ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.46

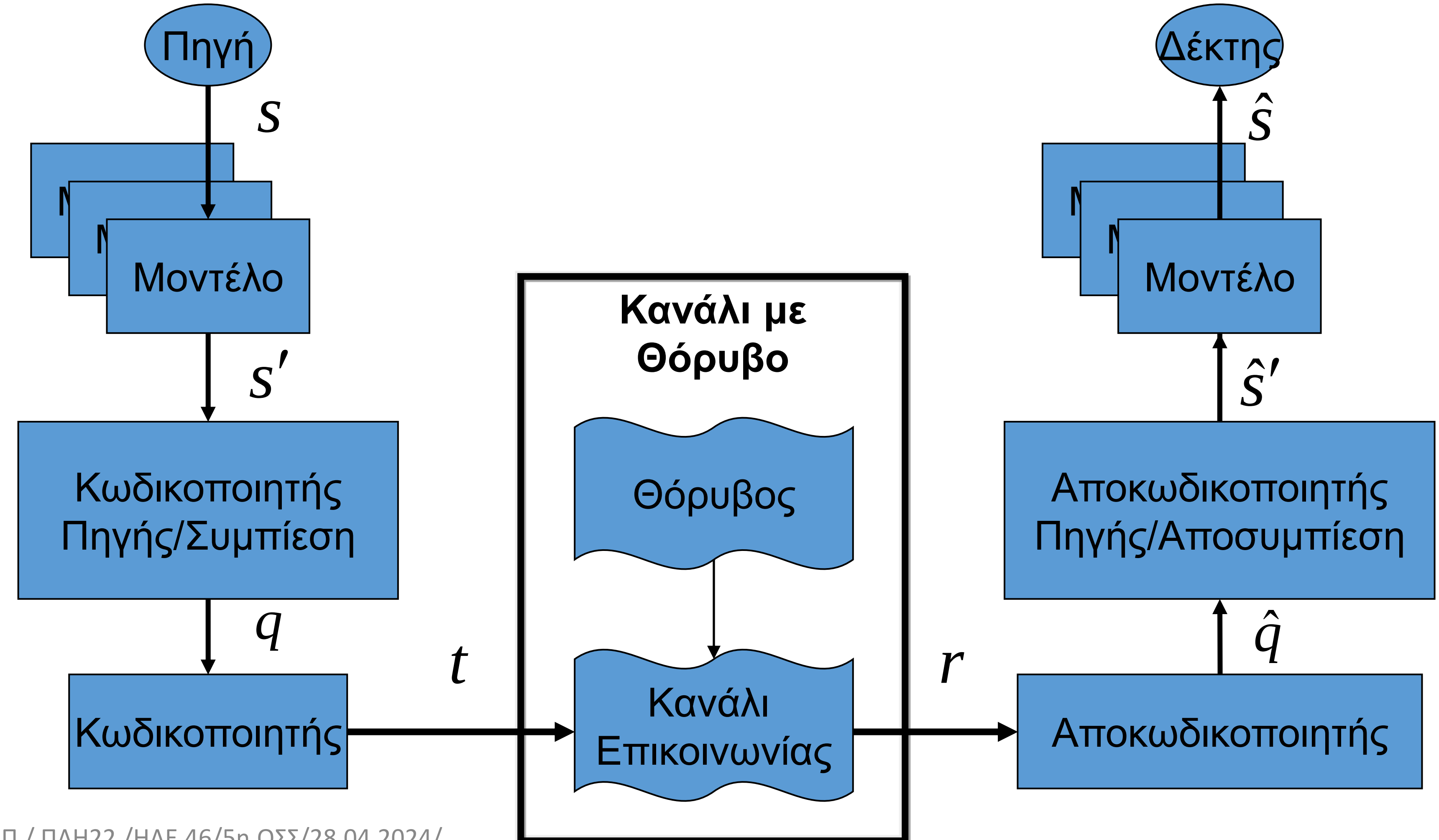
5^{η} ΟΣΣ

28.04.2024

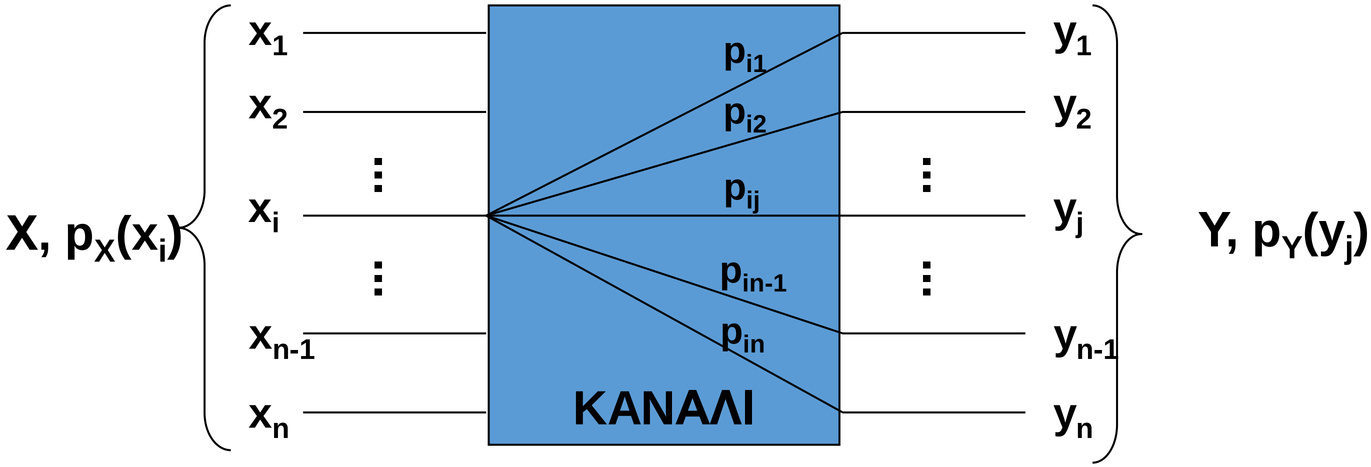
Κανάλια Επικοινωνίας

Νίκος Δημητρίου

Κανάλια Επικοινωνίας (1)



Κανάλια Επικοινωνίας (3)



$$[p_{Y/X}(y_j/x_i)]=[p_{ij}]=[P_{Y/X}]$$

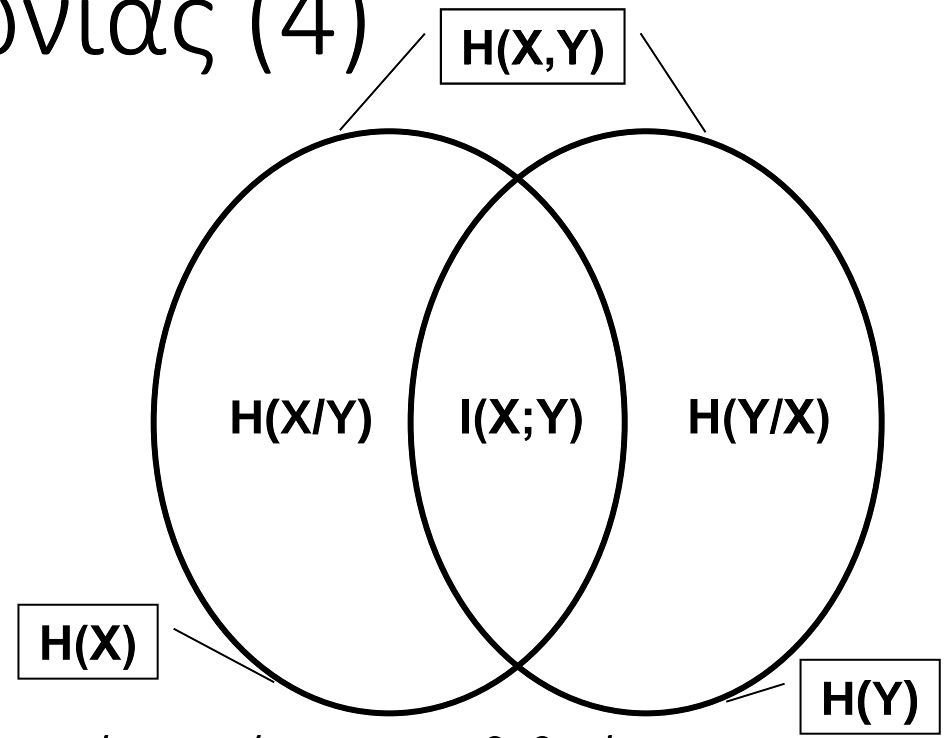
$$[P_Y]=[P_X]\,[P_{Y/X}]$$

$$[P_X]=[p_X(x_1)\ p_X(x_2)\ \ldots\ p_X(x_N)\ ]$$

$$[P_Y]=[p_Y(y_1)\ p_Y(y_2)\ \ldots\ p_Y(y_N)\ ]$$

$$p_Y\left(y_j\right)=\sum_{i=1}^{N} p_X\left(x_i\right)p_{ij}\,,\ j=1,\ldots,N$$

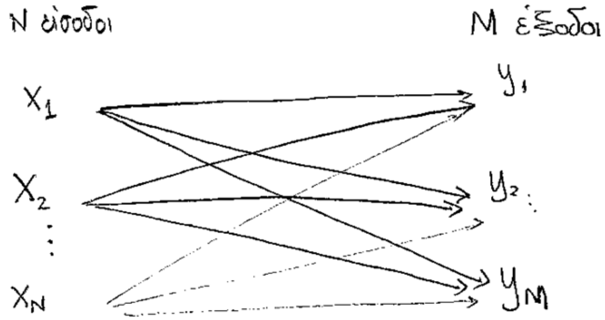
Κανάλια Επικοινωνίας (4)



- Συνδυασμένη Εντροπία
  - $\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log\, p(x,y)$
  - H(X,Y)=H(X)+H(Y/X)
- Δεσμευμένη Εντροπία
  - $\mathrm{H}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log\, p(x/y)$
- Αμοιβαία Πληροφορία
  - I(X;Y)= H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y/X)
  - Είναι το μέγεθος εκείνο που μετράει το ποσό της μείωσης της αβεβαιότητας της X όταν γίνει γνωστό το Y.
  - Τη μέση πληροφορία της X που μεταφέρεται στη Y.

Η χωρητικότητα C, του καναλιού Q, είναι: $C(Q)=\max\limits_{P_X} I(X;Y)$

Κανάλια Επικοινωνίας



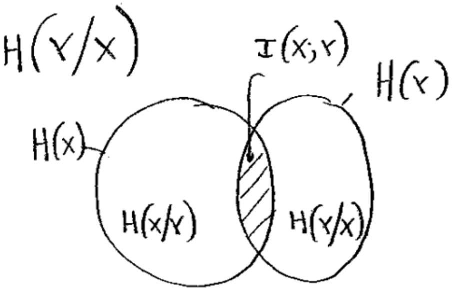
Πίνακας Μετάβασης

$$P(Y/X)= \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{array} \\ \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_2) & \cdots & p(y_M/x_1) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ p(y_1/x_N) & & \cdots & p(y_M/x_N) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)=1$ (Το άθροισμα κάθε γραμμής του πίνακα)

Αμοιβαία Πληροφορία:

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$$



Χωρητικότητα:

$$C=\max\left[I(X;Y)\right]$$

Συμμετρικά κανάλια

- ***Ορισμοί***
  - Ένα κανάλι λέγεται ***συμμετρικό*** εάν οι γραμμές του πίνακα μετάβασης $[p_{ij}]=[P_{Y/X}]$ μπορούν να προκύψουν από συνδυασμούς των στοιχείων της κάθε γραμμής και το ίδιο να συμβαίνει και για τις στήλες
  - Ένα κανάλι λέγεται ***ασθενώς συμμετρικό*** (weakly symmetric) εάν οι γραμμές του πίνακα μετάβασης $[p_{ij}]=[P_{Y/X}]$ μπορούν να προκύψουν από συνδυασμούς των στοιχείων της κάθε γραμμής και το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης να είναι πάντα το ίδιο

Συμμετρικό Κανάλι

$$[p_{ij}]=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$p_{ii}=0.3$$

Μερικώς Συμμετρικό Κανάλι

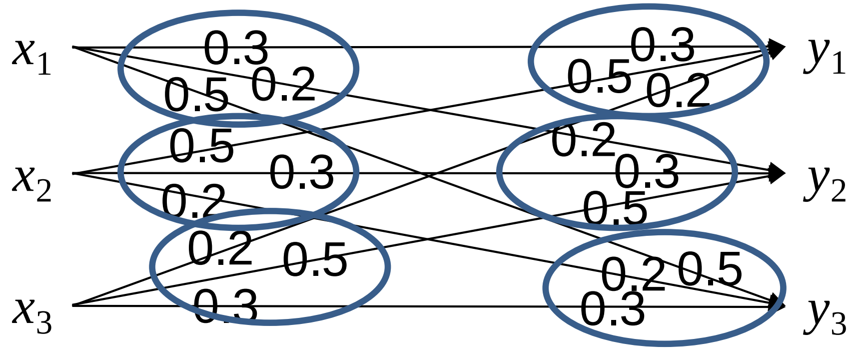
$$[p_{ij}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}$$

ΕΑΠ / ΠΛΗ22 /ΗΛΕ.46/5η ΟΣΣ/28.04.2024/
Ν.Δημητρίου

Παράδειγμα 7.4 – Συμμετρικό Κανάλι

$X \sim p_X(x_i)$



$Y \sim p_Y(y_j)$

$$\left[p_{ij}\right]=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 0.5\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$\left[p_Y(y_1) \quad p_Y(y_2) \quad p_Y(y_3)\right]=\left[p_X(x_1) \quad p_X(x_2) \quad p_X(x_3)\right]\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 0.5\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

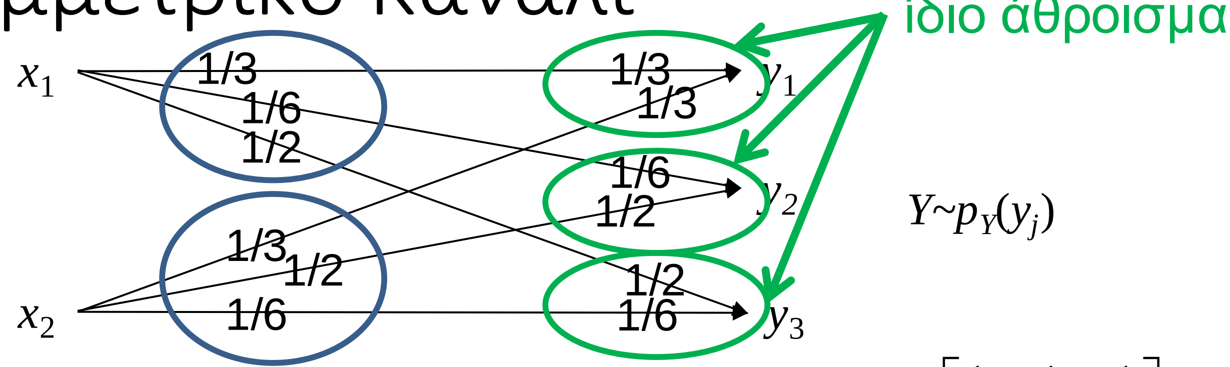
$$p_Y(y_1)=0.3p_X(x_1)+0.5p_X(x_2)+0.2p_X(x_3),$$

$$p_Y(y_2)=0.2p_X(x_1)+0.3p_X(x_2)+0.5p_X(x_3),$$

$$p_Y(y_3)=0.5p_X(x_1)+0.2p_X(x_2)+0.3p_X(x_3)$$

Παράδειγμα 7.5
Ασθενώς Συμμετρικό Κανάλι

$X \sim p_X(x_i)$



$Y \sim p_Y(y_j)$

$$\left[p_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\left[p_Y(y_1) \quad p_Y(y_2) \quad p_Y(y_3)\right] = \left[p_X(x_1) \quad p_X(x_2)\right] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$p_Y(y_1) = \frac{1}{3} p_X(x_1) + \frac{1}{3} p_X(x_2),$$

$$p_Y(y_2) = \frac{1}{6} p_X(x_1) + \frac{1}{2} p_X(x_2),$$

$$p_Y(y_3) = \frac{1}{2} p_X(x_1) + \frac{1}{6} p_X(x_2)$$

Ιδιότητα Συμμετρικών / Μερικώς Συμμετρικών Καναλιών: 3

$$H(Y/X) = -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right] \quad \forall i$$

Εξήγηση:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left\{p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right]p(x_i)\right\}$$

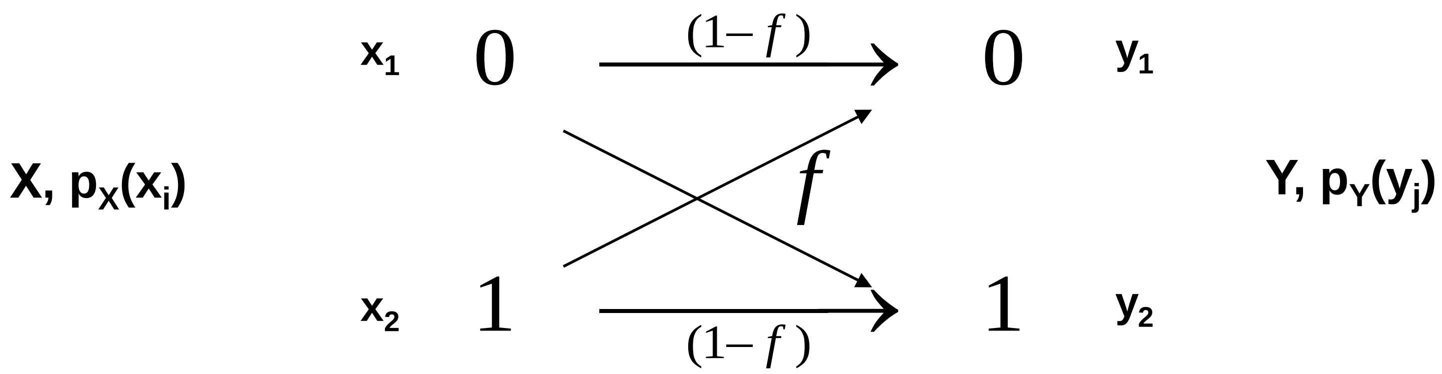
$$= -\sum_{i=1}^{N}\left\{p(x_i)\underbrace{\left\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right]\right\}}_{\text{}}\right\}$$

Το ίδιο άθροισμα δίνουν όλες οι γραμμές του πίνακα μετάβασης αφού αποτελούνται από αντιμεταθέσεις των ίδιων τιμών

$$= -\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left[p(x_i)\right]}_{=1}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right]\right\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} p(y_j/x_i)\log\left[p(y_j/x_i)\right] \quad \forall i$$

Δυαδικό συμμετρικό κανάλι

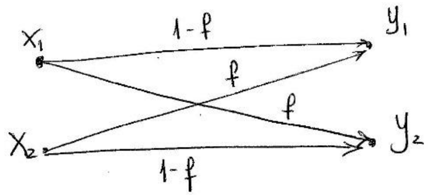


$$\begin{bmatrix} p_Y(0) & p_Y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(0) & p_x(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-f & f \\ f & 1-f \end{bmatrix}$$

$$p_Y(0) = (1-f)p_x(0) + fp_x(1)$$

$$p_Y(1) = fp_x(0) + (1-f)p_x(1)$$

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι



$$p(y_1) = (1-f)\,p(x_1) + f\,p(x_2)$$

$$p(y_2) = f\,p(x_1) + (1-f)\,p(x_2)$$

Αμοιβαία Πληροφορία

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{2} p(y_j)\log p(y_j)$$

$$H(Y/X) = -(1-f)\log(1-f)\,p(x_1) - f\log(f)\,p(x_2) -$$

$$-(1-f)\log(1-f)\,p(x_2) - f\log(f)\,p(x_1) =$$

$$= p(x_1)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] + p(x_2)\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] =$$

$$= \left[p(x_1)+p(x_2)\right]\left[-(1-f)\log(1-f) - f\log f\right] = -(1-f)\log(1-f) - f\log f =$$

$= H(f)$ ανεξάρτητη των πιθανοτήτων των εισόδων.

Άρα $I(X;Y) = H(Y) - H(f)$

$$C = \max_{p(x_i)} I(X;Y) = \max_{p(x_i)}\left\{H(Y) - H(f)\right\} = \max_{p(x_i)}\left\{H(Y)\right\} - H(f)$$

ΕΑΠ / ΠΛΗ22 /ΗΛΕ.46/5η ΟΣΣ/28.04.2024/ Ν.Δημητρίου

ΕΑΠ / ΠΛΗ22 /ΗΛΕ.46/5η ΟΣΣ/28.04.2024/ Ν.Δημητρίου

Μέγιστη $H(Y) \Rightarrow$ ομοιόμορφα κατανεμημένες $p(y_j) = \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$ 6

<u>Έλεγχος:</u> Υπάρχουν κατάλληλες $p(x_i)$ που να δίνουν ομοιόμορφες $p(y_j)$?

<u>Ναι</u> εφόσον σε συμμετρικά κανάλια ομοιόμορφα κατανεμημένες είσοδοι οδηγούν σε ομοιόμορφα κατανεμημένες εξόδους

Αν $p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} p(y_1) = (1-f)\cdot\frac{1}{2} + f\,\frac{1}{2} = \frac{1-f+f}{2} = \frac{1}{2} \\ p(y_2) = f\,\frac{1}{2} + (1-f)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα $C = \max\limits_{p(x_i)} H(Y) - H(f) = 1 - H(f)$

<u>Παρατηρήσεις:</u> *Η έξοδος μπορεί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη εάν ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:*

- *Η είσοδος είναι ομοιόμορφά κατανεμημένη και το κανάλι είναι συμμετρικό ή αθόρυβο*
- *Η είσοδος δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα κατανεμημένη αλλά το κανάλι είναι συμμετρικό με f=1/2*

ΕΑΠ / ΠΛΗ22 /ΗΛΕ.46/5η ΟΣΣ/28.04.2024/ Ν.Δημητρίου

Δυαδικό κανάλι χωρίς θόρυβο

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & 0 \xrightarrow{1} 0 & y_1 & \\ X, p_X(x_i) & & & & Y, p_Y(y_j) \\ & x_2 & 1 \xrightarrow[1]{} 1 & y_2 & \end{array}$$

$$\left[p_Y(0) \quad p_Y(1)\right] = \left[p_x(0) \quad p_x(1)\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

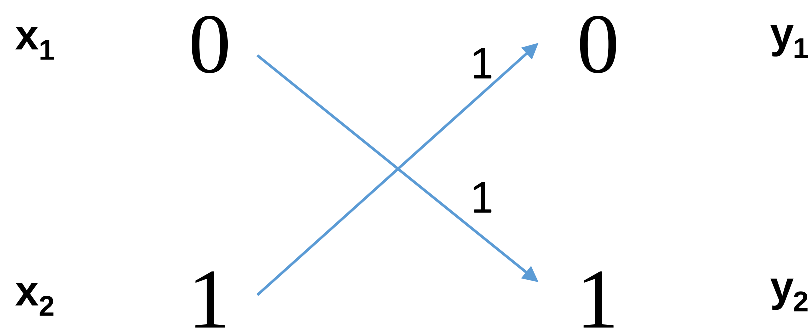
$$p_Y(0) = p_x(0)$$

$$p_Y(1) = p_x(1)$$

Μεταφορά κατανομής πιθανοτήτων

Δυαδικό κανάλι χωρίς θόρυβο

$X, p_X(x_i)$



$Y, p_Y(y_j)$

$$\left[p_Y(0) \quad p_Y(1)\right] = \left[p_x(0) \quad p_x(1)\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_Y(0) = p_x(1)$$
$$p_Y(1) = p_x(0)$$

ΕΑΠ / ΠΛΗ22 /ΗΛΕ.46/5η ΟΣΣ/28.04.2024/ Ν.Δημητρίου

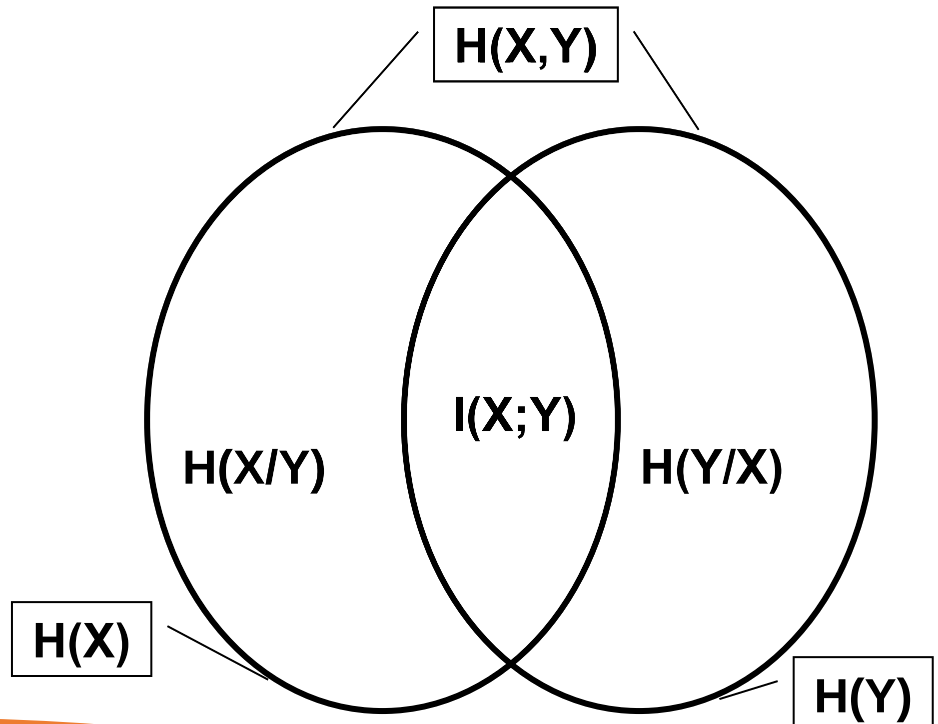
Μεταφορά κατανομής πιθανοτήτων

Δυαδικό κανάλι χωρίς θόρυβο

H(X,Y)=H(X)=H(Y)=I(X;Y)

H(X/Y)=H(Y/X)=0

C(Q)=max I(X;Y)=1 bit



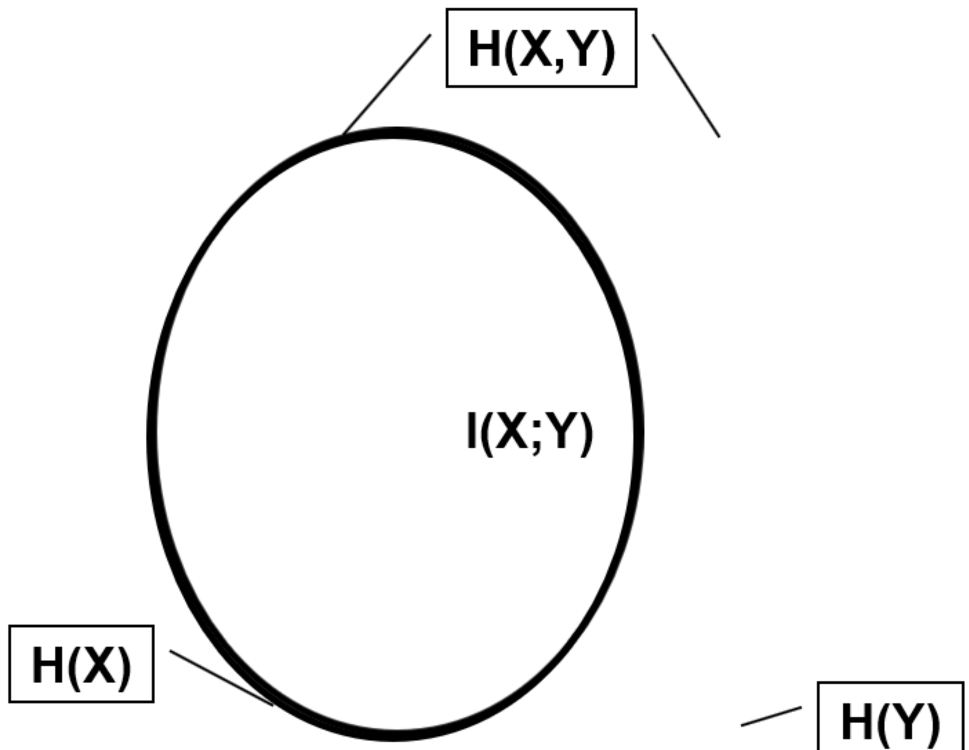
Μεταφορά κατανομής πιθανοτήτων

Δυαδικό κανάλι χωρίς θόρυβο

H(X,Y)=H(X)=H(Y)=I(X;Y)

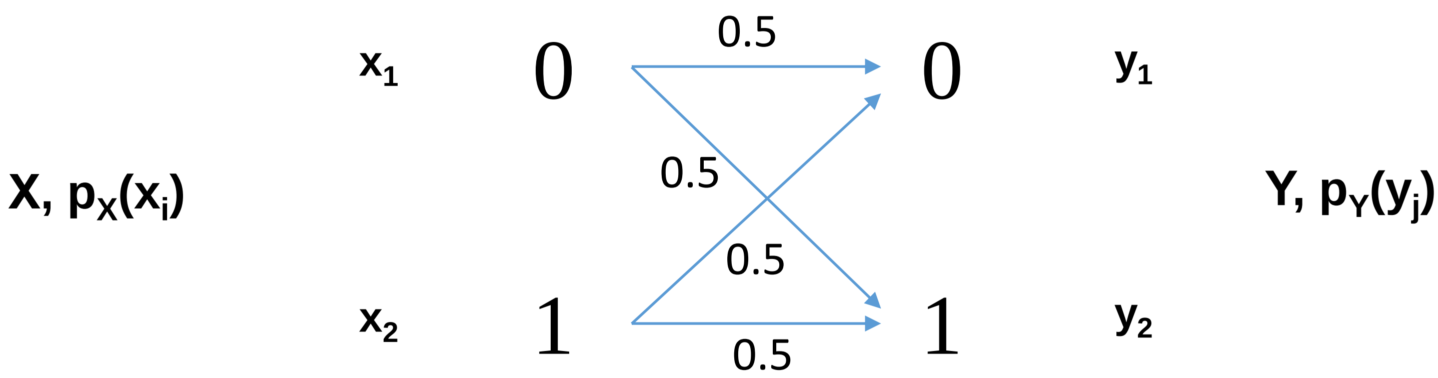
H(X/Y)=H(Y/X)=0

C(Q)=max I(X;Y)=1 bit



Μεταφορά κατανομής πιθανοτήτων

Πλήρως ενθόρυβο κανάλι



$$\left[p_Y(0) \quad p_Y(1)\right] = \left[p_X(0) \quad p_X(1)\right]\begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \end{bmatrix}$$

$$p_Y(0) = 0.5$$

$$p_Y(1) = 0.5$$

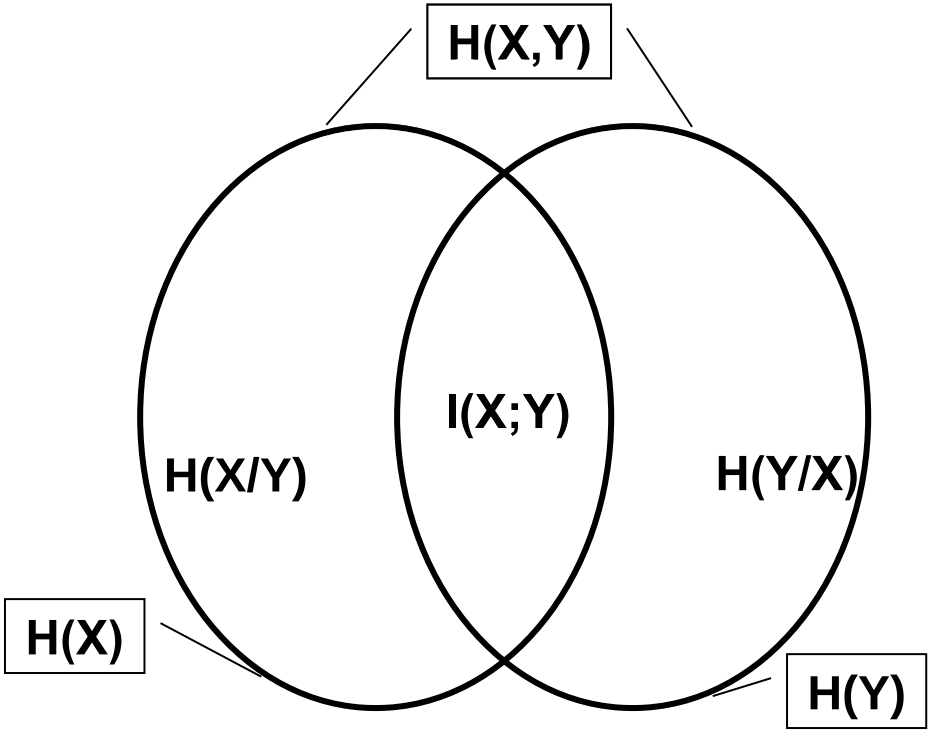
Μεταφορά κατανομής πιθανοτήτων

Πλήρως ενθόρυβο κανάλι

H(X,Y)=H(X)+H(Y)

H(X/Y)=H(X)
H(Y/X)=H(Y)
I(X;Y)=0

C(Q)=max I(X;Y)=0



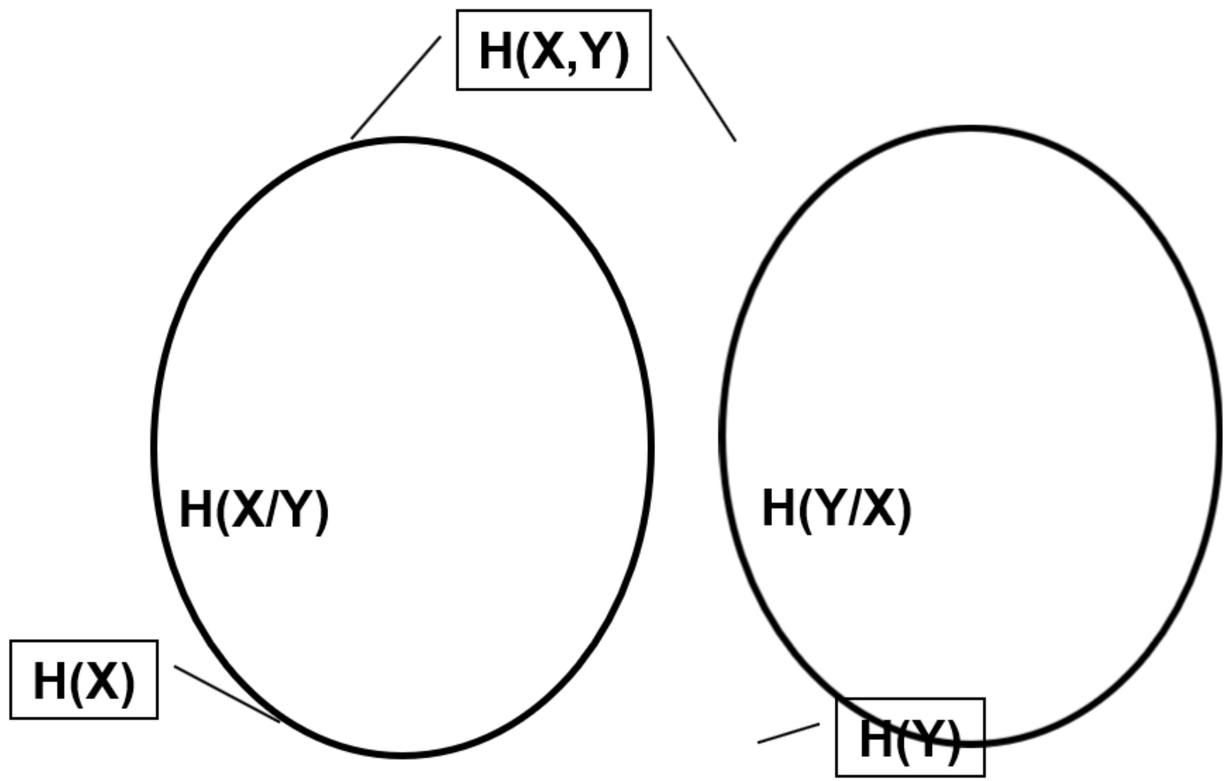
Μεταφορά κατανομής πιθανοτήτων

Πλήρως ενθόρυβο κανάλι

H(X,Y)=H(X)+H(Y)

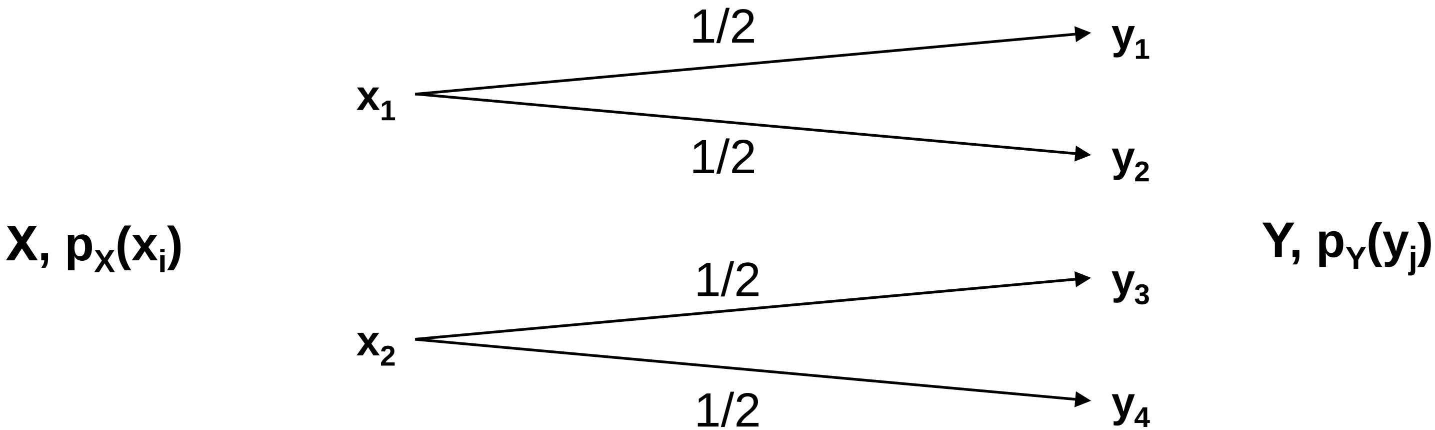
H(X/Y)=H(X)
H(Y/X)=H(Y)
I(X;Y)=0

C(Q)=max I(X;Y)=0



Μεταφορά κατανομής πιθανοτήτων

Κανάλι με μη επικαλυπτόμενες εξόδους



$$\left[p_Y(y_1) \quad p_Y(y_2) \quad p_Y(y_3) \quad p_Y(y_4)\right] = \left[p_x(x_1) \quad p_x(x_2)\right]\begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} \end{bmatrix}$$

$$p_Y(y_1) = \frac{1}{2}p_x(x_1), \quad p_Y(y_2) = \frac{1}{2}p_x(x_1)$$

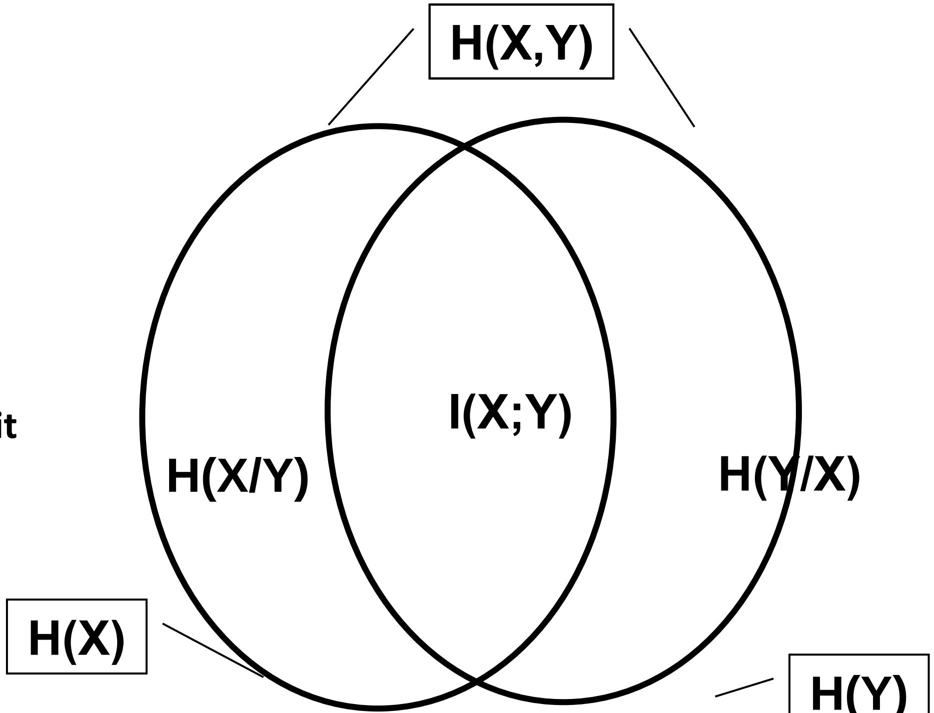
$$p_Y(y_3) = \frac{1}{2}p_x(x_2), \quad p_Y(y_4) = \frac{1}{2}p_x(x_2)$$

Κανάλι με μη επικαλυπτόμενες εξόδους

H(X,Y)=H(Y)

H(X/Y)=0
H(Y/X)=H(Y)-H(X)
I(X;Y)=H(X)

C(Q)=max I(X;Y)=max(H(X))=1bit

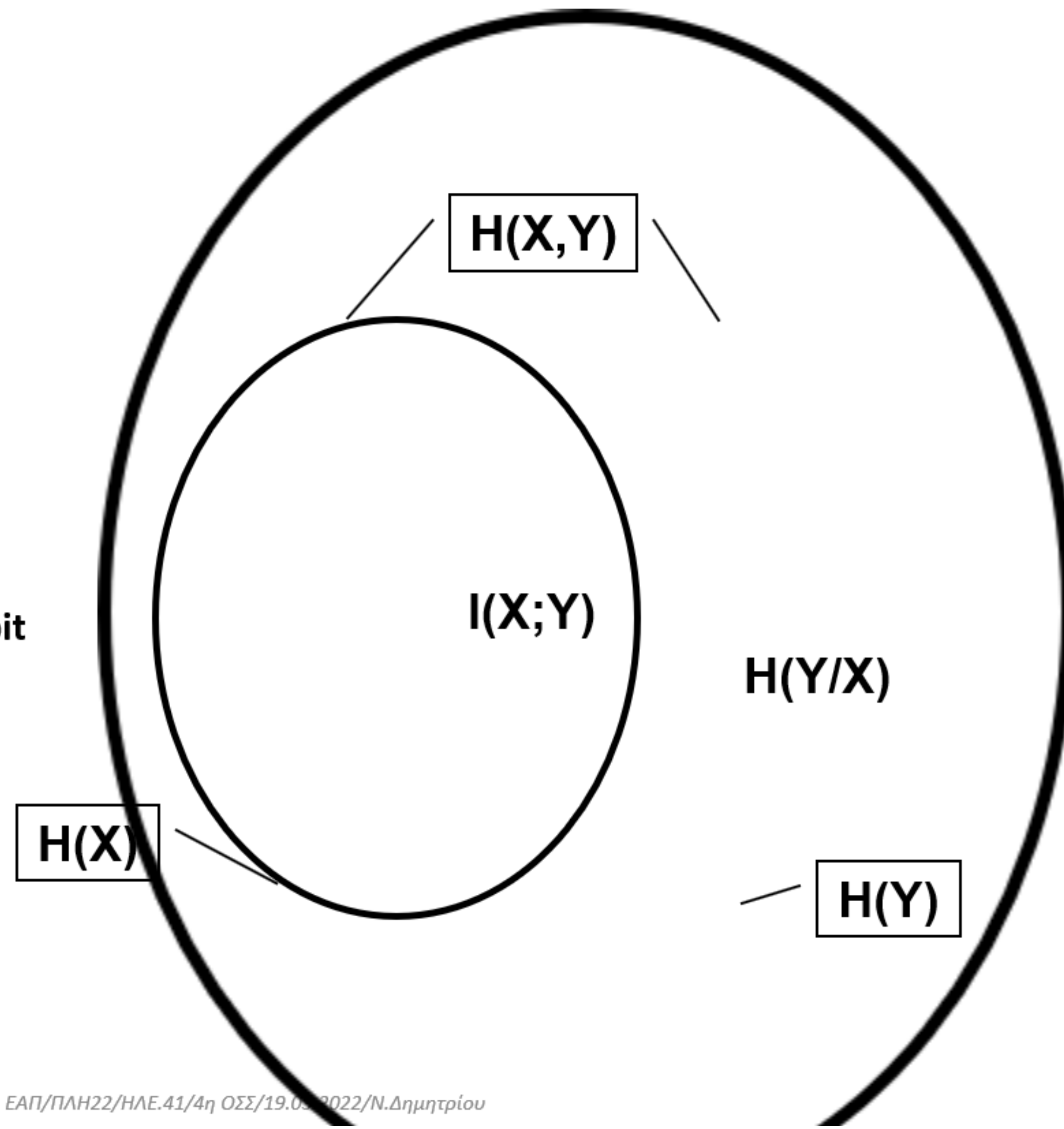


Κανάλι με μη επικαλυπτόμενες εξόδους

H(X,Y)=H(Y)

H(X/Y)=0
H(Y/X)=H(Y)-H(X)
I(X;Y)=H(X)

C(Q)=max I(X;Y)=max(H(X))=1bit

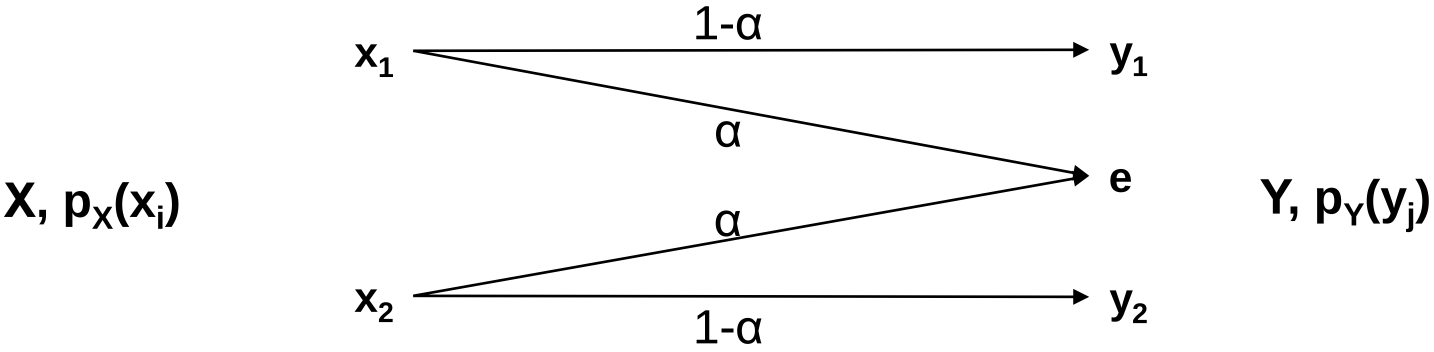


Στοιχεία χαρακτηριστικών καναλιών

Δυαδικό συμμετρικό κανάλι

- **<u>Χωρητικότητα</u>**
  - **<u>Δυαδικό συμμετρικό κανάλι, *f*.</u>**
    - $I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)$
      $=H(Y)-\sum p(x)H(Y/X=x)$
      $=H(Y)-\sum p(x)H(f)$
      $=H(Y)-H(f)$
      $\leq 1-H(f)$

Δυαδικό κανάλι με αποσβέσεις



$$\begin{bmatrix} p_Y(y_1) & p_Y(e) & p_Y(y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(x_1) & p_x(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-a & a & 0 \\ 0 & a & 1-a \end{bmatrix}$$

$$p_Y(y_1) = (1-a)p_x(x_1),$$

$$p_Y(e) = a(p_x(x_1) + p_x(x_2)) = a,$$

$$p_Y(y_2) = (1-a)p_x(x_2)$$

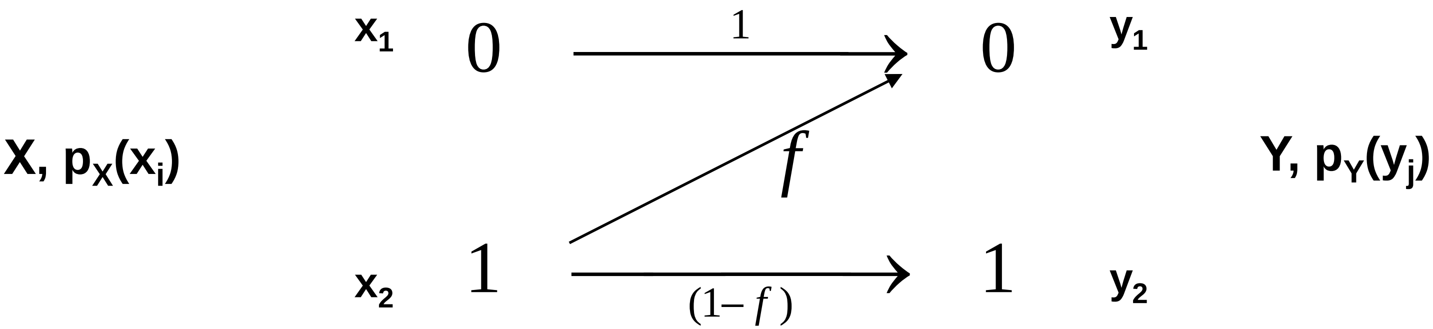
Δυαδικό κανάλι με αποσβέσεις

- **Χωρητικότητα**
  - max I(X;Y)=max(H(Y)-H(Y/X))

    =max(H(Y)-H(α))

    =maxH(Y)-H(α)
  - Θα μπορούσε να είναι max H(Y)=log3 αλλά αυτή η τιμή δεν είναι εφικτή για καμμία τιμή της $p_X(x_i)$, i=1,2
  - Αν θέσουμε $p_X(x_1)$=1-π, και $p_X(x_2)$=π, τότε από τα $p_Y(y_i)$, i=1,e,2 δίνονται από τους τύπους (βλ. διαφάνεια) τότε
    - maxH(Y)=max H((1-α)π,α,(1-α)(1-π))=max[(1-α)*H(π)+H(α)]=(1-α)*maxH(π)+H(α)
  - Οπότε προκύπτει ότι max I(X;Y)=maxH(Y)-H(α)=(1-α)*maxH(π)+H(α)-H(α)=1-α

Κανάλι Ζ



$$\begin{bmatrix} p_Y(0) & p_Y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x(0) & p_x(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f & 1-f \end{bmatrix}$$

$$p_Y(0) = p_x(0) + f p_x(1)$$
$$p_Y(1) = (1-f)\, p_x(1)$$

Κανάλι Z

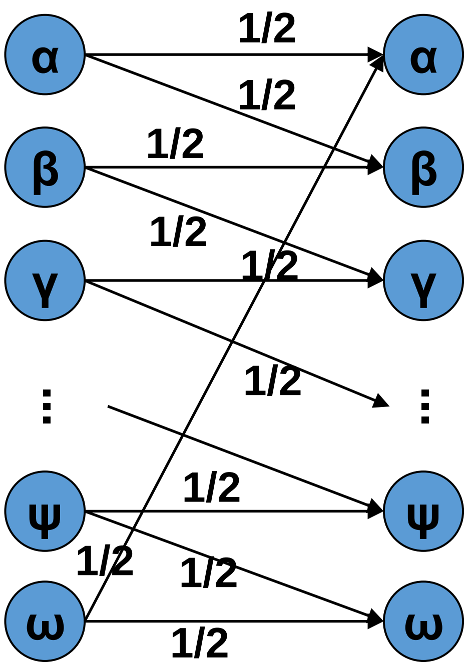
- **<u>Αμοιβαία Πληροφορία Καναλιών</u>**
  - **2.** Έστω ένα **<u>κανάλι επικοινωνίας Z</u>** όπου f=0.15
  - <u>*Περίπτωση 1η:*</u> P_X={$p_X(0)$=0.9, $p_X(1)$=0.1}.
    - Ομοίως, P_Y={$p_Y(0)$=0.915, $p_Y(1)$=0.085}.
    - I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)= H(0.085)-[0.9*H(0)+0.1*H(0.15)] =<u>0.36 bits</u>
    - H(X)=0.47 bits
  - <u>*Περίπτωση 2η:*</u> P_X={$p_X(0)$=0.5, $p_X(1)$=0.5}.
    - Ομοίως, P_Y={$p_Y(0)$=0.575, $p_Y(1)$=0.425}.
    - I(X;Y)=H(Y)-H(Y/X)= H(0.575)-[0.5*H(0)+0.5*H(0.15)]=0.98-0.3=<u>0.679 bits</u>
    - H(X)=1 bits
  - Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση του καναλιού Z η αμοιβαία πληροφορία παίρνει μεγαλύτερη τιμή της επίσης στη $2^{η}$ περίπτωση όταν μεγιστοποιείται το H(X)
  - Παρατηρείστε ότι το Z κανάλι έχει μεγαλύτερη πιστότητα απ’ ότι το συμμετρικό κανάλι.

Κανάλι Ζ

- **Χωρητικότητα**
  - ***Κανάλι Ζ, f.***
    - Αν θέσουμε $p_X(x_1=0)=1\text{-}\pi$, και $p_X(x_2=1)=\pi$, τότε από τα $p_Y(y_i)$, i=1,2 δίνονται από τους τύπους
      - $H(Y)=H((1\text{-}f)\pi)$
      - $H(Y/X)=\pi*H(Y/X=1)=\pi*H(f)$
    - Οπότε $\max I(X;Y)=\max(H(Y)-H(Y/X))$

      $=\max\mathbf{(}H((1\text{-}f)\pi) - \pi*H(f)\mathbf{)}$
    - Για f=0.15 μπορούμε να βρούμε ότι μεγιστοποιείται όταν π=0.445 και άρα C=0.685
    - Παρατηρείστε ότι $p_X(x_1=0)=0.555$, και $p_X(x_2=1)=0.445$, που είναι διαφορετική από την $p_X(x_1=0)=0.5$, και $p_X(x_2=1)=0.5$, η οποία μεγιστοποιεί την εντροπία, H(X)

Ενθόρυβη Γραφομηχανή



$$
\begin{array}{c}
\\
\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \chi \\ \psi \\ \omega \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \cdots & \chi & \psi & \omega \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 1/2 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ενθόρυβη Γραφομηχανή

- **Μεγιστοποίηση Αμοιβαίας Πληροφορίας Καναλιών**
  - **2._3.** **Ενθόρυβη γραφομηχανή**, $p_{ii}=p_{i,i+1}=1/2$, i=α,β,...,ψ,ω.
    - Παρατηρούμε ότι κάθε ένα γράμμα είτε λαμβάνεται σωστά είτε λαμβάνεται το επόμενό του με πιθανότητα ½. Με δεδομένο ότι έχουμε 24 διαφορετικά σύμβολα εάν μεταδίδαμε μόνο κάθε δεύτερο σύμβολο δηλ. β,δ,ζ,θ,...,χ,ω, τότε μόνο αυτά τα 12 σύμβολα από τα 24 θα μπορούσαν να μεταδοθούν και στη συνέχεια να αποκωδικοποιηθούν χωρίς σφάλματα. Με άλλα λόγια η χωρητικότητα του καναλιού είναι log12 bits
    - Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό
      - max I(X;Y)=max [H(Y)-H(Y/X)]=max H(Y) -1=log24-1=log12

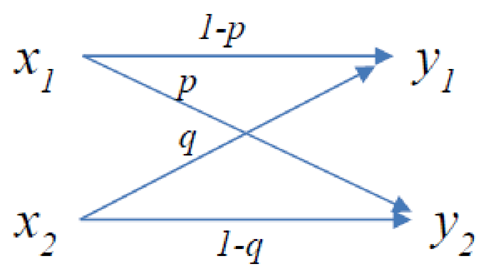
ΓΕ41718

ΘΕΜΑ 4

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές που σχετίζονται με τα κανάλια επικοινωνίας και τον υπολογισμό της αμοιβαίας πληροφορίας και της χωρητικότητας

Σχετικές ασκήσεις: ΕΞ2015Β/Θ5, ΓΕ4/1415/Θ2

(α) Δίνεται το παρακάτω κανάλι:



Ζητούνται οι τιμές των p, q (αν υπάρχουν) για να έχει το ανωτέρω κανάλι χωρητικότητα (i) μέγιστη (ii) ελάχιστη και (iii) ίση με C=1.5 bits/symbol

(β) Εάν ισχύει $p=q=0.6$ να αναγνωριστεί ο τύπος του καναλιού και να υπολογιστεί η χωρητικότητά του.

(γ) Εάν ισχύει $p=0$ και $q=0.3$ και $p(x_1)=0.1$ να αναγνωριστεί ο τύπος του καναλιού και να υπολογιστεί η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας $I(X;Y)$ μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού.

(δ) Δίνεται το κανάλι με 3 εισόδους $\{x_1,x_2,x_3\}$ και 3 εξόδους $\{y_1,y_2,y_3\}$ με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}$$, όπου για το κάθε στοιχείο του ισχύει $p_{i.} = p(y_j/x_i)$

(i) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της εξόδου δεδομένης της εισόδου $H(Y/X)$ για $p=0.3$

(ii) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού για $p=0.5$

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ. 46/5η ΟΣΣ/28.04.2024/ Ν.Δημητρίου

α) i) Μέγιστη χωρητικότητα έχουμε όταν υπάρχει διακριτή αντιστοίχιση ‘1-1’ μεταξύ εισόδου και εξόδου, δηλαδή όταν ισχύει $p=q=0$ *ή* $p=q=1$ και η χωρητικότητα θα ισούται με $\max\{H(X)\}=\max\{H(Y)\}=\log(2)=1$ bit/symbol, για την περίπτωση δυαδικού καναλιού.

ii) Η ελάχιστη χωρητικότητα αντιστοιχεί στην περίπτωση που υπάρχει πλήρης αβεβαιότητα μεταξύ συμβόλων εισόδου κι εξόδου, δηλ. όταν έχουμε $p=q=0.5$. Η χωρητικότητα τότε είναι ίση με 0.

iii) Εφόσον η μέγιστη χωρητικότητα είναι ίση με 1, δεν υπάρχουν p, q με τα οποία να επιτυγχάνεται χωρητικότητα ίση με 1.5 bit/symbol.

(β) Εάν ισχύει *p*=*q*=0.6 το κανάλι θα είναι δυαδικό συμμετρικό και η χωρητικότητά του θα ισούται με:

$$C = 1 - H(0.6) = 1 + 0.6 \cdot l\text{6g}\,(0.6) + 0.4 \cdot l\text{6g}\,(0.4) = 0.029$$

(γ) Εάν ισχύει p=0 *και* q=0.3 έχουμε κανάλι τύπου Ζ.

Επίσης, έχουμε ότι $p(x_1)$=0.1, άρα $p(x_2)$=0.9

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας ισούται με:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$H(Y) = -p(y_1)log(p(y_1)) - p(y_2)log(p(y_2))$$

$p(y_2) = p(x_2) \cdot p(y_2/x_2)$=0.9· 0.7=0.63

$p(y_1) = p(x_1) \cdot p(y_1/x_1) + p(x_2) \cdot p(y_1/x_2) = 0.1 \cdot 1 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.37$

Συνεπώς,

$H(Y) =$ ***-0.63log(0.63)-0.37log(0.37)*** $= 0.95 bits/symbol$

Επίσης,

$H(Y/X) = -p(x_1)p(y_1/x_1)\log(p(y_1/x_1)) - p(x_2)p(y_1/x_2)\log(p(y_1/x_2)) - p(x_2)p(y_2/x_2)\log(p(y_2/x_2)) = 0 + 0.469 + 0.324 = 0.793\ bits/symbol$

Οπότε τελικά έχουμε:

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = 0.95 - 0.793 = 0.157\ bits/symbol$

(δ) (i) Δίνεται το κανάλι με 3 εισόδους $\{x_1,x_2,x_3\}$ και 3 εξόδους $\{y_1,y_2,y_3\}$ με τον ακόλουθο πίνακα μετάβασης

$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}$, όπου για το κάθε στοιχείο του ισχύει $p_{i.} = p(y_j/x_i)$

Το κανάλι είναι συμμετρικό οπότε αρκεί ο υπολογισμός με βάση μία από τις γραμμές του πίνακα μετάβασης.

Η αβεβαιότητα της εξόδου δεδομένης της εισόδου H(Y/X) για p=0.3 θα ισούται με:

$$H(Y/X) = -p(y_1/x_1)\log(p(y_1/x_1)) - p(y_2/x_1)\log(p(y_2/x_1)) =$$

$$= -p\log(p) - (1-p)\log(1-p) = 0.88\ bits/symbol$$

(ii) Αν έχουμε p=0.5 το κανάλι αντιστοιχεί στον τύπο ενθόρυβης (γραφο)μηχανής οπότε η χωρητικότητά του ισούται με:

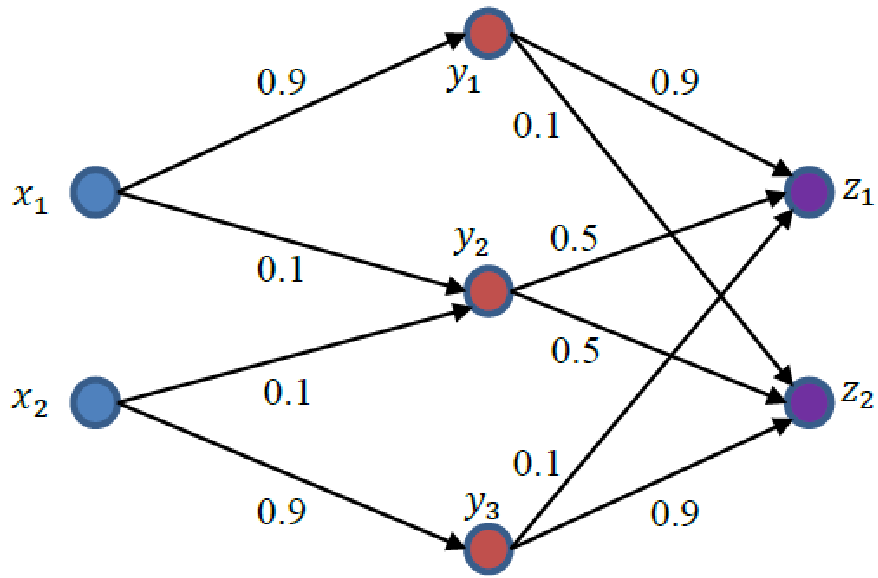
$$C = \log(3) - 1 = 0.585\ \ bits/symbol$$

ΘΕΜΑ 6 ΓΕ4/2021

Στόχος της άσκησης *είναι η κατανόηση της έννοιας της χωρητικότητας καναλιού και του 2ου θεωρήματος κωδικοποίησης του Shannon με εφαρμογή στα δυαδικά συμμετρικά κανάλια.*

Σχετικές ασκήσεις: *ΓΕ4/1718/Θ5, ΓΕ4/1920/Θ5, ΓΕ4/1819/Θ5*

Δίδεται το παρακάτω γράφημα με τις υπό συνθήκη πιθανότητες μετάβασης για τα δύο διαδοχικά κανάλια $X \rightarrow Y \rightarrow Z$.



α. Αφού σχηματιστούν οι επί μέρους πίνακες μετάβασης $X \rightarrow Y$ και $Y \rightarrow Z$, να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης $X \rightarrow Z$ και να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού $X \rightarrow Z$ (από άκρο-σε-άκρο).

β. Να βρεθεί η χωρητικότητα καναλιού για δύο διαδοχικά κανάλια, το καθένα με πίνακα μετάβασης όπως αυτόν του καναλιού $X \rightarrow Z$ και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα ως προς το (α).

γ. Να βρεθεί η χωρητικότητα καναλιού του για 100 διαδοχικά κανάλια, το καθένα με πίνακα μετάβασης όπως αυτόν του καναλιού $X \rightarrow Z$ και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα ως προς το (α).

α. Με βάση το σχήμα της εκφώνησης, ο πίνακας καναλιού $X \to Y$ με τις υπό συνθήκη πιθανότητες μετάβασης είναι

$$P(Y|X) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας με τις υπό συνθήκη πιθανότητες μετάβασης του καναλιού $Y \to Z$ είναι

$$P(Z|Y) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Για να βρεθούν οι υπό συνθήκη πιθανότητες μετάβασης του καναλιού X $\to Z$ θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι διαφορετικές διαδρομές μεταξύ αφετηρίας και προορισμού. Συγκεκριμένα, για να βρεθεί η υπό συνθήκη πιθανότητα $p(z_1|x_1)$ θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι διαφορετικές διαδρομές μεταξύ x_1 και z_1 και να εφαρμοστεί ο κανόνας της αλυσίδας, δηλαδή $p(z_1|x_1) = p(y_1|x_1)\,p(z_1|y_1) + p(y_2|x_1)\,p(z_1|y_2) = 0.9 \cdot 0.9 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.86$. Ομοίως, $p(z_2|x_1) = p(y_1|x_1)\,p(z_2|y_1) + p(y_2|x_1)\,p(z_2|y_2) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.14$, $p(z_1|x_2) = p(y_2|x_2)\,p(z_1|y_2) + p(y_3|x_2)\,p(z_1|y_3) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.14$, $p(z_2|x_2) = p(y_2|x_2)\,p(z_2|y_2) + p(y_3|x_2)\,p(z_2|y_3) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.9 = 0.86$. Συνεπώς, ο πίνακας καναλιού $X \to Z$ με τις υπό συνθήκη πιθανότητες μετάβασης είναι

$$P(Z|X) = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \\ 0.14 & 0.86 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι ο πίνακας ενός καναλιού BSC.

Συντομότερα, ο πίνακας $P(Z|X)$ υπολογίζεται ως το γινόμενο των δύο επιμέρους πινάκων μετάβασης.

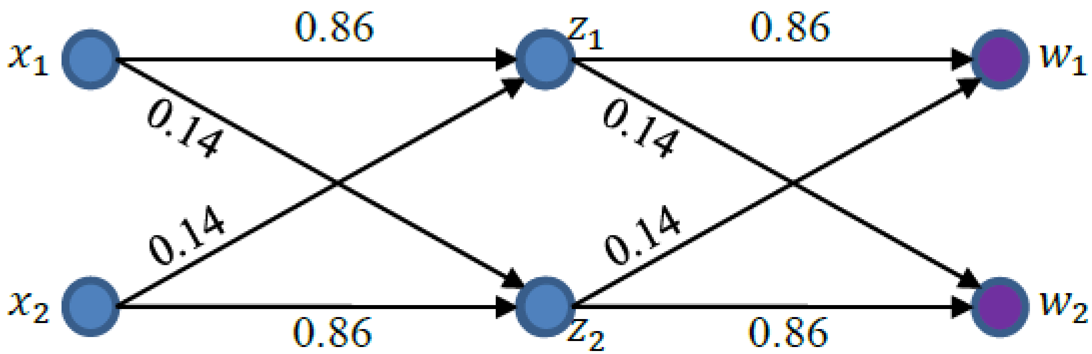
$$P(Z|X) = P(Y|X)P(Z|Y) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \\ 0.14 & 0.86 \end{pmatrix}$$

Η χωρητικότητα του καναλιού BSC X $\to$ Z είναι

$$C_1 = 1 - H(0.14) = 1 - \left[0.86 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.86}\right) + 0.14 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.14}\right)\right] =$$

$$= 1 - 0.58424 = 0.41576 \text{ bit/symbol}$$

β. Το κανάλι που προκύπτει ως δύο διαδοχικά κανάλια BSC, όπως του ερωτήματος (α), είναι ένα νέο κανάλι BSC



Ο πίνακας καναλιού του νέου BSC καναλιού έχει πίνακα μετάβασης που προκύπτει από την σχέση

$$P(W|X) = P_{Z|X}\,P_{W|Z} = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \\ 0.14 & 0.86 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \\ 0.14 & 0.86 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \\ 0.14 & 0.86 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.7592 & 0.2408 \\ 0.2408 & 0.7592 \end{pmatrix}$$

με τη χωρητικότητα να είναι

$$C_2 = 1 - H(0.2408) = 1 - \left[0.7592 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.7592}\right) + 0.2408 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.2408}\right)\right] =$$

$$= 1 - 0.79637 = 0.20363 \text{ bit/symbol}$$

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα του νέου καναλιού X → W είναι μικρότερη από αυτήν του X → Z, δηλαδή τα δύο κανάλια στη σειρά υποβαθμίζουν περαιτέρω τη χωρητικότητα σε σχέση με του ενός.

γ. Για 100 διαδοχικά BSC κανάλια ο πίνακας μετάβασης προκύπτει

$$P(Q|X) = P^{100}(Q|X) = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \\ 0.14 & 0.86 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

με τη χωρητικότητα να είναι

$$C_{100} = 1 - H(0.5) = 1 - \left[0.5 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.5}\right) + 0.5 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.5}\right)\right] = 1 - 1 = 0 \text{ bit}$$

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα του καναλιού μηδενίστηκε, αφού κάθε επιπλέον κανάλι που τοποθετείται στη σειρά μετατρέπει σταδιακά τις ΤΜ εισόδου και εξόδου σε ανεξάρτητες.

Συμπεράσματα

- Αμοιβαία Πληροφορία = Ποσό πληροφορίας που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι με δεδομένες τις πιθανότητες συμβόλων εισόδου
- Χωρητικότητα Καναλιού = Μέγιστο Ποσό πληροφορίας που είναι δυνατόν να μεταφερθεί πάνω από το κανάλι.
  - Μεγιστοποίηση Αμοιβαίας Πληροφορίας ως προς τις πιθανότητες εισόδου
- Τα παραπάνω προϋποθέτουν ύπαρξη θορύβου στο κανάλι.
- Σε περίπτωση απουσίας θορύβου τότε
  - Ποσό πληροφορίας που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι με δεδομένες τις πιθανότητες συμβόλων εισόδου είναι η H(X)
  - Η χωρητικότητα του καναλιού είναι απλά η maxH(X) που επιτυγχάνεται σε περίπτωση ισοπίθανων συμβόλων
- Ισχύουν δηλαδή
- $I(X;Y) \leq C \leq H(X) \leq \max H(X) = \log n$
- Εάν έχουμε σύνδεση σε σειρά καναλιών, ο ισοδύναμος πίνακας μετάβασης είναι ίσος με το γινόμενο των επιμέρους πινάκων μετάβασης

Επιπλέον παραδείγματα

Παραδείγματα Καναλιών (1)

- **<u>Άσκηση</u>**
  - Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα x_i, $i=1, 2,$ με πιθανότητα εμφάνισης του x_1, $p(x_1)=a$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα y_j, $j=1, 2, 3, 4$ όπου οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}=p(y_j/x_i)$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

  - α) Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου, *H(Y)*.
  - β) Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα *H(Y/X)*.
  - γ) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

Παραδείγματα Καναλιών (2)

- **Απάντηση**
  - α) Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες λήψης των κωδικών συμβόλων y_j, $j=1, 2, 3, 4$. Είναι
  - $p(y_1)= p(y_1,x_1)+ p(y_1,x_2)=p(x_1)\ p(y_1/x_1)+ p(x_2)\ p(y_1/x_2)=a(0,8)+(1-a)(0)=0,8\alpha.$
  - Κατά ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε
  - $p(y_2)= p(y_2,x_1)+ p(y_2,x_2)=p(x_1)\ p(y_2/x_1)+ p(x_2)\ p(y_2/x_2)=0,8(1-\alpha),$
  - $p(y_3)= p(y_3,x_1)+ p(y_3,x_2)=p(x_1)\ p(y_3/x_1)+ p(x_2)\ p(y_3/x_2)=\alpha(0,1)+(1-\alpha)(0,1)=0,1,$
  - $p(y_4)= p(y_4,x_1)+ p(y_4,x_2)=p(x_1)\ p(y_4/x_1)+ p(x_2)\ p(y_4/x_2)=0,1.$
  - Από τις πιθανότητες αυτές, των οποίων το άθροισμα είναι 1, υπολογίζουμε τη μέση πληροφορία της εξόδου του καναλιού.
  - $H(Y)=-p(y_1)\log p(y_1)-p(y_2)\log p(y_2)-p(y_3)\log p(y_3)-p(y_4)\log p(y_4)=$
  - $=-0,8\alpha\log(0,8\alpha)-0,8(1-a)\log(0,8(1-a))\ -2(0,1)\log(0,1)$
  - $=0,66-0,8\alpha\log(0,8\alpha)-0,8(1-a)\log(0,8(1-a)).$

Παραδείγματα Καναλιών (3)

- β) Πρώτα υπολογίζουμε τις συνδυασμένες πιθανότητες των συμβόλων εισόδου και εξόδου του καναλιού (δείτε και το ερώτημα 1).
- Είναι $p(x_1,y_1)= p(y_1,x_1)= p(x_1)\ p(y_1/x_1)=0{,}8\alpha$,
- $p(x_1,y_2)= p(y_2,x_1)= p(x_1)\ p(y_2/x_1)=0$,
- $p(x_1,y_3)= p(y_3,x_1)= p(x_1)\ p(y_3/x_1)=0{,}1a$,
- $p(x_1,y_4)= p(y_4,x_1)= p(x_1)\ p(y_4/x_1)=0{,}1a$,
- $p(x_2,y_1)= p(y_1,x_2)= p(x_2)\ p(y_1/x_2)=0$,
- $p(x_2,y_2)= p(y_2,x_2)= p(x_2)\ p(y_2/x_2)=0{,}8(1-a)$,
- $p(x_2,y_3)= p(y_3,x_2)= p(x_2)\ p(y_3/x_2)=0{,}1(1-a)$,
- $p(x_2,y_4)= p(y_4,x_2)= p(x_2)\ p(y_4/x_2)=0{,}1(1-a)$.
- Τώρα υπολογίζουμε την αβεβαιότητα του καναλιού
- $H(Y/X)=-p(x_1,y_1)\log p(y_1/x_1) - p(x_1,y_2)\log p(y_2/x_1) - p(x_1,y_3)\log p(y_3/x_1) - p(x_1,y_4)\log p(y_4/x_1)-p(x_2,y_1)\log p(y_1/x_2) -p(x_2,y_2)\log p(y_2/x_2) -p(x_2,y_3)\log p(y_3/x_2) - p(x_2,y_4)\log p(y_4/x_2)=$
- $-0{,}8a.\log 0{,}8+0-0{,}1a\log 0{,}1-0{,}1a\log 0{,}1-0-0{,}8(1-a)\log 0{,}8-0{,}1(1-a)\log 0{,}1-0{,}1(1a)\log 0{,}1=-0{,}8\log 0{,}8-0{,}1\log 0{,}1-0{,}1\log 0{,}1=0{,}2575+0{,}66.$

Παραδείγματα Καναλιών (4)

- γ) Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή *α.*
- Είναι

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}[H(Y) - H(Y/X)] \\
&= \max_{p(x)}\left[0{,}66 - 0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575 - 0{,}66)\right] \\
&= \max_{p(x)}\left[-0{,}8a\log(0{,}8a) - 0{,}8(1-a)\log(0{,}8(1-a)) - 0{,}2575\right].
\end{aligned}
$$

- Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του a που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο.

Παραδείγματα Καναλιών (5)

- Επομένως,

$$\frac{dI(X;Y)}{da} = \left[-0,8a\log(0,8a) - 0,8(1-a)\log(0,8(1-a) - 0,2575\right]'$$

$$= -0,8\left[(a)'\log(0,8a) + a(\log(0,8a))'\right]$$

$$-0,8\left[(1-a)'\log(0,8(1-a)) + (1-a)(\log(1-a))'\right]$$

$$= -0,8\left[\log(0,8a) + a\frac{\log e}{a}\right] - 0,8\left[(-1)\log(0,8(1-a)) + (1-a)(-1)\frac{1}{1-a}\log e\right]$$

$$= -0,8\log(0,8a) - 0,8\log e + 0,8\log(0,8(1-a)) + 0,8\log e$$

$$= -0,8\left[\log(0,8a) - \log(0,8(1-a))\right] = -0,8\log\frac{0,8a}{0,8(1-a)} = 0 \Rightarrow$$

$$\log\frac{a}{1-a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{1-a}\right) = 2^0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

- Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του *a*, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού
- *C=0,8 bits/symbol.*

Παραδείγματα Καναλιών (6)

- Έστω ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι χωρίς μνήμη. Το κωδικό αλφάβητο συμβόλων στην είσοδο του καναλιού δίδεται από την τυχαία μεταβλητή X={0,1} με πιθανότητες εμφάνισης P(X=0)=1/2, P(X=1)=1/2, ενώ η τυχαία μεταβλητή Y={0,1} συμβολίζει τις τιμές εξόδου. Ο πίνακας μετάβασης του καναλιού είναι

$$\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

- ***(i)*** Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της X δεδομένου ότι γνωρίζουμε την Y.
- ***(ii)*** Να υπολογιστεί η αμοιβαία πληροφορία του καναλιού.
- ***(iii)*** Για ποια τιμή του ‘ε’, η χωρητικότητα του καναλιού C παίρνει την μέγιστη τιμή της;
- ***(iv)*** Για ποια τιμή του ‘ε’, η χωρητικότητα του καναλιού C παίρνει την ελάχιστη τιμή της;

Παραδείγματα Καναλιών (7)

- i) Για να βρούμε την αβεβαιότητα της Χ δεδομένου ότι γνωρίζουμε την Υ, δηλαδή, H(X/Y) θα κάνουμε χρήση του τύπου
  - H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y)
- Για αυτό πρέπει πρώτα να βρούμε τις πιθανότητες P(Y=0) και P(Y=1). Αυτές βρίσκονται από την σχέση
  - $$\left[P(Y=0) \quad P(Y=1)\right] = \left[P(X=0) \quad P(X=1)\right]\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} P(Y=0) = P(X=0)(1-\varepsilon) + P(X=1)\varepsilon \\ P(Y=1) = P(X=0)\varepsilon + P(X=1)(1-\varepsilon) \end{matrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$P(Y=0) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{2}$$

  - H(Y) = 1
- Οι πιθανότητες P(X,Y) δίνονται από τον τύπο P(X,Y)=P(Y/X)P(X) όπου οι P(Y/X) είναι οι πιθανότητες του πίνακα μετάβασης.

1

Παραδείγματα Καναλιών (8)

- $P(X=0,Y=0) = P(Y=0/X=0)P(X=0) = (1-\varepsilon)(1/2)$
- $P(X=0,Y=1) = P(Y=1/X=0)P(X=0) = \varepsilon/2$
- $P(X=1,Y=0) = P(Y=0/X=1)P(X=1) = \varepsilon/2$
- $P(X=1,Y=1) = P(Y=1/X=1)P(X=1) = (1-\varepsilon)(1/2)$
- $H(X,Y) = -(1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon) - \varepsilon \log \varepsilon + 1$

2

- Από τις 1 και 2 προκύπτει
- $H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = -(1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon) - \varepsilon \log \varepsilon$
- ii) Από τον τύπο της αμοιβαίας πληροφορίας και παρατηρώντας ότι $H(X)=1$ έχουμε
  - $I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = 1 + (1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon) + \varepsilon \log \varepsilon$
- iii) Η χωρητικότητα του καναλιού παίρνει την μέγιστη τιμή της όταν υπάρχει απουσία θορύβου και η πηγή παίρνει την μέγιστη τιμή της. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η $H(X)$ έχει την μέγιστη τιμή της και το κανάλι είναι χωρίς θόρυβο όταν $\varepsilon=0$ ή $\varepsilon=1$
- iv) Η χωρητικότητα του καναλιού παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν η $I(X;Y)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο ως προς ε και εξισώνοντας με μηδέν βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή είναι όταν $\varepsilon=0.5$ και άρα η χωρητικότητα του καναλιού είναι 0.

Παραδείγματα Καναλιών (9)

- Δίνεται ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη. Στην είσοδο του καναλιού εμφανίζονται τα σύμβολα x_i, $i=1, 2$, με πιθανότητα εμφάνισης του x_1, $p(x_1)=a$. Στην έξοδο του καναλιού λαμβάνονται τα σύμβολα y_j, $j=1, 2, 3$, όπου οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}=p(y_j/x_i)=p(x_i/y_j)= q_{ji}$ περιέχονται στον ακόλουθο πίνακα μετάβασης του καναλιού.

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

- ***(i)*** Να υπολογιστεί η ποσότητα πληροφορίας των συμβόλων εξόδου, *H(Y)*.
- ***(ii)*** Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα *H(Y/X)*.
- ***(iii)*** Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού.

Παραδείγματα Καναλιών (10)

- **i)** Πρώτα πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες λήψης των κωδικών συμβόλων y_j, $j=1, 2, 3$. Είναι
- $p(y_1)= p(y_1,x_1)+ p(y_1,x_2)=p(x_1)\, p(y_1/x_1)+ p(x_2)\, p(y_1/x_2)=a(1/2)+(1-a)(1/2)=1/2.$
- Κατά ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε
- $p(y_2)= p(y_2,x_1)+ p(y_2,x_2)=p(x_1)\, p(y_2/x_1)+ p(x_2)\, p(y_2/x_2)=(1+\alpha)/4$ και
- $p(y_3)= p(y_3,x_1)+ p(y_3,x_2)=p(x_1)\, p(y_3/x_1)+ p(x_2)\, p(y_3/x_2)=(1-\alpha)/4.$
- Από τις πιθανότητες αυτές, των οποίων το άθροισμα είναι 1, υπολογίζουμε τη μέση πληροφορία της εξόδου του καναλιού.
- $H(Y)=-p(y_1)\log p(y_1)-p(y_2)\log p(y_2)-p(y_3)\log p(y_3)=$
- $=-(1/2)\log(1/2)-((1+a)/4)\log((1+a)/4) -((1-a)/4)\log((1-a)/4)$
- $=(1/2)-[((1+a)/4)(\log(1+a) -2)] –[((1-a)/4)(\log((1-a)-2)$, *αφού ισχύει* $\log(x/y)=\log x-\log y$.
- **=**$(3/2)-(1/4)(1+a)\log(1+a)-(1/4)(1-a)\log(1-a)$.

Παραδείγματα Καναλιών (11)

- **ii)** Πρώτα υπολογίζουμε τις συνδυασμένες πιθανότητες των συμβόλων εισόδου και εξόδου του καναλιού (δείτε και το ερώτημα 1).
- Είναι $p(x_1,y_1)= p(y_1,x_1)= p(x_1)\ p(y_1/x_1)=\alpha(1/2)$,
- $p(x_1,y_2)= p(y_2,x_1)= p(x_1)\ p(y_2/x_1)=\alpha(1/2)$,
- $p(x_1,y_3)= p(y_3,x_1)= p(x_1)\ p(y_3/x_1)=0$,
- $p(x_2,y_1)= p(y_1,x_2)= p(x_2)\ p(y_1/x_2)=(1-a)(1/2)$,
- $p(x_2,y_2)= p(y_2,x_2)= p(x_2)\ p(y_2/x_2)=(1-a)(1/4)$,
- $p(x_2,y_3)= p(y_3,x_2)= p(x_2)\ p(y_3/x_2)=(1-a)(1/4)$.
- Τώρα υπολογίζουμε την αβεβαιότητα του καναλιού
- $H(Y/X)=- p(x_1,y_1)log p(y_1/x_1) - p(x_1,y_2 log\ p(y_2/x_1) - p(x_1,y_3)log\ p(y_3/x_1) - p(x_2,y_1)$ $log\ p(y_1/x_2) - p(x_2,y_2)log p(y_2/x_2) - p(x_2,y_3)log p(y_3/x_2)=$
- $=(a/2)+(a/2)+0+[(1/2)-(a/2)]+ [(1/2)-(a/2)]+ [(1/2)-(a/2)]=$
- $=(3/2)-(a/2)$.

Παραδείγματα Καναλιών (12)

- **iii)** Για τον προσδιορισμό της χωρητικότητας του καναλιού θα πρέπει να βρούμε τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων της εισόδου, για τις οποίες μεγιστοποιείται η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού, δηλαδή την τιμή *α.*

- Είναι

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} [H(Y) - H(Y/X)]$$

$$= \max_{p(x)} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{4}(1+a)\log(1+a) - \frac{1}{4}(1-a)\log(1-a) - (\frac{3}{2} - \frac{a}{2}) \right]$$

$$= \max_{p(x)} \left[\frac{a}{2} - \frac{1}{4}(1+a)\log(1+a) - \frac{1}{4}(1-a)\log(1-a) \right]$$

- Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται όπως γνωρίζουμε για την τιμή του a που μηδενίζει την πρώτη της παράγωγο. Επομένως,

Παραδείγματα Καναλιών (13)

- Θέτοντας ανωτέρω την τιμή αυτή του *a*, λαμβάνουμε τη χωρητικότητα του καναλιού

$$\frac{dI(X;Y)}{da} = \left[\frac{a}{2} - \frac{1}{4}(1+a)\log(1+a) - \frac{1}{4}(1-a)\log(1-a)\right]'$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[(1+a)'\log(1+a) + (1+a)(\log(1+a))'\right]$$

$$-\frac{1}{4}\left[(1-a)'\log(1-a) + (1-a)(\log(1-a))'\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\log(1+a) + (1+a)\frac{1}{(1+a)}\log e\right] - \frac{1}{4}\left[(-1)\log(1-a) + (1-a)\frac{1}{(1-a)}(-1)\log e\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\log(1+a) + \log e\right] + \frac{1}{4}\left[\log(1-a) + \log e\right]$$

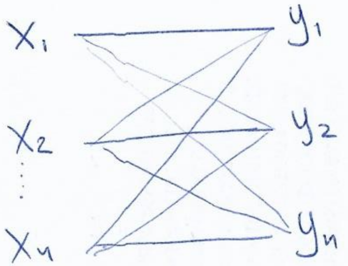
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[\log(1+a) - \log(1-a\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1+a}{1-a} = 0 \Rightarrow$$

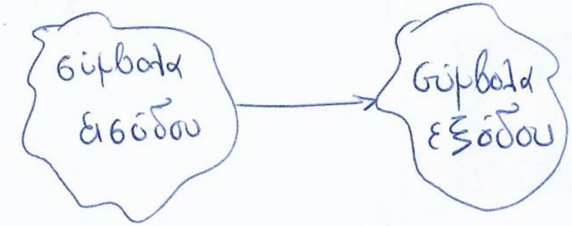
$$\log\frac{1+a}{1-a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1+a}{1-a}\right) = 2^2 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

- ***C=0,162 bits***.
- *Παρατηρείστε επίσης ότι για α=0,5, p(x_1)= p(x_2)=1/2, ΔΕΝ επιτυγχάνεται η μέγιστη χωρητικότητα του καναλιού. Απλά <u>η ποσότητα που μεταφέρεται πάνω από το κανάλι</u> είναι η αμοιβαία πληροφορία **I(X,Y)=0,156 bits**, δηλαδή μεταδίδουμε κάτω από την χωρητικότητα του καναλιού.*

Ενδεικτικό Τυπολόγιο – Στοιχεία Μεθοδολογίας

Κανάλια Επικοινωνίας





πίνακας μετάβασης $P(Y/X) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \cdots y_n \\ \left[\begin{array}{c} \\ p(y_j/x_i) \\ \\ \end{array} \right] \end{array}$

Μεταφερόμενη πληροφορία από το κανάλι - Αμοιβαία Πληροφορία: $I(X;Y)$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

Χωρητικότητα.

$$C = \max_{p(x_i)} \left(I(X;Y) \right) \qquad 0 \leq C \leq \max_{p(x_i)} \left(H(X) \right)$$

Παρατηρήσεις: Για συμμετρικά κανάλια

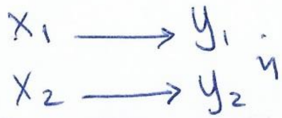
- ο πίνακας μετάβασης έχει τα ίδια στοιχεία σε κάθε γραμμή (με άλλη διάταξη)
- $H(Y/X) = \sum_{j=1}^{n} p(y_j/x_i) \log\left[p(y_j/x_i)\right]$ για οποιαδήποτε i γραμμή του $P(Y/X)$ πίνακα.

οπότε C=log(n)-H(Y/X)

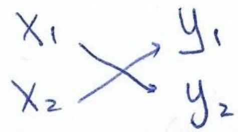
ΓΕ3/2021/Θ5,6 ΓΕ4/1819/Θ5,6
ΕΞ2020Α/Θ2 ΓΕ4/1920/Θ5,6
ΕΞ2018Β/Θ4

Χαρακτηριστικά Κανάλια

Αθόρυβο



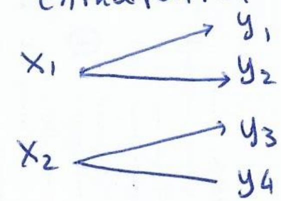
ή



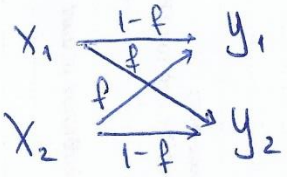
$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ή $P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$C = \max_{P(x_i)=1/2} H(X) = \log_2(2) = 1.$$

Σημ. Το ίδιο ισχύει και για ενθόρυβο κανάλι με μη επικαλυπτόμενες εξόδους



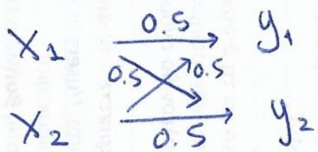
Δυαδικό Συμμετρικό



$$C = 1 + \underbrace{f\log f + (1-f)\log(1-f)}_{-H(f)} = 1 - H(f)$$

Ασκήσεις
ΓΕ4/1718/Θ4,2,5
ΕΞ 2017Β/Θ3,4
ΕΞ 2016Α/Θ5
ΕΞ 2015Β/Θ5
ΕΞ 2015Α/Θ5
ΕΞ 2013Β/Θ4

Πλήρως Ενθόρυβο



$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$C = 0$$

Ενθόρυβη Γραφομηχανή

$$H(Y/X) = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$P(Y/X) = \left.\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right\} n$$

$$C = \max(H(Y) - H(Y/X)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \max(H(Y) - 1) = \max(H(Y)) - 1 = \log(n) - 1 = \log\left(\frac{n}{2}\right)$$

Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης

Δίδεται ο πίνακας μετάβασης του καναλιού C

$$P_{Y/X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

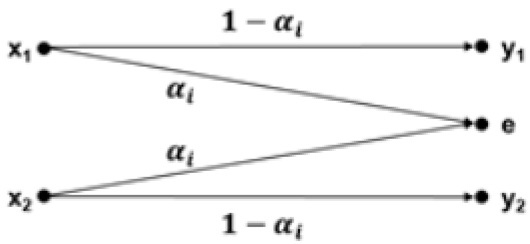
Η χωρητικότητά του είναι:

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 1 bit
- B. ~0.415 bits
- C. 0 bits
- D. 2 bits

Δίνονται 3 ξεχωριστά κανάλια απόσβεσης με χωρητικότητες C1, C2, C3 που αντιστοιχούν στις πιθανότητες απόσβεσης α_i , i=1,2,3, όπου

α1=1/2, α2=1/4 και α3=1/8.



Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθής;

Επιλέξτε μια απάντηση:

a. C3 > C1 > C2

b. C2 > C3 > C1

c. C1 > C2 > C3

d. C3 > C2 > C1

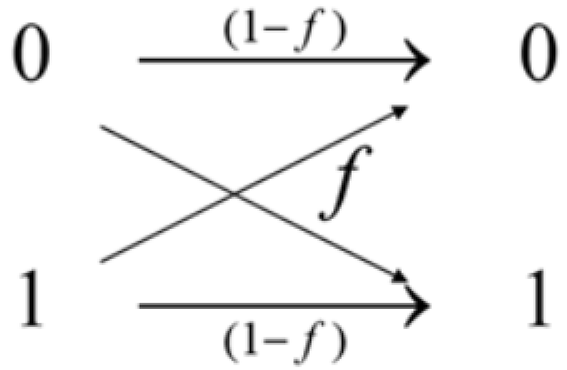
Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης ενός καναλιού τι τιμή πρέπει να έχουν τα x και y ώστε το κανάλι να μπορεί να χαρακτηριστεί ως ασθενώς συμμετρικός;

$$\begin{bmatrix} 1/3 & \boldsymbol{y} & 1/4 & \boldsymbol{x} \\ 1/6 & 1/4 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. x=1/3 και y=1/6
- b. x=1/6 και y=1/4
- c. x=1/2 και y=1/2
- d. x=1/12 και y=1/3

Δίνεται το παρακάτω δυαδικό συμμετρικό κανάλι όπου f=0,25 και πιθανότητα εμφάνισης 0 στην είσοδο είναι 0,75



Ποια είναι η πιθανότητα να έχω στην έξοδο y=1;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 0,5
- B. 0,375
- C. 0,625
- D. 0,425

Δίδεται ο πίνακας μετάβασης του καναλιού C, με 8 εισόδους και 8 εξόδους.

$$P_{Y/X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Η χωρητικότητά του είναι:

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 1 bit
- B. 1,532 bit
- C. 2 bits
- D. 3 bits

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας μετάβασης ενός καναλιού C.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & x \end{bmatrix}$$

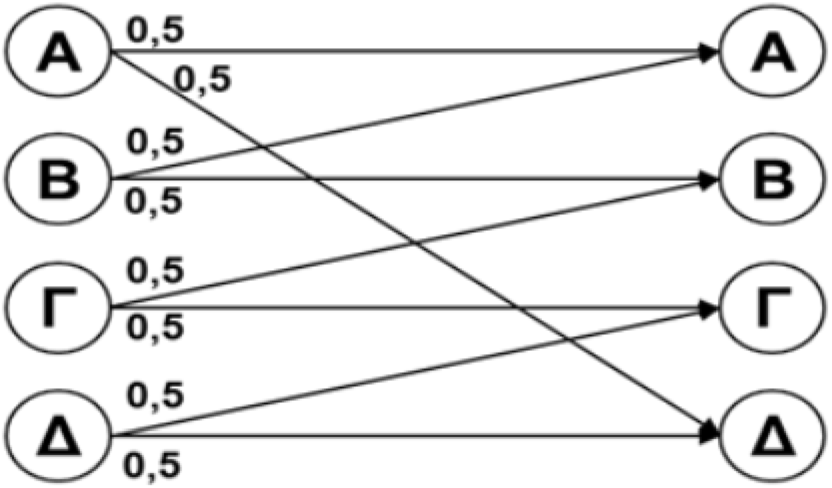
Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

Δίνεται ότι log(2/6)= -1,585 , log(1/6)= -2,585 , log(3)= 1,585

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 0.1258 bit
- B. 0,585 bit
- C. 1,7332 bit
- D. 0,0981 bit

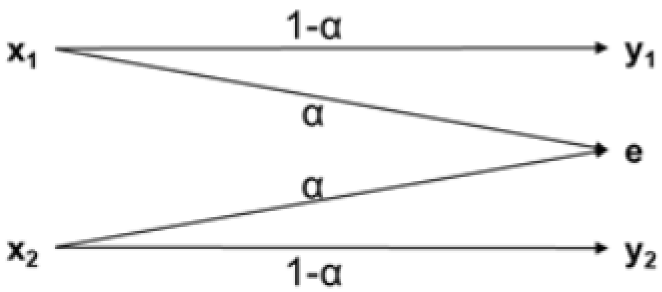
Για το παρακάτω διακριτό κανάλι, η χωρητικότητα είναι:



Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 2 bits
- B. 1.458 bits
- C. 0.5 bit
- D. 1 bit

Ποια από τα τέσσερα κανάλια απόσβεσης (BEC) με πιθανότητα λάθους α, έχει τη μεγαλύτερη χωρητικότητα;



Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. α=0.2
- B. α=0.1
- C. α=0.4
- D. α=0.3

Δίνεται ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι με πιθανότητα λάθους f=1/4. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. ~0.1887 bits
- b. 1 bit
- c. ~0.8113 bits
- d. 0 bit

Ερωτήσεις

ΕΑΠ/ΠΛΗ22/ΗΛΕ.46

5η ΟΣΣ

28.04.2024

Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

Νίκος Δημητρίου

Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

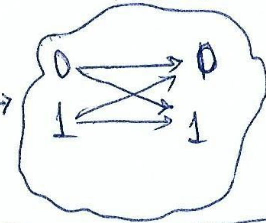
- Οι διαφάνειες αυτές είναι συμπληρωματικές της παρουσίασης που έχει αναρτηθεί στο study.eap.gr και περιέχουν παραπομπές σε συγκεκριμένα τμήματά της.
- Σκοπός είναι μέσω απλών παραδειγμάτων να γίνουν κατανοητές οι βασικές αρχές κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης, καθώς και να αναδειχθεί η μεθοδολογία που ακολουθείται σε αντίστοιχες ασκήσεις.

Κωδικοποίηση: Γραμμικοί κώδικες

Μήνυμα — Πλεονασμός (parity)

$$\underbrace{[d_1\, d_2 \cdots d_k][p_1 p_2 \cdots p_{n-k}]}_{\text{Κωδικολέξη } n \text{ bits}}$$ (στοιχείο κώδικα)

→ Κανάλι



⊕ [0 0 1 0 0 1 … 0] — πρότυπο σφάλματος

→ ληφθείσα λέξη

↑ χρήση πλεονασμού για ανίχνευση ή διόρθωση σφαλμάτων

Ρυθμός πληροφορίας $r = \frac{k}{n}$

Γραμμικός κώδικας $\mathbb{C}$: {σύνολο κωδικολέξεων}

Βλ. αρχείο
PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2024_v1
Διαφάνειες 14-35

ιδιότητες

1) $\forall\, x, y \in \mathbb{C}$, $x + y \in \mathbb{C}$

2) $\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ bits}} \in \mathbb{C}$

Μήκος Κώδικα: n
Διάσταση κώδικα: k

3) $p_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i$ Κάθε ψηφίο ισοτιμίας είναι γραμμικός συνδυασμός των ψηφίων μηνύματος ($\alpha_i = 0$ ή 1)

: βάρος κωδικολέξης: Πλήθος των '1' που έχει η κωδικολέξη π.χ $wt(1011)$ = "3"

απόσταση γραμμικού κώδικα: ελάχιστη απόσταση μεταξύ 2 κωδικολέξεων

$\longrightarrow$ ελάχιστο μη μηδενικό βάρος κωδικολέξης

Κωδικοποίηση / Πλεονασμός

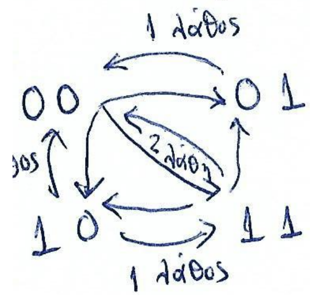
Μήνυμα.

d_1	d_2	$p_1 = d_1 + d_2$	$p_2 = d_1$	$p_3 = d_2$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

$2^k = 2^2$ κωδικολέξεις

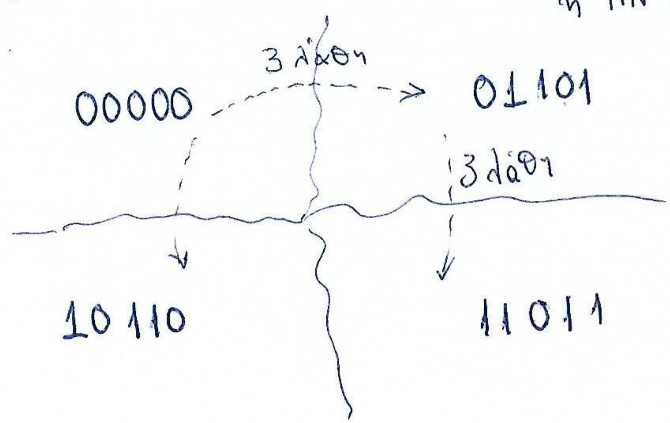
Κώδικας (5,2)

Απόσταση κώδικα: ελάχιστο βάρος $d = 3$ (από 2η κωδικολέξη 01101 ή την 3η -"- 10110)



Κωδικοποίηση →

Δημιουργία "απόστασης ασφαλείας" μεταξύ διαφορετικών μηνυμάτων



Ικανότητες διόρθωσης/ανίχνευσης σφαλμάτων

Κώδικας $\mathcal{C}$ απόστασης d

$\Rightarrow$ Ανιχνεύει όλα τα σφάλματα ε με $wt(\varepsilon) < d-1$

$\Rightarrow$ Δεν ανιχνεύει ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με $wt(\varepsilon) = d$

$\Rightarrow$ Διορθώνει όλα τα σφάλματα ε με

$$wt(\varepsilon) \leq \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \leftarrow \text{ακέραιο μέρος}$$

$\Rightarrow$ Δεν διορθώνει ένα τουλάχιστον σφάλμα ε με

$$wt(\varepsilon) = 1 + \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

Κώδικας $\{00000, 01101, 10110, 11011\} = C$

Απόσταση $d=3$. Διορθώνει όλα τα λάθη $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor = 1$ bit

π. χ.

Αποστολή 01101 $\longrightarrow$ λήψη 00101

? έλεγχος σφαλμάτων

Σύγκριση ληφθείσας λέξης με όλες τις κωδικές λέξεις

00101 → 00000	απόσταση	2	
00101 → 01101	-"-	1	$\xrightarrow[\text{απόσταση}]{\text{ελάχιστη}}$ άρα σωστή λέξη 01101 (σφάλμα στο 2ο bit)
00101 → 10110	-"-	3	
00101 → 11011	-"-	4	

Άρα μήνυμα '01'

Ισοδύναμη Μέθοδος

_Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2024_v1_
Διαφάνειες 52-57

Αθροίζουμε τη ληφθείσα λέξη 00101 με όλες τις λέξεις του κώδικα:

$$00101 + \{00000, 01101, 10110, 11011\} =$$

$$= \{00101, 01000, 10011, 11110\}$$ → συνομάδα $C + 00101$

ελάχιστο βάρος άρα επιλέγουμε την αντίστοιχη 2η κωδικολέξη 01101

συνομάδα $C + 00101$ = συνομάδα $C + 01000$

$$01000 + C = \{01000, 00101, 11110, 10011\}$$

Αν καταλήγαμε σε 2 υποψήφιες λέξεις με την ίδια απόσταση από η ληφθείσα:
- → Επιλέγουμε τυχαία μια από τις 2 (Πλήρης Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΠΑΜΠ)
- → Δεν επιλέγουμε και ζητείται επανεκπομπή (Ατελής Αποκωδικοποίηση Μέγιστης Πιθανότητας ΑΑΜΠ)

Πλήθος συνομάδων ενός γραμμικού κώδικα $C(n,k) = 2^{n-k}$

$C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

η 1 συνομάδα είναι η $C + 00000$ (ο ίδιος ο κώδικας)

οι υπόλοιπες $2^{5-2} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ συνομάδες προκύπτουν

προσθέτοντας στον κώδικα τις λέξεις

00001, 00010, ..., 00111 (γιατί?)

Βάση Κώδικα: Εύρεση γεννήτορα πίνακα Διαστάσεων $k \times n$

Μορφή Περιορισμένης Κλιμακωτής Διάταξης Γραμμών (ΠΚΔΓ)

$$G_{k \times n} = \left[I_k \;\vdots\; M_{k, n-k} \right]$$

← οι γραμμές αντιστοιχούν σε κωδικολέξεις

π.χ. $C = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$

Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2024_v1 Διαφάνειες 36-51, 58-64

$k = 2, \quad n = 5$

$$G = \underbrace{\left[I_2 \;\vdots\; M_{2,3} \right]}_{5 \text{ στήλες}} \Big\} \text{ 2 γραμμές}$$

Επιλογή 2 στοιχείων του C για το 'χτίσιμο' του I_2 (2η, 3η κωδ/λέξη)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

άρα βάση του C: $\{10110, 01101\}$

Χρήση G:

μήνυμα × G = κωδικολέξη

π.χ. για το μήνυμα 11:

$$11 \times \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = 1 \cdot 10110 + 1 \cdot 01101 =$$

$$= 11 \vdots 011$$

Για την αποκωδικοποίηση:

Κατασκευή πίνακα ισοτιμίας H.

$$H = \begin{bmatrix} M_{k,n-k} \\ \hline I_{n-k} \end{bmatrix}$$

ιδιότητα: $G \cdot H = [0]_{k,n-k}$

Για τον κώδικα C με $G = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

M

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} I_3$$

$$G \cdot H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2024_v1 : Διαφάνειες 43-64

Αποκωδικοποίηση ληφθείσας λέξης C_0

- πολλαπλασιασμός $C_0 \cdot H$
- Αν $C_0 \cdot H = 0$, τότε C_0 ανήκει στον κώδικα.
- Αν $C_0 \cdot H \neq 0$, τότε το αποτέλεσμα συγκρίνεται με πίνακα ΤΔΑ.

Κατασκευή πίνακα Τοπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) 8

Πρότυπα Σφάλματος ελαχίστου βάρους x_i	Σύνδρομο $x_i H$
1 0 0 0 0	1 1 0
0 1 0 0 0	1 0 1
0 0 1 0 0	1 0 0
0 0 0 1 0	0 1 0
0 0 0 0 1	0 0 1
0 0 0 1 1 ή 11000	0 1 1
10001 ή 01010	1 1 1

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εαν υπολογιστεί ένα από αυτά τα σύνδρομα (011, 111)
- στην ΠΑΜΠ επιλέγεται τυχαία ένα από τα υποψήφια πρότυπα σφάλματος
- στην ΑΑΜΠ ζητείται επανεκπομπή άρα στα πρότυπα σφάλματος βάζουμε

/ – /

π.χ. λήψη 10000

$$10000 \times H = 110$$

από πίνακα ΤΔΑ πρότυπο σφάλματος → 10000

άρα σωστή λέξη $10000 + 10000 = \underbrace{00}_{\text{μήνυμα}}000$

λήψη 11111

$$11111 \times H = 11111 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 100 \longrightarrow \text{πρότυπο σφάλματος } 00100$$

άρα σωστή λέξη: $11111 + 00100 = \underbrace{11}_{\text{μήνυμα}}011$

Εύρεση Απόστασης Κώδικα.

- $d-1 \le n-k$ (όριο Singleton)
- Αν έχουμε όλες τις λέξεις του κώδικα: ελάχιστο βάρος μη μηδενικό

$$\mathbb{C} = \{00000,\ 01101,\ 10110,\ 11011\}$$

0, 3, 3, 4

$d=3$

- Από τους G, H:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ελάχιστος αριθμός γραμμών που αθροιζόμενες δίνουν '000' (ελάχιστες γραμμικά εξαρτημένες γραμμές)

2 ίσες γραμμές ? όχι

3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές ? ΝΑΙ

π.χ. η 1η, 3η, 4η αθροιζόμενες δίνουν '000'

Δυικός Κώδικας ενός κώδικα $C:(n,k)$

Συμβολίζεται με $C^{\perp}\ (n, n-k)$

Ιδιότητα: Για κάθε στοιχείο α_i του C και b_j στοιχείο του $C^{\perp}$

ισχύει $\alpha_i \cdot b_j = 0$

οι στήλες του πίνακα H για τον C δίνουν μια βάση

για τον $C^{\perp}$

$C_{(5,2)} = \{00000,\ 01101,\ 10110,\ 11011\}$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

άρα μια βάση $C^{\perp} = \{11100, 10010, 01001\}$

ιδιότητα ορθογωνιότητας $C, C^{\perp}$

π.χ $(01101) \times (10010) = 0\cdot1 + 1\cdot0 + 1\cdot0 + 0\cdot1 + 1\cdot0$
$= 0$

$11011 \times 11100 = 1\times1 + 1\times1 + 0\times1 + 1\times0 + 1\times0 =$
$= 1+1+0+0+0 = 0$

Κατασκευή γεννήτορα πίνακα $C^\perp$ από τα στοιχεία της βάσης που υπολογίστηκαν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν έχει μορφή I_3

ακολουθούν γραμμοπράξεις
- πρόσθεση γραμμών
- εναλλαγή γραμμών

μορφή ΠΚΔΓ

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

άρα μια άλλη βάση $C^\perp = \{10010, 01001, 00111\}$

d-1≤n-k

$$H_{C^\perp} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

Απόσταση ?

ο $H_{C^\perp}$ έχει 2 ίσες γραμμές (1η, 4η ή 2η, 5η)
άρα $d = 2$

Αντιπαράδειγμα υπολογισμού απόστασης κώδικα από το ελάχιστο βάρος του γεννήτορα πίνακα

ΘΕΜΑ 6 ΓΕ5/0304

Δίνεται ένα σύνολο S={1100011, 1010000, 1001011, 0100101, 0001101} και ο κώδικας C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμά του, δηλαδή C=<S>.

1. Ζητείται ένας γεννήτορας πίνακας του *C*.
2. Ζητούνται οι παράμετροι (n, k, d) του κώδικα C, δηλαδή το μήκος των κωδικών λέξεων, η διάσταση του κώδικα και η απόστασή του.
3. Ζητείται μια βάση του $C^{\perp}$.
4. Να κωδικοποιηθούν τα μηνύματα Α=«0011», Β=«1001», Γ=«1011» και Δ=«1111».
5. Να διακρίνετε τις κωδικές λέξεις '1101110' και '0011011,' στα ψηφία μηνύματος και τα αντίστοιχα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας.
6. Ζητείται το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, καθώς και ο προσδιορισμός της συνομάδας C+1111011.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας προκύπτει, από τον $1^{ο}$ στον $2^{ο}$ πίνακα ως εξής (όπου α η $1^{η}$ γραμμή του $1^{ου}$ πίνακα, β η $2^{η}$ γραμμή, γ η $3^{η}$ γραμμή, δ η $4^{η}$ και ε η $5^{η}$ γραμμή του $1^{ου}$ πίνακα): η $1^{η}$ γραμμή του $2^{ου}$ πινακα είναι (α+δ), η $2^{η}$ γραμμή είναι η (δ), η $3^{η}$ γραμμή είναι η (β+γ), η $4^{η}$

γραμμή είναι η (ε) και η $5^{η}$ γραμμή είναι η (α). Η $1^{η}$ γραμμή του $3^{ου}$ πίνακα είναι η (α+δ), η $2^{η}$ είναι η (δ), η $3^{η}$ είναι η (β+γ)+(ε), η $4^{η}$ είναι η (ε) και η τελευταία είναι η (α+δ)+δ+α που είναι η 0000000. Επομένως, ο γεννήτορας πίνακας αποτελείται από τις μη μηδενικές γραμμές του $3^{ου}$ πίνακα.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Σχόλιο: τα 3 ψηφία πλεονασμού υπολογίζονται από τα 4 ψηφία μηνύματος με τις εξής σχέσεις XOR: p1=d1+d2+d3+d4. p2=d1+d3, p3=d2+d4

2. (7, 4, 2)

3.

$$H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Επομένως, μια βάση του $C^{\perp}$ είναι το σύνολο {1111100, 1010010 , 0101001}

Σχόλιο: Η απόσταση είναι 2 διότι ο Η έχει 2 όμοια στοιχεία (και το 110 και το 101 επαναλαμβάνονται) Όμως, ((βλ. προηγούμενη διαφάνεια) το ελάχιστο βάρος των γραμμών του G είναι 3.

Από το αντιπαράδειγμα αυτό φαίνεται ότι δεν είναι σωστός ο προσδιορισμός της απόστασης βάσει του ελάχιστου βάρους του G.

4.
Α.G=[0011].G=0011011,
Β.G=[1001].G=1001011,
Γ.G=[1011].G=1011101,
Δ.G=[1111].G=1111000.

5.

Η κωδική λέξη '1101110' διακρίνεται στα πρώτα k=4 ψηφία πληροφορίας '1101' και τα υπόλοιπα n-k=d=3 ψηφία ελέγχου ισοτιμίας '110' και
Η κωδική λέξη '0011011' στα ψηφία πληροφορίας '0011' και στα ψηφία ελέγχου ισοτιμίας '011'.

6. Οι συνομάδες είναι 8 (2^(7-4))
Πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε τον κώδικα C, ο οποίος αποτελεί το ανάπτυγμα του συνόλου S, δηλαδή C=<S>.
C={0000000, 1000110, 0100101, 1100011, 0010110, 1010000, 0110011, 1110101, 0001101, 1001011, 0101000, 1101110, 0011011, 1011101, 0111110, 1111000}.

Προσθέτοντας (xor) σε κάθε κωδική λέξη τη λέξη '1111011' λαμβάνουμε τη ζητούμενη συνομάδα.
C+1111011={1111011, 0111101, 1011110, 0011000, 1101101, 0101011, 1001000, 0001110, 1110110, 0110000, 1010011, 0010101, 1100000, 0100110, 1000101, 0000011}

Σχόλιο: Εάν γνωρίζαμε τον κώδικα (υπολογίζεται στο (6)) θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τον ίδιο γεννήτορα με το 2ο, 3ο, 5ο και 9ο στοιχείο. Ο γεννήτορας σε τυπική μορφή είναι μοναδικός και δεν έχει σημασία ο τρόπος προσδιορισμού του.

ΘΕΜΑ 3	ΓΕ4/1718

Στόχος της άσκησης είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων ελέγχου σφάλματος.
Σχετικές ασκήσεις: ΓΕ4/1617/Θ4,5, ΓΕ4/1516/Θ6

(α) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={ $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$} κάθε κωδική λέξη του οποίου προκύπτει από το προς κωδικοποίηση μήνυμα m={m1, m2, m3} σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$c_1 = m_1$$
$$c_2 = m_2$$
$$c_3 = m_3$$
$$c_4 = m_1 + m_2$$
$$c_5 = m_2 + m_3$$
$$c_6 = m_1 + m_3$$

Ζητούνται τα εξής:
i). Το πλήθος των κωδικών λέξεων του συγκεκριμένου κώδικα και ο ρυθμός πληροφορίας του.
ii). Ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H του κώδικα
iii) Να υπολογιστεί η απόσταση του κώδικα και να υπολογιστεί το πλήθος των σφαλμάτων που μπορεί να διορθώσει.
iv) Να υπολογιστεί η ΤΔΑ του κώδικα και να αποκωδικοποιηθεί η ληφθείσα λέξη r=[110000]

(β) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={000000, 001110, 010111, 011001, 10010, 101011, 110010, 111100}
Ζητούνται τα εξής:
i). Να υπολογιστεί το πλήθος ψηφίων μηνύματος του συγκεκριμένου κώδικα και το πλήθος των συνομάδων του.
ii). Να υπολογιστούν ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H του κώδικα.
iii) Να υπολογιστεί η απόσταση του κώδικα καθώς και το πλήθος των σφαλμάτων που μπορεί να διορθώσει.
iv) Να βρεθεί η κωδικοποίηση του μηνύματος [110] με τον παραπάνω κώδικα και να αποκωδικοποιηθεί η ληφθείσα λέξη r=[110011] με τη μέθοδο των συνομάδων.

(α) i). Το πλήθος των κωδικών λέξεων εξαρτάται από το μήκος των αρχικών μηνυμάτων και όχι από το μήκος των κωδικοποιημένων μηνυμάτων, και δίνεται από τι σχέση 2^k, όπου $k=3$ το μήκος του μηνύματος πληροφορίας. Επομένως, το πλήθος των κωδικών λέξεων είναι 8.
Ο ρυθμός πληροφορίας κάθε κώδικα δίνεται από τη σχέση

$$R = \frac{k}{n}$$

Δεδομένου ότι $k=3$ και n=6 ο ρυθμός πληροφορίας είναι

$$R = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Ο **ρυθμός πληροφορίας** ενός κώδικα είναι το ποσοστό της κωδικής λέξης που μεταφέρει το μήνυμα. Ο ρυθμός πληροφορίας ενός δυαδικού κώδικα C μήκους n είναι ίσος με $(1/n)\log_2|C|$. Αφού $1 \le |C| \le 2^n$, ο ρυθμός πληροφορίας παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1, την τιμή 1 αν $|C| = 2^n$ δηλαδή κάθε λέξη n δυαδικών ψηφίων είναι κωδική λέξη και την τιμή 0 αν $|C| = 1$.

Τόμος Α, σελ.117

.

ii). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα γεννήτορα G και τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, θα πρέπει να σχηματίσουμε τον πίνακα M.
Παρατηρώντας τις μαθηματικές εκφράσεις, ο πίνακας γεννήτορας G διαστάσεων [3 x 6] θα είναι της μορφής [I M]

Ο πίνακας M είναι διαστάσεων [3 x 3] και ο μοναδιαίος I είναι [3 x 3]
Τα στοιχεία του M προκύπτουν εφαρμόζοντας τις δεδομένες σχέσεις XOR που δίνουν τα αντίστοιχα ψηφία c_4, c_5, c_6 συναρτήσει των m_1, m_2, m_3.
Επομένως

$$G = [I_k \quad M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & M \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως $\begin{bmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{I}_{n-k} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

iii).Με βάση το όριο του Singleton για την απόσταση του κώδικα ισχύει $d-1 \leq n-k$, άρα $d \leq 4$

Δεν υπάρχουν 2 κοινές (γραμμικά εξαρτημένες) γραμμές στον πίνακα ισοτιμίας άρα $d>2$
Μπορούμε να βρούμε 3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές στον H π.χ. η 1η, η 4η, η 6η που αθροιζόμενες δίνουν αποτέλεσμα 000 άρα η απόσταση του κώδικα είναι $d=3$.
Ο κώδικας διορθώνει όλα τα σφάλματα $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1$ bit.

(iv) Ο πίνακας ΤΔΑ για τον κώδικα καταστρώνεται ως εξής:

Οδηγός συνομάδας	**Σύνδρομο**
000000	000
100000	101
010000	110
001000	011
000100	100
000010	010
000001	001
010001 ή 100010	111*

* Στην ΠΑΜΠ διαλέγουμε τυχαία ένα από τα πιθανά πρότυπα σφάλματος. Στην ΑΑΜΠ αγνοούνται τα πρότυπα σφάλματος και ζητείται επανεκπομπή

Αποκωδικοποίηση **r=[110000]:**
Έχουμε ότι

$$r \cdot H = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1]$$

Το σύνδρομο 011 αντιστοιχεί με βάση τον πίνακα ΤΔΑ στο πρότυπο σφάλματος 001000 οπότε η ληφθείσα λέξη διορθώνεται στην 110000+001000=111000

(β)

i) Εάν συμβολίσουμε με k το πλήθος των ψηφίων μηνύματος των κωδικών λέξεων, δηλ. το μήκος των αρχικών μηνυμάτων, τότε ο κώδικας θα περιέχει συνολικά 2^k κωδικές λέξεις, συνεπώς έχουμε $2^k=8$ οπότε $k=3$.
Επίσης αν επιπλέον συμβολίσουμε ως n το μέγεθος της κάθε κωδικής λέξης, το πλήθος των συνομάδων του κώδικα είναι ίσο με $2^{n-k}=8$.

ii). Για να υπολογίσουμε τον πίνακα γεννήτορα G επιλέγουμε κατάλληλες λέξεις του κώδικα:
Επομένως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Μ είναι διαστάσεων [3 x 3] και ο μοναδιαίος Ι είναι [3 x 3]

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως [Μ Ι]

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) Δίνεται ο γραμμικός κώδικας C={000000, $\boxed{001110}$, $\boxed{010111}$, 011001, $\boxed{100101}$, 101011, 110010, 111100} iii). Με βάση το όριο του Singleton για την απόσταση του κώδικα ισχύει $d-1 \leq n-k$, άρα $d \leq 4$

Δεν υπάρχουν 2 κοινές (γραμμικά εξαρτημένες) γραμμές στον πίνακα ισοτιμίας άρα $d>2$

Μπορούμε να βρούμε 3 γραμμικά εξαρτημένες γραμμές στον H π.χ. η 1η, η 2η, η 5η που αθροιζόμενες δίνουν αποτέλεσμα 000 άρα η απόσταση του κώδικα είναι $d=3$.

Ο κώδικας διορθώνει όλα τα σφάλματα $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1$ bit.

iv)

Η κωδικοποίηση του μηνύματος γίνεται ως εξής:

$$C = m \cdot G = [1 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Αποκωδικοποίηση **r=[110011]:**

Προσθέτουμε τη ληφθείσα λέξη σε όλες τις λέξεις του κώδικα και σχηματίζουμε την αντίστοιχη συνομάδα:

C+110011=110011+{000000,
001110,010111,011001,100101,101011,110010,111100}=
={110011, 110001, 100100,101010,010110,011000,000001,001111}

Η λέξη ελαχίστου βάρους είναι η 000001 που αντιστοιχεί και στο ζητούμενο πρότυπο σφάλματος, οπότε η σωστή λέξη είναι

110011+000001=110010

ΕΞ2016Α

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γραμμικός κώδικας C με πίνακα ελέγχου ισοτιμίας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

α). Ο γεννήτορας πίνακας G.

β). i. Η διάσταση και η απόσταση του κώδικα, δηλαδή οι παράμετροι (7, k, d), καθώς και

  ii. Το πλήθος των διαφορετικών συνομάδων του κώδικα.

γ). Να δείξτε ότι η λέξη $s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ δεν είναι κωδική λέξη του γραμμικού κώδικα C

δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

ε) Το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$, η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη $z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

α) Δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας H είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

β). i. Η διάσταση του πίνακα είναι k=4 και η απόστασή του μπορεί να *προσδιορισθεί με τη βοήθεια του πίνακα ελέγχου ισοτιμίας, υπολογίζοντας τον ελάχιστο αριθμό γραμμών του πίνακα των οποίων το άθροισμα είναι 0.*
Οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο αυτό στις γραμμές $1^η$,$4^η$,$6^η$ παρατηρούμε ότι το άθροισμα είναι μηδέν επομένως η ταυτότητα του κώδικα είναι (7,4,3)
ii. Σύμφωνα με το βιβλίο «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης», σελ. 142, το πλήθος των συνομάδων του κώδικα C, διάστασης k=4 και μήκους n=7 ισούται με $2^{7-4} = 8$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη s στον κώδικα C θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.
Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.
Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$

$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζετε και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

Κώδικας Hamming:

_Βλ. αρχείο PLH22_5th_OSS_InfoTheory_Codes_2024_v1 Διαφάνειες 80-86_

Χαρακτηριστικά:

→ Μήκος της μορφής $n = 2^r - 1 \quad r \geq 2$

→ Πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H με όλες τις μη μηδενικές λέξεις μήκους r

→ Διάσταση $k = n - r = 2^r - 1 - r$

→ Απόσταση $d = 3$

→ Ικανότητα διόρθωσης 1 σφάλματος $\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1\right)$

→ Στην ΤΔΑ ο πίνακας συνδρόμων περιλαμβάνει όλες τις γραμμές του H [όλες τις δυνατές λέξεις μήκους r]

· Όριο Hamming.

Αν έχουμε κώδικα C με πλήθος κωδικών λέξεων $|C|$ μήκος κωδικολέξης n και απόσταση $d=2t+1$ ή $d=2t+2$ τότε ισχύει ότι $|C| \cdot \left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{t}\right] \leq 2^n$

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Τέλειοι κώδικες

Αν $d=2t+1$ και ισχύει η ανωτέρω σχέση με το σύμβολο της ισότητας, ο κώδικας είναι <u>τέλειος</u>

Παράδειγμα κώδικα Hamming

$$H = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

← όλες οι δυνατές μη μηδενικές λέξεις 3 bit

$n = 7$

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$k = 4$

$d-1 \leq n-k$ (όριο Singleton)

$d = 3$ (ιδιότητα Hamming)

Πλήθος κωδικολέξεων

$$|C| = 2^k = 2^4$$

Υπολογισμός ορίου Hamming $\quad d = 2\cdot 1 + 1$

$t = 1$

$$|C| \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{t} \right] =$$

$$= 2^4 \cdot \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1} \right] = 2^4 \cdot \left[\frac{7!}{0!\,7!} + \frac{7!}{1!\cdot 6!} \right] =$$

$$= 2^4 \left[1 + 7 \right] = 2^4 \cdot 8 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7 = 2^n.$$

Άρα, <u>τέλειος κώδικας</u>

Πρόσθετα παραδείγματα

ΘΕΜΑ 2/ΓΕ5/2012-13

***Στόχος της άσκησης** είναι η εξοικείωση με έννοιες και αλγόριθμους που εφαρμόζονται σε γραμμικούς κώδικες ελέγχου σφάλματος.*

***Σχετικές ασκήσεις:** Θ3/ΓΕ5/2011-12, Θ4/ΓΕ5/2010-11, Θ4/ΓΕ5/2009-10, Θ5/ΕΞ2009Α και Θ5/ΕΞ2010Β*

Δίνεται κώδικας Hamming μήκους 7 με πίνακα ισοτιμίας τον ακόλουθο:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Να προσδιοριστούν τα α_1, α_2, α_3,

(β). Να βρεθεί ο γεννήτορας πίνακας G.

(γ). Δείξτε ότι η λέξη

$s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

δεν είναι κωδική λέξη του κώδικα.

(δ). Να σχηματίσετε την Τυπική Διάταξη Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ

(ε).Να βρεθούν το σύνδρομο και το πρότυπο σφάλματος που αντιστοιχούν στη ληφθείσα λέξη $r = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

η οποία αποκωδικοποιείται στη συνέχεια στην κωδική λέξη

$$z = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

α). Επειδή ο κώδικας είναι Hamming μήκους n=7, ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H πρέπει να απαρτίζεται από όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3 (βλ. τον ορισμό κώδικα Hamming, σελ. 151 βιβλίου, Ορισμός 4.6) αφού ισχύει

$$n = 2^r - 1 = 7$$

Επομένως η απόστασή του είναι d=3 και η διάστασή του είναι k=4.

Α! τρόπος.

Με απλή παρατήρηση των γραμμών του H βλέπουμε ότι οι παραμετρικές γραμμές αντιστοιχούν στις λέξεις 101 και 110 οπότε, λόγω και της θέσης των παραμέτρων $α_1$, $α_2$, $α_3$ στις παραμετρικές λέξεις θα έχουμε:

$α_1$=0, $α_2$=1, $α_3$=1.

Τελικά ο πίνακας ισοτιμίας του κώδικα διαμορφώνεται ως

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β). Όπως γνωρίζω δεδομένου ότι ο πίνακας ισοτιμίας H είναι 7x3 και της μορφής $H = \begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix}$ με

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο γεννήτορας πίνακας $G = [I \quad M]$ διάστασης 4x7 θα δίνεται ως

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

γ). Γνωρίζω ότι για να ανήκει η λέξη **s** στον κώδικα, θα πρέπει να ισχύει $s \cdot H = 0$ («Θεωρία Πληροφορίας», σελ. 145) και επομένως

$$s \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού το παραπάνω κριτήριο δεν ισχύει, η λέξη s δεν ανήκει στον κώδικα C.

δ). Για το σχηματισμό της ΤΔΑ, πρέπει να βρούμε για κάθε συνομάδα το σύνδρομό της και το πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους, δηλαδή τον οδηγό της συνομάδας.

Δεν είναι όμως απαραίτητο να προσδιορίσουμε κάθε συνομάδα, αρκεί να δοκιμάσουμε τις λέξεις με μικρό βάρος για να οδηγηθούμε στο ζητούμενο.

Πρώτα εξετάζουμε τις λέξεις βάρους 1, δηλαδή τις λέξεις *0000001, 0000010, 0000100, 0001000, 0010000, 0100000 και 1000000:*

$$
\begin{aligned}
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot H &= [0 \quad 0 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 0] \\
[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 1] \\
[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 1 \quad 0] \\
[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [0 \quad 1 \quad 1] \\
[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot H &= [1 \quad 0 \quad 1]
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε λάβει όλα τα δυνατά σύνδρομα αφού το σύνδρομο [0 0 0] συμπεριλαμβάνεται πάντα και επομένως

ΤΔΑ ΓΙΑ ΠΑΜΠ		**ΤΔΑ ΓΙΑ ΑΑΜΠ**	
[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]	[0 0 0 0 0 0 1]	[0 0 1]
[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]	[0 0 0 0 0 1 0]	[0 1 0]
[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]	[0 0 0 0 1 0 0]	[1 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]	[0 0 0 1 0 0 0]	[1 1 1]
[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]	[0 0 1 0 0 0 0]	[1 1 0]
[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]	[0 1 0 0 0 0 0]	[0 1 1]
[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]	[1 0 0 0 0 0 0]	[1 0 1]
[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]	[0 0 0 0 0 0 0]	[0 0 0]

Παρατηρούμε ότι για κώδικες Hamming οι Τυπικές Διατάξεις Αποκωδικοποίησης (ΤΔΑ) για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ "συμπίπτουν"

ε). Για να προσδιορίσουμε το πρότυπο σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε στην αποκωδικοποίηση, θα εφαρμόσω τον τύπο της σελ. 143 του βιβλίου «Θεωρία Πληροφορίας και Κωδικοποίησης»

$$\varepsilon = r + z$$

$$\varepsilon = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] + [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Το πρότυπο αυτό σφάλματος αντιστοιχεί στο σύνδρομο [1 0 1] όπως προσδιορίζεται και από την ΤΔΑ στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 5 ΕΞ2012Β

Δίνονται οι συστηματικοί γραμμικοί κώδικες C1={00000, 10010, 01101, 11111} και C2={000000, 100101, 011010, 111111} και C3= {0000000, 1001011, 0110110, 1111101}. Ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Ο ρυθμός πληροφορίας του κάθε κώδικα,
2. Μια βάση σε μορφή ΠΚΔΓ,
3. Τη διάσταση και την απόσταση καθενός από τους κώδικες C1, C2 και C3.
4. Ο αριθμός των σφαλμάτων που ανιχνεύει και διορθώνει καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.
5. Δείξτε από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν ανιχνεύει και από ένα πρότυπο σφάλματος ελάχιστου βάρους που δεν διορθώνει σωστά καθένας από τους κώδικες C1, C2 και C3.

<u>Απάντηση</u>

1. Αφού όλοι οι κώδικες έχουν 4 κωδικές λέξεις, δηλαδή τα διαφορετικά μηνύματα είναι 4, αρκούν 2 bits για την παράστασή τους. Επομένως, ο ρυθμός πληροφορίας για τον κώδικα C1 είναι 2/5, για τον κώδικα C2 είναι 2/6 και για τον κώδικα C3 είναι 2/7.
2. Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε τις βάσεις των δεδομένων κωδίκων: για τον C1 η βάση είναι {10010, 01101}, για τον C2 {100101, 011010} και για τον C3 {1001011, 0110110}
3. Η διάσταση όλων των κωδίκων είναι 2 και οι αποστάσεις τους 2, 3 και 4, αντίστοιχα διότι είναι οι λέξεις με το ελάχιστο βάρος.
4. Ο κώδικας C1 ανιχνεύει 1 και δεν διορθώνει κανένα σφάλμα, ο κώδικας C2 ανιχνεύει 2 και διορθώνει 1 και C3 ανιχνεύει 3 και διορθώνει 1 σφάλματα.
5. Ο κώδικας C1 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘10010’ γιατί το βάρος του συμπίπτει με την απόσταση και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘10000’ γιατί το βάρος του είναι μικρότερο της απόστασης d-1/2. Ομοίως, ο κώδικας C2 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘100101’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘100001’ , και ο C3 δεν ανιχνεύει το πρότυπο σφάλματος ‘1001011’ και δεν διορθώνει το πρότυπο σφάλματος ‘1000001’.

ΘΕΜΑ 4

ΓΕ5/1314

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις*: Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3-4/ΓΕ5/2008-09, Θ3/ΓΕ5/2010-11, Θ*

Θεωρείστε κωδικοποιητή γραμμικού κώδικα *μπλοκ* ελέγχου ισοτιμίας, C_1, τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ με επταψήφιες κωδικές λέξεις $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, οι οποίες ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

a) $x_1 = u_1$, b) $x_2 = u_2$, c) $x_3 = u_3$, d) $x_4 = u_4$,

e) $x_5 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_4$, f) $x_6 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3$ και g) $x_7 = u_2 \oplus u_3 \oplus u_4$.

Ο κωδικοποιητής χρησιμοποιείται για κωδικοποίηση και μετάδοση δυαδικής πληροφορίας.

Ζητείται:

(α) Να ελέγξετε κατά πόσο ότι ο γραμμικός κώδικας ελέγχου ισοτιμίας είναι συστηματικός.

(β) Να βρείτε τον Γεννήτορα και έναν Πίνακα Ελέγχου Ισοτιμίας του κώδικα.

(γ) Να χαρακτηρίσετε τη δυνατότητα «ανίχνευσης» & «διόρθωσης» λαθών του κώδικα. Επίσης, σχολιάσετε αν ο κώδικας είναι «τέλειος».

(δ) Να σχηματίσετε πίνακες Τυπικής Διάταξης Αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ.

(ε) Να βρείτε για την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης ΠΑΜΠ, πόσοι συνδυασμοί των 1, 2, και 3 σφαλμάτων αποκωδικοποιούνται σωστά.

(στ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος $\varepsilon < ½$ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου.

(α). Επειδή από τις σχέσεις των τετραψήφιων λέξεων πληροφορίας $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ με τις επταψήφιες κωδικές λέξεις $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, έχουμε ότι: 1) $x_1 = u_1$, 2) $x_2 = u_2$, 3) $x_3 = u_3$, 4) $x_4 = u_4$, καθώς και ότι 5) όλα τα ψηφία, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, των κωδικών λέξεων είναι Γραμμικοί Συνδυασμοί των ψηφίων u_1, u_2, u_3, u_4 της πληροφορίας, ο κώδικας είναι Συστηματικός Κώδικας Ελέγχου Ισοτιμίας.

β) Από τις παραπάνω σχέσεις ψηφίων πληροφορίας με ψηφία κωδικών λέξεων, έχουμε ότι ο γεννήτορας πίνακας G και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H είναι:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ) Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας H εμπεριέχει ως σειρές όλες τις δυνατές μη μηδενικές λέξεις μήκους r=3. Άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6 (βλ., σελ. 151 του βιβλίου «Θεωρίας της Πληροφορίας & Κωδικοποίησης) ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming. Επομένως, ο κώδικας είναι «Τέλειος» και έχει «απόσταση» d=3 (βλ. Άσκηση αυτό-αξιολόγησης 4.15). Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 (βλ. σελ. 4.2) είναι σε θέση να ανιχνεύει όλα τα «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 2, καθώς και να διορθώνει κάθε μεμονωμένο σφάλμα ή «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1.

δ) Αφού ο κώδικας είναι Κώδικας Hamming, όλα τα δυνατά «πρότυπα σφάλματος» ε βάρους 1, θα περιέχονται ως οδηγοί των συνομάδων. Τα αντίστοιχα σύνδρομα είναι η γραμμές του Η, όπως πολλαπλασιάζονται με το μοναδικό 1 του οδηγού. Επειδή, οι γραμμές του Η (σύνδρομα) είναι όλες διαφορετικές, οι τυπικές διατάξεις αποκωδικοποίησης του κώδικα για ΠΑΜΠ και ΑΑΜΠ συμπίπτουν και είναι:

ΣΥΝΔΡΟΜΟ				ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ						
0	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**		**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**		**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**		**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

ε) Σύμφωνα με τη τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, αποκωδικοποιούνται χωρίς σφάλμα, ή ο κώδικας έχει τη δυνατότητα διόρθωσης

- **a)** όλων (επτά) των διατάξεων μεμονωμένων σφαλμάτων μετάδοσης,
- **b)** καμίας διάταξης διπλού σφάλματος,
- **c)** καμίας διάταξης τριπλού σφάλματος.

στ) Σύμφωνα με την τυπική διάταξη αποκωδικοποίησης για ΠΑΜΠ, η πιθανότητα σφάλματος, ως συνάρτηση της πιθανότητας σφάλματος ε < ½ του Δυαδικού Συμμετρικού Δίαυλου, είναι:

$$\mathbf{P_I}(\varepsilon) = 1 - (1\text{-}\varepsilon)^7 - 7\varepsilon(1\text{-}\varepsilon)^6$$

Όπου ο όρος $(1\text{-}\varepsilon)^7$ προκύπτει από την διάταξη μηδενικού (0000000) λάθους, και ο όρος $7\varepsilon(1\text{-}\varepsilon)^6$ από τις 7 πλήρως διορθώσιμες διατάξεις μεμονωμένου σφάλματος που υιοθετούνται στη ΤΔΑ για ΠΑΜΠ.

ΘΕΜΑ 6 ΓΕ4/1617

Στόχος της άσκησης *είναι η εξοικείωση με τις βασικές αρχές της θεωρίας κωδικοποίησης και γραμμικών κωδίκων μπλοκ ελέγχου σφάλματος.*

Σχετικές ασκήσεις*: Θ5/ΕΞ2009Α, Θ3/ΓΕ5/2010-11*

Δίδεται ο κώδικας C={ $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$} κάθε κωδική λέξη του οποίου προκύπτει από το προς κωδικοποίηση μήνυμα u={u1, u2, u3, u4} σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$c_1 = u_1 + u_2 + u_4$

$c_2 = u_1 + u_3 + u_4$

$c_3 = u_2 + u_3 + u_4$

$c_4 = u_1$

$c_5 = u_2$

$c_6 = u_3$

$c_7 = u_4$

Ζητείται

α). Το πλήθος των κωδικών λέξεων του συγκεκριμένου κώδικα.

β). Ο ρυθμός πληροφορίας του κώδικα.

γ). Ο γεννήτορας πίνακας **G** και ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας **H** του κώδικα.

δ). Να βρεθεί η κωδικοποίηση του μηνύματος [1001] σύμφωνα με τον παραπάνω κώδικα.

ε). Υποθέστε ότι ο συστηματικός κώδικας εκπέμπεται μέσα από κανάλι και ο δέκτης λαμβάνει τη λέξη **r=[1100001]**, να ελεγχθεί η ύπαρξη σφάλματος στη ληφθείσα λέξη.

Ενδεικτική Μεθοδολογία: *Να υπολογίσετε πρώτα τα βασικά μεγέθη του κώδικα σύμφωνα με τη θεωρία. Επίσης να σχηματισθεί ο γεννήτορας πίνακας σύμφωνα με τη θεωρία και να υπολογισθεί ο πίνακας ισοτιμίας. Επίσης εφαρμόζοντας τις αρχές της κωδικοποίησης να υπολογισθούν τα ερωτήματα (δ) και (ε).*

α). Το πλήθος των κωδικών λέξεων εξαρτάται από το μήκος των αρχικών μηνυμάτων και όχι από το μήκος των κωδικοποιημένων μηνυμάτων, και δίνεται από τι σχέση 2^k , όπου $k=4$ το μήκος του μηνύματος πληροφορίας. Επομένως, το πλήθος των κωδικών λέξεων είναι 16.

β). Ο ρυθμός πληροφορίας κάθε κώδικα δίνεται από τη σχέση

$$R=\frac{k}{n}$$

Δεδομένου ότι $k=4$ και $n=7$ ο ρυθμός πληροφορίας είναι

$$R=\frac{k}{n}=\frac{4}{7}=0.57$$

γ). Για να υπολογίσω τον πίνακα γεννήτορα G και τον πίνακα ελέγχου ισοτιμίας H, θα πρέπει να σχηματίσω τον πίνακα M.

Παρατηρώντας τις μαθηματικές εκφράσεις, ο πίνακας γεννήτορας G διαστάσεων [4 x 7] θα είναι της μορφής [M I] και όχι όπως συνήθως [I M] καθότι τα ψηφία πληροφορίας καταλαμβάνουν τις 4 τελευταίες θέσεις της κάθε κωδικής λέξης.

Ο πίνακας M είναι διαστάσεων [4 x 3] και ο μοναδιαίος I είναι [4 x 4]

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Επομένως

$$G=\begin{bmatrix}M & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M & \begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ο Πίνακας Ισοτιμίας δίνεται ως [I M] και όχι ως [M I]

$$H=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

δ) Η κωδικοποίηση του μηνύματος δίνεται από

$$C=u\cdot G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ε). Δεδομένου ότι λήφθηκε το κωδικοποιημένο μήνυμα r=[1100001], για την αποκωδικοποίηση θα έχουμε

$$y=r.H=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Επομένως υπάρχει σφάλμα.

Ενδεικτικό Τυπολόγιο – Στοιχεία Μεθοδολογίας

Κώδικες Διόρθωσης Σφαλμάτων

Γραμμικός κώδικας $\mathbb{C}\{n, k, d\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_M\}$

→ απόσταση: ελάχιστο βάρος κωδικολέξεων

→ διάσταση κώδικα: αριθμός data bits / κωδικολέξη

→ αριθμός bits / κωδικολέξη (σύνολο data + parity bits)

Συστηματικός: $\begin{cases} k \text{ data bits} \\ n-k \text{ parity bits} \end{cases}$

Πλήθος κωδικολέξεων $M = 2^k$

Ρυθμός πληροφορίας $r = \dfrac{k}{n}$

Ικανότητα διόρθωσης σφαλμάτων: $\left\lfloor \dfrac{d-1}{2} \right\rfloor$ bits ανά κωδικολέξη.

-"- ανίχνευσης -"- $(d-1)$ bits ανά κωδικολέξη.

Συνομάδα κώδικα: ταυτόχρονη Μετατόπιση όλων των κωδικολέξεων

π.χ. $\mathbb{C} + c_0 = \{c_1 + c_0, c_2 + c_0, \ldots, c_M + c_0\}$

Πλήθος διαφορετικών συνομάδων: 2^{n-k}.

Βάση Κώδικα: Γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του κώδικα που το ανάπτυγμα του παράγει όλες τις κωδικολέξεις

ΓΕ5/2021/Θ1,2,3

ΕΞ2020Β/Θ2

ΓΕ5/1819/Θ1,2,3

ΓΕ5/1920/Θ1,2,3

ΕΞ2018Α/Θ1

ΕΞ2019Α/Θ3

Ασκήσεις

ΓΕ4/1718/Θ1,3,6,7

ΕΞ2017Α/Θ4

ΕΞ2016Α/Θ2

ΕΞ2015Β/Θ6

Γεννήτορας πίνακας $G_{k\times n} = \left[I_k \,\vdots\, M_{k,(n-k)} \right]$ ← γραμμές: 1 βάση του C

Πίνακας Ισοτιμίας $H_{n\times(n-k)} = \begin{bmatrix} M_{k,(n-k)} \\ \hdashline I_{n-k} \end{bmatrix}$ ← στήλες βάση Δυϊκού Κώδικα $C^{\perp}(n, n-k)$

Κωδικοποίηση: Μήνυμα(k bits) · G = κωδικολέξη (n bits)

Αποκωδικοποίηση: Κωδικολέξη (n bits) . H = σύνδρομο (n-k bits)

↑

αν είναι μηδενικό κωδικολέξη $\in C$ (δεν υπάρχει σφάλμα)

Πίνακας ΤΔΑ.

→ ορισμός προτύπων ελαχίστων σφαλμάτων y (καταρχήν 1 bit)

→ Υπολογισμός συνδρόμων $y \cdot H$.

→ Αν δεν έχουν υπολογιστεί όλα τα δυνατά 2^{n-k} σύνδρομα, αναζήτηση επιπλέον προτύπων σφάλματος 2 bit

Αποκωδικοποίηση ληφθείσας λέξης C_o

Ⓐ Με ΤΔΑ.

Υπολογισμός συνδρόμου $h_r = C_o H$.

- Αν $h_r = 0$, δεν υπάρχει σφάλμα → λήψη data bits της C_o
- Αν $h_r \neq 0$, αντιστοίχηση στον πίνακα ΤΔΑ του h_r στο αντίστοιχο πρότυπο σφάλματος y_r

Αν υπάρχουν περισσότερα από 1 πιθανά y_r, τότε

→ τυχαία επιλογή ενός y_r (ΠΑΜΠ)

→ απόρριψη κωδικολέξης, αίτημα για επανεκπομπή (ΑΑΜΠ)

Σωστή λέξη: $C_o + y_r$

(B) Με συνομάδες:

Υπολογισμός συνομάδας $\mathcal{C} + C_0 = \{C_1 + C_0, C_2 + C_0, \ldots, C_M + C_0\}$

Εύρεση στοιχείου του $\mathcal{C} + C_0$ με το ελάχιστο βάρος → ζητούμενο πρότυπο σφάλματος y_r

Αν υπάρχουν περισσότερα από 1 y_r, ίδια διαδικασία με την ΤΔΑ (ΠΑΜΠ, ΑΑΜΠ)

Σωστή λέξη: $C_0 + y_r$

— Κώδικες Hamming

- Μήκος $n = 2^r - 1$ $r \geq 2$
- Διάσταση $k = n - r = 2^r - 1 - r$
- Απόσταση $d = 3$
- Διόρθωση $\frac{d-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ σφάλματος
- ο πίνακας H περιλαμβάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς r bits

(το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα συνδρόμων της ΤΔΑ για πρότυπα σφάλματος 1 bit)

Εύρεση G.

Α) Αν δίνονται όλες οι κωδικολέξεις (πλήθος λέξεων M)
→ προσδιορισμός $k = \log_2(M)$
→ Σχηματισμός G από τις λέξεις του κώδικα με σκοπό την κατασκευή του I_k

Β) Αν δίνεται υποσύνολο των κωδικολέξεων
Με γραμμοπράξεις για να καταλήξουμε σε μορφή ΠΚΔΓ → πίνακας G

Γ) Αν δίνεται ο πίνακας $H = \begin{bmatrix} M_{k,n-k} \\ \hline I_{n-k} \end{bmatrix}$

- Αναγνώριση του μοναδιαίου I_{n-k} (στο κάτω μέρος του H)
- Λήψη του πίνακα $M_{k,n-k}$
- Κατασκευή $G_{k,n} = \left[I_k \mid M_{k,n-k} \right]$

Υπολογισμός απόστασης

Α) Αν δίνονται όλες οι κωδικολέξεις → ελάχιστο βάρος λέξης

Β) Αν δίνεται ο H: Δοκιμή για την εύρεση 2, 3, 4, …, d γραμμικά εξαρτημένων γραμμών του H (με άθροισμα 0)
[όριο Singleton: $d-1 \le n-k$]

Ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης

Δίδεται ο πίνακας ισοτιμίας Η:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ποια από τις παρακάτω λέξεις θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός συνομάδας που να αντιστοιχεί στο σύνδρομο [111];

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 000111
- B. 001001
- C. Καμμία
- D. 001000

Δίδεται ο γραμμικός συστηματικός κώδικας C με το σύνολο των κωδικών λέξεων;

Κωδικές Λέξεις C							
c0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
c1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
c2	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
c3	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
c4	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
c5	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
c6	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
c7	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
c8	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
c9	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
c10	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
c11	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
c12	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
c13	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
c14	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
c15	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Ποια είναι η διάσταση k του κώδικα C;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. k=4
- B. k=5
- C. k=2
- D. k=3

Δίνεται ο γραμμικός κώδικα C(n=5,k=3,d=2).

Ποια από τις παρακάτω δεν μπορεί να είναι λέξη του κώδικα C;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. 00001
- b. 10011
- c. 00000
- d. 11100

Δίνεται ο γραμμικός συστηματικός κώδικας C, με κωδικές λέξεις

Κωδικές Λέξεις C						
c_0	0	0	0	0	0	0
c_1	0	0	1	1	1	0
c_2	0	1	0	1	0	1
c_3	0	1	1	0	1	1
c_4	1	0	0	0	1	1
c_5	1	0	1	1	0	1
c_6	1	1	0	1	1	0
c_7	1	1	1	0	0	0

Ποιο ζεύγος λέξεων από τα παρακάτω αποτελείται από λέξεις οι οποίες ανήκουν στην ίδια συνομάδα;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. (111110 , 100000)
- b. (110000 , 000110)
- c. (100101 , 000101)
- d. (011101 , 000000)

Εάν ένας γραμμικός Κώδικας C έχει δυνατότητα ανίχνευσης 2 λαθών, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από “1” που μπορεί να έχει μία κωδική του λέξη;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 1
- B. 3
- C. 5
- D. 2

Δίνεται ο συστηματικός γραμμικός κώδικας C

Κώδικας C
0000 0000
0001 1011
0010 0111
0011 1100
0100 1101
0101 0110
0110 1010
0111 0001
1000 1110
1001 0101
1010 1001
1011 0010
1100 0011
1101 1000
1110 0100
1111 1111

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός των γραμμών του πίνακα ισοτιμίας H που το άθροισμά τους είναι 0;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 4
- B. 5
- C. 3
- D. 2

Δίνεται το υποσύνολο S={0110010, 1001101}. Πόσα λάθη διορθώνει ο κώδικας που προκύπτει από το γραμμικό ανάπτυγμα <S> του υποσυνόλου S;

Επιλέξτε μια απάντηση:

- A. 2
- B. 0
- C. 3
- D. 1

Δίνεται ο γραμμικός κώδικας $\{000000, 101010, 010101, 111111\}$. Ο κώδικας αυτός ανιχνεύει:

Επιλέξτε μια απάντηση:

- a. 1 λάθος
- b. 2 λάθη
- c. Κανένα λάθος
- d. 3 λάθη

Ερωτήσεις