819

ΘΕΜΑ 2

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τα μέτρα ποσότητας πληροφορίας και τον υπολογισμό τους. Επίσης στοχεύει στην κατανόηση ότι η πληροφορία μπορεί να αποκαλύπτεται τμηματικά μέσα από διαδοχικά γεγονότα.*

Σχετικές ασκήσεις: *Κατανοήστε καλά την Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.8, Τόμος Α .*

Ο Michael Schumacher υπήρξε ένας από τους πιο πετυχημένους οδηγούς της Formula 1 κατορθώνοντας να στεφθεί 7 φορές παγκόσμιος πρωταθλητής (1994, 1995 και 2000-2004). Το έτος 2004 στην κορύφωση της καριέρας του κέρδισε τους 13 από τους 18 αγώνες της F1 που διεξήχθησαν. Στον πρώτο αγώνα της επόμενης χρονιάς κατά τη στιγμή της εκκίνησης η πιθανότητα νίκης του Schumacher ήταν αυτή της προηγούμενης χρονιάς, δηλαδή η πιθανότητα νίκης ήταν **περίπου** $\mathbf{\frac{3}{4}}$, ενώ όλοι υπόλοιποι 16 οδηγοί από το σύνολο των 17 οδηγών που παίρνουν μέρος στον πρώτο αγώνα της F1 είχαν την ίδια πιθανότητα μεταξύ τους να κερδίσουν.

α) Ποιο είναι το πληροφοριακό περιεχόμενο (εντροπία) του πρώτου αυτού αγώνα της F1;

β) Αν υποθέσουμε ότι μετά το τέλος του αγώνα μεταδόθηκε η πληροφορία η οποία κάνει γνωστό ότι τον αγώνα **δεν** τον κέρδισε ο Schumacher, ποιο είναι το ποσό της πληροφορίας που μεταφέρει το μήνυμα αυτό και πόση αβεβαιότητα απομένει για το ποιο ήταν το αποτέλεσμα;

γ) Αν το μήνυμα του ερωτήματος (β) ακολούθησε χρονικά το μήνυμα με το όνομα του οδηγού που κέρδισε τον αγώνα ποιο είναι το ποσό της πληροφορίας που μεταφέρει το δεύτερο αυτό μήνυμα;

Αν συμβολίσουμε με $X = \{S, d_1, \ldots, d_{15}, d_{16}\}$ το σύνολο και των 17 οδηγών που μπορεί να νικήσουν έναν αγώνα F1 (όπου με S συμβολίζουμε τον Schumacher και με $d_i, i = 1,2,\ldots,16$, όλους τους υπόλοιπους ισοπίθανους οδηγούς) οι αντίστοιχες πιθανότητες P(X) είναι $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{64}, \frac{1}{64}, \ldots, \frac{1}{64}\right)$.

α) $H(X) = -p(S)\log p(S) - \sum_{i=1}^{16} p(d_i)\log p(d_i) = -\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \sum_{i=1}^{16}\frac{1}{64}\log\frac{1}{64} = 1{,}811\ bits$

β) Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{A}$ το γεγονός ότι τον αγώνα τον κερδίζει ο Schumacher με πιθανότητα $p(\boldsymbol{A}) = p(S) = \frac{3}{4}$ και $\overline{\boldsymbol{A}}$ το γεγονός ότι δεν τον κέρδισε με πιθανότητα $p(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1 - p(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{4}$, τότε το πληροφοριακό περιεχόμενο που μας αποκαλύπτεται είναι $-\log\left(p(\overline{\boldsymbol{A}})\right) = 2$ bits.
Η αβεβαιότητα που απομένει είναι η H(X/το αγώνα δεν τον κερδίζει ο Σουμάχερ). Αυτό σημαίνει ότι τον αγώνα θα τον κερδίσει ένας εκ των άλλων 16 οδηγών που όμως έχουν τις ίδιες πιθανότητες. Άρα η μέση αβεβαιότητα είναι log(16)=4 bits

__**Σημείωση 1:**__ Ενδεχομένως κάποιος επιχειρήσει να απαντήσει το δεύτερο υποερώτημα (πόση αβεβαιότητα απομένει για το ποιο ήταν το αποτέλεσμα) προσπαθώντας να βρει την H(X/Y) όπου Y = ($\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}$) αντί της H(X/το αγώνα δεν τον κερδίζει ο Σουμάχερ)= H(X/Y=$\overline{\boldsymbol{A}}$) που είναι και το ζητούμενο.

Μια τέτοια προσέγγιση είναι λάθος καθότι η H(X/Y) συμβολίζει το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο της X όταν μας γνωστοποιείται ένα από τα δύο γεγονότα κάθε φορά. Εδώ όμως μας δίδεται συγκεκριμένα η πληροφορία ότι τον αγώνα ΔΕΝ τον κέρδισε ο Σουμάχερ (γεγονός $\overline{\boldsymbol{A}}$) και άρα ψάχνουμε το H(X/το αγώνα δεν τον κερδίζει ο Σουμάχερ). Δηλαδή η H(X/Y)= H(X/Y=**A**)· p(**A**)+ H(X/Y=$\overline{\mathbf{A}}$)· p($\overline{\mathbf{A}}$)

γ) Ομοίως, το γεγονός που αντιστοιχεί στο όνομα του νικητή δεδομένου ότι γνωρίζουμε δεν έχει κερδίσει ο Schumacher συμβολίζει η εξαρτημένη τυχαία μεταβλητή (τμ.) $(X/\overline{\boldsymbol{A}})$ πράγμα το οποίο σημαίνει ότι $p(X/\overline{\boldsymbol{A}}) = \frac{1}{16}$ καθότι όλοι οι οδηγοί $d_i, i = 1,2, \dots ,16$ έχουν τις ίδιες πιθανότητες να κερδίσουν. Συνεπώς, το πληροφοριακό περιεχόμενο που μας αποκαλύπτεται είναι $-\log\left(p(X/\overline{\boldsymbol{A}})\right) = 4$ bits.

<u>Σημείωση2:</u>Να σημειώσουμε ότι τα ερωτήματα β και γ παρότι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα αφορούν σε διαφορετικές πληροφορίες. Στο ερώτημα β έχουμε τη μέση τιμή της αβεβαιότητας ενώ στο ερώτημα γ έχουμε το πληροφοριακό περιεχόμενο ενός συμβάντος που είναι ο νικητής.